5- Equilíbrio de um Corpo Rígido

5.1- Condições de Equilíbrio para um Corpo Rígido

Dado um corpo e um sistema de forças a ele aplicado de tal forma a manter o repouso:

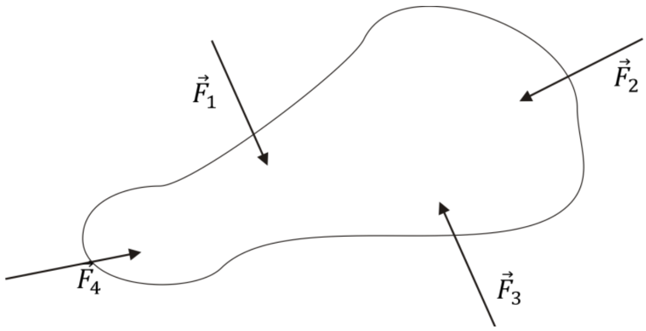


Figura 5. 1

Para uma partícula qualquer "i" do corpo rígido, tem-se de igual modo um sistema de forças aplicado sob repouso:

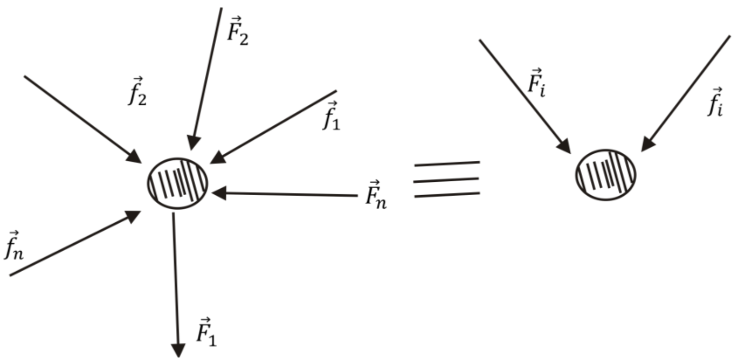


Figura 5. 2

Distinguem-se no sistema de forças aplicado à partícula forças internas $\vec{f}_i$ e forças internas $\vec{F}_i$. Como a partícula está em repouso o sistema de forças sobre ele está equilibrado, isto é:

$\vec{F}_i + \vec{f}_i = \vec{0}$ **(Equação 5.1)**

Ao considerar a totalidade das partículas que formam o corpo, o sistema de forças será composto pela adição de cada sistema de forças aplicado a cada partícula. A resultante deste sistema de forças será:

$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i = \vec{0}$ **(Equação 5.2)**

Como as forças internas são formadas por pares de ação e reação, $\sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i = \vec{0}$, logo:

$\sum_{i=}^{n} \vec{F}_i = \vec{0}$

A resultante do sistema de forças internas é nula num corpo em repouso.

Voltando á partícula "i" e tomando momento de $\vec{F}_i$ e $\vec{f}_i$em relação a um ponto qualquer O, tem-se:

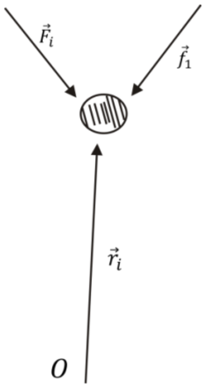


Figura 5. 3

$\vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{r}_i \times \vec{f}_i = \vec{r}_i \times \left(\vec{F}_i + \vec{f}_i\right) = \vec{0}$ **(Equação 5.3)**

Totalizando o momento para o sistema de forças de cada partícula:

$\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{f}_i = \vec{0}$ **(Equação 5.4)**

Mas como as forças internas formam pares de ação e reação em partículas vizinhas, tem-se:

$\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{f}_i = \vec{0}$, logo:

$\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{0}$

Resumindo, para um corpo em repouso o sistema de forças externas atuante sobre ele verifica:

$\vec{R} = 0$

e $\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{0}, \forall 0$ **(Equação 5.5)**

Equilíbrio de Corpos em Duas Dimensões

5.2- Diagramas de Corpo Livre

No diagrama e corpo livre, o corpo é isolado de sua vizinhança e nele se representam todas as forças externas.

<u>Ações de Apoio</u>

Os pontos de contato do copo com seus vizinhos chamamos de apoios. Os apoios restringem alguns movimentos e permitem outros. Ao restringir um movimento, o apoio impõe ao corpo uma força ou momento. Vejamos alguns tipos de apoio:

1. Cabo

Restrição

Força

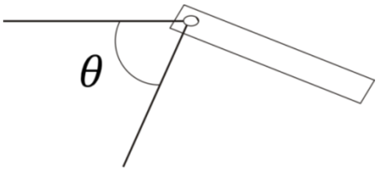


Figura 5. 4

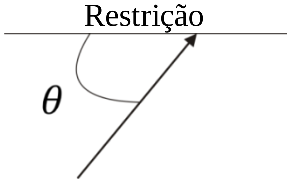


Figura 5. 5

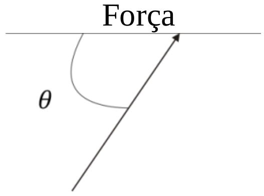


Figura 5. 6

2. Haste

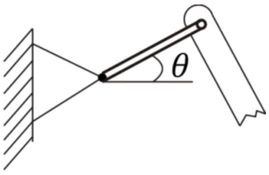


Figura 5. 7

Restrição

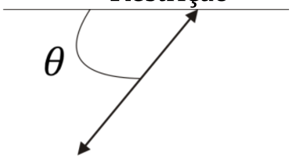


Figura 5. 8

Força

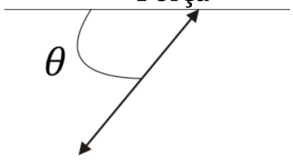


Figura 5. 9

3. Rolete

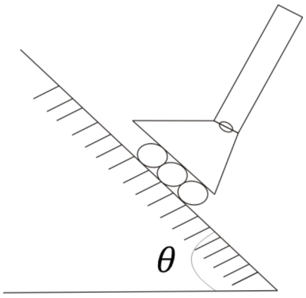


Figura 5. 10

Restrição

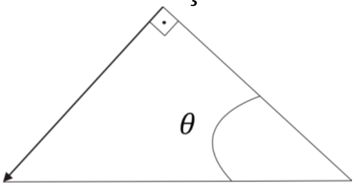


Figura 5. 11

Força

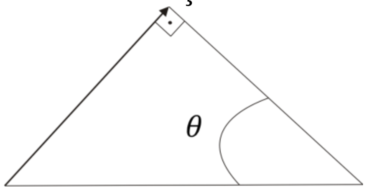


Figura 5. 12

4. Rolete submetido a uma guia

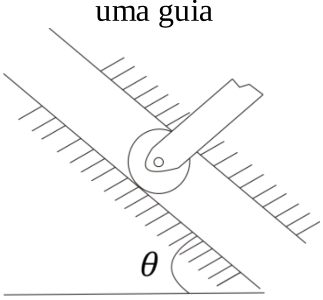


Figura 5. 13

Restrição

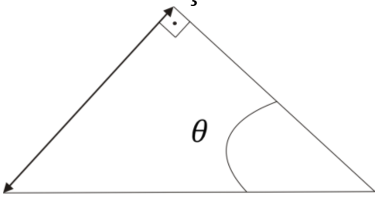


Figura 5. 14

Força

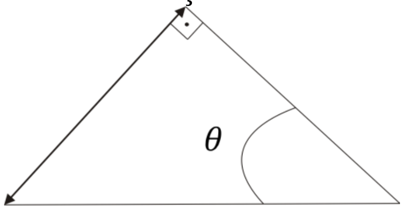


Figura 5. 15

5. Balancim

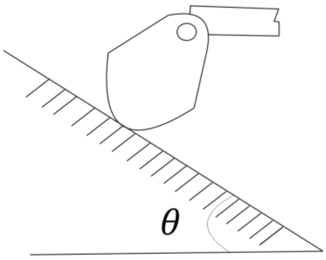


Figura 5. 16

Restrição

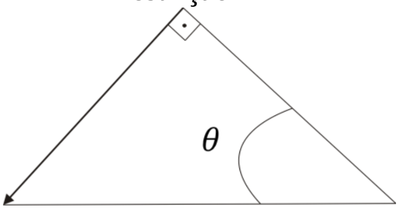


Figura 5. 17

Força

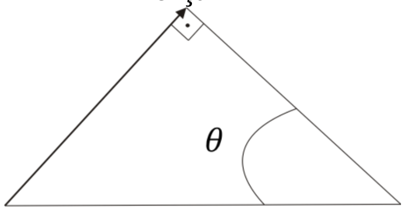


Figura 5. 18

6. Superfície de contato sem atrito

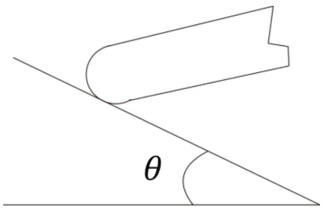


Figura 5. 19

Restrição

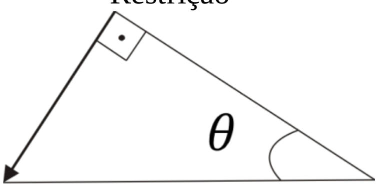


Figura 5. 20

Força

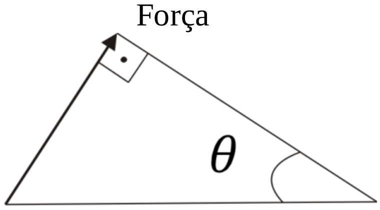


Figura 5. 21

7. Anel deslizante articulado

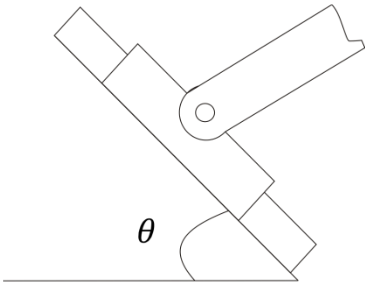


Figura 5. 22

Restrição

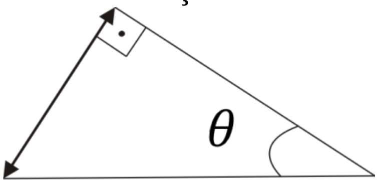


Figura 5. 23

Força

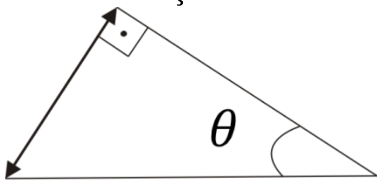


Figura 5. 24

8. Articulação

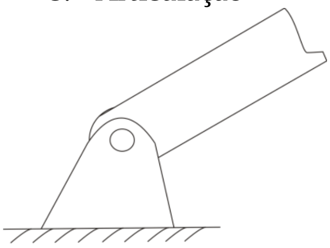


Figura 5. 25

Restrição

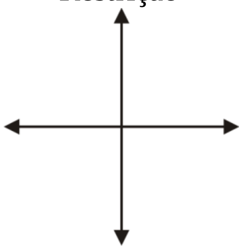


Figura 5. 26

Força

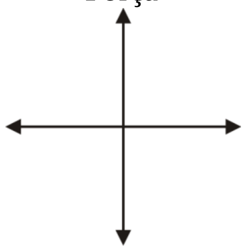


Figura 5. 27

9. Anel deslizante fixo

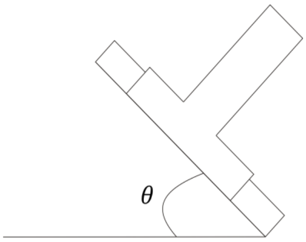


Figura 5. 28

Restrição

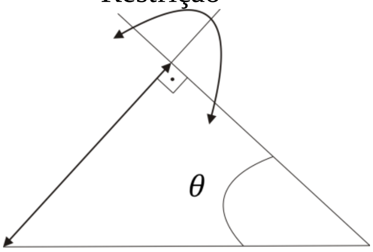


Figura 5. 29

Força

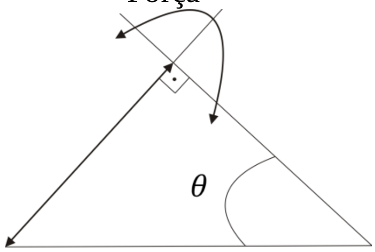


Figura 5. 30

10. Engastamento

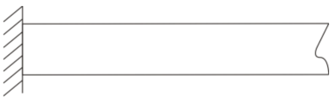


Figura 5. 31

Restrição

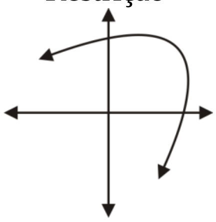


Figura 5. 32

Força

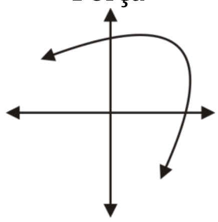


Figura 5. 33

Forças Externas e Internas

Embora realmente haja forças internas atuantes no corpo, elas não são representadas no DCL. Só as forças externas são representadas no DCL.

Peso e Centro de Gravidade

A força peso sobre um corpo é representada no centro de gravidade do corpo (resultante equivalente num ponto).

Modelos Idealizados

Nos problemas práticos, cabe ao engenheiro identificar os tipos de apoios a que o corpo está sujeito. Isto se faz com bom senso e experiência.

- Exemplos 5.1 a 5.4→ págs. 171 – 175.

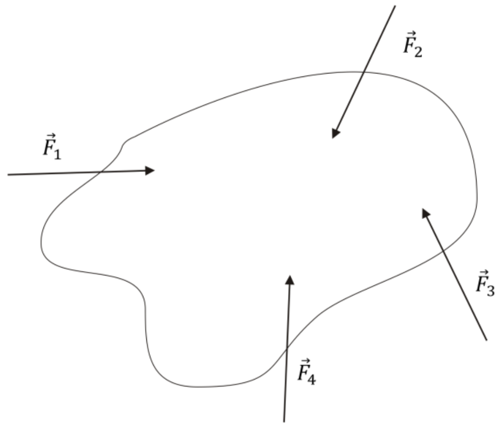


Figura 5. 34

5.3- Equações de Equilíbrio

$\vec{R} = 0$ $\qquad$ $\sum x = 0$

$\vec{M}_0 = \vec{0}$ $\qquad$ ou $\qquad$ $\sum y = 0$

Ou $\vec{M}_0 = (\vec{M}_x)_0 + (\vec{M}_y)_0 + (\vec{M}_z)_0 = \vec{0}$ $\qquad$ $\sum \vec{M}_0 = 0$

Conjuntos Alternativos de Equações de Equilíbrio

1)

- $R_a = 0$
- $\vec{M}_A = \vec{0}$
- $\vec{M}_B = \vec{0}$

Desde que a reta AB não seja perpendicular à reta a.

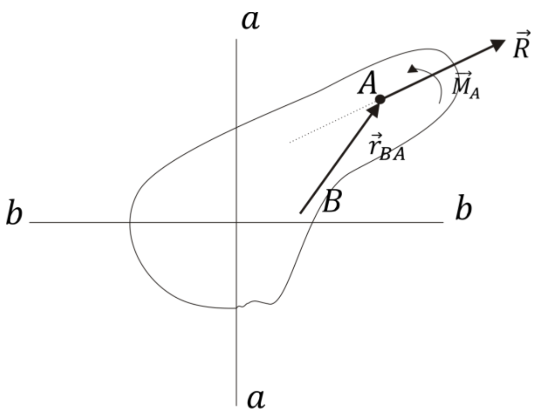


Figura 5. 35

Prova

- Se o sistema satisfaz as Equações. (1), então satisfaz (2):

$R_a = \vec{R}.\vec{M}_a = \vec{0}.\vec{M}_a = 0$ **(Equação 5.6)**

$\vec{M}_a = \vec{0}$

Tomando o sistema reduzido em A e, depois, reduzindo-o em B:

$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{r}_{BA} \times \vec{R} = \vec{M}_A + \vec{r}_{BA} \times \vec{0} = \vec{M}_A = \vec{0}$ **(Equação 5.7)**

- Se o sistema satisfaz (2) então satisfaz (1):

$\vec{R} = R_a\vec{u}_a + R_b\vec{u}_b = R_b\vec{u}_b$ **(Equação 5.8)**

Tomando o sistema reduzido em A e, depois, reduzindo-o em B:

$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{r}_{BA} \times \vec{R} = \vec{M}_A + \vec{r}_{BA} \times (R_b\vec{u}_b)$ **(Equação 5.9)**

Como, $\vec{M}_A = \vec{M}_B$

$\vec{r}_{BA} \times (R_b.\vec{M}_b) = \vec{0}$ **(Equação 5.10)**

Desde que $\vec{M}_b$ não seja paralelo a $\vec{r}_{BA}$ então $R_b = 0$

Conclusão:

As Eqs. (1) e (2) são equivalentes desde que $\vec{r}_{BA}$ seja perpendicular a $\vec{M}_a$.

2)

- $\vec{M}_a = \vec{0}$
- $\vec{M}_b = \vec{0}$
- $\vec{M}_c = \vec{0}$

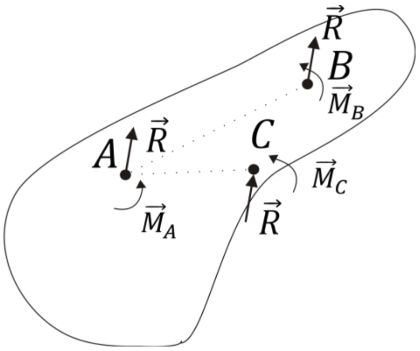


Figura 5. 36

Prova

- Se o sistema satisfaz as Eqs. (1), então satisfaz (3).

$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{r}_{BA} \times \vec{R} = \vec{r}_{BA} \times \vec{R}$ **(Equação 5.11)**

$\vec{M}_C = \vec{M}_A + \vec{r}_{AC} \times \vec{R} = \vec{r}_{AC} \times \vec{R}$ **(Equação 5.12)**

Como, por hipótese, $\vec{M}_A = \vec{0}$ e $\vec{R} = \vec{0}$, então:

$\vec{M}_B = \vec{0}$

$\vec{M}_C = \vec{0}$

- Se o sistema satisfaz as Eqs. (3), então satisfaz (1)

$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{r}_{BA} \times \vec{R}$ **(Equação 5.13)**

$\vec{M}_C = \vec{M}_A + \vec{r}_{AC} \times \vec{R}$ **(Equação 5.14)**

Como $\vec{M}_A = \vec{M}_B = \vec{M}_C = \vec{0}$ então

$\vec{r}_{AB} \times \vec{R} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad (\vec{r}_{AB} + \vec{r}_{AC}) \times \vec{R} = \vec{0}$ **(Equação 5.15)**

$\vec{r}_{AC} \times \vec{R} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad (\vec{r}_{AB} - \vec{r}_{AC}) \times \vec{R} = \vec{0}$ **(Equação 5.16)**

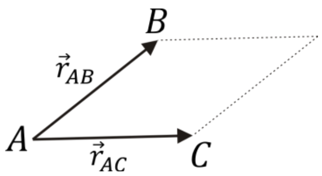


Figura 5. 37

Logo $\vec{R} = \vec{0}$ se e somente se A, B e C não estão alinhado

Conclusão:

As Eqs. (1) e (3) são equivalentes se e somente se A, B e C não estejam alinhados.

- Exemplos 5.6 – 5.12, págs 179 – 186

5.4- Elementos Submetidos a Duas ou Três Forças

Elementos em Repouso Sujeitos a Duas Forças

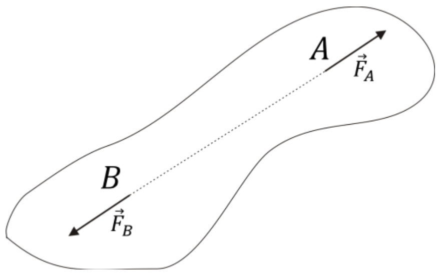


Figura 5. 38

Das equações do Equilíbrio:

$\vec{R} = \vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \vec{F}_A = -\vec{F}_A$ **(Equação 5.17)**

Logo, o sistema forma um binário. A intensidade do binário é: $F_A . d = 0$

Ou seja: d = 0, e as forças têm a mesma linha de ação como mostra a figura acima.

Elementos em Repouso Sujeitos a Três Forças

Das equações de equilíbrio:

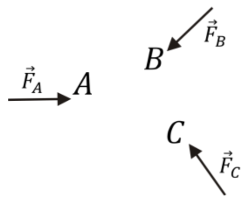


Figura 5. 39

$$\vec{R} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C = \vec{0} \qquad \textbf{(Equação 5.18)}$$

Como visto anteriormente, existe um ponto P onde o sistema coplanar $\{\vec{F}_A, \vec{F}_B\}$ se reduz à resultante $\vec{R}' = -\vec{F}_C$

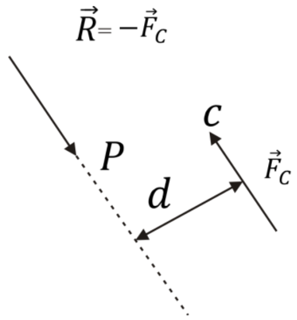


Figura 5. 40

A redução do sistema $\{\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}_C\}$ em P leva a $\vec{r}_{PC} \times \vec{F}_C = \vec{c}$ ou d = 0. Mas para $\{\vec{F}_A, \vec{F}_B\}$ reduzir-se à resultante em P é necessário que $\vec{F}_A$ e $\vec{F}_B$ sejam concorrentes em P ou paralelas a $\vec{F}_C$.

Conclusão:

Um sistema de 3 forças equilibradas é composto por 3 forças concorrentes ou 3 forças paralelas

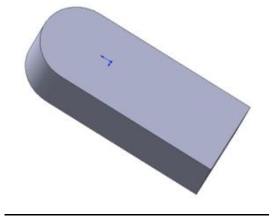
- Exemplos 5.13→ págs. 188-189

Equilíbrio no Espaço Tridimensional

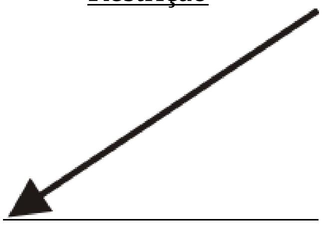
5.5- Diagramas de Corpo Livre

Reações de Apoio

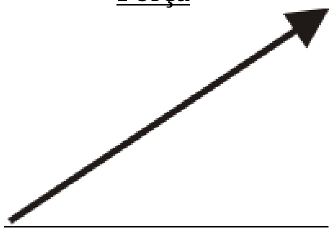
1. Cabo



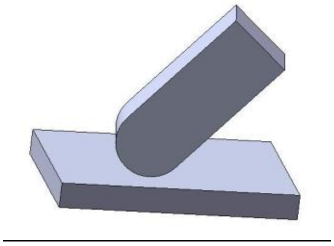
Restrição



Força



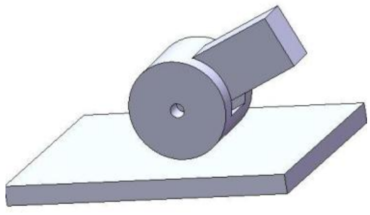
2. Apoio sobre Superfície lisa



Restrição

Força

3. Rolete

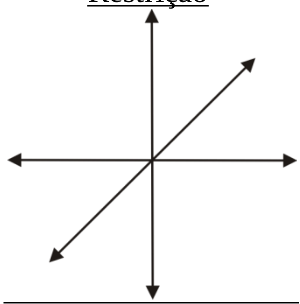


Restrição

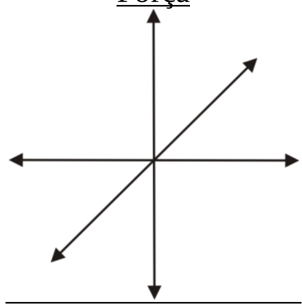
Força

4. Junta esférica

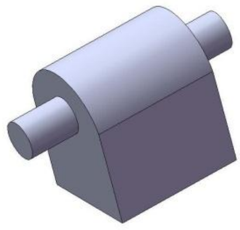
Restrição



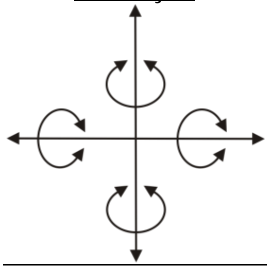
Força



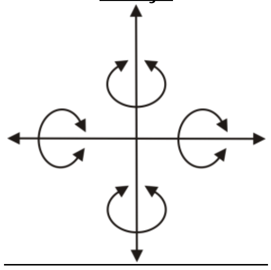
5. Mancal radial simples



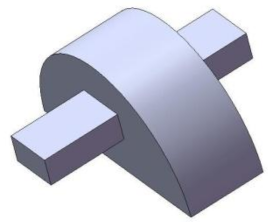
Restrição



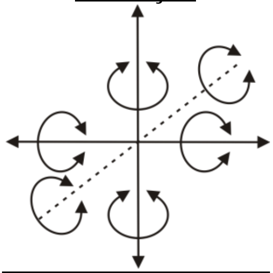
Força



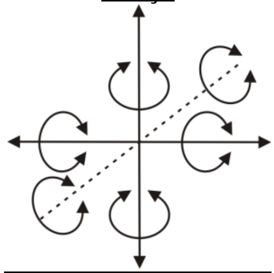
6. Mancal simples de seção não circular



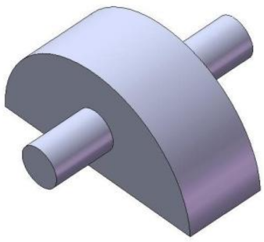
Restrição



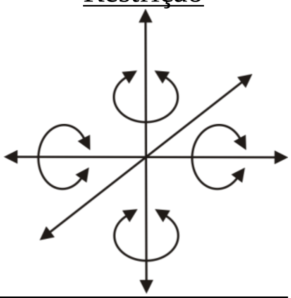
Força



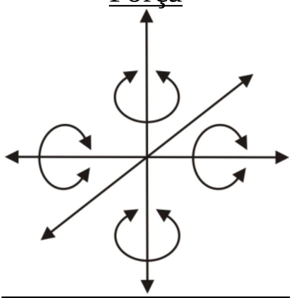
7. Mancal axial ou de encosto



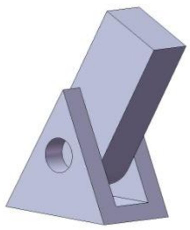
Restrição



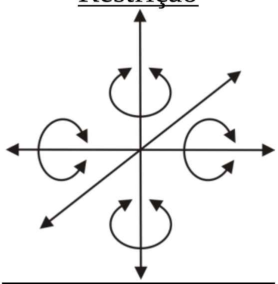
Força



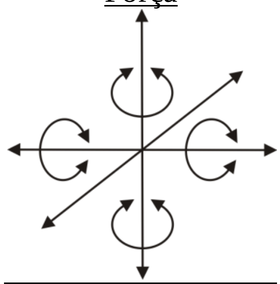
8. Articulação



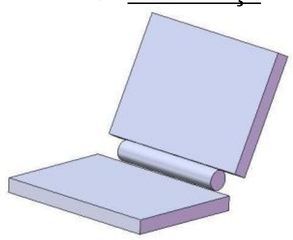
Restrição



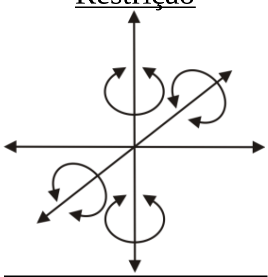
Força



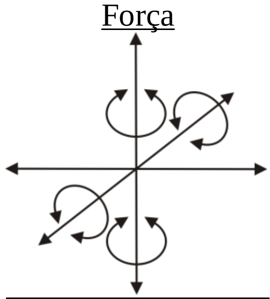
9. Dobradiça



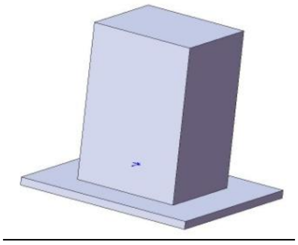
Restrição



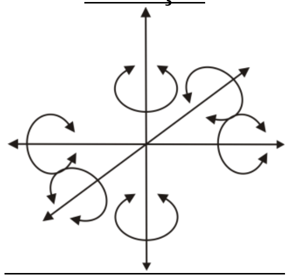
Força



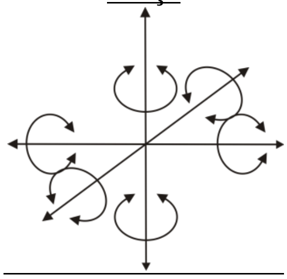
10. Engastamento



Restrição



Força



- Exemplos 5-14→ págs. 200-201

5.6- Equações de Equilíbrio

Um corpo em repouso tem seu sistema de forças equilibrado. ?to é:

$\vec{R} = \vec{0}$ **(Equação 5.19)**

$\vec{M}_0 = (\vec{M}_0)_x + (\vec{M}_0)_y + (\vec{M}_0)_z = \vec{0}$ **(Equação 5.20)**

Escalarmente, considerando uma base ortonormal positiva de vetores:

$R_x = 0$
$R_y = 0$
$R_z = 0$
$(M_0)_x = 0$
$(M_0)_y = 0$
$(M_0)_z = 0$

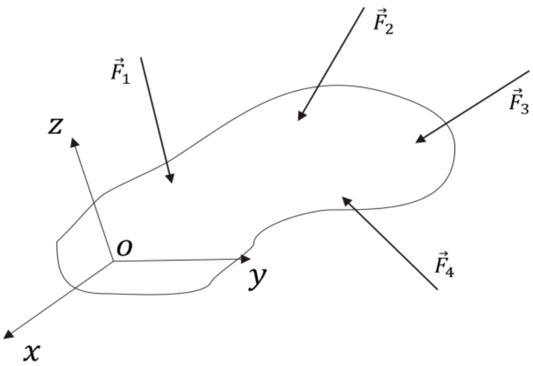


Figura 5. 41

5.7- Restrições ao Movimento de um Corpo Rígido

Para que um corpo permaneça em repouso para qualquer sistema de forças que se lhe aplique ele deve estar submetido a necessárias restrições.

Restrições Redundantes:
Caso em que as restrições impostas ao corpo são mais que suficientes para impor-lhe incondicionalmente o repouso. Por exemplo:

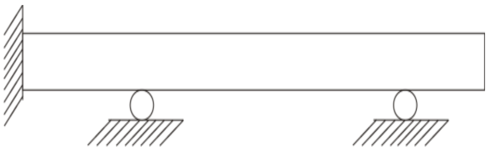


Figura 5. 42

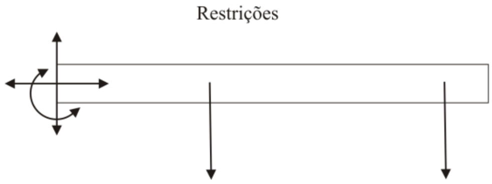


Figura 5. 43

Podem-se retirar as seguintes restrições sem que o repouso seja perturbado

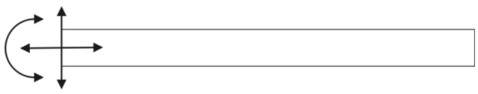


Figura 5. 44

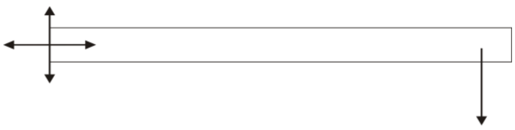


Figura 5. 45

Nestes casos o número de reações incógnitas excede ao número de equações do equilíbrio e o sistema é dito estaticamente indeterminado.

Restrições Inadequadas:
Caso em que as restrições impostas ao corpo não são suficientes para impor-lhe incondicionalmente o repouso. Por exemplo:

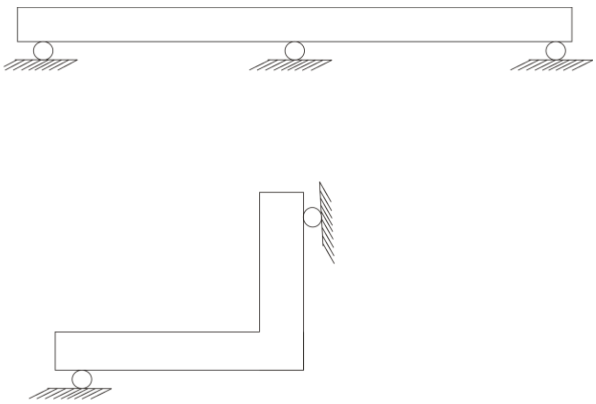


Figura 5. 46

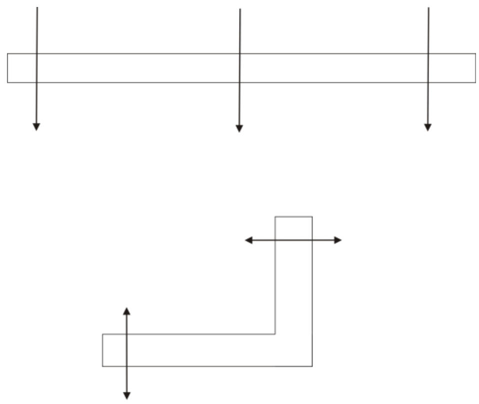


Figura 5. 47

Em alguns casos, o número de reações incógnitas podem ser inferiores ao de equações do equilíbrio. Em outros, o número de reações incógnitas podem inclusive exceder ao de equações do equilíbrio

- Exemplos 5.15 – 5.19→ pág. 206 - 212