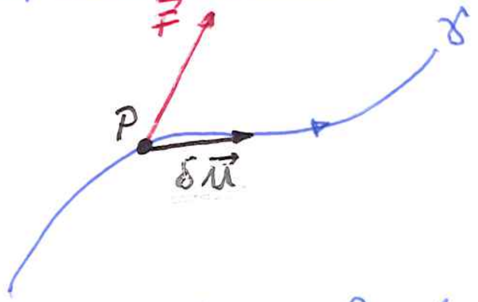
Capítulo 6. Energia de deformação

6.1. Introdução

Vamos aqui relembrar os conceitos de trabalho e energia e aplicá-los à deformação de um sólido. Será feita a distinção entre trabalho de aplicação de uma força a um sólido e o de uma força já aplicada. Serão vistos alguns princípios e resultados que derivam da energia de deformação e são úteis na formulação dos métodos dos elementos finitos e de contorno aplicados à solução de problemas da mecânica dos sólidos.

6.2. Trabalho de uma força

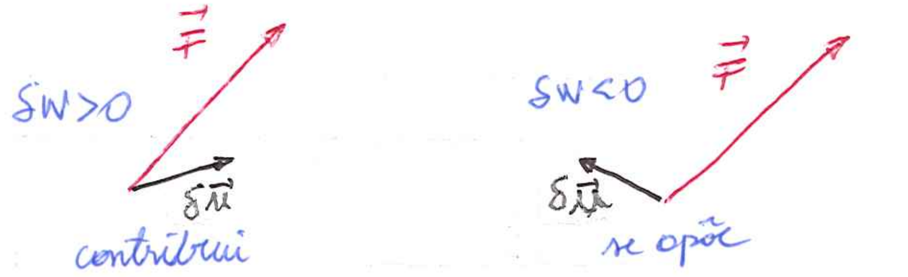
6.2.1. Trabalho infinitesimal



Considere uma partícula P sobre a qual é aplicada uma força $\vec{F}$ e descreve uma trajetória γ. Considere também um deslocamento infinitesimal $\delta\vec{u}$ da partícula a partir de um ponto qualquer da trajetória. Nestes termos, define-se o trabalho infinitesimal da força $\vec{F}$ sobre a partícula P no deslocamento $\delta\vec{u}$ como:

$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta\vec{u}$$

Como se nota, é uma grandeza escalar de dimensão F.L. O trabalho é uma medida de quanto a força $\vec{F}$ contribui para o deslocamento da partícula. Se $\delta W > 0$, a força $\vec{F}$, de fato, contribui para o deslocamento e, se $\delta W < 0$, a força $\vec{F}$ se opõe ao deslocamento.



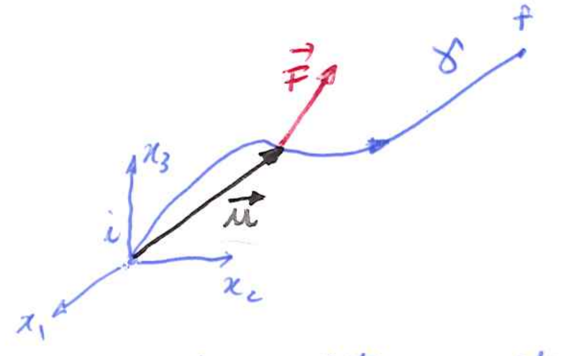
6.2.2 Trabalho ao longo de uma trajetória

O trabalho de uma força sobre uma partícula que descreve uma trajetória γ é a soma dos trabalhos infinitesimais ao longo de γ, ou seja,

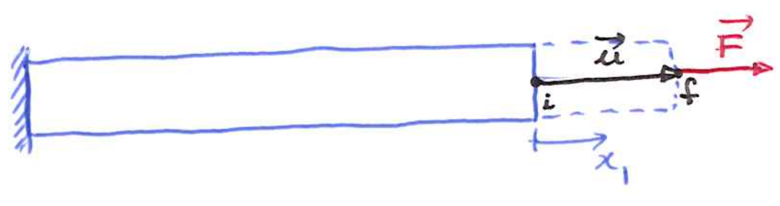
$$W = \int_\gamma \delta W = \int_\gamma \vec{F} \cdot \delta\vec{u}$$

6.2.3. Trabalho de aplicação de uma força

Quando uma força é aplicada a um sólido, ela varia ao longo da trajetória de aplicação desde o valor inicial nulo até o valor final. Se o sólido for linear, o comportamento da força de aplicação será linear nas componentes do vetor deslocamento com origem no início da trajetória.



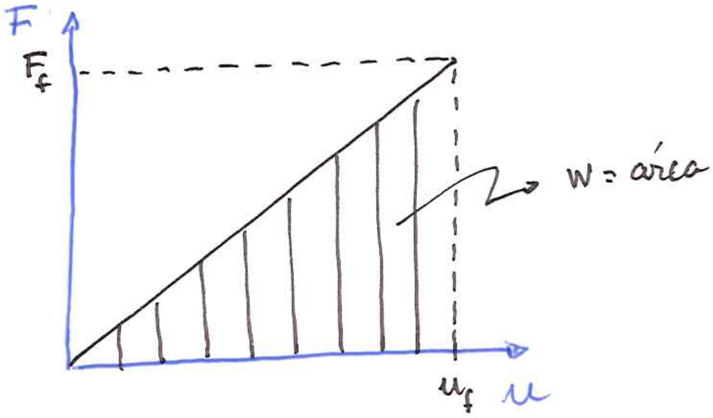
Para ilustrar isto, considere a aplicação de uma força axial numa barra de seção uniforme e engastada à esquerda.



A intensidade da força $\vec{F}$ é proporcional ao deslocamento $\vec{u}$:

$$\vec{F} = \frac{EA}{L}\vec{u}$$

Portanto, a força $\vec{F}$ será nula no início da aplicação (i) e assumirá o valor proporcional ao deslocamento final do ponto de aplicação no final (f). Graficamente, tem-se:



O trabalho no processo de aplicação da força $\vec{F}$ na barra será:

$$W = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot \delta\vec{u} = \int_0^{\vec{u}_f} \frac{EA}{L}\vec{u} \cdot \delta\vec{u} = \int_0^{u_f} \frac{EA}{L} u\,\delta u = \frac{EA}{L}\frac{u_f^2}{2}$$

ou $\quad W = \frac{1}{2} F_f u_f \quad$ (área sob o gráfico $F \times u$)

Portanto, o trabalho de aplicação da força axial na extremidade direita da barra é a metade do produto da intensidade final da força pelo deslocamento final do ponto de aplicação contado a partir do início da trajetória.

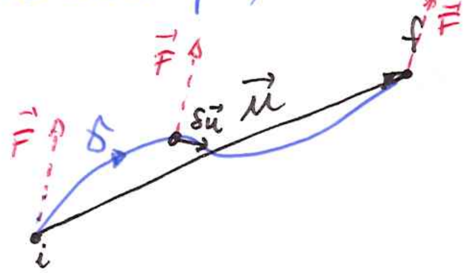
Este último resultado pode ser generalizado para a aplicação de uma força a um sólido elástico linear, ou seja,

$$W = \frac{1}{2}\vec{F} \cdot \vec{u}$$

onde $\vec{F}$ é a força no final da aplicação e $\vec{u}$ o vetor deslocamento do ponto de aplicação da origem ao final da trajetória.

6.2.4. Trabalho de uma força já aplicada

Há situações em que uma força já está aplicada no sólido e o ponto de aplicação dela se desloca. Nestes casos a força permanece invariável ao longo da trajetória. O trabalho realizado por essa força nesse deslocamento será:

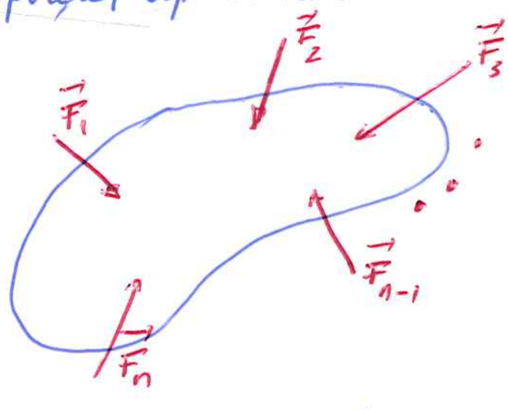


$$W = \int_{\gamma} \vec{F}\cdot\delta\vec{u} = \vec{F}\cdot\int_{\gamma}\delta\vec{u} = \vec{F}\cdot\vec{u}$$

onde $\vec{u}$ é o vetor deslocamento do ponto de aplicação da origem ao final da trajetória.

6.3. Energia de deformação

Considere um sistema mecânico conservativo constituído de um sólido e forças aplicadas nele. Considere além disso



que as forças são aplicadas ao sólido a partir da configuração não deformada tão lentamente que a variação de energia cinética do sistema é desprezível no processo de aplicação delas. Neste caso, todo o trabalho realizado pelas forças externas será responsável pela variação de energia de deformação do sólido da configuração inicial não deformada até a configuração final. Atribuindo o valor zero para a energia de deformação na configuração não deformada, tem-se que o trabalho das forças será igual à energia de deformação no final do processo de aplicação:

$$W = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{u}_i = U$$

Exemplo: Determine a energia de deformação acumulada numa barra linear elástica isotrópica axialmente carregada.

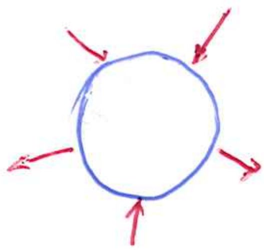
Solução: A energia de deformação acumulada na barra ao se aplicar a força $\vec{F}$ é igual ao trabalho de aplicação desta força, que já foi calculado no exemplo anterior. Portanto:

$$U = \frac{EA}{L}\frac{u^2}{2}$$

Observe que a energia de deformação acumulada na barra será a mesma se, ao invés de aplicar a força $\vec{F}$, se aplicar a força $-\vec{F}$.

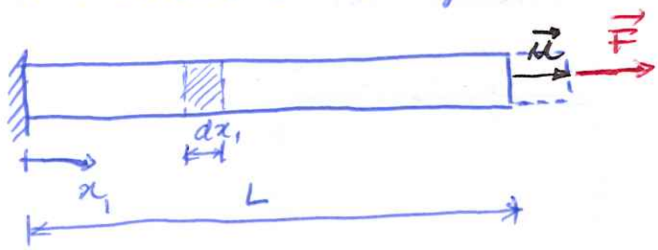
6.4. Trabalho das forças internas

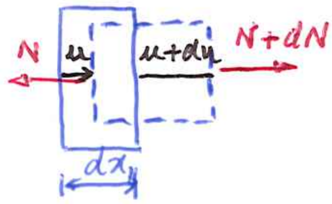
Considere uma partícula no interior de um sólido. Ela está sujeita à ação mecânica das partículas vizinhas chamada forças internas.



Estas forças realizam trabalho, pois a partícula é deformável. Mostraremos a seguir que o trabalho das forças internas no sólido é igual ao trabalho das forças superficiais sobre ele.

Comecemos mostrando isto numa barra axialmente carregada para depois mostrar o caso geral.





Vamos supor que a força $\vec{F}$ já está aplicada quando a barra se deforma. O caso em que a força é aplicada tem um desenvolvimento quase idêntico e leva ao mesmo resultado, ou seja, o trabalho das forças superficiais é igual ao das internas. O trabalho das forças N e N+dN sobre a fatia infinitesimal é:

$$\delta W_i = (N+dN)(u+du) - Nu$$

$$= Nu + Ndu + dNu - Nu$$

$$\therefore \delta W_i = Ndu + dNu = d(Nu)$$

Logo o trabalho interno total será:

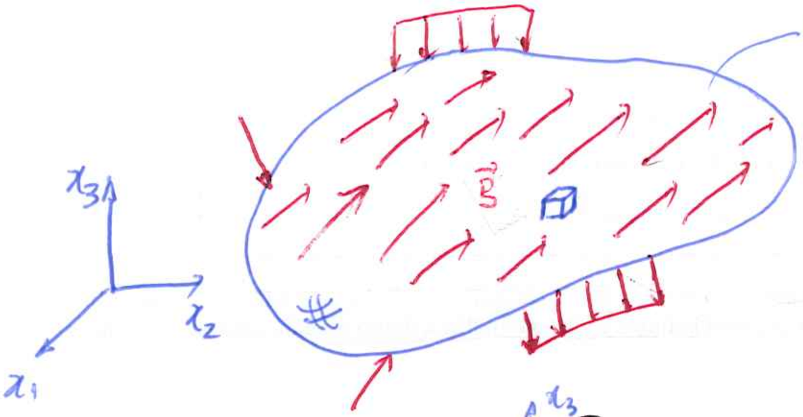
$$W_i = \int_0^L \delta W_i = \int_0^L d(Nu) = N(L)\,u(L) = Fu$$

que é igual ao trabalho da força superficial $\vec{F}$:

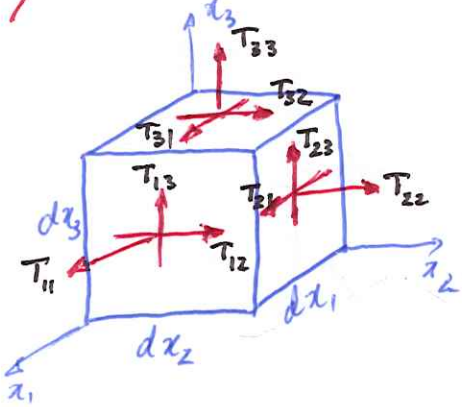
$$W_s = Fu.$$

Tem-se, pois:

$$W_i = W_s$$



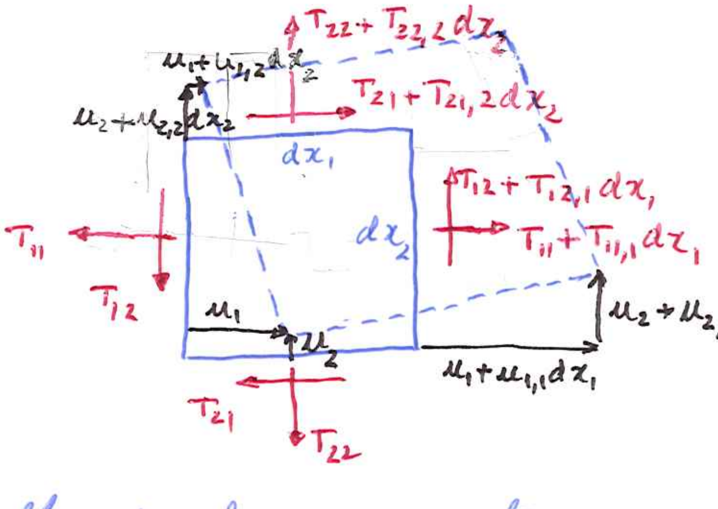
sólido submetido a forças superficiais e de corpo



T é causado pelas forças superficiais e de corpo

Vejamos o caso geral. Considere o sólido de volume V e superfície S submetido a forças externas já aplicadas (o caso de aplicação de forças é análogo e leva ao mesmo resultado), forças de superfície e de corpo. No interior dele é destacado um elemento infinitesimal orientado segundo $x_1 x_2 x_3$ (mostrado no detalhe com as tensões nas faces).

Comecemos obtendo o trabalho das forças internas sobre o elemento que atuam no plano $x_1 x_2$.



$\vec{u}$ é independente de T

O trabalho das forças que atuam segundo x_1 é:

$$\delta W_1^{12} = (T_{11} + T_{11,1}\,dx_1)\,dx_2\,dx_3\,(u_1 + u_{1,1}\,dx_1) - T_{11}\,dx_2\,dx_3\,u_1 +$$
$$+ (T_{21} + T_{21,2}\,dx_2)\,dx_1\,dx_3\,(u_1 + u_{1,2}\,dx_2) - T_{21}\,dx_1\,dx_3\,u_1$$
$$= (T_{11} u_{1,1} + T_{11,1} u_1 + T_{11,1} u_{1,1}\,dx_1 + T_{21} u_{1,2} + T_{21,2} u_1 + T_{21,2} u_{1,2}\,dx_2)\,dx_1\,dx_2\,dx_3$$

ou, desprezando os termos de 2.ª ordem entre os parênteses e chamando $dx_1 dx_2 dx_3$ de dV:

$$\delta W_1^{12} = (T_{11} u_{1,1} + T_{11,1} u_1 + T_{21} u_{1,2} + T_{21,2} u_1) dV$$

O trabalho das forças que atuam segundo x_2 é:

$$\delta W_2^{12} = (T_{22} + T_{22,2} dx_2) dx_1 dx_3 (u_2 + u_{2,2} dx_2) - T_{22} dx_1 dx_3 u_2 +$$

$$+ (T_{12} + T_{12,1} dx_1) dx_2 dx_3 (u_2 + u_{2,1} dx_1) - T_{12} dx_2 dx_3 u_2$$

ou $$\delta W_2^{12} = (T_{22} u_{2,2} + T_{22,2} u_2 + T_{12} u_{2,1} + T_{12,1} u_2) dV$$

O trabalho das forças internas sobre o elemento que atuam no plano $x_1 x_3$ será (por procedimento análogo ao do plano $x_1 x_2$) segundo a direção x_1 (excluído o trabalho de T_{11}, já computado):

$$\delta W_1^{13} = (T_{31} u_{1,3} + T_{31,3} u_1) dV$$

e segundo a direção x_3:

$$\delta W_3^{13} = (T_{33} u_{3,3} + T_{33,3} u_3 + T_{13} u_{3,1} + T_{13,1} u_3) dV$$

Finalmente, o trabalho das forças internas sobre o elemento que atuam no plano $x_2 x_3$ será (por procedimento análogo ao do plano $x_1 x_2$), segundo a direção x_2 (excluídos os trabalhos de T_{22} e T_{33}, já computados):

$$\delta W_2^{23} = (T_{32} u_{2,3} + T_{32,3} u_2) dV$$

e segundo a direção x_3:

$$\delta W_3^{23} = (T_{23} u_{3,2} + T_{23,2} u_3) dV$$

O trabalho total das forças internas sobre o elemento será a soma das seis parcelas: δW_1^{12}, δW_2^{12}, δW_1^{13}, δW_3^{13}, δW_2^{23} e δW_3^{23}:

$$\delta W_{int} = [T_{11} u_{1,1} + T_{22} u_{2,2} + T_{33} u_{3,3} + T_{21} u_{1,2} + T_{12} u_{2,1} + T_{31} u_{1,3} + T_{13} u_{3,1} +$$
$$+ T_{32} u_{2,3} + T_{23} u_{3,2} + (T_{11,1} + T_{21,2} + T_{31,3}) u_1 +$$
$$+ (T_{12,1} + T_{22,2} + T_{32,3}) u_2 + (T_{13,1} + T_{23,2} + T_{33,3}) u_3] \, dV$$

Lembrando que $T_{12} = T_{21}$, $T_{13} = T_{31}$, $T_{23} = T_{32}$, $u_{1,1} = E_{11}$, $u_{2,2} = E_{22}$, $u_{3,3} = E_{33}$, $u_{1,2} + u_{2,1} = 2E_{12}$, $u_{1,3} + u_{3,1} = 2E_{13}$, $u_{2,3} + u_{3,2} = 2E_{23}$ e que os termos entre parênteses são respectivamente $-B_1$, $-B_2$ e B_3 pela equação de equilíbrio, obtém-se:

$$\delta W_{int} = [T_{11} E_{11} + T_{22} E_{22} + T_{33} E_{33} + 2T_{12} E_{12} + 2T_{13} E_{13} + 2T_{23} E_{23} - B_1 u_1 - B_2 u_2 - B_3 u_3] \, dV$$

ou $$\delta W_{int} = [T_{ij} E_{ij} - B_i u_i] \, dV$$

Como:
$$T_{ij} E_{ij} = \frac{1}{2} T_{ij} (u_{i,j} + u_{j,i}) = T_{ij} u_{j,i}$$

e por sua vez:
$$T_{ij} u_{j,i} = (T_{ij} u_j)_{,i} - T_{ij,i} u_j = (T_{ij} u_j)_{,i} + B_i u_i$$

resulta que:
$$\delta W_{int} = (T_{ij} u_j)_{,i} \, dV$$

Integrando agora o trabalho interno em todo o volume do sólido, obtém-se:

$$W_{int} = \int_V \delta W_{int} = \int_V (T_{ij} u_j)_{,i} \, dV$$

Fazendo uso do teorema da divergência na última integral acima, obtém-se:

$$W_{int} = \int_S n_i T_{ij} u_j \, dS = \int_S u_i T_{ij} n_j \, dS$$

ou

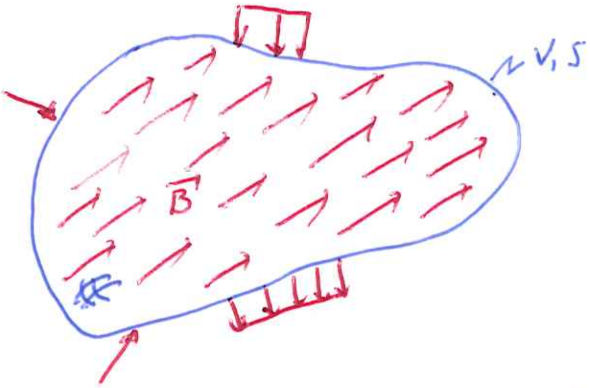
$$W_{int} = \int_S \vec{u} \cdot T\vec{n} \, dS$$ forças aplicadas

Portanto, o trabalho interno é igual ao trabalho das forças superficiais já aplicadas sobre o sólido.

No caso em que todas as forças superficiais são aplicadas no sólido deve-se acrescentar o fator $\frac{1}{2}$ ao resultado acima.

$$W_{int} = \int_S \frac{1}{2}\vec{u} \cdot T\vec{n} \, dS$$ aplicação das forças

6.5. Trabalho das forças externas



Considere o sólido acima submetido a forças externas, forças superficiais e de corpo. O trabalho realizado por essas forças é o trabalho externo, W_{ext}, e é dado por:

$$W_{ext} = W_{sup} + W_{cor} = \int_S \vec{u} \cdot T\vec{n} \, dS + \int_V \vec{B} \cdot \vec{u} \, dV$$

para forças já aplicadas, e

$$W_{ext} = W_{sup} + W_{cor} = \int_S \frac{1}{2}\vec{u} \cdot T\vec{n} \, dS + \int_V \frac{1}{2}\vec{B} \cdot \vec{u} \, dV$$

para aplicação das forças.

Retomando o resultado anterior, em que o trabalho interno infinitesimal é dado por:

$$\delta W_{int} = [T_{ij} E_{ij} - B_i u_i] \, dV$$

Integrando o trabalho interno em todo o sólido resulta:

$$W_{int} = \int_V T_{ij} E_{ij} \, dV - \int_V B_i u_i \, dV = \int_V T_{ij} E_{ij} \, dV - W_{cor}$$

ou, rearranjando os termos:

$$\int_V T_{ij} E_{ij} \, dV = W_{int} + W_{cor} = W_{sup} + W_{cor}$$

de onde se conclui que o trabalho externo, quando as forças externas já estão aplicadas é:

$$W_{ext} = \int_V T_{ij} E_{ij} \, dV = \int_V T E \, dV$$

e, quando as forças externas são aplicadas:

$$W_{ext} = \int_V \frac{1}{2} T_{ij} E_{ij} \, dV = \int_V \frac{1}{2} T E \, dV$$

6.6. Densidade de energia de deformação

Como visto, a energia de deformação armazenada no sólido é o trabalho de aplicação das forças externas. Logo:

$$U = W_{ext} = \int_V \frac{1}{2} T E \, dV$$

O termo:

$$\frac{1}{2} T E = \frac{1}{2} T_{ij} E_{ij}$$

é chamado de densidade de energia de deformação e será denotada por $\hat{U}$. Dimensionalmente é dada por $\frac{F}{L^2}$.

Exemplo Mostre que a densidade de energia é um invariante.

Solução:

Considere os sistemas de coordenadas $x_1 x_2 x_3$ e $x_1' x_2' x_3'$. A densidade de energia de deformação no segundo sistema é:

$$\hat{U}' = \frac{1}{2} T_{ij}' E_{ij}' = \frac{1}{2} Q_{ki} Q_{lj} T_{kl} \; Q_{mi} Q_{nj} E_{mn}$$

$$= \frac{1}{2} Q_{ki} Q_{mi} Q_{lj} Q_{nj} T_{kl} E_{mn}$$

$$= \frac{1}{2} \delta_{km} \delta_{ln} T_{kl} E_{mn} = \frac{1}{2} \delta_{km} T_{kn} E_{mn} = \frac{1}{2} T_{mn} E_{mn}$$

$$= \hat{U}$$

$$\therefore \quad \hat{U} = \hat{U}'$$

6.6.1. Densidade de energia de deformação para um sólido linear elástico isotrópico

No caso de um sólido linear elástico isotrópico, a partir da lei de Hooke:

$$T_{ij} = \lambda E_{kk} \delta_{ij} + 2\mu E_{ij}$$

e a densidade de energia torna-se:

$$\hat{U} = \frac{1}{2}(\lambda E_{kk} \delta_{ij} + 2\mu E_{ij}) E_{ij} = \frac{1}{2} \lambda E_{kk} \delta_{ij} E_{ij} + \mu E_{ij} E_{ij}$$

$$= \frac{1}{2} \lambda E_{kk} E_{ii} + \mu E_{ij} E_{ij}$$

ou

$$\hat{U} = \frac{1}{2} \lambda (E_{kk})^2 + \mu E_{ij} E_{ij}$$

Alternativamente, partindo de:

$$E_{ij} = \frac{1+\nu}{E_y} T_{ij} - \frac{\nu}{E} T_{kk} \delta_{ij}$$

a densidade de energia torna-se:

$$\hat{U} = \frac{1}{2} T_{ij} \left(\frac{1+\nu}{E_y} T_{ij} - \frac{\nu}{E} T_{kk} \delta_{ij} \right) = \frac{1+\nu}{2E_y} T_{ij} T_{ij} - \frac{\nu}{2E_y} T_{kk} T_{ij} \delta_{ij}$$

$$= \frac{1+\nu}{2E_y} T_{ij} T_{ij} - \frac{\nu}{2E_y} T_{kk} T_{ii}$$

ou

$$\hat{U} = \frac{1+\nu}{2E_y} T_{ij} T_{ij} - \frac{\nu}{2E_y} (T_{kk})^2$$

<u>Exemplo</u>: Determine a densidade de energia de deformação para um sólido linear elástico isotrópico em termos das tensões e deformações principais.

<u>Solução</u>:

Representação dos tensores de tensão e de deformação infinitesimal na base que corresponde às direções principais, que são as mesmas para T e E:

$$[T] = \begin{bmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{bmatrix}$$

$$[E] = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{bmatrix}$$

Densidade de energia no ponto:

Em função das tensões principais:

$$\hat{U} = \frac{1+\nu}{2E_y}(T_1^2+T_2^2+T_3^2) - \frac{\nu}{2E_y}(T_1+T_2+T_3)^2$$

$$= \frac{1+\nu}{2E_y}(T_1^2+T_2^2+T_3^2) - \frac{\nu}{2E_y}(T_1^2+T_2^2+T_3^2+2T_1T_2+2T_1T_3+2T_2T_3)$$

$$\hat{U} = \frac{1}{2E_y}(T_1^2+T_2^2+T_3^2) - \frac{\nu}{E_y}(T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3)$$

Em função das deformações principais:

$$\hat{U} = \frac{\lambda}{2}(E_1+E_2+E_3)^2 + \mu(E_1^2+E_2^2+E_3^2)$$

$$= \frac{\lambda}{2}(E_1^2+E_2^2+E_3^2+2E_1E_2+2E_1E_3+2E_2E_3) + \mu(E_1^2+E_2^2+E_3^2)$$

$$\hat{U} = \frac{2\mu+\lambda}{2}(E_1^2+E_2^2+E_3^2) + \lambda(E_1E_2+E_1E_3+E_2E_3)$$

Para o estado de tensão uniaxial:

$$T_2 = T_3 = 0$$

$$\hat{U} = \frac{T_1^2}{2E_y}$$

Para o estado de tensão biaxial ou plano:

$$T_3 = 0$$

$$\hat{U} = \frac{1}{2E_y}(T_1^2 + T_2^2) - \frac{\nu}{E_y} T_1 T_2$$

6.6.2. Densidades de energia de deformação volumétrica e distorcional

A densidade de energia de deformação pode ser decomposta em duas partes, uma relativa a variação volumétrica $\hat{U}_v$ e outra relativa a variação de forma $\hat{U}_d$ (d de distorcional):

$$\hat{U} = \hat{U}_v + \hat{U}_d$$

onde:

$$\hat{U}_v = \frac{1}{2} \tilde{T}_{ij} \tilde{E}_{ij} = \frac{1}{6} T_{jj} E_{kk} = \frac{1-2\nu}{E_y} T_{jj} T_{kk} = \frac{1-2\nu}{E_y} (T_{11} + T_{22} + T_{33})^2$$

e

$$\hat{U}_d = \hat{U} - \hat{U}_v = \frac{1}{12\mu} \left[(T_{11} - T_{22})^2 + (T_{11} - T_{33})^2 + (T_{22} - T_{33})^2 + 6(T_{12}^2 + T_{13}^2 + T_{23}^2) \right]$$

A densidade de energia de deformação distorcional é utilizada em teorias de falha de material.

Exemplo: Determine a densidade de energia de deformação distorcional em termos das tensões principais para um material linear elástico isotrópico.

Solução: a partir da representação do tensor no sistema de coordenadas correspondente às direções principais:

$$[T] = \begin{bmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{U}_d = \frac{1}{12\mu}\left[(T_1-T_2)^2+(T_1-T_3)^2+(T_2-T_3)^2\right]$$

Para o estado de tensão uniaxial: $T_2 = T_3 = 0$

$$\hat{U}_d = \frac{T_1^2}{6\mu}$$

Para o estado de tensão biaxial ou plano: $T_3 = 0$

$$\hat{U}_d = \frac{1}{12\mu}\left(T_1^2+T_2^2+(T_1-T_2)^2\right) = \frac{1}{12\mu}\left(T_1^2+T_2^2+T_1^2-2T_1T_2+T_2^2\right)$$

$$\hat{U}_d = \frac{1}{6\mu}\left(T_1^2-T_1T_2+T_2^2\right)$$

6.7. Limites físicos das constantes elásticas do material

A partir do princípio de que a densidade de energia de deformação $\hat{U}$ é sempre positiva, pode-se estabelecer limites físicos dentro dos quais os valores das constantes elásticas de qualquer material sólido linear elástico isotrópico se encontram.

De imediato, como:

$$\hat{U} = \frac{1}{2}\lambda(E_{kk})^2 + \mu E_{ij}E_{ij} \geq 0$$

deve-se ter:

$$\lambda \geq 0 \quad \text{e} \quad \mu \geq 0$$

Considere agora o estado uniaxial de tensão

$$[T] = \begin{bmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{U} = \frac{T_1^2}{2E_y} \geq 0$$

Logo:

$$E_y > 0$$

Considere o estado de cisalhamento puro:

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & T_{12} & 0 \\ T_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{U} = \frac{1+\nu}{2E_y}\left(2T_{12}^2\right) = \frac{T_{12}^2}{2E_y}(1+\nu) \geq 0$$

Logo:

$$1+\nu \geq 0 \quad \text{ou} \quad \nu \geq -1$$

Considere, finalmente, o estado de pressão hidrostática:

$$[T] = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \quad , \quad p > 0$$

$$\hat{U} = \frac{1+\nu}{2E_y} 3p^2 - \frac{\nu}{2E_y}(-3p)^2 = \frac{3p^2}{2E_y}(1-2\nu) \geq 0$$

Logo:

$$1-2\nu \geq 0 \quad \text{ou} \quad \nu \leq \frac{1}{2}$$

Juntando ao resultado anterior, tem-se:

$$-1 \leq \nu \leq \frac{1}{2}$$

Como o módulo volumétrico é:

$$k = \frac{E_y}{3(1-2\nu)}$$

conclui-se que $k > 0$.

6.8. Simetria do tensor de elasticidade

Partindo da densidade de energia de deformação:

$$\frac{1}{2} T_{ij} E_{ij} = \frac{1}{2} C_{ijkl} E_{kl} E_{ij} = \frac{1}{2} C_{klij} E_{ij} E_{kl}$$

Portanto,

$$(C_{ijkl} - C_{klij}) E_{ij} E_{kl} = 0 \text{, para qualquer } E.$$

Logo:

$$C_{ijkl} = C_{klij}$$

Como conseqüência deste resultado, há apenas 21 coeficientes diferentes no tensor de elasticidade.

Em decorrência da simetria de C_{ijkl} surgem dois resultados que relacionam densidade de energia de deforção a tensão e a deformação infinitesimal. Tomando a derivada de $\hat{U}$ em relação a E_{ij}:

$$\frac{\partial}{\partial E_{ij}} \hat{U} = \frac{\partial}{\partial E_{ij}} \left(\frac{1}{2} T_{mn} E_{mn} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial T_{mn}}{\partial E_{ij}} E_{mn} + T_{mn} \frac{\partial}{\partial E_{ij}} E_{mn} \right)$$

mas $$\frac{\partial}{\partial E_{ij}} T_{mn} = \frac{\partial}{\partial E_{ij}} (C_{mnkl} E_{kl}) = C_{mnkl} \frac{\partial}{\partial E_{ij}} E_{kl} = C_{mnij}$$

e $$T_{mn} \frac{\partial}{\partial E_{ij}} E_{mn} = T_{ij}$$

Logo: $$\frac{\partial \hat{U}}{\partial E_{ij}} = \frac{1}{2} \left(C_{mnij} E_{mn} + T_{ij} \right) = \frac{1}{2} \left(C_{ijmn} E_{mn} + T_{ij} \right) = T_{ij}$$

Portanto: $$\frac{\partial \hat{U}}{\partial E_{ij}} = T_{ij}$$

Partindo deste último resultado:

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial E_{ij}} = \frac{\partial \hat{U}}{\partial T_{mn}} \frac{\partial T_{mn}}{\partial E_{ij}} = C_{mnij} \frac{\partial \hat{U}}{\partial T_{mn}} = T_{ij}$$

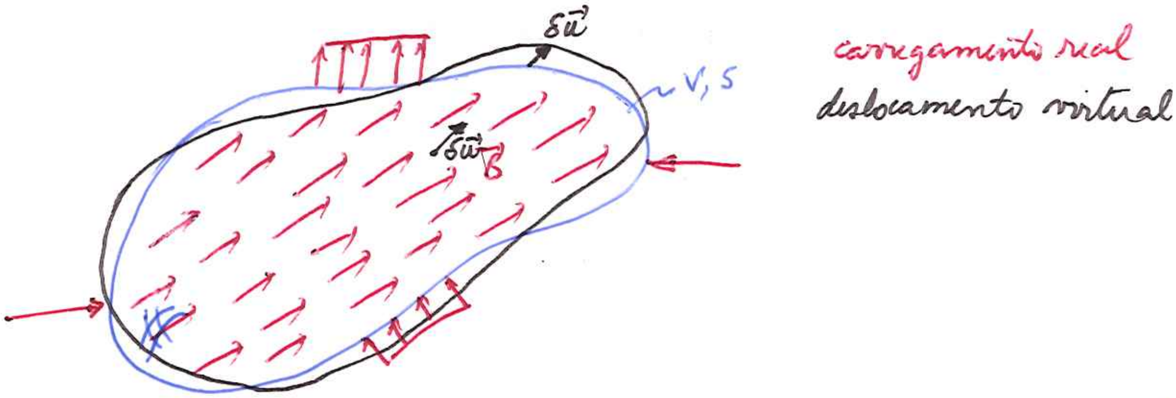
$$\frac{1}{2} C_{mnij} E_{ij} \frac{\partial \hat{U}}{\partial T_{mn}} = \frac{1}{2} E_{mn} T_{mn}$$

ou $$\frac{1}{2} T_{mn} \frac{\partial \hat{U}}{\partial T_{mn}} = \frac{1}{2} E_{mn} T_{mn}$$

ou $$\frac{1}{2} T_{mn} \left(\frac{\partial}{\partial T_{mn}} \hat{U} - E_{mn} \right) = 0 \text{, para qualquer } T$$

Logo:
$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial T_{ij}} = E_{ij}$$

6.9. O princípio do trabalho virtual



Considere um sólido submetido a um carregamento real. Assim carregado, ele é submetido a um campo de deslocamento independente do carregamento real, denominado deslocamento virtual e denotado $\delta\vec{u}$ e supostamente infinitesimal. O trabalho realizado pelas forças reais externas será, como já visto:

$$\delta W = \underbrace{\int_S (T\vec{n}) \cdot \delta\vec{u}\, dS}_{\text{forças superficiais}} + \underbrace{\int_V \vec{B} \cdot \delta\vec{u}\, dV}_{\text{forças de corpo}}$$

ou alternativamente:

$$\delta W = \int_V T\,\delta E\, dV$$

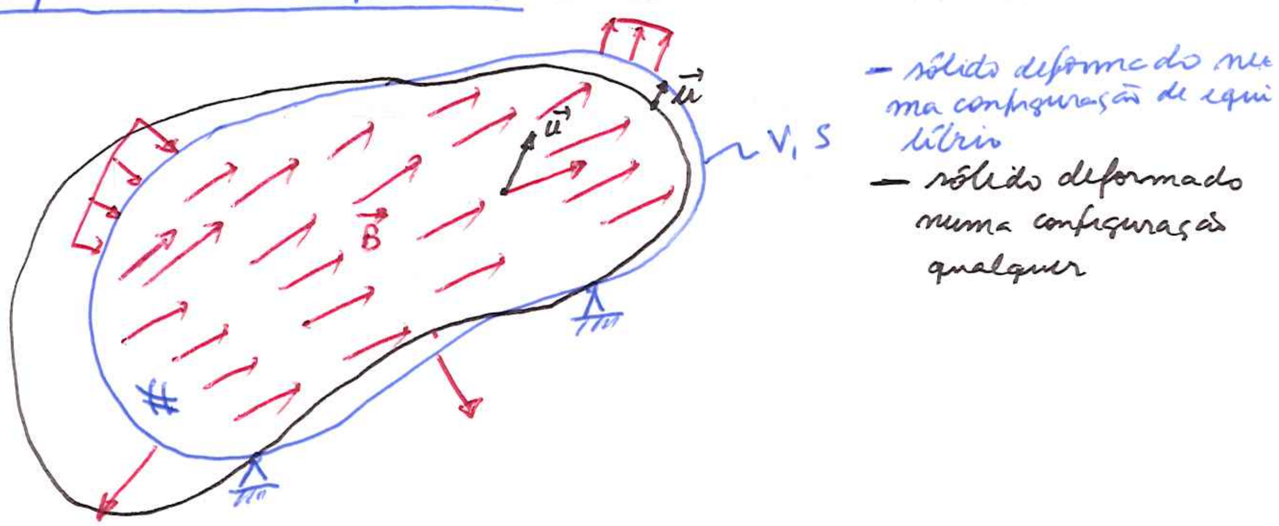
onde δE é o tensor deformação infinitesimal causado pelo deslocamento virtual.

Igualando as duas equações acima tem-se o princípio do trabalho virtual:

$$\underbrace{\int_V T\,\delta E\, dV}_{\substack{\text{energia de}\\ \text{deformação virtual}}} = \underbrace{\int_S (T\vec{n}) \cdot \delta\vec{u}\, dS + \int_V \vec{B} \cdot \delta\vec{u}\, dV}_{\substack{\text{trabalho virtual}\\ \text{das forças externas}}}$$

Esta última expressão pode ser usada na aplicação do método dos elementos finitos (MEF) a problemas da mecânica dos sólidos.

6.10. Energia potencial de deformação



Considere o sólido carregado e apoiado conforme a figura acima. Diz-se que o sistema mecânico formado pelo sólido e carregamento tem uma energia potencial de deformação relativa à configuração de referência, ou seja, o sólido não deformado. Essa energia potencial é igual ao trabalho a ser realizado para levar o sistema mecânico da configuração de referência até uma configuração deformada qualquer dentro das limitações impostas pelos apoios. Neste processo, as forças do sistema mecânico já estão aplicadas enquanto forças externas ao sistema são aplicadas para levá-lo da configuração de referência à configuração qualquer. Logo, o trabalho de todas as forças, as já aplicadas e as que estão sendo aplicadas, deve ser igual à variação da energia de deformação do sistema da configuração de referência, que no caso é nula, até a configuração qualquer U:

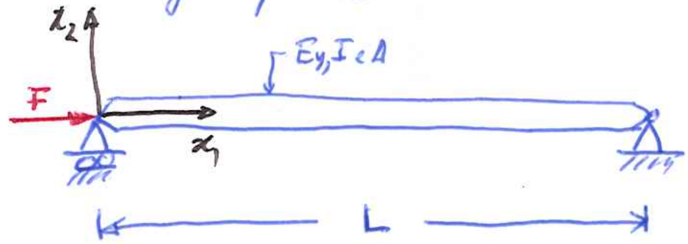
$$W_{total} = \underbrace{W_{ja}}_{\text{já aplicada}} + \underbrace{W_{apl.}}_{\text{aplicação}} = U$$

$$\Pi = W_{apl} = U - W_{ja}$$

ou

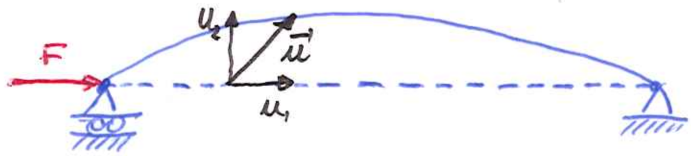
$$\Pi = \int_V \frac{1}{2} T_{ij} E_{ij}\, dV - \underbrace{\overbrace{\int_S (T\vec{n})\cdot\vec{u}\, dS}^{\text{superficiais}} - \overbrace{\int_V \vec{B}\cdot\vec{u}\, dV}^{\text{de corpo}}}_{\substack{\text{trabalho das forças do sistema} \\ \text{(já aplicadas)}}}$$

Exemplo: Determine a energia potencial do sistema mecânico abaixo.



Solução:

Consideremos uma configuração qualquer do sistema para pequenas deformações:



A viga sob o carregamento indicado está sujeita ao estado uniaxial de tensão em todos os pontos:

$$[T] = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde

$$T_{11} = E_y u_{1,1} - E_y x_2 u_{2,1,1} = E_y (u_{1,1} - x_2 u_{2,1,1})$$

A densidade de energia de deformação será:

$$\hat{U} = \frac{T_{11}^2}{2E_y} = \frac{1}{2E_y}\left(E_y^2 (u_{1,1} - x_2 u_{2,1,1})^2\right) = \frac{E_y}{2}\left(u_{1,1}^2 - 2x_2 u_{1,1} u_{2,1,1} + x_2^2 u_{2,1,1}^2\right)$$

A energia de deformação armazenada no sólido será:

$$U = \int_V \hat{U}\, dV = \int_0^L \int_A \frac{E_y}{2}\left(u_{1,1}^2 - 2x_2 u_{1,1} u_{2,1,1} + x_2^2 u_{2,1,1}^2\right) dA\, dx_1$$

$$= \int_0^L \frac{E_y}{2}\left[A u_{1,1}^2 - 2 u_{1,1} u_{2,1,1} \int_A x_2\, dA + u_{2,1,1}^2 \int_A x^2 dA\right] dx_1$$

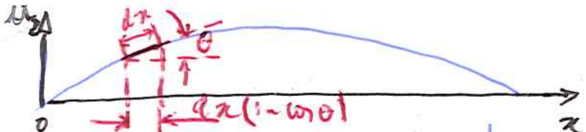
ou seja,

$$U = \frac{E_y A L}{2} u_{1,1}^2 + \int_0^L \frac{E_y I}{2} u_{2,1,1}^2\, dx_1$$

Finalmente, a energia potencial será:

$$\Pi = U - F u_1(0) = \int_0^L \frac{E_y I}{2} u_{2,1,1}^2\, dx_1 + \frac{E_y A L}{2} u_{1,1}^2 - F u_1(0)$$

Se considerarmos o deslocamento do ponto de aplicação de F devido à flexão (efeito de 2ª ordem):



$$u_f = \int_0^L (1-\cos\theta)\, dx_1 \cong \int_0^L \frac{\theta^2}{2} dx_1 = \int_0^L \frac{(u_{2,1})^2}{2} dx_1$$

e o correspondente trabalho de F será:

$$\int_0^L \frac{F(u_{2,1})^2}{2} dx_1$$

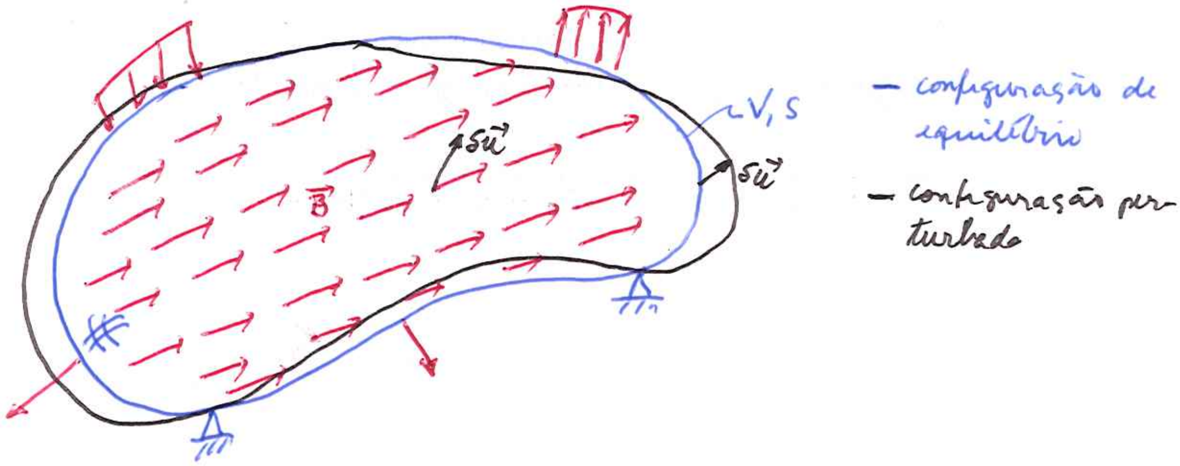
E assim, a energia potencial torna-se:

$$\Pi = U - F u_1(0) - \int_0^L \frac{F(u_{2,1})^2}{2} dx_1$$

ou

$$\Pi = \int_0^L \left[\frac{E_y I}{2} u_{2,1,1}^2 - \frac{F u_{2,1}^2}{2}\right] dx_1 + \frac{E_y A}{2} L u_{1,1}^2 - F u_1(0)$$

6.11. Princípio da energia potencial estacionária



Considere um sistema mecânico na configuração de equilíbrio (0). A partir desta configuração "desloca-se" o sistema de um infinitésimo $\delta\vec{u}$. Neste deslocamento a variação da energia potencial será:

$$\delta\Pi_{(0)} = \underbrace{\int_V T_{(0)ij}\,\delta E_{ij}\,dV}_{*} - \int_S (T_{(0)}\vec{n})\cdot\delta\vec{u}\,dS - \int_V \vec{B}\cdot\delta\vec{u}\,dV$$

$$* \quad \delta\hat{U}_{(0)} = \delta\left(\tfrac{1}{2}T_{(0)ij}E_{(0)ij}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\delta T_{(0)ij}E_{ij} + T_{(0)ij}\delta E_{ij}\right) = \tfrac{1}{2}\left(C_{ijkl}\,\delta E_{(0)kl}E_{(0)ij} + T_{(0)ij}\,\delta E_{(0)ij}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(C_{klij}E_{(0)ij}\,\delta E_{(0)kl} + T_{(0)ij}\,\delta E_{(0)ij}\right) = \tfrac{1}{2}\left(T_{(0)ij}\,\delta E_{(0)ij} + T_{(0)ij}\,\delta E_{(0)ij}\right) = T_{(0)ij}\,\delta E_{(0)ij}$$

Como: $\quad T_{(0)ij}\,\delta E_{ij} = \tfrac{1}{2}T_{(0)ij}\left(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}\right) = T_{(0)ij}\,\delta u_{i,j} = \left(T_{(0)ij}\,\delta u_i\right)_{,j} - T_{(0)ij,j}\,\delta u_i$

então:

$$\delta\Pi_{(0)} = \int_V \left[\left(T_{(0)ij}\,\delta u_i\right)_{,j} - T_{(0)ij,j}\,\delta u_i\right]dV - \int_S T_{(0)ij}\,n_j\,\delta u_i\,dS - \int_V B_i\,\delta u_i\,dV$$

$$= \int_V \left(T_{(0)ij}\,\delta u_i\right)_{,j}dV - \int_V \left(T_{(0)ij,j} + B_i\right)\delta u_i\,dV - \int_S T_{(0)ij}\,n_j\,\delta u_i\,dS$$

Aplicando o teorema da divergência:

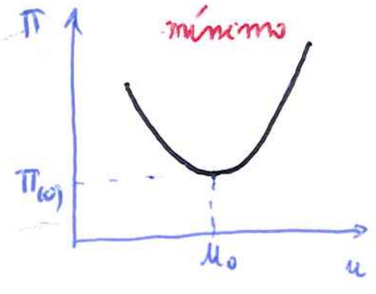
$$\delta\Pi_{(0)} = \int_S T_{(0)ij}\,n_j\,\delta u_i\,dS - \int_V \left(T_{(0)ij,j} + B_i\right)\delta u_i\,dV - \int_S T_{(0)ij}\,n_j\,\delta u_i\,dS$$

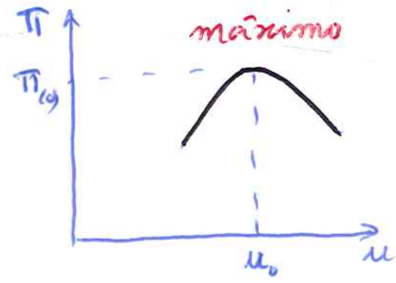
Como: $\quad T_{(0)ij,j} + B_i = 0$, pela configuração de equilíbrio do sistema,

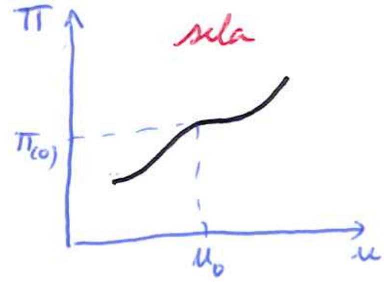
resulta finalmente que:

$$\delta \Pi_{(0)} = 0$$

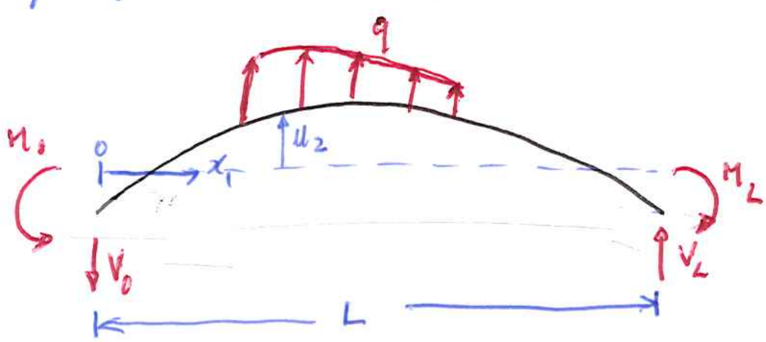
ou seja, a variação da energia potencial em torno da configuração de equilíbrio do sistema mecânico é nula. Este é o <u>princípio da energia potencial estacionária</u>.







<u>Exemplo</u>: Obtenha a energia potencial do sistema mecânico abaixo e, a partir do princípio da energia potencial estacionária, obtenha as equações de equilíbrio da viga.



<u>Solução</u>: Temos estado uniaxial de tensão ao longo da viga:

$$[T] = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde T_{11} é a tensão de flexão:

$$T_{11} = -\frac{M}{I} x_2$$

onde:

$$M = E_y I u_{2,11}$$

Portanto, a densidade de energia de deformação será:

$$\hat{U} = \frac{T_{11}^2}{2E_y} = \frac{1}{2} E_y u_{2,11}^2 x_2^2$$

A energia de deformação armazenada no sólido numa configuração qualquer será:

$$U = \int_V \hat{U}\, dV = \int_0^L \left(\int_A \frac{1}{2} E_y u_{2,11}^2 x_2^2 \, dA \right) dx_1 = \int_0^L \frac{E_y I}{2} u_{2,11}^2 \, dx_1$$

e o trabalho das forças e momentos já aplicados será:

$$W = \int_0^L q u_2 \, dx_1 - V_0 u_2(0) - M_0 u_{2,1}(0) + V_L u_2(L) + M_L u_{2,1}(L)$$

Logo, a energia potencial do sistema será:

$$\Pi = \int_0^L \frac{E_y I}{2} u_{2,11}^2 \, dx_1 - \int_0^L q u_2 \, dx_1 + V_0 u_2(0) + M_0 u_{2,1}(0) - V_L u_2(L) - M_L u_{2,1}(L)$$

Vamos obter a variação da energia potencial em torno da configuração de equilíbrio do sistema:

$$\delta\Pi = \int_0^L E_y I u_{2,11} \, \delta u_{2,11} \, dx_1 - \int_0^L q \, \delta u_2 \, dx_1 + V_0 \, \delta u_2(0) + M_0 \, \delta u_{2,1}(0) - V_L \, \delta u_2(L) - M_L \, \delta u_{2,1}(L)$$

Integrando duas vezes por partes a primeira integral do segundo membro, resulta:

$$\delta\Pi = \int_0^L \left(E_y I u_{2,1111} - q \right) \delta u_2 \, dx_1 + \left[\left((E_y I u_{2,11})_{,1} \right) \Big|_{x=L} - V_L \right] \delta u_2(L) + \left[\left(E_y I u_{2,11} \right) \Big|_{x=L} - M_L \right] \delta u_{2,1}(L)$$

$$- \left[\left((E_y I u_{2,11})_{,1} \right) \Big|_{x=0} - V_0 \right] \delta u_2(0) - \left[\left(E_y I u_{2,11} \right)_{x=0} - M_0 \right] \delta u_{2,1}(0)$$

Do princípio de estacionariedade, $\delta\Pi = 0$. Como esta igualdade deve ser válida para qualquer perturbação de deslocamento δu_2, resulta que deve-se ter:

$$E_y I u_{2,1111} - q = 0$$

$$V_0 = (E_y I u_{2,111})_{,1}\Big|_{x=0}$$

$$M_0 = (E_y I u_{2,11})\Big|_{x=0}$$

$$V_L = (E_y I u_{2,11})_{,1}\Big|_{x=L}$$

$$M_L = (E_y I u_{2,11})\Big|_{x=L}$$