CAPíTULO 1

Vetores e tensores

1.1. Notação indicial

A notação indicial é uma simplificação da notação de uma somatória. Por exemplo, seja a somatória de 3 monômios $a_i\, b_i$ (a_i multiplicado por b_i) com o índice i variando de 1 a 3:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i\, b_i = a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + a_3\, b_3 \tag{1.1}$$

Em notação indicial esta somatória se escreve simplesmente:

$$a_i\, b_i = a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + a_3\, b_3, \quad i = 1, 2, 3 \tag{1.2}$$

Na notação indicial subentende-se que o(s) índice(s) varia(m) de 1 a 3, ou seja, pode-se simplesmente omitir $i = 1, 2, 3$ no final da expressão:

$$a_i\, b_i = a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + a_3\, b_3 \tag{1.3}$$

Esta última expressão é que melhor exprime a notação indicial, pois é a forma mais simplificada de representar a somatória entre as três possibilidades acima.

Veja-se um outro exemplo:

$$\sum_{j=1}^{3} T_{ij}\, b_j = T_{i1}\, b_1 + T_{i2}\, b_2 + T_{i3}\, b_3 \tag{1.4}$$

Agora existem dois índices, i e j, ambos variando de 1 a 3. O primeiro será chamado *índice livre* e o segundo *índice mudo*. O índice mudo (neste exemplo j) é o que perfaz a somatória e se repete uma única vez no monômio. O índice livre (neste exemplo, i) não se repete no monômio. Na notação indicial, o(s) índice(s) não repetido(s) é(são) denominado(s) índice(s) livre(s) e o(s) repetido(s) *uma única vez* é(são) denominados índice(s) mudo(s). No exemplo anterior, o resultado da somatória poderia ser denotado, seguindo a notação indicial, como:

$$a_i = T_{ij}\, b_j \tag{1.5}$$

O coeficiente a_i é resultado da somatória $T_{ij}\, b_j$ para i igual a 1, 2 ou 3. Nesta última expressão o índice livre i aparece nos dois membros. No exemplo a seguir há dois índices mudos, significando que há duas somatórias, uma no índice mudo i e outra no j:

$$\begin{aligned} T_{ij}\, S_{ij} &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} T_{ij}\, S_{ij} \\ &= T_{11}\, S_{11} + T_{12}\, S_{12} + T_{13}\, S_{13} + T_{21}\, S_{21} + T_{22}\, S_{22} + T_{23}\, S_{23} + T_{31}\, S_{31} + T_{33}\, S_{32} + T_{32}\, S_{33} \end{aligned} \tag{1.6}$$

Observe-se que não existe nenhum índice livre na notação indicial acima. Portanto, não pode ser atribuído nenhum índice ao resultado desta somatória, como no exemplo anterior.

1.2. Representação de vetores

Uma base ortonormal de vetores $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\} = \{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{1}, \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{2}, \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{3}\}$ é aquela em que os três vetores são ortogonais entre si e têm módulo unitário. A base ainda é dita definida positiva se são verificadas as seguintes relações entre os elementos da base:

$$\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{1} \times \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{2} = \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{3}$$
$$\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{2} \times \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{3} = \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{1}$$
$$\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{3} \times \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{1} = \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{2}$$

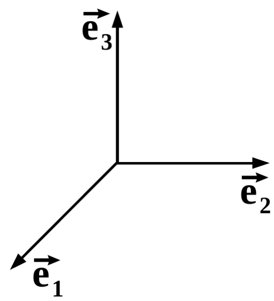


FIGURA 1.1. Base ortonormal de vetores definida positiva.

Esta base ainda verifica a propriedade *delta de Kronecker* (δ_{ij}):

$$\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

De agora em diante esta base de vetores será denotada simplesmente por $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$.

Um vetor $\vec{\mathbf{v}}$ pode ser representado numa base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$. As componentes de $\vec{\mathbf{v}}$ nas três direções da base são:

$$v_1 = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{1} = \|\vec{\mathbf{v}}\| \cos(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{1}) \tag{1.7}$$
$$v_2 = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{2} = \|\vec{\mathbf{v}}\| \cos(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{2}) \tag{1.8}$$
$$v_3 = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{3} = \|\vec{\mathbf{v}}\| \cos(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{3}) \tag{1.9}$$

onde $\|\vec{\mathbf{v}}\|$ denota o módulo de $\vec{\mathbf{v}}$, $(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i})$ e $\cos(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i})$ são o ângulo diretor e o cosseno diretor, respectivamente, entre $\vec{\mathbf{v}}$ e o elemento $\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}$ da base.

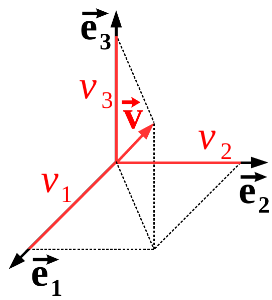


FIGURA 1.2. Componentes do vetor $\vec{\mathbf{v}}$ na base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$.

Em notação indicial, um vetor pode ser representado na base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$ como:

$$\vec{\mathbf{v}} = v_i\, \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} = v_1\, \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{1} + v_2\, \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{2} + v_3\, \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{3}$$

1.2.1. Módulo de um vetor. O módulo de um vetor $\vec{\mathbf{v}}$ é por definição o seu comprimento. Na representação na base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$ o módulo se escreve:

$$\|\vec{\mathbf{v}}\|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

ou em notação indicial:

$$\|\vec{\mathbf{v}}\|^2 = v_i\, v_i$$

1.2.2. Produto escalar entre vetores. O produto escalar entre dois vetores quaisquer, $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{u}}$, é por definição o escalar (o número):

$$\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{u}} = \|\vec{\mathbf{v}}\| \|\vec{\mathbf{u}}\| \cos(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{u}})$$

Na representação na base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$, o produto escalar entre estes dois vetores se escreve:

$$\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{u}} = (v_i\, \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}) \cdot (u_j\, \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j}) = v_i\, u_j\, \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j} = v_i\, u_j\, \delta_{ij} = v_i\, u_i$$

O módulo de um vetor pode então ser escrito como:

$$\|\vec{\mathbf{v}}\|^2 = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = v_i\, v_i$$

A componente de um vetor na base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$ pode ser obtida por meio do seguinte procedimento. Seja o vetor $\vec{\mathbf{v}} = v_j\, \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j}$. Multiplicando escalarmente $\vec{\mathbf{v}}$ com um elemento qualquer da base, $\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}$, obtém-se:

$$\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} = v_j\, \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} = v_j\, \delta_{ji} = v_i$$

Portanto, a componente v_i do vetor $\vec{\mathbf{v}}$ obtém-se pelo produto escalar entre $\vec{\mathbf{v}}$ e o elemento $\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}$ da base.

1.2.3. O símbolo de permutação ϵ. O símbolo de permutação ϵ é empregado, por exemplo, na representação do produto externo entre dois vetores por meio da notação indicial. Ele é definido da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1\\
&\epsilon_{321} = \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = -1\\
&\epsilon_{111} = \epsilon_{112} = \epsilon_{113} = \epsilon_{121} = \epsilon_{122} = \cdots = \epsilon_{322} = \epsilon_{323} = \epsilon_{332} = \epsilon_{333} = 0
\end{aligned}$$

Como é difícil memorizar todas as possibilidades, a dica é:

(1) para índices repetidos o símbolo de permutação é nulo;
(2) para índices não repetidos e na sequência anti-horária $(\cdots, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \cdots)$ o símbolo de permutação é igual a 1 (Fig. 1.3 à esquerda);
(3) para índices não repetidos e na sequência horária $(\cdots, 3, 2, 1, 3, 2, 1, \cdots)$ o símbolo de permutação é igual a -1 (Fig. 1.3 à direita).

ou ainda:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, \text{ se } i, j, k \text{ é uma permutação par de } 1, 2, 3\\ -1, \text{ se } i, j, k \text{ é uma permutação ímpar de } 1, 2, 3\\ 0 \text{ do contrário} \end{cases}$$

A seguinte propriedade é importante para operações com o índice de permutação:

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij} = -\epsilon_{kji} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ikj}$$

Para memorizar estas relações, a dica é:

(1) se os símbolos de permutação comparados têm sequências de índices horária e horária ou anti-horária e anti-horária, então eles são iguais (Fig. 1.4 à esquerda);
(2) se os símbolos de permutação comparados têm sequências de índices horária e anti-horária ou anti-horária e horária, então eles são opostos (Fig. 1.4 à direita).

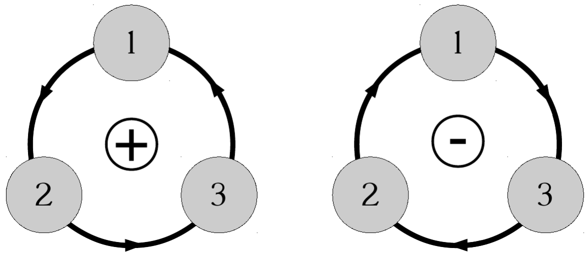


FIGURA 1.3. Sequência anti-horária (esquerda) e horária (direita) dos índices do símbolo de permutação.

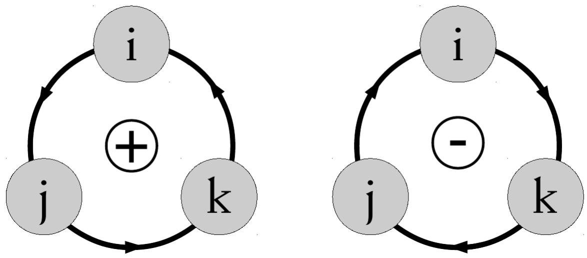


FIGURA 1.4. Sequência anti-horária (esquerda) e horária (direita) dos índices do símbolo de permutação.

Um resultado útil, relacionando o símbolo de permutação e o delta de Kronecker, é:

$$\epsilon_{ijm}\,\epsilon_{klm} = \delta_{ik}\,\delta_{jl} - \delta_{il}\,\delta_{jk}$$

1.2.4. Produto externo entre vetores. Uma vez apresentado o símbolo de permutação, chegou o momento de aplicá-lo na obtenção do produto externo entre dois vetores. Antes, porém, convém recordar que o produto externo entre dois vetores, $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{u}}$, é um vetor perpendicular a ambos vetores, de módulo $\|\vec{\mathbf{v}}\|\|\vec{\mathbf{u}}\|\ \mathrm{sen}\,(\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{u}})$ e sentido dado pela regra da mão direita ou do saca-rolha. O resultado do produto desses dois vetores expresso na base $\{\vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{i}}\}$ é definido como:

$$\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{u}} = \epsilon_{ijk}\,v_i\,u_j\,\vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}$$

Um resultado importante decorre da definição acima, e será deduzido a seguir. Seja o produto externo entre dois vetores quaisquer, $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{u}}$:

$$\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{u}} = (v_i\,\vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{i}}) \times (u_j\,\vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{j}}) = v_i\,u_j\,\vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{i}} \times \vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{j}}$$

Como visto na definição, este produto é igual $v_i\,u_j\,\epsilon_{ijk}\,\vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}$. Logo, ao comparar as duas equações acima:

$$v_i\,u_j\,(\vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{i}} \times \vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{j}} - \epsilon_{ijk}\,\vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}) = \vec{0}$$

Como esta última igualdade vale para quaisquer dois vetores $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{u}}$, conclui-se que o termo entre parênteses nesta equação é nulo, ou seja:

$$\vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{i}} \times \vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{j}} = \epsilon_{ijk}\,\vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}$$

Este resultado resume a Eq. 1.7, cuja verificação fica como exercício.

1.3. Tensores

No estudo da mecânica dos sólidos é preciso trabalhar com tensões e deformações. Uma ferramenta matemática que facilita a análise de tensões e deformações no sólido são os tensores. A seguir serão definidos os tensores, as suas componentes na base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$ e algumas propriedades.

1.3.1. Definição de tensor. Tensor é um operador linear, $\mathbf{T}$, que relaciona um vetor qualquer $\vec{\mathbf{v}}$ a um único vetor $\vec{\mathbf{u}} = \mathbf{T}\,\vec{\mathbf{v}}$. Decorre de sua linearidade que:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(\alpha\vec{\mathbf{v}}) &= \alpha\mathbf{T}\vec{\mathbf{v}}\\ \mathbf{T}(\vec{\mathbf{v}}+\vec{\mathbf{u}}) &= \mathbf{T}\vec{\mathbf{v}}+\mathbf{T}\vec{\mathbf{u}}\\ \mathbf{T}(\alpha\vec{\mathbf{v}}+\beta\vec{\mathbf{u}}) &= \alpha\mathbf{T}\vec{\mathbf{v}}+\beta\mathbf{T}\vec{\mathbf{u}}\end{aligned}$$

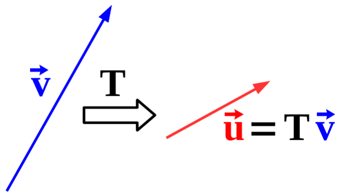


FIGURA 1.5. Ilustração da definição de tensor.

1.3.2. Componentes de um tensor. Considere um tensor $\mathbf{T}$ e a base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$. Ao aplicar $\mathbf{T}$ a cada um dos elementos de $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$, obtêm-se três vetores, genericamente expressos por $\vec{\mathbf{t}}_i = \mathbf{T}\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}$. Cada um destes três vetores tem componentes em $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$ dadas genericamente por:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{t}}_1 &= \mathbf{T}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{1} = T_{11}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{1} + T_{21}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{2} + T_{31}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{3} = T_{j1}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j}\\ \vec{\mathbf{t}}_2 &= \mathbf{T}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{2} = T_{12}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{1} + T_{22}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{2} + T_{32}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{3} = T_{j2}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j}\\ \vec{\mathbf{t}}_3 &= \mathbf{T}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{3} = T_{13}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{1} + T_{23}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{2} + T_{33}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{3} = T_{j3}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j}\end{aligned}$$

Os coeficientes $T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{21}, \cdots, T_{32}, T_{33}$ são as componentes de $\mathbf{T}$ na base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$. Portanto, são 9 o número de componentes de um tensor.

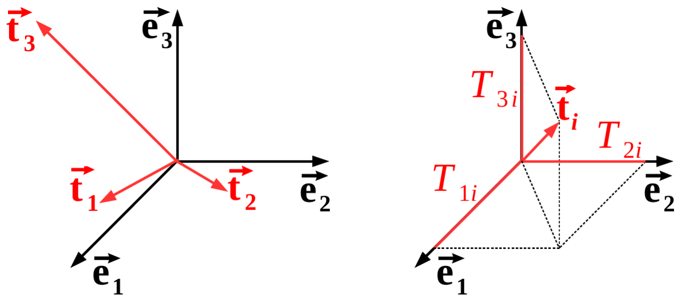


FIGURA 1.6. Vetores associados a cada vetor da base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$ (esquerda) e componentes do vetor $\mathbf{T}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} = \vec{\mathbf{t}}_i$ (direita).

A componente T_{ij} do tensor $\mathbf{T}$ é obtida por $\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\cdot\mathbf{T}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j}$, cuja prova é feita a seguir.

$$\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\cdot\mathbf{T}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j} = \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\cdot T_{kj}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{k} = T_{kj}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\cdot\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{k} = T_{kj}\,\delta_{ik} = T_{ij}$$

Como definido, um tensor associa o vetor $\mathbf{T}\,\vec{\mathbf{v}}$ ao vetor $\vec{\mathbf{v}}$. Convém agora examinar as componentes de $\mathbf{T}\,\vec{\mathbf{v}}$ na base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$ supondo conhecidas as componentes de $\mathbf{T}$ e $\vec{\mathbf{v}}$ nessa mesma base.

$$\mathbf{T}\,\vec{\mathbf{v}} = \mathbf{T}(v_j\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j}) = v_j\,\mathbf{T}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j} = v_j\,T_{ij}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} = T_{ij}\,v_j\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}$$

De onde se conclui que as componentes de $\mathbf{T}\,\vec{\mathbf{v}}$ são iguais a $T_{ij}\,v_j$.

Este último resultado sugere representar as componentes de um vetor em forma matricial. A matriz de componentes de um vetor $\vec{\mathbf{v}}$ sendo dada por uma matriz coluna {v}:

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

e a de componentes de um tensor $\mathbf{T}$ por uma matriz quadrada [T]:

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

de tal modo que as componentes do vetor $\vec{\mathbf{u}} = \mathbf{T}\,\vec{\mathbf{v}}$ são dadas pelo produto matricial $\{\mathrm{u}\} = [\mathrm{T}]\,\{\mathrm{v}\}$:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

Observe que as colunas da matriz de componentes do tensor são as componentes dos vetores $\mathbf{T}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{1}$, $\mathbf{T}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{2}$ e $\mathbf{T}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{3}$, respectivamente.

1.3.3. Soma de tensores. O resultado da soma de dois tensores, $\mathbf{T}$ e $\mathbf{S}$, é por definição o tensor $\mathbf{W} = \mathbf{T} + \mathbf{S}$ que verifica $\mathbf{W}\vec{\mathbf{v}} = (\mathbf{T} + \mathbf{S})\vec{\mathbf{v}} = \mathbf{T}\vec{\mathbf{v}} + \mathbf{S}\vec{\mathbf{v}}$, para qualquer vetor $\vec{\mathbf{v}}$. Suas componentes na base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$ são $W_{ij} = T_{ij} + S_{ij}$, como se demonstra a seguir.

$$\mathbf{W}\vec{\mathbf{v}} = \mathbf{T}\vec{\mathbf{v}} + \mathbf{S}\vec{\mathbf{v}} = T_{ij}\,v_j\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} + S_{ij}\,v_j\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} = (T_{ij} + S_{ij})\,v_j\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} = W_{ij}\,v_j\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}$$

Logo, W_{ij} deve ser igual a $T_{ij} + S_{ij}$ para que a última igualdade se verifique para qualquer vetor $\vec{\mathbf{v}}$.

Matricialmente a soma de dois tensores, $\mathbf{T}$ e $\mathbf{S}$, é dada pela soma das matrizes de tensores, ou seja, $[\mathrm{T}] + [\mathrm{S}]$.

A soma entre tensores é comutativa:

$$\mathbf{T} + \mathbf{S} = \mathbf{S} + \mathbf{T}$$

e associativa:

$$(\mathbf{R} + \mathbf{S}) + \mathbf{T} = \mathbf{R} + (\mathbf{S} + \mathbf{T})$$

1.3.4. Produto de tensores. O resultado do produto de dois tensores, $\mathbf{T}$ e $\mathbf{S}$, é por definição o tensor $\mathbf{TS}$ que verifica $(\mathbf{TS})\vec{\mathbf{v}} = \mathbf{T}(\mathbf{S}\vec{\mathbf{v}})$, para qualquer vetor $\vec{\mathbf{v}}$. Suas componentes na base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$ são $(TS)_{ij} = T_{il}\,S_{lj}$, como se demonstra a seguir.

$$\begin{aligned}(\mathbf{TS})\,\vec{\mathbf{v}} &= \mathbf{T}(\mathbf{S}\vec{\mathbf{v}}) = \mathbf{T}(S_{lj}\,v_j\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{l}) = S_{lj}\,v_j\,\mathbf{T}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{l} = S_{lj}\,v_j\,T_{il}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} = \\ &= T_{il}\,S_{lj}\,v_j\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} = (TS)_{ij} v_j\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\end{aligned}$$

Logo, $(TS)_{ij}$ deve ser igual a $T_{il}S_{lj}$ para que a última igualdade se verifique para qualquer vetor $\vec{\mathbf{v}}$.

Matricialmente o produto de dois tensores é dado pelo produto matricial $[\mathrm{T}]\,[\mathrm{S}]$.

O produto de tensores é associativo:

$$(\mathbf{RS})\mathbf{T} = \mathbf{R}(\mathbf{ST})$$

é distributivo:

$$\mathbf{R}(\mathbf{S} + \mathbf{T}) = \mathbf{RS} + \mathbf{RT}$$

mas não é comutativo, ou seja, *em geral*:

$$\mathbf{TS} \neq \mathbf{ST}$$

1.3.5. O tensor identidade. O tensor identidade é aquele que para todo e qualquer vetor $\vec{\mathbf{v}}$ o próprio vetor $\vec{\mathbf{v}}$, ou seja, $\mathbf{I}\,\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}$. Suas componentes na base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$ são facilmente obtidas tendo em conta que as colunas da matriz de componentes são as componentes do vetor $\mathbf{I}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} = \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}$. Portanto, a matriz de componentes do tensor identidade na base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$ é a matriz identidade:

$$[\mathrm{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Uma propriedade facilmente demonstrável é:

$$\mathbf{T}\,\mathbf{I} = \mathbf{I}\,\mathbf{T} = \mathbf{T}$$

para qualquer tensor $\mathbf{T}$.

1.3.6. O tensor inverso. O tensor inverso de um tensor $\mathbf{T}$, $\mathbf{T^{-1}}$, é por definição aquele que verifica $\mathbf{T}\,\mathbf{T^{-1}} = \mathbf{T^{-1}}\,\mathbf{T} = \mathbf{I}$, ou, matricialmente, $[\mathrm{T}]\,[\mathrm{T}]^{-1} = [\mathrm{T}]^{-1}\,[\mathrm{T}] = [\mathrm{I}]$.

Observe que se $\vec{\mathbf{u}} = \mathbf{T}\,\vec{\mathbf{v}}$, então $\mathbf{T^{-1}}\,\vec{\mathbf{u}} = \mathbf{T^{-1}}\,\mathbf{T}\,\vec{\mathbf{v}} = \mathbf{I}\,\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}$, ou seja, o tensor $\mathbf{T^{-1}}$ leva o vetor $\mathbf{T}\,\vec{\mathbf{v}}$ ao próprio vetor $\vec{\mathbf{v}}$.

As componentes do tensor $\mathbf{T}$ na base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$ são os coeficientes da matriz inversa de $\mathbf{T}$, isto é, de $[\mathrm{T}]^{-1}$.

1.3.7. O tensor transposto. O tensor transposto de um tensor $\mathbf{T}$ qualquer é $\mathbf{T^T}$ que, por definição, verifica $\vec{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{T}\,\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{T^T}\,\vec{\mathbf{u}}$, para quaisquer vetores $\vec{\mathbf{u}}$ e $\vec{\mathbf{v}}$.

Se as componentes de $\mathbf{T}$ na base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$ são T_{ij}, então as de $\mathbf{T^T}$ são T_{ji}, como se demonstra a seguir. Como visto, as componentes de $\mathbf{T^T}$ na base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$ são dadas pelo produto escalar $\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \cdot \mathbf{T^T}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j}$, que pela definição de tensor transposto é igual a $\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j} \cdot \mathbf{T}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} = T_{ji}$.

Matricialmente, a matriz do tensor transposto é a matriz transposta do tensor, ou seja:

$$[\mathrm{T^T}] = [\mathrm{T}]^T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix}$$

1.3.8. Os tensores simétrico e antissimétrico. Todo e qualquer tensor $\mathbf{T}$ pode ser decomposto num tensor simétrico, $\mathbf{S} = \dfrac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T^T})$, e num antissimétrico, $\mathbf{A} = \dfrac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T^T})$, e esta decomposição é *única*:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T^T}) + \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T^T}) = \mathbf{S} + \mathbf{A}$$

Suas componentes são:

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji})$$
$$A_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$$

Portanto, num tensor simétrico tem-se $S_{ij} = S_{ji}$ e num antissimétrico $A_{ij} = -A_{ji}$ e, consequentemente, $A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0$.

A matriz do tensor simétrico de $\mathbf{T}$ é, portanto:

$$[\mathrm{S}] = \frac{1}{2}([\mathrm{T}] + [\mathrm{T}]^T)$$
$$= \begin{bmatrix} T_{11} & \frac{1}{2}(T_{12}+T_{21}) & \frac{1}{2}(T_{13}+T_{31}) \\ \frac{1}{2}(T_{21}+T_{12}) & T_{22} & \frac{1}{2}(T_{23}+T_{32}) \\ \frac{1}{2}(T_{31}+T_{13}) & \frac{1}{2}(T_{32}+T_{23}) & T_{33} \end{bmatrix}$$

e a do tensor antissimétrico:

$$[\mathrm{A}] = \frac{1}{2}([\mathrm{T}] - [\mathrm{T}]^T)$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(T_{12}-T_{21}) & \frac{1}{2}(T_{13}-T_{31}) \\ \frac{1}{2}(T_{21}-T_{12}) & 0 & \frac{1}{2}(T_{23}-T_{32}) \\ \frac{1}{2}(T_{31}-T_{13}) & \frac{1}{2}(T_{32}-T_{23}) & 0 \end{bmatrix}$$

1.3.9. O vetor dual de um tensor antissimétrico. O vetor dual, $\vec{\mathbf{a}}$, de um tensor antissimétrico é aquele que verifica $\mathbf{A}\,\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{v}}$ para todo vetor $\vec{\mathbf{v}}$. Suas componentes podem ser obtidas a partir da própria definição:

$$\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j} \cdot \mathbf{A}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{k} = \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j} \cdot (\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{k}) = \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j} \cdot (a_l\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{l} \times \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{k}) = a_l\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j} \cdot (\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{l} \times \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{k})$$
$$= \epsilon_{lkm}\,a_l\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{m} = \epsilon_{lkm}\,a_l\,\delta_{jm} = \epsilon_{lkj}\,a_l = -\epsilon_{jkl}\,a_l$$

Multiplicando a equação acima por ϵ_{jki} obtém-se:

$$\epsilon_{jki}A_{jk} = -\epsilon_{jki}\,\epsilon_{jkl}\,a_l = -\epsilon_{ikj}\,\epsilon_{lkj}\,a_l = -2\,\delta_{il}\,a_l = -2a_i$$

Permutando nesta última equação os índices do símbolo de permutação obtém-se, finalmente:

$$a_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}A_{jk}$$

ou seja, as componentes do vetor dual do tensor antissimétrico $\mathbf{A}$ na base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$.

Pode-se observar a partir da definição do vetor dual que o tensor antissimétrico $\mathbf{A}$ leva qualquer vetor $\vec{\mathbf{v}}$ a um outro vetor, $\mathbf{A}\,\vec{\mathbf{v}}$, ortogonal a seu vetor dual $\vec{\mathbf{a}}$.

1.3.10. O produto diádico de dois vetores. O produto diádico de dois vetores, $\vec{\mathbf{a}}$ e $\vec{\mathbf{b}}$, é um tensor $\mathbf{ab}$ que verifica para qualquer $\vec{\mathbf{v}}$ a identidade $\mathbf{ab}\,\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{a}}\,(\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{v}})$. Pela definição o tensor $\mathbf{ab}$ associa a qualquer vetor um outro vetor na direção do vetor $\vec{\mathbf{a}}$. Suas componentes são $ab_{ij} = a_i\,b_j$, como se deduz a seguir:

$$ab_{ij} = \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \cdot \mathbf{ab}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j} = \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \cdot \vec{\mathbf{a}}\,(\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j}) = \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \cdot a_k\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{k}\,b_j = a_k\,b_j\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{k} = a_k\,b_j\,\delta_{kj} = a_i\,b_j$$

Matricialmente:

$$[\mathrm{ab}] = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{Bmatrix}$$

Um caso importante é o do produto diádico entre os elementos da base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$:

$$[\mathrm{e_1e_1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad [\mathrm{e_1e_2}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \cdots [\mathrm{e_3e_3}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

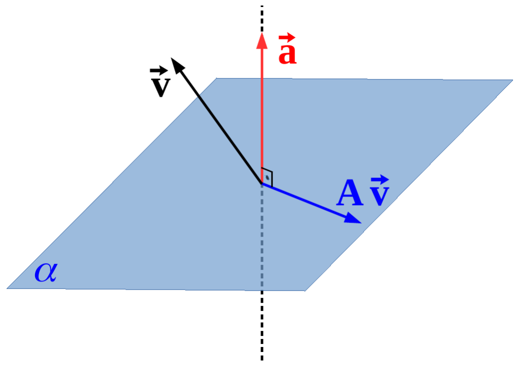


FIGURA 1.7. Vetor dual $\vec{\mathbf{a}}$ do tensor antissimétrico $\mathbf{A}$. Plano α ortogonal ao vetor dual. Para qualquer vetor $\vec{\mathbf{v}}$, $\mathbf{A}\,\vec{\mathbf{v}}$ é paralelo ao plano α.

Este resultado permite uma maneira alternativa de representar o tensor $\mathbf{T}$ como $T_{ij}\,\mathbf{e_i e_j}$.

1.3.11. O traço de um tensor. O traço de um tensor produto diádico $\mathbf{ab}$ é por definição o produto escalar dos vetores $\vec{\mathbf{a}}$ e $\vec{\mathbf{b}}$, ou seja, $\operatorname{tr}\mathbf{ab} = \vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}$. Como qualquer tensor pode ser representado em termos dos produtos diádicos dos elementos da base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$, o traço de um tensor $\mathbf{T}$ qualquer é $\operatorname{tr}\mathbf{T} = T_{ii}$, como se deduz a seguir:

$$\operatorname{tr}\mathbf{T} = \operatorname{tr}\left(T_{ij}\,\mathbf{e_i e_j}\right) = T_{ij}\operatorname{tr}\mathbf{e_i e_j} = T_{ij}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\cdot\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j} = T_{ij}\,\delta_{ij} = T_{ii}$$

1.3.12. O tensor rotação R. Considere dois segmentos materiais quaisquer de um corpo rígido em que uma das extremidades se tocam. Na rotação desse corpo rígido o comprimento e o ângulo entre os dois segmentos materiais permanecem sempre o mesmo, são invariantes. O tensor de rotação $\mathbf{R}$ é aquele que por definição mantém invariantes o comprimento e o ângulo entre dois vetores quaisquer, ou seja, dados dois vetores quaisquer, $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{u}}$, o tensor $\mathbf{R}$ faz com que:

$$\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{u}} = \mathbf{R}\,\vec{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{R}\,\vec{\mathbf{u}}$$

Na equação acima, pode-se escrever que $\mathbf{R}\,\vec{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{T}\,\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{R^T}\,\mathbf{R}\,\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}$. De onde se pode concluir que $\mathbf{R^T}\,\mathbf{R} = \mathbf{R}\,\mathbf{R^T} = \mathbf{I}$.

Como toda rotação ocorre em torno de um eixo. Num corpo rígido em rotação em torno de um eixo, todo segmento material paralelo a esse eixo mantém-se paralelo ao eixo de rotação. Assim, todo tensor de rotação tem uma direção para a qual qualquer vetor orientado segundo ela não sofre alteração de direção e módulo com a rotação. Seja $\vec{\mathbf{r}}$ um vetor na direção do eixo de rotação. Logo:

$$\mathbf{R}\,\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{R^T}\,\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}$$

Subtraindo acima a segunda equação da primeira obtém-se $(\mathbf{R}-\mathbf{R^T})\,\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{0}}$. Como $\mathbf{R}-\mathbf{R^T}$ é antissimétrico, tem-se para qualquer $\vec{\mathbf{v}}$ que $(\mathbf{R}-\mathbf{R^T})\,\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{v}}$, onde $\vec{\mathbf{a}}$ é o vetor dual de $\mathbf{R}-\mathbf{R^T}$. Portanto, $\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{0}}$, ou seja, o vetor na direção do eixo de rotação do tensor de rotação $\mathbf{R}$ é o vetor dual do seu tensor antissimétrico $\mathbf{R}-\mathbf{R^T}$.

1.3.13. Transformação de coordenadas entre dois sistemas cartesianos ortogonais. Considere dois sistemas de coordenadas cartesianas ortogonais $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$ e $\{\vec{\mathbf{e}}'_\mathbf{i}\}$. As duas bases se relacionam por meio de um tensor de rotação $\mathbf{Q}$, pois elas preservam comprimentos e ângulos, de modo que $\vec{\mathbf{e}}'_\mathbf{i} = \mathbf{Q}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} = Q_{ji}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j}$.

O significado geométrico das componentes do tensor $\mathbf{Q}$, Q_{ij}, fica evidente a partir do seguinte desenvolvimento: $Q_{ij} = \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \cdot \mathbf{Q}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{j} = \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \cdot \vec{\mathbf{e}}'_\mathbf{j} = \cos(\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}, \vec{\mathbf{e}}'_\mathbf{j})$. Portanto, o coeficiente Q_{ij} é o cosseno diretor entre os elementos $\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}$ e $\vec{\mathbf{e}}'_\mathbf{j}$.

Como $\mathbf{Q}$ é um tensor de rotação, então $\mathbf{Q}\,\mathbf{Q}^\mathbf{T} = \mathbf{Q}^\mathbf{T}\,\mathbf{Q} = \mathbf{I}$.

Os coeficientes do tensor $\mathbf{Q}$ formam a *matriz de transformação* [Q] da base $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$ para a $\{\vec{\mathbf{e}}'_\mathbf{i}\}$, nessa ordem:

$$[\mathrm{Q}] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix}$$

Convém observar que a transformação inversa, da base $\{\vec{\mathbf{e}}'_\mathbf{i}\}$ para a $\{\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$, é dada pela transposta de [Q], $[\mathrm{Q}]^T$, pois:

$$\mathbf{Q}^\mathbf{T}\,\vec{\mathbf{e}}'_\mathbf{i} = \mathbf{Q}^\mathbf{T}\,\mathbf{Q}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} = \mathbf{I}\,\vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i} = \vec{\mathbf{e}}_\mathbf{i}$$

1.3.13. Transformação de coordenadas entre dois sistemas cartesianos ortogonais

Sejam $\{\vec{e}_i\}$ e $\{\vec{e}'_i\}$ duas bases ortonormais. Vejamos primeiramente como representar os elementos da segunda na primeira. Por se tratarem de duas bases ortonormais, chega-se à segunda a partir de uma rotação conveniente da primeira. Logo, pode-se obter os elementos de $\{\vec{e}'_i\}$ por meio de um tensor rotação Q aplicado a cada elemento de $\{\vec{e}_i\}$:

$$\vec{e}'_i = Q\vec{e}_i = Q_{ji}\vec{e}_j$$

Os coeficientes Q_{ij} são os cossenos diretores entre os elementos $\vec{e}_i$ e $\vec{e}'_j$, pois $Q_{ij} = \vec{e}_i \cdot Q\vec{e}_j = \vec{e}_i \cdot \vec{e}'_j = \cos(\vec{e}_i, \vec{e}'_j)$. Além disso, $QQ^T = Q^TQ = I$, por se tratar de um tensor de rotação.

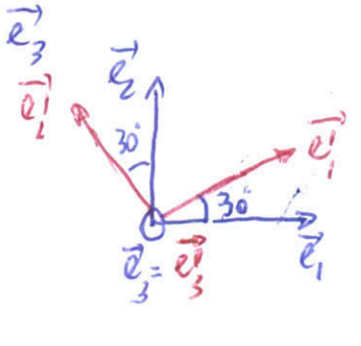
A matriz de transformação $[Q]$ da base $\{\vec{e}_i\}$ para a base $\{\vec{e}'_i\}$ é formada pelos coeficientes do tensor Q:

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix}$$

A transformação inversa, da base $\{\vec{e}'_i\}$ para a base $\{\vec{e}_i\}$ é dada pela matriz transposta de $[Q]$, $[Q]^T$, pois:

$$\vec{e}_i = I\vec{e}_i = Q^TQ\,\vec{e}_i = Q^T\vec{e}'_i$$

<u>Exemplo</u>: Obtenha a matriz de transformação entre $\{\vec{e}_i\}$ e $\{\vec{e}'_i\}$, que é obtido a partir do primeiro por meio de uma rotação de $30°$ em torno do eixo $\vec{e}_3$



Solução:

$$Q_{11} = \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_1') = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Q_{12} = \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2') = \cos 120° = -\frac{1}{2}$$

$$Q_{13} = \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_3') = \cos 90° = 0$$

$$Q_{21} = \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_1') = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$Q_{22} = \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_2') = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Q_{23} = \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_3') = \cos 90° = 0$$

$$Q_{31} = \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_1') = \cos 90° = 0$$

$$Q_{32} = \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_2') = \cos 90° = 0$$

$$Q_{33} = \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_3') = \cos 0° = 0$$

Portanto:

$$[Q] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.3.14. Transformação das componentes de um vetor de uma base para outra

Seja $\vec{v}$ um vetor. Na base $\{\vec{e}_i\}$ ele tem componentes:

$$v_i = \vec{v} \cdot \vec{e}_i$$

e na base $\{\vec{e}_i'\}$:

$$v_i' = \vec{v} \cdot \vec{e}_i' = \vec{v} \cdot Q_{mi} \vec{e}_m = Q_{mi} \, \vec{v} \cdot \vec{e}_m$$

ou

$$v_i' = Q_{mi} v_m$$

Matricialmente, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{21} & Q_{31} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{32} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

ou, simplesmente :

$$\{v\}' = [Q]^T\{v\}$$

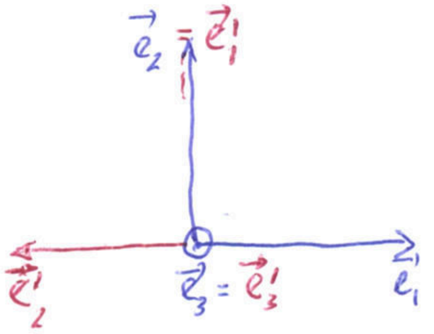
Pré-multiplicando esta última equação por $[Q]$ tem-se

$$[Q][Q]^T\{v\} = [Q]\{v\}'$$

ou

$$\{v\} = [Q]\{v\}'$$

<u>Exemplo</u>. O vetor $\vec{v}$ é dado na base $\{\vec{e}_i\}$ como $\vec{v} = 2\vec{e}_1$. Represente $\vec{v}$ na base $\{\vec{e}_i'\}$ que é obtida a partir de uma rotação de $\{\vec{e}_i\}$ em torno do eixo $\vec{e}_3$ de 90° no sentido anti-horário, cuja matriz de transformação é:



$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Solução</u>:

$$\begin{Bmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

1.3.15. <u>Transformação das componentes de um tensor de uma base para outra</u>

Seja T um tensor. Na base $\{\vec{e}_i\}$ ele tem componentes:

$$T_{ij} = \vec{e}_i \cdot T\vec{e}_j$$

e na base $\{\vec{e}_i'\}$:

$$T_{ij}' = \vec{e}_i' \cdot T\vec{e}_j' = Q_{mi}\vec{e}_m \cdot T(Q_{nj}\vec{e}_n)$$

$$= Q_{mi}Q_{nj}\,\vec{e}_m \cdot T\vec{e}_n$$

$$T_{ij}' = Q_{mi}Q_{nj}\,T_{mn}$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} T'_{11} & T'_{12} & T'_{13} \\ T'_{21} & T'_{22} & T'_{23} \\ T'_{31} & T'_{32} & T'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{21} & Q_{31} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{32} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix}$$

ou simplesmente:

$$[T]' = [Q]^T [T] [Q]$$

Pré-multiplicando por $[Q]$ e pós-multiplicando por $[Q]^T$ a equação acima obtém-se:

$$[Q][Q]^T[T][Q][Q]^T = [Q][T]'[Q]^T$$

ou $$[T] = [Q][T]'[Q]^T$$

<u>Exemplo</u> Dado o tensor T na base $\{e_i\}$:

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Represente T na base $\{\vec{e}'_i\}$ que é obtida a partir de uma rotação de $\{\vec{e}_i\}$ em torno do eixo $\vec{e}_3$ de $90°$ no sentido anti-horário.

<u>Solução</u>

$$[T]' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Exemplo</u>: Mostre que o traço de um tensor é invariante.

<u>Solução</u>:

$$T'_{ij} = Q_{mi} Q_{nj} T_{mn}$$

Fazendo a contração de i com j:

$$tr\,T = T'_{ii} = Q_{mi} Q_{ni} T_{mn} = Q_{ni} Q^T_{im} T_{mn} = \delta_{nm} T_{mn} = T_{nn}$$

$$\therefore \quad tr\,T = T'_{ii} = T_{ii}$$

1.3.16 Generalização de Tensor

Tensor, no sentido generalizado, é um ente matemático cujas componentes observam determinadas regras de transformação de coordenadas:

Tensor de ordem zero (ou escalar): $v' = v$

Tensor de primeira ordem (ou vetor): $v'_i = Q_{mi} v_m$

Tensor de segunda ordem (ou tensor): $T'_{ij} = Q_{mi} Q_{nj} T_{mn}$

Tensor de terceira ordem: $T'_{ijk} = Q_{mi} Q_{nj} Q_{rk} T_{mnr}$

Tensor de quarta ordem: $T'_{ijkl} = Q_{mi} Q_{nj} Q_{rk} Q_{sl} T_{mnrs}$

$\vdots$

Um tensor de ordem n associa a cada elemento da base $\{\vec{e}_i\}$ um tensor de ordem $n-1$.

Exemplo. Obtenha as componentes do tensor de 3ª ordem T na base $\{\vec{e}_i\}$ e a sua regra de transformação de coordenadas.

Solução: Seja T_i o tensor de 2ª ordem associado a $\vec{e}_i$:

$$T_i = T\vec{e}_i$$

$$T_i \vec{e}_k = T_{imk} \vec{e}_m$$

$$\vec{e}_j \cdot (T_i \vec{e}_k) = \vec{e}_j \cdot (T_{imk} \vec{e}_m) = T_{imk} \delta_{jm} = T_{ijk}$$

Portanto:

$$T_{ijk} = \vec{e}_j \cdot ((T\vec{e}_i)\vec{e}_k)$$

$$\begin{aligned} T'_{ijk} &= \vec{e}'_j \cdot ((T\vec{e}'_i)\vec{e}'_k) \\ &= Q\vec{e}_j \cdot ((TQ\vec{e}_i) Q\vec{e}_k) \\ &= Q_{nj}\vec{e}_n \cdot ((T Q_{mi}\vec{e}_m) Q_{rk}\vec{e}_r) \\ &= Q_{mi} Q_{nj} Q_{rk}\, \vec{e}_n \cdot ((T\vec{e}_m)\vec{e}_r) \end{aligned}$$

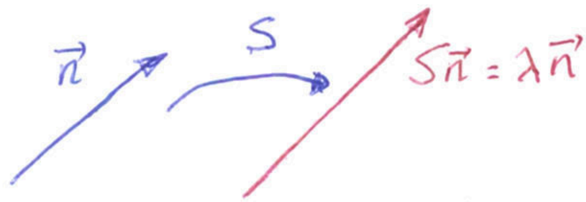
$$\therefore \quad T'_{ijk} = Q_{mi} Q_{nj} Q_{rk} T_{mnr}$$

1.3.17. Auto-valores e auto-vetores de um tensor simétrico

Seja S um tensor simétrico. Podemos indagar sobre a existência de um escalar λ e um vetor $\vec{n}$ que verifiquem:

$$S\vec{n} = \lambda\vec{n}$$

ou seja, um vetor $\vec{n}$ que S leve a um vetor paralelo a $\vec{n}$.



Observe que, se $\vec{n}$ e λ verificam a equação acima, qualquer múltiplo de $\vec{n}$ (ou qualquer vetor paralelo a $\vec{n}$) também verifica:

$$S(\alpha\vec{n}) = \alpha S\vec{n} = \lambda(\alpha\vec{n})$$

O escalar e o vetor que satisfazem a equação acima denominam-se <u>auto-valor</u> e <u>auto-vetor</u> do tensor S.

Seja $\vec{n}$ um auto-vetor unitário, ou seja, $\|\vec{n}\| = 1$, então

$$S\vec{n} = \lambda\vec{n} = \lambda I\vec{n}$$

ou $$(S - \lambda I)\vec{n} = \vec{0}$$

$$(S - \lambda I) n_j \vec{e}_j = (S_{ij} - \lambda\delta_{ij}) n_j \vec{e}_i = \vec{0}$$

Portanto,

$$(S_{ij} - \lambda\delta_{ij}) n_j = 0$$

ou, matricialmente:

$$\begin{bmatrix} S_{11}-\lambda & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22}-\lambda & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33}-\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Para que este sistema não tenha uma única solução trivial ($n_1 = n_2 = n_3 = 0$), o determinante da matriz $[S - \lambda I]$ deve ser nulo:

$$|S - \lambda I| = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} S_{11}-\lambda & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22}-\lambda & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ou ainda:

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0$$

onde:

$$I_1 = S_{11} + S_{22} + S_{33} = S_{ii} = \mathrm{tr}\, S$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_{22} & S_{23} \\ S_{23} & S_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_{11} & S_{13} \\ S_{13} & S_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(S_{ii}S_{jj} - S_{ij}S_{ji}\right) = \frac{1}{2}\left[(\mathrm{tr}\, S)^2 - \mathrm{tr}(S^2)\right]$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{vmatrix}$$

A equação do 3º grau acima é chamada <u>equação característica do tensor S</u>. Suas raízes λ_1, λ_2 e λ_3 são <u>números reais</u> e são os auto-valores de S. I_1, I_2 e I_3 são chamados de <u>escalares invariantes</u> do tensor S.

Resolvendo a equação característica:

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)=0$$

ou $$\lambda^3-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\lambda^2+(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)\lambda-\lambda_1\lambda_2\lambda_3=0$$

De onde se conclui que os escalares invariantes de S são dados também por:

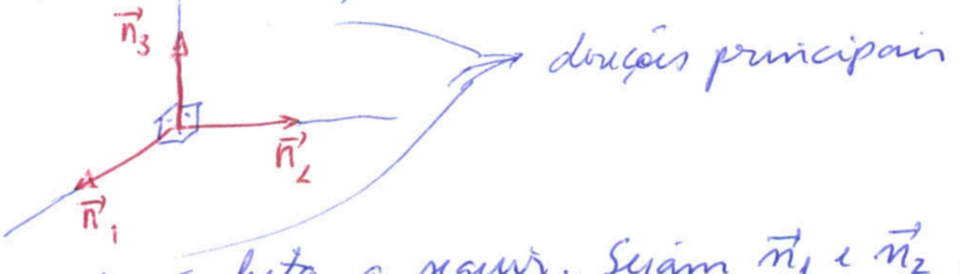
$$I_1=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$$

$$I_2=\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1$$

$$I_3=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

Direções principais de um tensor simétrico

Um tensor simétrico real tem sempre três auto-vetores mutuamente ortogonais. Tais auto-vetores definem três direções ortogonais chamadas direções principais.



A prova disto é feita a seguir. Sejam $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ dois auto-vetores de um tensor simétrico S e λ_1 e λ_2 os seus respectivos auto-valores. Logo:

$$S\vec{n}_1=\lambda_1\vec{n}_1$$

e $$S\vec{n}_2=\lambda_2\vec{n}_2$$

Multiplicando escalarmente por $\vec{n}_2$ a primeira equação acima e por $\vec{n}_1$ a segunda:

$$\vec{n}_2 \cdot S\vec{n}_1 = \vec{n}_1 \cdot S^T\vec{n}_2 = \vec{n}_1 \cdot S\vec{n}_2 = \lambda_1 \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2$$
$$\vec{n}_1 \cdot S\vec{n}_2 = \vec{n}_2 \cdot S^T\vec{n}_1 = \vec{n}_2 \cdot S\vec{n}_1 = \lambda_2 \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2$$

Logo, subtraindo a segunda equação acima da primeira:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\, \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$

- Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$

ou seja, os auto-vetores $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ são ortogonais. Se $\lambda_3 \neq \lambda_1$ e $\lambda_3 \neq \lambda_2$, então $\vec{n}_3$, auto-vetor de λ_3, é ortogonal a $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$.

- Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq \lambda_3$. Sejam $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ dois auto-vetores correspondentes a λ. Logo, $S\vec{n}_1 = \lambda\vec{n}_1$ e $S\vec{n}_2 = \lambda\vec{n}_1$. Além disso, qualquer combinação linear de ambos, $\alpha\vec{n}_1 + \beta\vec{n}_2$ (α e β são quaisquer número real), também é auto-vetor de λ, pois:

$$S(\alpha\vec{n}_1 + \beta\vec{n}_2) = \alpha S\vec{n}_1 + \beta S\vec{n}_2 = \alpha\lambda\vec{n}_1 + \beta\lambda\vec{n}_2 = \lambda(\alpha\vec{n}_1 + \beta\vec{n}_2)$$

ou seja: $\quad S(\alpha\vec{n}_1 + \beta\vec{n}_2) = \lambda(\alpha\vec{n}_1 + \beta\vec{n}_2)$

Como $\vec{n}_3$ correspondente ao auto-valor λ_3 é ortogonal a $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$, ele é ortogonal ao plano formado por $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$. Escolhidos quaisquer dois auto-vetores de λ ortogonais entre si pode-se ter $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ e $\vec{n}_3$ mutuamente ortogonais, ou três direções principais mutuamente ortogonais.

- Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$, então qualquer vetor é auto-vetor de S. Assim quaisquer três auto-vetores ortogonais definem três direções principais mutuamente ortogonais

Exemplo Determine os auto-valores e auto-vetores do tensor simétrico

$$[S] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Solução

Equação característica:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2-25) = 0$$

As raízes são os auto-valores:

$$\lambda_1 = 2\ , \quad \lambda_2 = 5 \quad e \quad \lambda_3 = -5$$

- Auto-vetor correspondente a $\underline{\lambda_1 = 2}$:

$$\begin{bmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ 0 & 3-2 & 4 \\ 0 & 4 & -3-2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1^{(1)} \\ n_2^{(1)} \\ n_3^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad ou \quad \begin{cases} 0\, n_1^{(1)} = 0 \\ n_2^{(1)} + 4n_3^{(1)} = 0 \\ 4n_2^{(1)} - 5n_3^{(1)} = 0 \end{cases}$$

e $\quad n_1^{(1)2} + n_2^{(1)2} + n_3^{(1)2} = 1$

Logo: $\quad n_2^{(1)} = n_3^{(1)} = 0 \quad e \quad n_1^{(1)} = \pm 1$

Portanto: $\quad \boxed{\vec{n}_1 = \pm \vec{e}_1}$

- Auto-vetor correspondente a $\underline{\lambda_2 = 5}$:

$$\begin{bmatrix} 2-5 & 0 & 0 \\ 0 & 3-5 & 4 \\ 0 & 4 & -3-5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1^{(2)} \\ n_2^{(2)} \\ n_3^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad ou \quad \begin{cases} 3\, n_1^{(2)} = 0 \\ -2\, n_2^{(2)} + 4\, n_3^{(2)} = 0 \\ 4\, n_2^{(2)} - 8\, n_3^{(2)} = 0 \end{cases}$$

e $\quad n_1^{(2)2} + n_2^{(2)2} + n_3^{(2)2} = 1$

Logo: $\quad n_1^{(2)} = 0 \quad e \quad n_2^{(2)} = 2\, n_3^{(2)}$

Portanto: $\quad \vec{n}_2 = \pm \frac{\sqrt{5}}{5} (2\vec{e}_2 + \vec{e}_3)$

- Auto-vetor correspondente a $\underline{\lambda_3 = -5}$

$$\begin{bmatrix} 2+5 & 0 & 0 \\ 0 & 3+5 & 4 \\ 0 & 4 & -3+5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1^{(3)} \\ n_2^{(3)} \\ n_3^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad ou \quad \begin{cases} 7\, n_1^{(3)} = 0 \\ 8\, n_2^{(3)} + 4\, n_3^{(3)} = 0 \\ 4\, n_2^{(3)} + n_3^{(3)} = 0 \end{cases}$$

e $\quad n_1^{(3)2} + n_2^{(3)2} + n_3^{(3)2} = 1$

Logo: $n_1^{(3)} = 0$ e $n_3^{(3)} = -2\,n_1^{(3)}$

Portanto: $\boxed{\vec{n}_3 = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}\left(-\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3\right)}$

<u>Exemplo</u>: Determine as direções principais do tensor simétrico:

$$[S] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

<u>Solução</u>:

Equação característica:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(3-\lambda) = 0$$

As raízes são os auto-valores:

$$\lambda_1 = 3 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2.$$

- Auto-vetor correspondente a $\lambda_1 = 3$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1^{(1)} \\ n_2^{(1)} \\ n_3^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{r} n_1^{(1)} = 0 \\ n_2^{(1)} = 0 \\ 0\,n_3^{(1)} = 0 \end{array} \right.$$

e $(n_1^{(1)})^2 + (n_2^{(1)})^2 + (n_3^{(1)})^2 = 1$

Logo $n_1^{(1)} = n_2^{(1)} = 0$ e $n_3^{(1)} = \pm 1$

Portanto: $\boxed{\vec{n}_1 = \pm \vec{e}_3}$

- Auto-vetores correspondentes a $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1^{(2)} \\ n_2^{(2)} \\ n_3^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{r} 0\,n_1^{(2)} = 0 \\ 0\,n_2^{(2)} = 0 \\ n_3^{(2)} = 0 \end{array} \right.$$

e $(n_1^{(2)})^2 + (n_2^{(2)})^2 + (n_3^{(2)})^2 = 1$

Logo $n_1^{(2)}$ e $n_2^{(2)}$ são quaisquer e $n_3^{(2)} = 0$

Portanto: $\vec{n}_2 = \alpha\,\vec{e}_1 + \sqrt{1-\alpha^2}\,\vec{e}_2$, $-1 \leq \alpha \leq +1$

Observe que $\vec{n}_2$ pode ser qualquer vetor ortogonal a $\vec{n}_1$.

A representação de um tensor num sistema coincidente com as suas direções principais

Como visto, qualquer tensor simétrico possui três direções principais mutuamente ortogonais coincidentes com as direções dos auto-vetores. Sejam $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ e $\vec{n}_3$ vetores unitários segundo as direções principais. Logo $\{\vec{n}_i\}$ forma uma base ortonormal definida positiva. As componentes do tensor simétrico S nessa base são:

$$S_{ij} = \vec{n}_i \cdot S\vec{n}_j = \vec{n}_i \cdot \underbrace{(\lambda_j \vec{n}_j)}_{\text{sem notação indicial}} = \underbrace{\lambda_j\, \vec{n}_i \cdot \vec{n}_j}_{\text{sem notação indicial}}$$

ou seja:

$$S_{ij} = \delta_{ij}\lambda_j$$

$$[S]_{\vec{n}_i} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Pode-se demonstrar que as componentes da diagonal da matriz de um tensor simétrico real está compreendida no intervalo entre o mínimo e máximo auto-valores:

$$\lambda_3 \leq \left\{ \begin{matrix} T'_{11} \\ \text{ou} \\ T'_{22} \\ \text{ou} \\ T'_{33} \end{matrix} \right\} \leq \lambda_1$$

desde que se tome $\lambda_3 \leq \lambda_2 \leq \lambda_1$.

Este último resultado é importante para quando trabalharmos com os tensores de tensão e de deformação, pois as tensões e deformações normais nunca poderão exceder esses limites.

Exemplo Encontre uma base ortonormal definida positiva que corresponda às direções principais do tensor simétrico

$$[S] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Solução:

Primeiramente vamos reordenar os auto-valores pela ordem decrescente:

$$\lambda_1 = 5 \quad : \quad \vec{n}_1 = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}(2\vec{e}_2 + \vec{e}_3)$$
$$\lambda_2 = 2 \qquad \vec{n}_2 = \pm\vec{e}_1$$
$$\lambda_3 = -5 \qquad \vec{n}_3 = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}(-\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3)$$

Para que a base orientada segundo as direções principais de S seja definida positiva, é necessário que:

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{n}_3$$
$$\vec{n}_2 \times \vec{n}_3 = \vec{n}_1$$
$$\vec{n}_3 \times \vec{n}_1 = \vec{n}_2$$

Escolhendo $\vec{n}_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}(2\vec{e}_2 + \vec{e}_3)$ e $\vec{n}_2 = \vec{e}_1$ tem-se:

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}(2\vec{e}_2 + \vec{e}_3) \times \vec{e}_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}(\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3) = \vec{n}_3$$

Portanto, forma-se uma base orientada segundo as direções principais de S definida positiva com

$$\vec{n}_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}(2e_2 + \vec{e}_3)$$

$$\vec{n}_2 = \vec{e}_1$$

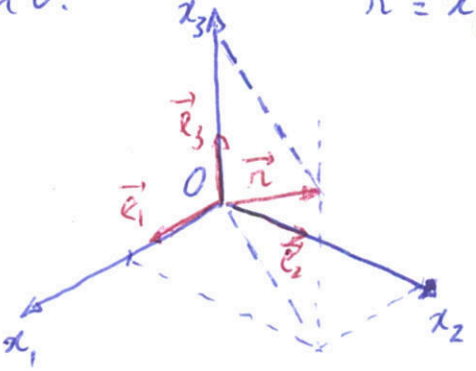
$$\vec{n}_3 = \frac{\sqrt{5}}{5}(\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3)$$

Capítulo 2. Cálculo Tensorial

2.1. Campo escalar

Seja $\vec{r}$ o vetor posição de um ponto do espaço R^3 relativamente a um sistema de coordenadas cartesianas definida positiva em O.

$$\vec{r} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = x_i\vec{e}_i$$



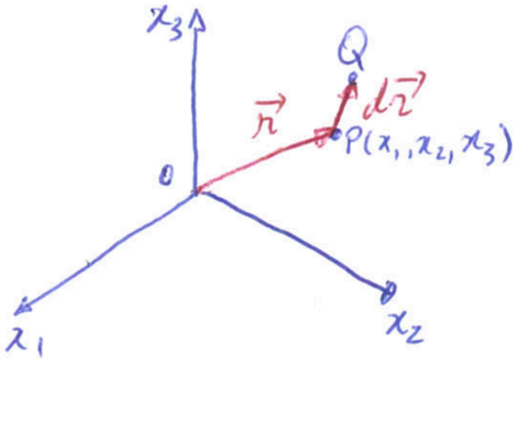
O campo escalar é uma função que associa a cada ponto do espaço (no caso, R^3) um escalar:

$$(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : (x_1, x_2, x_3) \longrightarrow \varphi(x_1, x_2, x_3) \in R$$

Por exemplo, a distribuição de temperatura numa peça pode ser descrita por meio de um campo de temperatura na peça.

2.1.1. Gradiente de um campo escalar

Sejam φ um campo escalar, $\vec{r}$ o vetor posição de um ponto qualquer a partir do sistema de coordenadas cartesianas $(O,(x_1, x_2, x_3))$ e $d\vec{r}$ um vetor infinitesimal qualquer.



Sendo φ uma função dependente de três variáveis (x_1, x_2, x_3), do cálculo de várias variáveis tem-se que a variação de φ do ponto P até o ponto $Q = P + d\vec{r} = (x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$ é:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} dx_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i$$

Pode-se mostrar que $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}$ são as componentes de um vetor denominado gradiente de φ $(\nabla \varphi)$. Como dx_1, dx_2 e dx_3 são as componentes de $d\vec{r}$, tem-se:

$$d\varphi = \nabla \varphi \cdot d\vec{r}$$

Se dr denota a magnitude de $d\vec{r}$ e $\vec{e}$ o vetor unitário na direção de $d\vec{r}$, então

$$d\varphi = \nabla \varphi \cdot \vec{e}\, dr$$

ou $$\frac{d\varphi}{dr} = \nabla \varphi \cdot \vec{e}$$

Isto é, a componente de $\nabla \varphi$ na direção $\vec{e}$ é a taxa de variação de φ nessa direção (a <u>derivada direcional</u>). Assim a taxa de variação de φ na direção $\vec{e}_1$ é $\nabla \varphi \cdot \vec{e}_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$, na direção $\vec{e}_2$ é $\nabla \varphi \cdot \vec{e}_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$ e na direção $\vec{e}_3$ é $\nabla \varphi \cdot \vec{e}_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}$.

O vetor gradiente, $\nabla \varphi$, <u>aponta na direção da máxima variação do campo escalar no ponto</u>, pois $\nabla \varphi \cdot \vec{e}$ é máximo quando ambos têm a mesma direção e sentido.

<u>Exemplo</u> Se $\varphi = x_1 x_2 + x_3$, determine um vetor normal à superfície de φ constante que passa pelo ponto de coordenadas $(2, 1, 0)$.

<u>Solução</u>: O vetor gradiente é perpendicular à superfície de φ constante.

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\vec{e}_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\vec{e}_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\vec{e}_3 = x_2\vec{e}_1 + x_1\vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

$$\therefore \quad \nabla\varphi(2,1,0) = 1\cdot\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

Normalizando $\nabla\varphi$: $\vec{n} = \dfrac{\nabla\varphi}{\|\nabla\varphi\|} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3)$

2.2. Campo vetorial

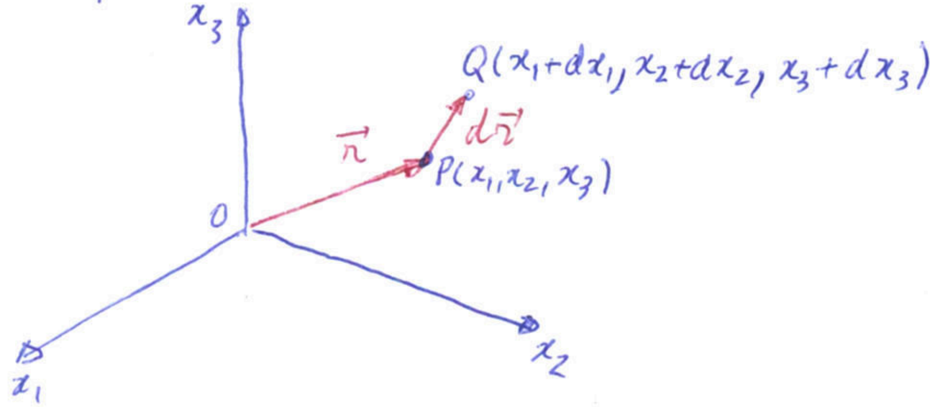
O campo vetorial é uma função que associa a cada ponto do espaço (no caso, R^3) um vetor:

$$(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : (x_1, x_2, x_3) \longrightarrow \vec{v}(x_1, x_2, x_3) \in R^3$$

Por exemplo, o campo de deslocamento das partículas de um sólido; ou o campo de velocidade dessas mesmas partículas.

2.2.1. Gradiente de um campo vetorial

Sejam $\vec{v}$ um campo vetorial, $\vec{r}$ o vetor posição de um ponto qualquer a partir do sistema de coordenadas cartesianas $(O, (x_1, x_2, x_3$ e $d\vec{r}$ um vetor infinitesimal de posição qualquer.

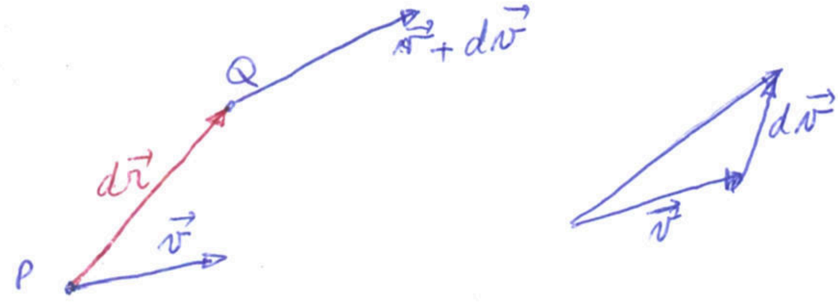


Sendo $\vec{v}$ uma função de três variáveis (x_1, x_2, x_3), ou ainda, sendo as componentes de $\vec{v}$, v_i, funções escalares, tem-se que a variação de v_i do ponto P até o ponto $Q = P + d\vec{r} = (x_1+dx_1, x_2+dx_2, x_3+dx_3)$ é:

$$dv_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial v_i}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial v_i}{\partial x_3}dx_3 = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx_j$$

Na equação acima, dv_i e dx_j são vetores, o que sugere que $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ sejam as componentes de um tensor. De fato, $\nabla\vec{v}$ é o tensor gradiente do campo vetorial $\vec{v}$ e suas componentes são $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$.

$$d\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}+d\vec{r}) - \vec{v}(\vec{r}) = (\nabla\vec{v})d\vec{r}$$



Se dr denota a magnitude de $d\vec{r}$ e $\vec{e}$ o vetor unitário na direção de $d\vec{r}$, então:

$$d\vec{v} = (\nabla\vec{v})\vec{e}\,dr$$

ou $$\frac{d\vec{v}}{dr} = (\nabla\vec{v})\vec{e}$$

Isto é, o vetor $(\nabla\vec{v})\vec{e}$ na direção $\vec{e}$ é a taxa de variação de $\vec{v}$ nessa direção (a derivada direcional). Logo, considerando um sistema de coordenadas cartesianas, $\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_i} = (\nabla\vec{v})\vec{e}_i$ é a taxa de variação do campo vetorial $\vec{v}$ na direção $\vec{e}_i$.

Matricialmente, o tensor gradiente de um campo vetorial é:

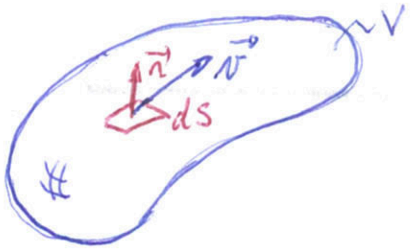
$$[\nabla\vec{v}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

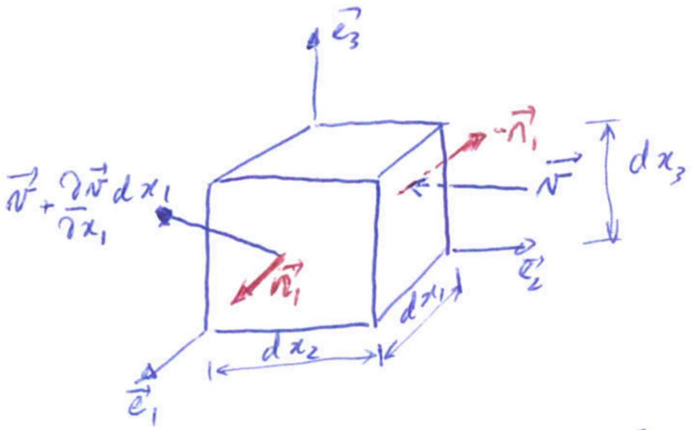
2.2.2. Divergente de um campo vetorial

O divergente de um campo vetorial $\vec{v}$ é o campo escalar dado pelo traço do gradiente de $\vec{v}$:

$$\nabla\cdot\vec{v} = tr(\nabla\vec{v}) = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

ou $\nabla\cdot\vec{v} = \lim\limits_{\Delta V\to 0} \dfrac{\int_S \vec{v}\cdot\vec{n}\, ds}{\Delta V}$ (fluxo de $\vec{v}$ por unidade de volume)





$$\begin{aligned}\int_S \vec{v}\cdot\vec{n}\, ds &= \left[\left(\vec{v}+\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_1}dx_1\right)\cdot\vec{e}_1 - \vec{v}\cdot\vec{e}_1\right]dx_2\,dx_3 + \\ &+\left[\left(\vec{v}+\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_2}dx_2\right)\cdot\vec{e}_2 - \vec{v}\cdot\vec{e}_2\right]dx_1\,dx_3 + \\ &+\left[\left(\vec{v}+\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_3}dx_3\right)\cdot\vec{e}_3 - \vec{v}\cdot\vec{e}_3\right]dx_1\,dx_2 \\ &= \left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_1}\cdot\vec{e}_1 + \frac{\partial\vec{v}}{\partial x_2}\cdot\vec{e}_2 + \frac{\partial\vec{v}}{\partial x_3}\cdot\vec{e}_3\right)dx_1\,dx_2\,dx_3 \\ &= \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\Delta V\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\int_S \vec{v}\cdot\vec{n}\, ds}{\Delta V} = \nabla\cdot\vec{v}$$

Exemplo: Determine as componentes simétrica e antissimétrica do gradiente do campo de deslocamento $\vec{u} = x_1^2 x_2 \vec{e}_1 + 2x_2 x_3 \vec{e}_2 + 3x_1 x_3^2 \vec{e}_3$. Determine também o divergente desse campo.

Solução:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 2x_1 x_2 \; ; \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = x_1^2 \; ; \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0 \; ; \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 2x_3 \; ; \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 2x_2$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 3x_3^2 \; ; \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0 \; ; \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 6x_1 x_3$$

gradiente

$$\therefore \quad \nabla\vec{u} = \begin{bmatrix} 2x_1 x_2 & x_1^2 & 0 \\ 0 & 2x_3 & 2x_2 \\ 3x_3^2 & 0 & 6x_1 x_3 \end{bmatrix}$$

$$(\nabla\vec{u})_S = \begin{bmatrix} 2x_1 x_2 & \frac{x_1^2}{2} & \frac{3x_3^2}{2} \\ \frac{x_1^2}{2} & 2x_3 & x_2 \\ \frac{3x_3^2}{2} & x_2 & 6x_1 x_3 \end{bmatrix}$$

$$(\nabla\vec{u})_A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{x_1^2}{2} & -\frac{3x_3^2}{2} \\ -\frac{x_1^2}{2} & 0 & x_2 \\ \frac{3x_3^2}{2} & -x_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Divergente

$$\nabla\cdot\vec{u} = tr(\nabla\vec{u}) = 2x_1 x_2 + 2x_3 + 6x_1 x_3$$

2.3. Campo tensorial

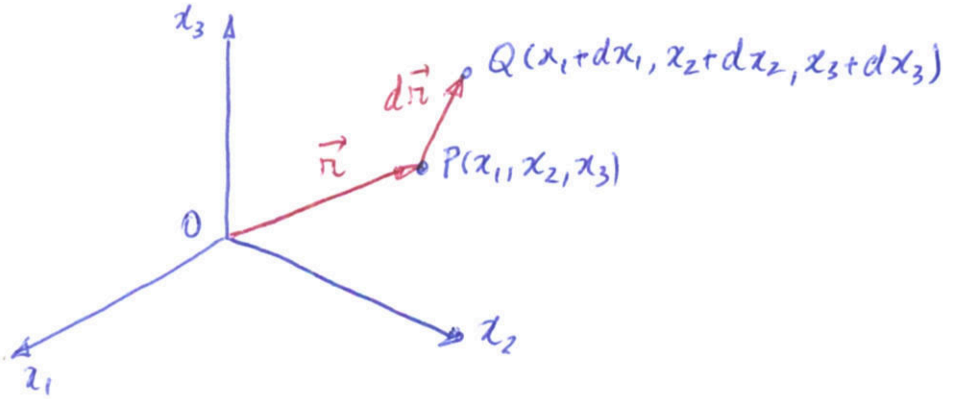
O campo tensorial é uma função que associa a cada ponto do espaço (no caso, R^3) um tensor:

$$(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : (x_1, x_2, x_3) \longrightarrow T(x_1, x_2, x_3) \in R^9$$

Por exemplo, o campo de tensão ou de deformação num sólido.

2.3.1. Gradiente de um campo tensorial

Sejam T um campo tensorial, $\vec{r}$ o vetor posição de um ponto qualquer a partir do sistema de coordenadas cartesianas $(O, (x_1, x_2, x_3))$ e $d\vec{r}$ um vetor infinitesimal de posição qualquer.

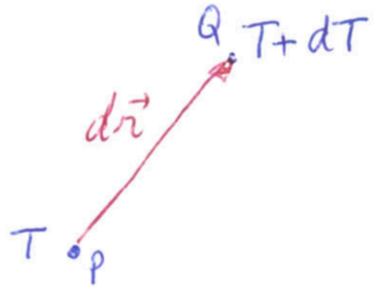


Sendo T uma função de três variáveis (x_1, x_2, x_3), ou ainda sendo as componentes de T, T_{ij}, funções escalares, tem-se que a variação de T_{ij} do ponto P até o ponto $Q = P + d\vec{r} = (x_1+dx_1, x_2+dx_2, x_3+dx_3)$ é:

$$dT_{ij} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} T_{ij}\, dx_3 = \frac{\partial}{\partial x_k} T_{ij}\, dx_k$$

Na equação acima, dT_{ij} e dx_k são componentes de tensor e vetor, respectivamente, o que sugere que $\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}$ sejam as componentes de um tensor de 3ª ordem. De fato, ∇T é o gradiente do campo tensorial T e suas componentes são $\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}$.

$$dT = T(\vec{r}+d\vec{r}) - T(\vec{r}) = (\nabla T)\, d\vec{r}$$



Se dr denota a magnitude de $d\vec{r}$ e $\vec{e}$ o vetor unitário na direção de $d\vec{r}$, então:

$$dT = (\nabla T)\vec{e}\, dr$$

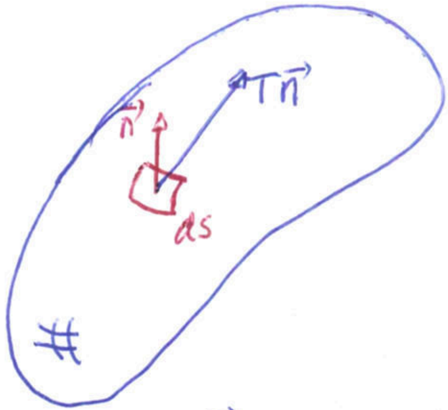
$$\text{ou} \quad \frac{dT}{dr} = (\nabla T)\vec{e}$$

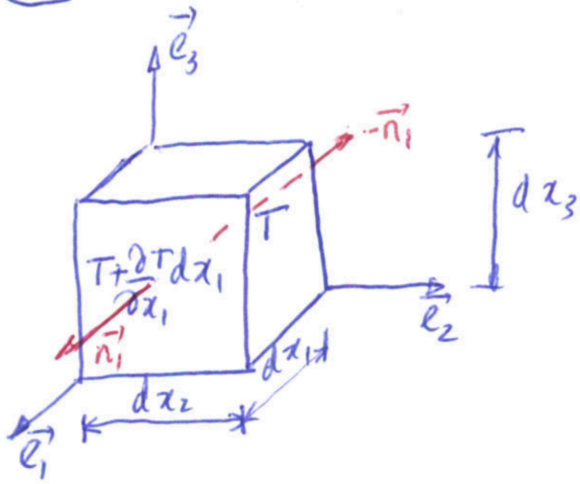
Isto é, o tensor $(\nabla T)\vec{e}$ é a taxa de variação de T na direção $\vec{e}$ (a derivada direcional). Logo, considerando um sistema de coordenadas cartesianas, $\frac{\partial T}{\partial x_i} = (\nabla T)\vec{e}_i$ é a taxa de variação do campo tensorial T na direção $\vec{e}_i$.

2.3.2. Divergente de um campo tensorial

O divergente de um campo tensorial T é o campo vetorial definido como:

$$\nabla\cdot T = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\int_S T\vec{n}\, ds}{\Delta V}$$





$$\int_S T\vec{n}\,ds = \left[\left(T+\frac{\partial T}{\partial x_1}dx_1\right)\vec{e}_1 - T\vec{e}_1\right]dx_2\,dx_3 +$$

$$+\left[\left(T+\frac{\partial T}{\partial x_2}dx_2\right)\vec{e}_2 - T\vec{e}_2\right]dx_1\,dx_3 +$$

$$+\left[\left(T+\frac{\partial T}{\partial x_3}dx_3\right)\vec{e}_3 - T\vec{e}_3\right]dx_1\,dx_2$$

$$= \left(\frac{\partial T}{\partial x_1}\vec{e}_1 + \frac{\partial T}{\partial x_2}\vec{e}_2 + \frac{\partial T}{\partial x_3}\vec{e}_3\right)dx_1\,dx_2\,dx_3$$

$$= \left(\frac{\partial T}{\partial x_k}\vec{e}_k\right)dV$$

Como: $$\frac{\partial}{\partial x_k}(T\vec{e}_k) = \left(\frac{\partial}{\partial x_k}T\right)\vec{e}_k + T\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\vec{e}_k\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_k}T\right)\vec{e}_k$$

mas: $$\frac{\partial}{\partial x_k}(T\vec{e}_k) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(T_{ik}\vec{e}_i\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_k}T_{ik}\right)\vec{e}_i + T_{ik}\frac{\partial}{\partial x_k}\vec{e}_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_k}T_{ik}\right)\vec{e}_i$$

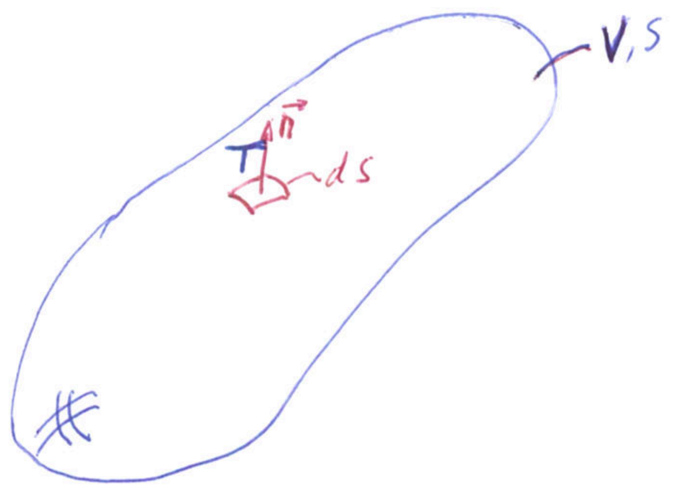
Portanto:

$$\nabla \cdot T = \frac{\partial}{\partial x_k} T_{ik} \vec{e}_i \qquad T_{ik,k}$$

ou seja, o divergente de T é o vetor de componentes $\frac{\partial}{\partial x_k} T_{ik}$ ($T_{ik,k}$).

Se T for o tensor de tensão numa partícula, o divergente de T nessa partícula é a resultante de forças de contato sobre a partícula por unidade de volume.

2.4. O Teorema de Gauss (ou da divergência)



Seja S uma superfície contínua por partes que fecha a região do espaço de volume V. Se um campo tensorial de ordem qualquer, T, é contínuo e tem derivada primeira contínua em V, então:

$$\int_S T \vec{n} \, dS = \int_V \nabla \cdot T \, dV$$

ou

$$\int_S T_{ij\cdots k} \, n_k \, dS = \int_V T_{ij\cdots k,k} \, dV$$

Este Teorema será útil para determinar a resultante de forças externas sobre um sólido.

Ex: Obtenha o divergente do tensor simétrico

$$[T] = \begin{bmatrix} 2x_1^2 & 3x_1x_2 & 4x_1x_3 \\ 3x_1x_2 & 4x_2^2 & 5x_2x_3 \\ 4x_1x_3 & 5x_2x_3 & 6x_3^2 \end{bmatrix}$$

$$T_{1k,k} = T_{11,1} + T_{12,2} + T_{13,3} = 4x_1 + 3x_1 + 4x_1 = 11x_1$$

$$T_{2k,k} = T_{21,1} + T_{22,2} + T_{23,3} = 3x_2 + 8x_2 + 5x_2 = 16x_2$$

$$T_{3k,k} = T_{31,1} + T_{32,2} + T_{33,3} = 4x_3 + 5x_3 + 12x_3 = 21x_3$$

$$\therefore \quad \nabla \cdot T = 11x_1\vec{e}_1 + 16x_2\vec{e}_2 + 21x_3\vec{e}_3$$