

## Instabilidade estrutural: o problema de flambagem

### 5.1. Introdução

O termo flambagem muitas vezes é empregado equivocadamente para significar a deflexão de uma viga. A flambagem é um fenômeno de instabilidade estrutural que no caso de uma coluna carregada sob compressão leva à flexão da coluna, daí, presume-se, a origem do sentido equívoco do termo.

No Capítulo 4, foi feito um breve comentário sobre a instabilidade estrutural, quando se estudou energia potencial. Lá se viu que se energia potencial observa um ponto de mínimo em relação às componentes de deslocamento generalizado, então esse ponto corresponde a uma posição de equilíbrio estável da estrutura submetida ao específico carregamento. Caso o ponto seja de sela ou de máximo, o equilíbrio é instável, isto é, qualquer pequena perturbação (alteração das componentes de deslocamento generalizado) leva a estrutura a buscar outra posição de equilíbrio, se houver, o que, para uma coluna carregada sob compressão, leva a uma configuração flexionada no novo ponto de equilíbrio.

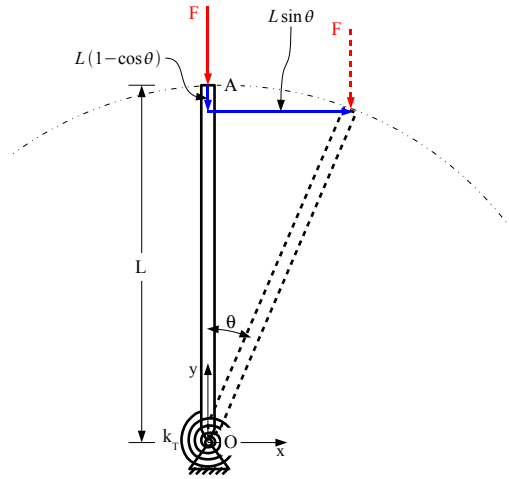


FIGURA 5.1. Coluna idealizada: energia potencial versus ângulo

Veja-se um exemplo simples. Precisamente uma coluna rígida suportada na base por uma mola de torção, conforme ilustra a Figura 5.1. Para avaliar a energia potencial do sistema, deve-se ter em conta que o ponto \$A\$ de aplicação da força \$F\$ pode descrever uma trajetória circular em torno do ponto \$O\$, ou seja, o deslocamento de \$A\$ terá componentes horizontal e vertical dadas respectivamente por:

$$u = L \sin \theta \quad (5.1)$$

$$v = L(1 - \cos \theta) \quad (5.2)$$

Considere uma configuração qualquer da coluna, indicada pelo ângulo \$\theta\$ na Figura 5.1. Aí a energia potencial em relação à configuração de referência (coluna na posição vertical) é expressa como (Equação 4.162):

$$E_p = U - Fv = \frac{k_T \theta^2}{2} - FL(1 - \cos \theta) \quad (5.3)$$

Logo, a energia potencial do sistema é função de \$\theta\$.

O sistema alcança o equilíbrio no ponto de estacionariedade da energia potencial, ou seja, onde:

$$\frac{d}{d\theta} E_p = k_T \theta - FL \sin \theta = 0 \quad (5.4)$$

Conclui-se, portanto, que o equilíbrio ocorre em \$\theta\_0 = 0\$, como era de se esperar.

Convém agora investigar sobre a estabilidade do ponto de equilíbrio, isto é, verificar se  $\theta_0 = 0$  é um ponto de máximo, de mínimo ou de sela. Para tanto, faz-se necessário observar o sinal da derivada de segunda ordem da energia potencial no ponto de equilíbrio:

$$\frac{d^2}{d\theta^2} E_p \Big|_{\theta=0} = (k_T - FL \cos \theta) \Big|_{\theta=0} = k_T - FL \quad (5.5)$$

Da Equação 5.5, observa-se que o sinal da derivada de segunda ordem de  $E_p$  depende dos parâmetros  $k_T$ ,  $L$  e  $F$ . Supondo os dois primeiros fixos, obtêm-se duas possibilidades para a força  $F$ , indicadas na Tabela 1. O gráfico da Figura 5.2 ilustra o comportamento da energia potencial como função do ângulo de inclinação para  $F < \frac{k_T}{L}$  (estabilidade) e  $F \geq \frac{k_T}{L}$  (instabilidade).

	Condição	$\frac{d^2 E_p}{d\theta^2}$	Topologia	Tipo de sistema
1	$F < \frac{k_T}{L}$	$> 0$	ponto de mínimo	estável
2	$F \geq \frac{k_T}{L}$	$\leq 0$	ponto de máximo	instável

TABELA 1. Condições de estabilidade para a coluna idealizada

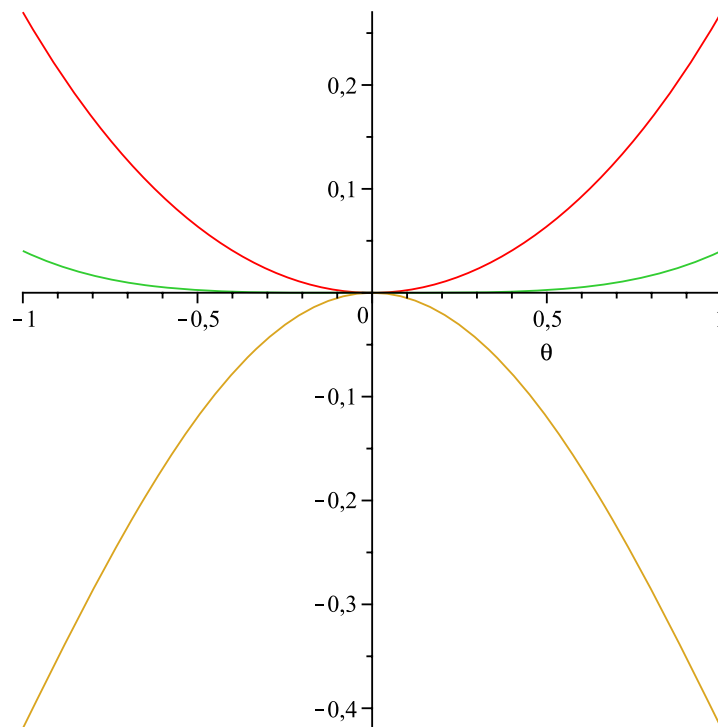


FIGURA 5.2. Coluna idealizada: energia potencial versus ângulo

### 5.2. A fórmula de Euler para colunas bi-apoiadas

Deixando de lado uma situação idealizada, vai-se considerar uma coluna bi-apoiada, conforme a Figura 5.3. A energia de deformação envolve neste caso a parcela de força axial e a de flexão. Quanto à primeira, tem-se:

$$\int_0^L \frac{N^2}{2EA} dx = \int_0^L \frac{EA}{2} (u')^2 dx \quad (5.6)$$

e quanto à segunda:

$$\int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx = \int_0^L \frac{EI}{2} (v'')^2 dx \quad (5.7)$$

de modo que a energia potencial da viga bi-apoiada é:

$$E_p = \int_0^L \frac{EA}{2} (u')^2 dx + \int_0^L \frac{EI}{2} (v'')^2 dx - F h(0) \quad (5.8)$$

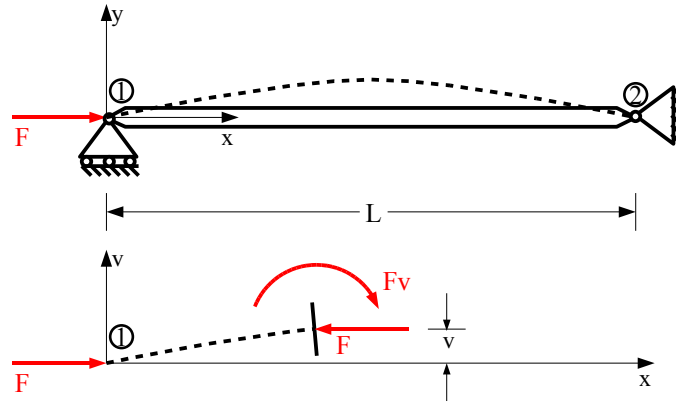


FIGURA 5.3. Coluna bi-apoiada

onde  $h(0)$  é o deslocamento horizontal do ponto de aplicação da força  $F$ .

Sobre  $h(0)$ , deve-se observar que ele é o resultado de dois efeitos sobrepostos, quais sejam, os efeitos da deformação axial e da flexão da viga. O primeiro é simplesmente denotado por  $u(0)$ . Já o segundo requer o auxílio da Figura 5.4 que mostra o “*encurtamento*” axial sofrido pelo elemento infinitesimal de coluna. Portanto, o “*encurtamento*” da coluna devido exclusivamente à flexão torna-se numa aproximação de segunda ordem, tendo em conta que  $\theta$  é suficientemente pequeno:

$$\int_0^L (1 - \cos \theta) dx \cong \int_0^L \frac{\theta^2}{2} dx \quad (5.9)$$

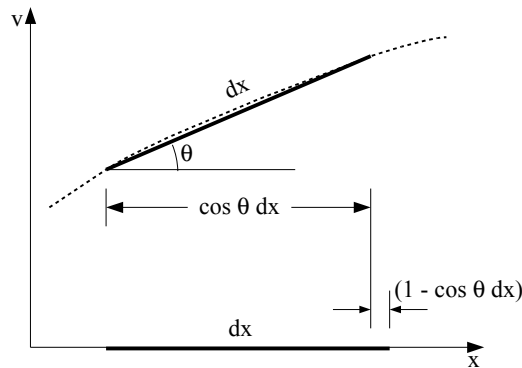


FIGURA 5.4. Detalhe da projeção axial de um elemento infinitesimal da coluna

Desta forma, a energia potencial pode ser reescrita como:

$$E_p = E_p(u, v) = \int_0^L \left( \frac{EA}{2} (u')^2 + Fu' - \frac{1}{2}F(v')^2 - \frac{EI}{2} (v'')^2 \right) dx \quad (5.10)$$

A primeira variação da energia potencial é <sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} \delta E_p &= \int_0^L (EAu' \delta u' + (EIv'' \delta v'' - Fv' \delta v')) dx - F\delta u(0) \\ &= \int_0^L ((EAu' + F) \delta u' + (EIv'' \delta v'' - Fv' \delta v')) dx \end{aligned} \quad (5.11)$$

na qual se empregou a seguinte relação na passagem da primeira para a segunda linha:

$$\delta u(0) = - \int_0^L F \frac{d}{dx} \delta u dx \quad (5.12)$$

E a sua segunda variação:

<sup>1</sup>Veja como obter o primeiro e o segundo variacionais de um funcional no Apêndice F.

$$\delta^2 E_p = \int_0^L \left( EA (\delta u')^2 + EI (\delta v'')^2 - F (\delta v')^2 \right) dx \quad (5.13)$$

Retornando à primeira variação da energia potencial, Equação 5.11, a fim de estudar o ponto de equilíbrio do sistema, ou seja, a estacionariedade da energia potencial,  $\delta E_p = 0$ , integrando por partes duas vezes o primeiro termo e uma vez o segundo termo do segundo parênteses, obtém-se:

$$\begin{aligned} \delta E_p &= \int_0^L (EAu' + F) \delta u' dx + \int_0^L (EIv'''' + Fv'') \delta v dx + \\ &+ (EIv'' \delta v')_0^L - (EIv''' \delta v)_0^L - (Fv' \delta v)_0^L \end{aligned} \quad (5.14)$$

No segundo membro da Equação 5.14, no terceiro termo,  $EIv''$  é o momento fletor  $M$ , que é nulo em  $x = 0$  e  $x = L$ ; e  $\delta v(0) = \delta v(L) = 0$  devido às restrições dos apoios. Com isto, chega-se finalmente a:

$$\delta E_p = \int_0^L (EAu' + F) \delta u' dx + \int_0^L (EIv'''' + Fv'') \delta v dx \quad (5.15)$$

Como as variações  $\delta u$  e  $\delta v$  são quaisquer, resulta da estacionariedade do variacional da energia potencial no equilíbrio do sistema ( $\delta E_p = 0$ ):

$$EA \frac{d}{dx} u = -F \quad (5.16)$$

e:

$$\frac{d^4}{dx^4} v + \frac{F}{EI} \frac{d^2}{dx^2} v = 0 \quad (5.17)$$

Após duas sucessivas integrações da Equação 5.17 no intervalo  $[0, L]$  pode-se chegar à sua forma alternativa:

$$\frac{d^2}{dx^2} v + \frac{F}{EI} v = 0 \quad (5.18)$$

que pode ser também obtida pela substituição do momento fletor  $-Fv$  na equação da linha elástica de uma viga de Bernoulli, conforme ilustra a Figura 5.3. A solução desta última é:

$$v = A \operatorname{sen}(\lambda x) + B \operatorname{cos}(\lambda x) \quad (5.19)$$

onde:

$$\lambda = \sqrt{\frac{F}{EI}} \quad (5.20)$$

Aplicando agora as condições de apoio à Equação 5.27, determinam-se a constante  $B$  e o parâmetro  $\lambda$ :

$$v|_{x=0} = 0 \Rightarrow B = 0 \quad (5.21)$$

$$v|_{x=L} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{L} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.22)$$

Logo, a expressão final da linha elástica no equilíbrio do sistema é:

$$v = A \operatorname{sen}\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \quad (5.23)$$

Resta agora verificar a estabilidade deste equilíbrio. Para tanto, retornando ao segundo variacional da energia potencial do sistema, Equação 5.13, no ponto de equilíbrio do sistema, quando a relação entre a força  $F$  e a rigidez à flexão  $EI$  é bem definida, e fazendo, por exemplo,  $\delta u = 0$  e  $\delta v = A \operatorname{sen}\left(n\pi \frac{x}{L}\right)$ , resulta após substituição que:

$$\delta^2 E_p = -n^4 \pi^4 \frac{A^2 EI}{L^2} \int_0^L \cos\left(2n\pi \frac{x}{L}\right) dx = 0 \quad (5.24)$$

Logo, fica mostrado que nesses pontos de equilíbrio não há estabilidade do sistema.

Para se conhecer a força crítica na iminência da instabilidade requer-se umas considerações sobre a razão  $F/EI$  nas situações de equilíbrio, i. e.:

$$F = EI \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \quad (5.25)$$

Se  $n = 0$ , tem-se  $v \equiv 0$ ,  $E_p = E_p(u)$  e conseqüentemente o equilíbrio seria estável, como se verifica pela Equação 5.13 ao se cancelarem os termos em  $v$ . Pela Equação 5.25, para o valor de  $n = 1$  tem-se o menor valor da força  $F$  (primeira crítica), excetuando-se a força nula, que não tem sentido nesta análise. Portanto, a força crítica de flambagem (ou instabilidade) da coluna é:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (5.26)$$

que é a chamada *Fórmula de Euler* para colunas concentricamente carregadas à compressão.

Fisicamente pode-se descrever o fenômeno do seguinte modo. Carregando-se a coluna muito lentamente observa-se de início nenhuma flexão da mesma. Quando a força atinge o valor dado pela Equação 5.26, a coluna admite flexão, bastando para tanto qualquer mínima perturbação para que isso ocorra e o sistema se desestabilize (ou se flexione) para não retornar mais à configuração não flexionada.

COMENTÁRIO 5.1. *Abaixo da primeira crítica o sistema não admite flexão, conseqüentemente a correspondente parcela da energia potencial é idênticamente nula e o equilíbrio na configuração reta da coluna é estável. Uma pergunta que vem à mente aqui é sobre o que ocorre com o sistema se a força for maior que a primeira crítica. Primeiro deve-se observar que o carregamento da coluna é gradativo, partindo do zero até o valor final da força aplicada. Logo, se a força final aplicada for maior que a primeira crítica, ela necessariamente deve passar pelo valor crítico que é quando o sistema perde a estabilidade e adquire movimento, ou seja, uma dinâmica própria que pode afetar drasticamente o problema. O que se deve enfatizar é que o sistema deixa o equilíbrio estático a partir da primeira crítica.*

### 5.3. A fórmula de Euler para uma coluna submetida a outros apoios

Como visto na seção anterior, obteve-se a expressão da carga crítica de flambagem para uma coluna bi-apoiada. Pode-se mostrar que para diversas condições de apoio a fórmula de Euler, Equação 5.26, se repete a menos de um coeficiente dependente do modo como a coluna se apoia. Assim, a carga crítica de flambagem de uma coluna qualquer submetida à carga de compressão concêntrica é dada pela fórmula de Euler generalizada:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \quad (5.27)$$

onde  $K$  é o *fator de comprimento efetivo*.

O quadro da Figura 5.5 relaciona o fator de comprimento efetivo,  $K$ , da fórmula de Euler generalizada a cada condição de apoio da coluna.

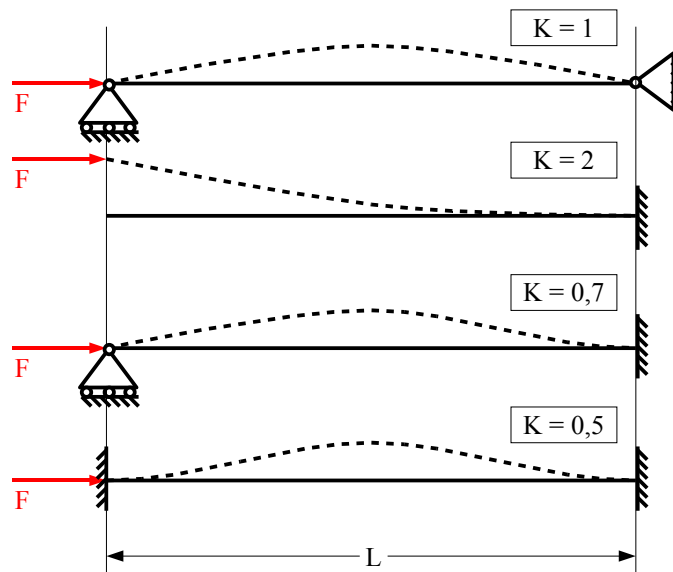


FIGURA 5.5. O coeficiente  $K$  para diversas condições de apoio

EXEMPLO 5.1. *Uma coluna de aço simplesmente engastada de 100 mm de comprimento deve receber uma carga concêntrica em compressão. O perfil da coluna é do tipo chato e tem suas dimensões  $4 \times 20 \text{ mm}^2$ . Qual a carga crítica da coluna? Admita o módulo de elasticidade do aço igual a 200 GPa.*

SOLUÇÃO. É o caso de aplicação quase que direta da fórmula de Euler. Porém, alguns cuidados fazem-se necessários. Primeiro, quanto ao emprego correto do fator  $K$ . Por se tratar de uma coluna simplesmente engastada, este fator é igual a 2. Segundo, qual deve ser o momento de inércia a ser empregado em dita fórmula? Sabe-se que há tantos momentos de inércia de área quantos forem os eixos passantes pelo centróide. Obviamente aquele que leva a carga crítica ao valor mais baixo na fórmula de Euler é o que deve ser empregado, logo, deve-se substituir aí o momento de inércia mínimo, que, por inspeção da simetria do perfil, é  $1.07 \cdot 10^{-10} \text{ m}^4$ .

Após essas considerações, obtém-se a carga crítica à flambagem da coluna:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 200 \cdot 10^9 \cdot 1.07 \cdot 10^{-10}}{2^2 \cdot 0.100^2} = 21 \text{ kN} \quad (5.28)$$

■

#### 5.4. A fórmula de Euler rescrita

Para que se possa incluir no problema de flambagem a falha do material, requer-se que a fórmula de Euler seja rescrita. A partir da sua forma generalizada, escrevendo o momento de inércia em termos da área e do raio de giração da seção transversal da coluna tem-se:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E A r^2}{(K L)^2} \quad (5.29)$$

ou, rearranjando os termos:

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{K^2 \left(\frac{L}{r}\right)^2} \quad (5.30)$$

onde  $\sigma_{cr}$  é a *tensão normal crítica média* na seção,  $K$  é o *fator de comprimento efetivo* e  $L/r$  é o *índice de esbeltez* da coluna. As Figuras 5.6 e 5.7 mostram o comportamento da tensão crítica como função do índice de esbeltez para diversos valores do fator de esbeltez e tipos de materiais respectivamente. Observe o comportamento da hipérbole de Euler à medida que estes parâmetros variam.

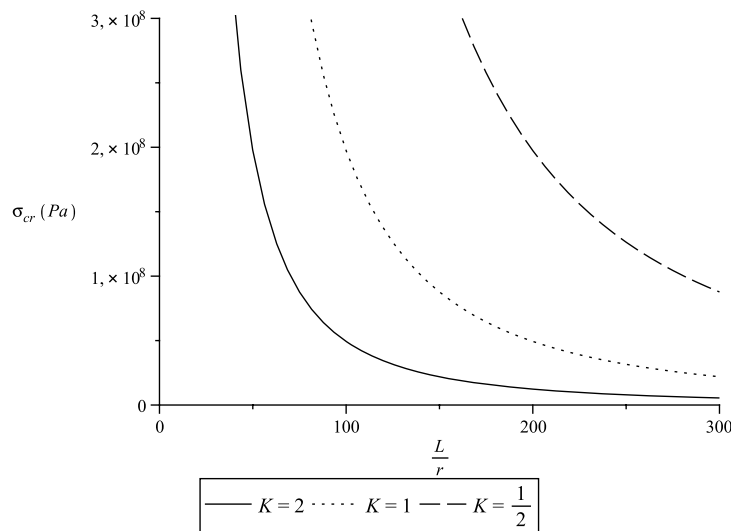
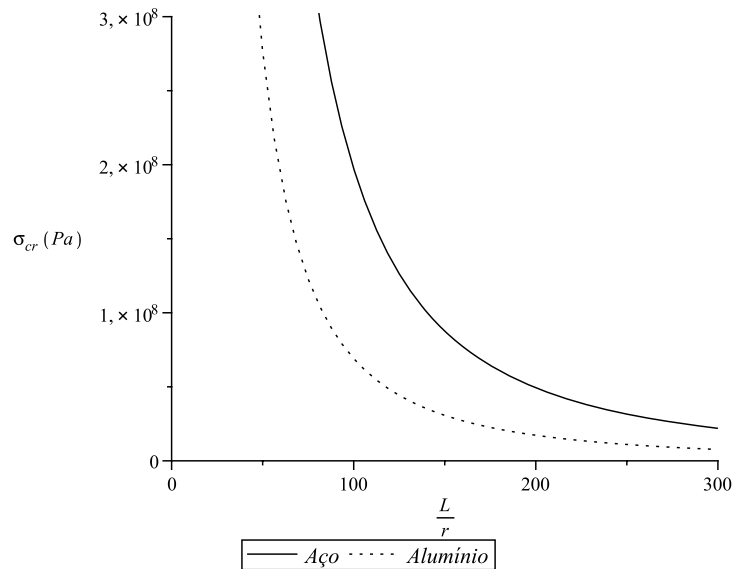
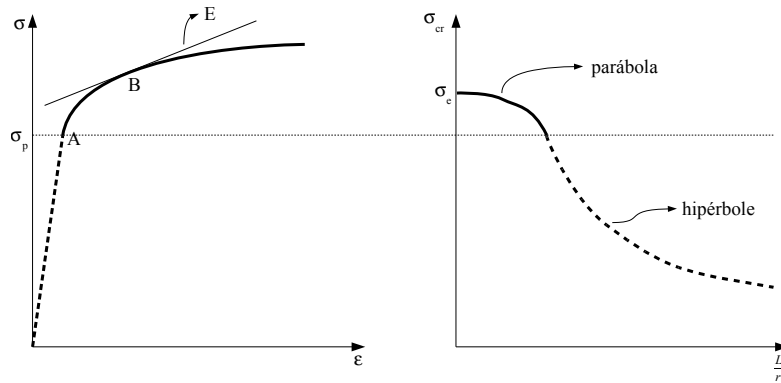


FIGURA 5.6. Gráfico de  $\sigma_{cr}$  versus  $L/r$  para diversos valores de  $K$

A partir dos gráficos das Figuras 5.6 e 5.7, pode-se comparar a tensão crítica com a tensão de escoamento do material.

#### 5.5. Correção da fórmula de Euler para o regime plástico do material

A fórmula de Euler depende diretamente do módulo de elasticidade do material. No regime elástico, ele não varia. No entanto, no regime plástico, ele depende da própria tensão normal, conforme ilustra o gráfico da tensão versus deformação da Figura 5.8 (à esquerda). Em consequência, o comportamento da fórmula de Euler já não é bem representado por uma hipérbole, mas segundo uma parábola, conforme a mesma figura (à direita).

FIGURA 5.7. Gráfico de  $\sigma_{cr}$  versus  $L/r$  para o aço e o alumínioFIGURA 5.8. À esquerda, o diagrama  $\sigma \times \epsilon$ . À direita, o diagrama tensão versus índice de esbeltez

### 5.6. Dimensionamento de colunas concentricamente carregadas

O comportamento da carga crítica à flambagem apontado no gráfico da Figura 5.8 esclarece o que preconiza a Norma AISC quanto à carga admissível em *colunas de aço* concentricamente carregadas. Assim, esta Norma estabelece a fórmula de Euler para colunas longas e uma fórmula quadrática para colunas curtas. O índice de esbeltez que define a transição de um tipo a outro de coluna é definido como:

$$\left(\frac{KL}{r}\right)^* = C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_e}} \quad (5.31)$$

onde  $\sigma_e$  é a tensão de escoamento do aço.

Para *índices de esbeltez compreendidos entre  $C_c$  e 200*, a Norma propõe:

$$\sigma_{adm} = \frac{\pi^2 E}{1.92 \left(\frac{KL}{r}\right)^2} \quad (5.32)$$

Já para aqueles *compreendidos entre 0 e  $C_c$* :

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_e}{s} \left[ 1 - 0.5 \left(\frac{KL}{C_c}\right)^2 \right] \quad (5.33)$$

onde  $s$  é o coeficiente de segurança dado como função do índice de esbeltez:

$$s = \frac{5}{3} + \frac{3}{8} \frac{KL}{r C_c} - \frac{1}{8} \left( \frac{KL}{r C_c} \right)^3 \quad (5.34)$$

Ao dimensionar uma coluna de aço à flambagem deve-se ter em conta, obviamente, que não se dispõe previamente do índice de esbeltez, o que obriga o projetista a assumir a hipótese de que o índice de esbeltez esteja entre  $C_c$  e 200, obtenha as dimensões da coluna, e, com estas, verifique a hipótese. Caso ela se verifique, a coluna está dimensionada. Do contrário, deverá empregar a Equação 5.33. *Se ao dimensionar a coluna, o índice de esbeltez se encontrar acima de 200, o dimensionamento segue da imposição do índice de esbeltez igual a 200.*

EXEMPLO 5.2. *Utilizando a Norma AISC, dimensione uma coluna bi-engastada de 4,40 m para resistir a uma carga concêntrica de 150 kN, conforme indicado na Figura 5.9. Empregue um perfil do tipo S. São dados para o aço o módulo de elasticidade igual a 200 GPa e a tensão limite de escoamento igual a 250 MPa.*

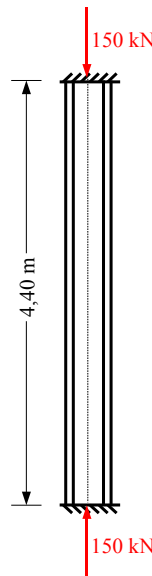


FIGURA 5.9. Coluna em aço a ser dimensionada

SOLUÇÃO. A coluna é bi-engastada, logo  $K = 0.5$ . O índice de esbeltez de transição,  $C_c$ , é dado por:

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_e}} = \sqrt{\frac{2\pi^2 200 \cdot 10^9}{250 \cdot 10^6}} = 126 \quad (5.35)$$

Para o índice de esbeltez não exceda 200, é necessário que o raio de giração obedeça:

$$r \geq \frac{KL}{200} = \frac{0.5 \cdot 4400}{200} = 11 \text{ mm} \quad (5.36)$$

Logo, todo perfil  $S$  que tiver raio de giração mínimo inferior a 11 mm é desprezado na seleção.

Com o auxílio de uma tabela de perfis  $S$ , monta-se uma planilha eletrônica como a que segue, Tabela 2, para a seleção do perfil adequado à coluna. Na referida planilha,  $A_0$  é a área nominal do perfil,  $A$  é a área calculada a partir da tensão admissível fornecida pelas fórmulas da Norma AISC,  $s$  é o fator de segurança e  $(A_0 - A)/A(\%)$  é o percentual de área nominal excedente relativamente à calculada. O perfil que apresentar o menor valor deste último é o escolhido, logo, para a coluna em questão, seleciona-se o perfil  $150 \times 18.6$  ■

EXEMPLO 5.3. *A coluna abaixo, Figura 5.10, deve suportar uma carga concêntrica de 100 kN. Dimensione para esta coluna um tubo cilíndrico em aço com razão entre espessura de parede e raio externo de 1/10. São dados para o aço o módulo de elasticidade e a tensão de escoamento iguais a 200 GPa e 345 MPa, respectivamente.*

SOLUÇÃO. A coluna é simplesmente engastada, logo  $K = 2$ . O índice de esbeltez de transição,  $C_c$ , é dado por:

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_e}} = \sqrt{\frac{2\pi^2 200 \cdot 10^9}{345 \cdot 10^6}} = 107 \quad (5.37)$$

Para o índice de esbeltez não exceder 200, é necessário que o raio de giração obedeça:



TABELA 2. Planilha de cálculo para seleção de perfil de coluna

Perfil S	$A_0$ ( $mm^2$ )	$r_{min}$ ( $mm$ )	$C_c$	$\frac{KL}{r}$	s	$\sigma_{adm}$ (MPa)	A ( $mm^2$ )	$\frac{A_0-A}{A}$ (%)
610×179	22770	39.2	125.66	56	1.82	123	1215	1774
610×157.6	20060	40.3	125.66	55	1.82	124	1205	1564
610×149	18970	32.4	125.66	68	1.85	115	1299	1360
610×134	17100	33.1	125.66	66	1.85	116	1288	1228
610×118.9	15160	34.1	125.66	65	1.84	118	1273	1091
510×141	18000	33.9	125.66	65	1.84	118	1276	1311
510×127	16130	34.5	125.66	64	1.84	118	1268	1172
510×112	14260	29.4	125.66	75	1.86	110	1359	949
510×97.3	12390	30.3	125.66	73	1.86	112	1339	825
460×104	13290	27.5	125.66	80	1.87	106	1410	843
460×81.4	10390	28.9	125.66	76	1.87	109	1371	658
380×74	9480	26.3	125.66	84	1.88	104	1449	554
380×64	8130	27.2	125.66	81	1.87	106	1419	473
310×74	9480	26.3	125.66	84	1.88	104	1449	554
310×60.7	7740	27.0	125.66	81	1.88	105	1425	443
310×52	6640	24.9	125.66	88	1.89	100	1504	342
310×47.3	6032	25.4	125.66	87	1.88	101	1483	307
250×52	6640	22.9	125.66	96	1.90	93	1609	313
250×37.8	4806	24.2	125.66	91	1.89	98	1536	213
200×34	4368	20.3	125.66	108	1.91	82	1824	139
200×27.4	3484	21.1	125.66	104	1.91	86	1744	100
180×30	3794	18.7	125.66	118	1.92	73	2046	85
180×22.8	2890	19.5	125.66	113	1.91	78	1923	50
150×25.7	3271	17.1	125.66	129	1.92	62	2416	35
150×18.6	2362	17.9	125.66	123	1.92	68	2204	7
130×22	2800	15.8	125.66	139	1.91	50	2972	-6
130×15	1884	16.4	125.66	134	1.91	56	2671	-29
100×14.1	1800	14.5	125.66	152	1.90	36	4204	-57
100×11.5	1452	14.8	125.66	149	1.90	39	3803	-62
75×11.2	1426	13.1	125.66	168	1.87	14	10488	-86
75×8.5	1077	13.3	125.66	165	1.88	18	8421	-87

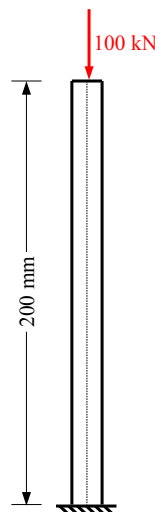


FIGURA 5.10. Coluna em aço a ser dimensionada

$$r \geq \frac{KL}{200} = \frac{2 \cdot 200}{200} = 2 \text{ mm} \quad (5.38)$$

A área da seção transversal do tubo pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
A &= \pi (c_e^2 - c_i^2) = \pi c_e^2 \left(1 - \frac{c_i^2}{c_e^2}\right) \\
&= \pi c_e^2 \left(1 - \left(\frac{c_e - t}{c_e}\right)^2\right) = \pi c_e^2 \left(1 - \left(1 - \frac{t}{c_e}\right)^2\right)
\end{aligned} \tag{5.39}$$

a qual, uma vez substituindo a razão entre espessura e raio, se torna  $A = 0.60c_e^2$ . O momento de inércia de área, de forma análoga, pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\pi}{4} (c_e^4 - c_i^4) = \frac{\pi}{4} c_e^4 \left(1 - \frac{c_i^4}{c_e^4}\right) \\
&= \frac{\pi}{4} c_e^4 \left(1 - \left(\frac{c_e - t}{c_e}\right)^4\right) = \frac{\pi}{4} c_e^4 \left(1 - \left(1 - \frac{t}{c_e}\right)^4\right)
\end{aligned} \tag{5.40}$$

que por sua vez, ao substituir a razão entre espessura e raio, se torna  $I = 0.27c_e^4$ . Finalmente, o raio de giração da seção se escreve:

$$\begin{aligned}
r &= \sqrt{\frac{I}{A}} = \frac{1}{2} \sqrt{c_e^2 + c_i^2} = \frac{c_e}{2} \sqrt{1 + \frac{c_i^2}{c_e^2}} \\
&= \frac{c_e}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{c_e - t}{c_e}\right)^2} = \frac{c_e}{2} \sqrt{1 + \left(1 - \frac{t}{c_e}\right)^2}
\end{aligned} \tag{5.41}$$

que, uma vez substituída a razão entre espessura e raio, resulta  $r = 0.67c_e$ .

Para o dimensionamento propriamente dito, primeiramente se admite  $C_c \leq \frac{KL}{r} \leq 200$  e se emprega a correspondente expressão proposta pela Norma AISC:

$$\sigma_{\text{adm}} = \frac{P}{A} = \frac{\pi^2 E}{1.92 \frac{K^2 L^2}{r^2}} = \frac{\pi^2 EI}{1.92 K^2 L^2 A} \tag{5.42}$$

o que implica:

$$I = \frac{1.92 P K^2 L^2}{\pi^2 E} \tag{5.43}$$

ou:

$$c_e = 1.63 \sqrt[4]{\frac{P K^2 L^2}{\pi^2 E}} \tag{5.44}$$

que, uma vez substituindo os dados, resulta  $c_e = 15 \text{ mm}$ .

É necessário verificar se a hipótese assumida é válida. Para tanto, deve-se calcular o índice de esbeltez e compará-lo:

$$\frac{KL}{r} = \frac{2 \cdot 200}{0.67 \cdot 15} = 40 < C_c \tag{5.45}$$

Portanto, a hipótese é inválida, devendo-se, pois, recorrer à outra expressão sugerida pela Norma. Antes de mais, o coeficiente de segurança será estimado a partir do índice de esbeltez recém-obtido, ou seja:

$$s = \frac{5}{3} + \frac{3}{8} \frac{40}{107} - \frac{1}{8} \frac{40^3}{107^3} = 1.8 \tag{5.46}$$

A expressão da tensão admissível é:

$$\sigma_{\text{adm}} = \frac{P}{A} = \frac{\sigma_e}{s} \left(1 - \frac{K^2 L^2}{2C_c^2 r^2}\right) \tag{5.47}$$

Substituindo os termos na expressão acima e isolando o raio externo, obtém-se:

$$c_e = \sqrt{\frac{sP}{0.60\sigma_e} + \frac{K^2 L^2}{0.90C_c^2}} \tag{5.48}$$

Levando os valores à equação acima, obtém-se  $c_e = 30 \text{ mm}$ . O novo índice de esbeltez é:

$$\frac{KL}{r} = \frac{2 \cdot 200}{0.67 \cdot 30} = 20 \quad (5.49)$$

E o novo coeficiente de segurança:

$$s = \frac{5}{3} + \frac{3}{8} \frac{20}{107} - \frac{1}{8} \frac{20^3}{107^3} = 1.7 \quad (5.50)$$

Recorrendo novamente à Equação 5.48 obtém-se  $c_e = 29 \text{ mm}$ . Verificando os novos índice de esbeltez e coeficiente de segurança:

$$\frac{KL}{r} = \frac{2 \cdot 200}{0.67 \cdot 29} = 21 \quad (5.51)$$

$$s = \frac{5}{3} + \frac{3}{8} \frac{21}{107} - \frac{1}{8} \frac{21^3}{107^3} = 1.7 \quad (5.52)$$

Logo, a solução convergiu, e as dimensões da seção transversal são  $c_e = 29 \text{ mm}$  e  $t = 2.9 \text{ mm}$  ■

### 5.7. Colunas excêntricamente carregadas: a fórmula da secante

A fórmula de Euler supõe carregamento concêntrico, isto é, a linha de ação da força em compressão coincidente com a linha de centróides das seções transversais da coluna. Na prática não é bem assim, pois ocorre excentricidade no carregamento. Vai-se agora estudar este caso.

Considere uma coluna carregada excêntricamente como ilustrado na Figura 5.11. Nela é evidenciada a excentricidade,  $e$ , e, à direita, são mostrados os esforços internos numa seção qualquer identificada pela coordenada  $x$ . O momento que aí aparece ocorre no plano de excentricidade, formado pela linha de ação de  $F$  e a linha de centróides da coluna. Tem-se, pois, a equação diferencial da linha elástica dada igualmente como:

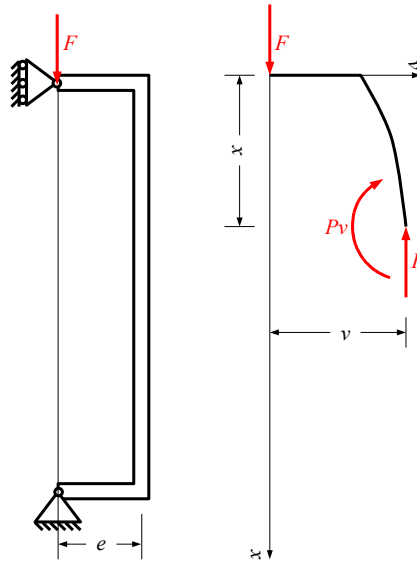


FIGURA 5.11. Coluna excêntricamente carregada

$$\frac{d^2}{dx^2}v + \frac{F}{EI}v = 0 \quad (5.53)$$

Novamente, fazendo  $\lambda^2 = F/EI$ , a solução é da forma:

$$v = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x) \quad (5.54)$$

e a rotação ao longo da viga:

$$\theta = \frac{d}{dx}v = -\lambda A \sin(\lambda x) + \lambda B \cos(\lambda x) \quad (5.55)$$

As condições que determinam as constantes  $A$  e  $B$  são impostas pelo apoio e pela simetria do problema, a saber:

$$v(0) = A = e \quad (5.56)$$

$$\theta\left(\frac{L}{2}\right) = B\lambda \cos\left(\frac{\lambda L}{2}\right) - e\lambda \sin\left(\frac{\lambda L}{2}\right) = 0 \quad (5.57)$$

resultando:

$$A = e \quad (5.58)$$

$$B = e \tan\left(\frac{\lambda L}{2}\right) \quad (5.59)$$

A expressão da linha elástica deformada torna-se:

$$v = e \left( \tan\left(\frac{\lambda L}{2}\right) \sin(\lambda x) + \cos(\lambda x) \right) \quad (5.60)$$

A deflexão máxima, que ocorre em  $x = L/2$ , é:

$$v_{\text{máx}} = e \sec\left(\frac{\lambda L}{2}\right) \quad (5.61)$$

A máxima tensão, de compressão, também ocorre nessa mesma seção, onde o momento fletor é máximo e vale  $Fv_{\text{máx}}$ . Assim, tendo em conta a superposição da carga axial com a flexão:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{máx}} &= \frac{F}{A} + \frac{M_{\text{máx}}c}{I} = \frac{F}{A} + \frac{Fv_{\text{máx}}c}{r^2A} \\ &= \frac{F}{A} \left( 1 + \frac{ec}{r^2} \sec\left(\frac{\lambda L}{2}\right) \right) = \frac{F}{A} \left( 1 + \frac{ec}{r^2} \sec\left(\frac{L}{r} \sqrt{\frac{F}{4EA}}\right) \right) \end{aligned} \quad (5.62)$$

Nesta última expressão a força axial aparece como argumento de *secante*, daí o nome *fórmula da secante para colunas*.

Para efeito do cálculo de flambagem, a razão  $F/A$  que verifica  $\sigma_{\text{máx}} = \sigma_e$  na *fórmula da secante* é a tensão crítica (aparente). Se ainda é desejável trabalhar com um coeficiente de segurança,  $s$ , ou, o que é equivalente, com uma tensão admissível,  $\sigma_{\text{adm}}$ , basta substituir a tensão crítica na fórmula da secante por  $s\sigma_{\text{adm}}$ . Resulta então:

$$\sigma_e = s\sigma_{\text{adm}} \left( 1 + \frac{ec}{r^2} \sec\left(\frac{L}{r} \sqrt{\frac{s\sigma_{\text{adm}}}{4E}}\right) \right) \quad (5.63)$$

A solução da Equação 5.63 requer o recurso a um método numérico, como o método da secante apresentado no Apêndice D. No entanto, algumas observações, mesmo assim, são bemvindas para o correto emprego do método numérico e são apresentadas a seguir.

Antes de mais nada, seja  $f : \sigma \mapsto f(\sigma), \sigma \in [0, \sigma_h]$ :

$$f(\sigma) = s\sigma \left( 1 + \frac{ec}{r^2} \sec\left(\frac{L}{r} \sqrt{\frac{s\sigma}{4E}}\right) \right) - \sigma_e \quad (5.64)$$

Onde o extremo direito do domínio de  $f$ ,  $\sigma_h$ , é aquele valor de  $\sigma$  que faz com que o argumento da secante seja igual a  $\pi/2$ . Os limites de  $f$  são  $\sigma_e$ , para  $\sigma$  tendendo a 0, e  $\infty$ , quando  $\sigma$  tende a  $\pi^2 E / sK^2 \left(\frac{L}{r}\right)^2$  (fórmula de Euler), ou quando o argumento da secante tende a  $\pi/2$  pela esquerda.

**EXEMPLO 5.4.** A coluna mostrada na Figura 5.12 deve suportar uma carga de 100 kN com excentricidade de 50 mm. Dimensione um tubo cilíndrico de razão espessura-raio igual a 1/10 para um coeficiente de segurança igual a 2. São dados o módulo de elasticidade e a tensão de escoamento do material 200 GPa e 250 MPa, respectivamente.

**SOLUÇÃO.** As expressões da área e do raio de giração da seção transversal podem ser aproveitados do Exemplo 5.3, ou seja,  $A = 0.60c_e^2$  e  $r = 0.67c_e$ . A fórmula da secante, Equação 5.63, pode ser rescrita a fim de contemplar a carga e a área da seção transversal:

$$\sigma_e = \frac{sP_{\text{adm}}}{A} \left( 1 + \frac{ec}{r^2} \sec\left(\frac{L}{r} \sqrt{\frac{sP_{\text{adm}}}{4EA}}\right) \right) \quad (5.65)$$

Substituindo os valores:

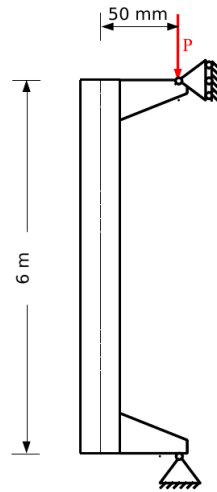


FIGURA 5.12. Coluna em aço a ser dimensionada

$$250 \cdot 10^6 = \frac{2 \cdot 100 \cdot 10^3}{0.60c_e^2} \left( 1 + \frac{0.050c_e}{0.45c_e^2} \sec \left( \frac{6}{0.67c_e} \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \cdot 10^3}{4 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 0.60c_e^2}} \right) \right) \quad (5.66)$$

e rearranjando os termos obtém-se a equação:

$$c_e (750c_e^2 - 1) - 0.11 \sec \left( \frac{0.0058}{c_e^2} \right) = 0 \quad (5.67)$$

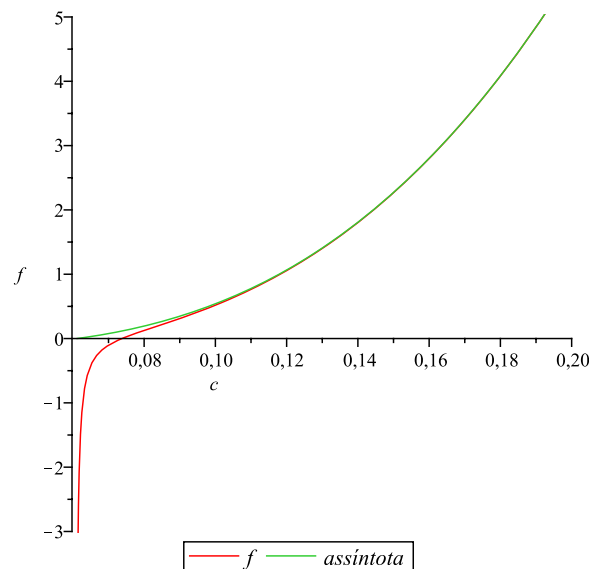
Seja:

$$f(c) = c (750c^2 - 1) - 0.11 \sec \left( \frac{0.0058}{c^2} \right) \quad (5.68)$$

cujo gráfico se encontra na Figura 5.13. Suas assíntotas são:

$$c \rightarrow \infty \Rightarrow f(c) \rightarrow c (750c^2 - 1) - 0.11 \quad (5.69)$$

$$c \rightarrow 0.061_+ \text{ m} \Rightarrow f(c) \rightarrow -\infty \quad (5.70)$$

FIGURA 5.13. Gráfico de  $f$  e de sua assíntota ( $c \rightarrow \infty$ )

Para obter a raiz de  $f$ , vai-se empregar o método da secante descrito no Apêndice D. A Tabela 3 é o desenvolvimento deste método por meio de uma planilha de cálculo. Dela se obtém  $c_e = 74 \text{ mm}$  e  $t = 7.4 \text{ mm}$ . ■

TABELA 3. Planilha de cálculo: implementação do método da secante

$n$	$c_n$ (m)	$f(c_n)$ adimensional	$c_{n+1}$ (m)
0	6.20E-02	-1.66E+00	6.30E-02
1	6.30E-02	-8.82E-01	6.41E-02
2	6.41E-02	-5.54E-01	6.60E-02
3	6.60E-02	-3.11E-01	6.85E-02
4	6.85E-02	-1.63E-01	7.12E-02
5	7.12E-02	-6.69E-02	7.31E-02
6	7.31E-02	-1.70E-02	7.37E-02
7	7.37E-02	-1.79E-03	7.38E-02
8	7.38E-02	-4.58E-05	7.38E-02

EXEMPLO 5.5. Determine a carga admissível a ser aplicada com excentricidade igual a 30 mm à coluna, conforme a Figura 5.14. O perfil empregado é o S250×52 (tabelado). São dados o módulo de elasticidade e a tensão de escoamento do material iguais a 200 GPa e 250 MPa, respectivamente. Adote um coeficiente de segurança igual a 2.

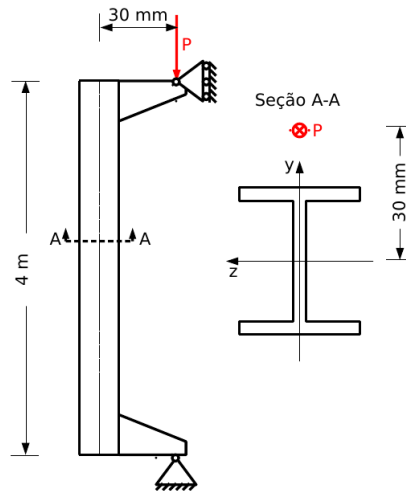


FIGURA 5.14. Coluna excêntrica carregada e detalhe do perfil

SOLUÇÃO. Dados do perfil S250×52:

Área	6640 mm <sup>2</sup>
Altura	254 mm
Largura	126 mm
$r_y$	22.9 mm
$r_z$	96.0 mm

Como não se sabe a priori em torno de que eixo a carga admissível de flambagem é menor, vai-se investigar a carga admissível para cada eixo para então decidir quais delas é efetivamente admissível para a coluna.

(1) Carga admissível segundo o eixo  $y$  (sem excentricidade):

Utilizando a fórmula de Euler:

$$P_{\text{adm}} = \frac{\pi^2 r_y^2 EA}{sK^2 L^2} \quad (5.71)$$

obtém-se por substituição:

$$P_{\text{adm}} = \frac{\pi^2 \cdot 0.0229^2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 6640 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 1^2 \cdot 4^2} = 220 \text{ kN} \quad (5.72)$$

### 5.8. Exercícios

EXERCÍCIO 5.1. *Obtenha a carga crítica de flambagem da coluna perfeitamente rígida indicada na Figura 5.16.*

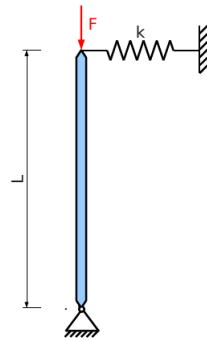


FIGURA 5.16. Do exercício 5.1

EXERCÍCIO 5.2. *Obtenha a carga crítica de flambagem da coluna perfeitamente rígida indicada na Figura 5.17.*

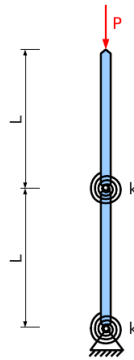


FIGURA 5.17. Do exercício 5.2

EXERCÍCIO 5.3. *Dimensione em aço a coluna de seção circular da Figura 5.18 para suportar a carga concêntrica de 200 kN. São dados o módulo de elasticidade e tensão de escoamento do aço, 200 GPa e 345 MPa, respectivamente. Empregue necessariamente a Norma AISC.*

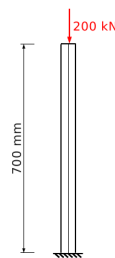


FIGURA 5.18. Do exercício 5.3

EXERCÍCIO 5.4. *A coluna bi-engastada da Figura 5.19 deve receber uma força de compressão de 2 kN concêntrica. Ela deverá ser constituída por um tubo de aço de seção quadrada, conforme mostrada no detalhe. Se a razão entre a espessura de parede e largura do perfil deve ser de 1/10, dimensione-a para suportar dita carga. Dados para o aço, módulo de elasticidade igual a 200 GPa e tensão de escoamento igual a 250 MPa. Empregue necessariamente a Norma AISC.*

EXERCÍCIO 5.5. *A lança de um guindaste é amparada por uma barra inclinada, conforme a Figura 5.20. Qual deve ser a carga  $F$  admissível no guindaste para um fator de segurança igual a 2? O material da lança do guindaste é o aço, módulo de elasticidade de 200 GPa, tensão de escoamento igual a 250 MPa. A seção transversal da lança também está mostrada na figura. A área da seção é de  $1,3 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$  e os momentos de inércia são  $2,9 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$  e  $5,8 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$  respectivamente em relação a  $y$  e a  $z$ .  $C$  é o centroide da seção. Suponha que a barra inclinada suporte qualquer esforço.*

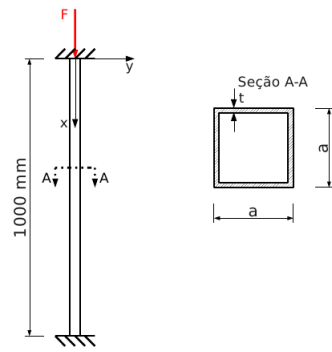


FIGURA 5.19. Do exercício 5.4

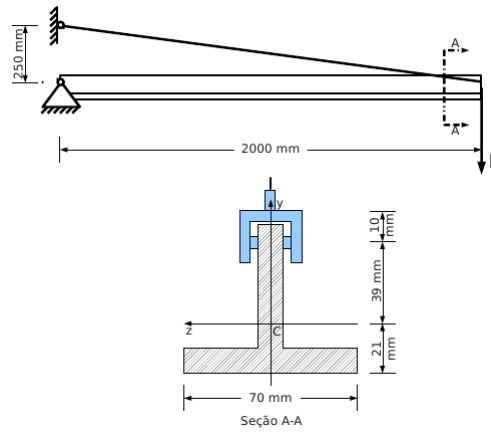


FIGURA 5.20. Do exercício 5.5



