2. Vetores Força

2.1- Escalares e Vetores

Escalar:

Grandeza à qual se associa um valor real independentemente da direção, ex: massa, comprimento, tempo, energia.

Vetor:

Grandeza a qual se associa um valor escalar a uma direção.

- Intensidade: $|\vec{\Delta}|$
- Direção: θ
- Sentido: p/ cima

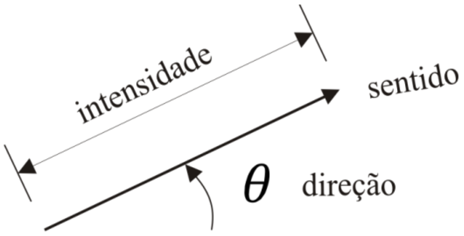


Figura 2. 1

2.2- Operações Vetoriais

Multiplicação por um Escalar $\vec{A}$ e $\lambda\vec{A}$

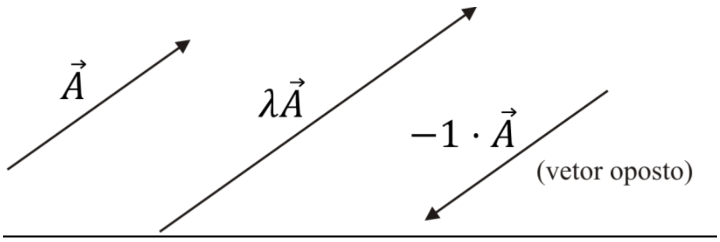


Figura 2. 2

- Vetor unitário:

$\vec{U} = \frac{\vec{A}}{|A|} = \frac{1}{|A|} . \vec{A}$ **(Equação 2.1)**

$|\vec{U}| = 1$ **(Equação 2.2)**

Adição Vetorial

$\vec{A} + \vec{B} = \vec{R}$ **(Equação 2.3)**

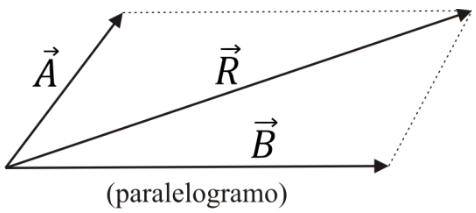


Figura 2. 3

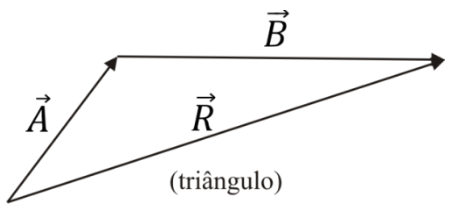


Figura 2. 4

Obs:

Propriedade comutativa: $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ **(Equação 2.4)**

<u>Subtração Vetorial</u>

$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-1)\vec{B} = \vec{R'}$ **(Equação 2.5)**

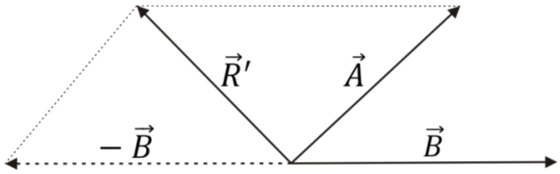


Figura 2. 5

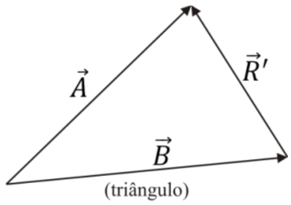


Figura 2. 6

<u>Decomposição de Vetores</u>

Seja $\vec{R}$ um vetor a ser decomposto nas direções a e b :

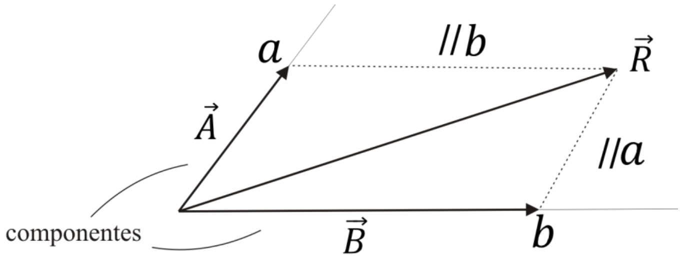


Figura 2. 7

2.3- Adição de Forças Vetoriais

$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + (\vec{F}_2 + \vec{F}_3)$ **(Equação 2.6)**

(Propriedade Associativa)

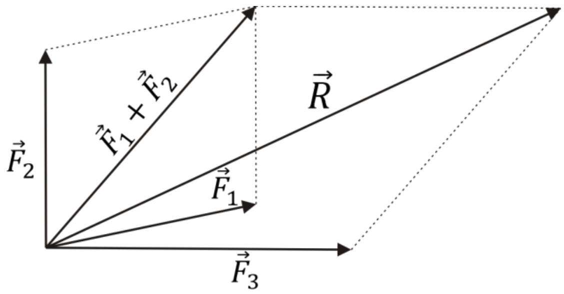


Figura 2. 8

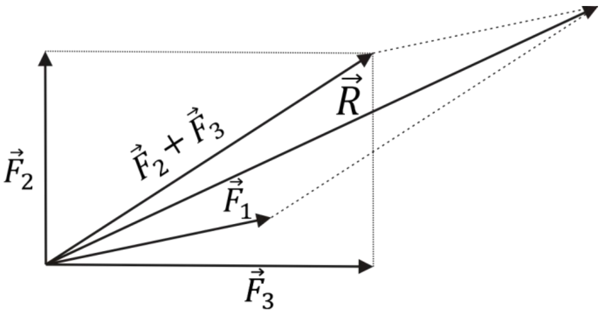


Figura 2. 9

$(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) + \vec{F}_3$

$\vec{F}_1 + (\vec{F}_2 + \vec{F}_3)$

- Exemplos 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4, págs. 16 a 19

2.4- Adição de um Sistema de Forças Coplanares

Decomposição de forças nas direções ortogonais x e y

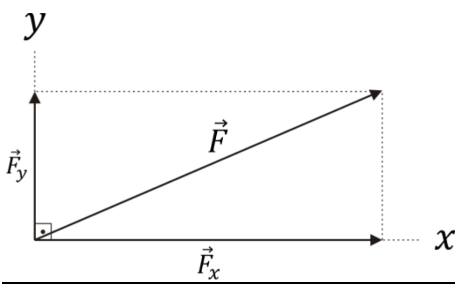


Figura 2. 10

$\overrightarrow{F_x}$ e $\overrightarrow{F_y}$ são as componentes ortogonais

Base positiva de vetores ortogonais

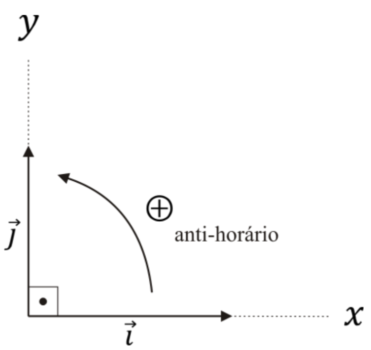


Figura 2. 11

$|\vec{\imath}| = |\vec{\jmath}| = 1$ **(Equação 2.7)**

Escalares associados a $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$

Das figuras acima:

$\overrightarrow{F_x} = F_x.\vec{\imath}$ e $\overrightarrow{F_y} = F_x.\vec{\jmath}$ **(Equação 2.8)**

F_x e F_y, escalares, são chamados de componentes cartesianos ortogonais. Estes escalares são positivos ou negativos, conforme coincidam ou não com a direção $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$.

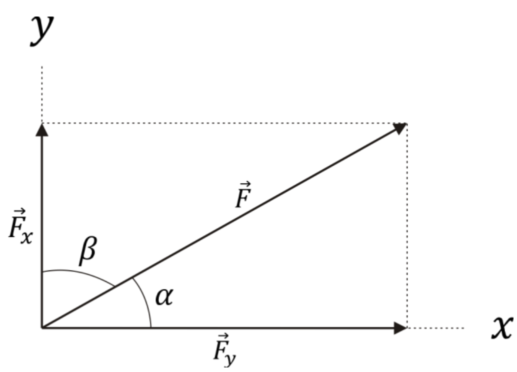


Figura 2. 12

Dos triângulos retângulos:

$F_x = |\vec{F}| \cos\alpha$ e $F_y = |\vec{F}| \cos\beta$ **(Equação 2.9)**

Cossenos diretores: $\cos\alpha$ e $\cos\beta$

Notação Cartesiana de Vetor

Como visto, se x e y são ortogonais, um vetor $\vec{F}$ pode ser decomposto como:

$\vec{F} = \overrightarrow{F_x} + \overrightarrow{F_y} = F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath}$ **(Equação 2.10)**

(Notação Cartesiana)

Resultante de forças coplanares

Seja um sistema de forças $S = \{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}\}$. **(Equação 2.12)**

Usando a notação cartesiana:

$\overrightarrow{F_1} = F_{1x}\vec{\imath} + F_{1y}\vec{\jmath}$ **(Equação 2.13)**

$\overrightarrow{F_2} = F_{2x}\vec{\imath} + F_{2y}\vec{\jmath}$ **(Equação 2.14)**

$\overrightarrow{F_3} = F_{3x}\vec{\imath} + F_{3y}\vec{\jmath}$ **(Equação 2.15)**

$\vec{R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = F_{1x}\vec{\imath} + F_{1y}\vec{\jmath} + F_{2x}\vec{\imath} + F_{2y}\vec{\jmath} + F_{3x}\vec{\imath} + F_{3y}\vec{\jmath}$

$\vec{R} = (F_{1x} + F_{2x} + F_{3x})\vec{\imath} + \left(F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}\right)\vec{\jmath}$ **(Equação 2.16)**

Ou

$\vec{R} = \sum_{i=1}^{3}\vec{F_i} = (\sum_{i=1}^{3}F_{ix})\vec{\imath} + \left(\sum_{i=1}^{3}F_{iy}\right)\vec{\jmath} = R_x\vec{\imath} + R_y\vec{\jmath}$

Ou seja:

$R_x = \sum_{i=1}^{3}F_{ix}$

$R_y = \sum_{i=1}^{3}F_{iy}$

Generalizando para um sistema de forças coplanares, $\{\vec{F_i}\}_{i=1}^{n}$; a resultante em notação cartesiana é:

$\vec{R} = R_x\vec{\imath} + R_y\vec{\jmath}$ **(Equação 2.17)**

$R_x = \sum_{i=1}^{n}F_{ix}$ **(Equação 2.18)** e $R_y = \sum_{i=1}^{n}F_{iy}$ **(Equação 2.19)**

- Intensidade de $\vec{R}$:

  $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$ **(Equação 2.20)**

- Direção:

  $\theta = arc\tan\frac{R_y}{R_x}$

  $\theta > 0$ se $\frac{R_y}{R_x} > 0$ (mesmo sinal)

  $\theta < 0$ se $\frac{R_y}{R_x} < 0$ (sinais diferentes)

- Ex: 2.5, 2.6 e 2.7, págs. 27 a 30

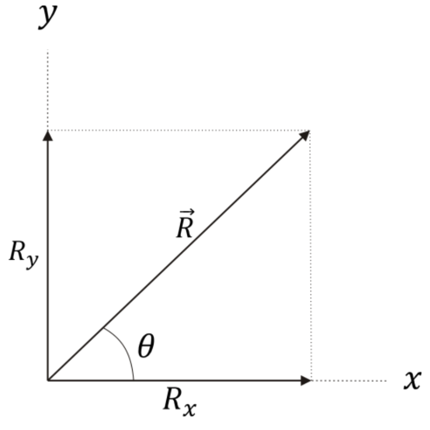


Figura 2. 13

2.5- Vetores Cartesianos

Sistema de eixos coordenados ortogonais definido positivo:

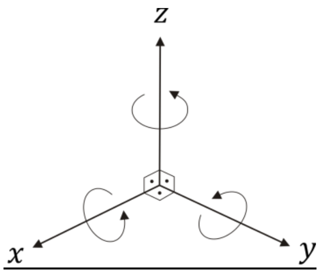


Figura 2. 14

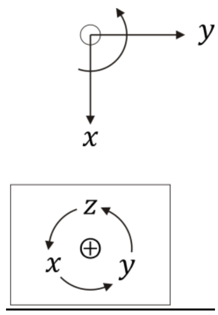


Figura 2. 15

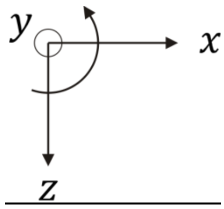


Figura 2. 16

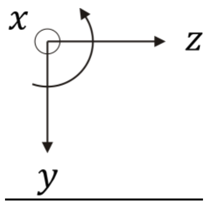
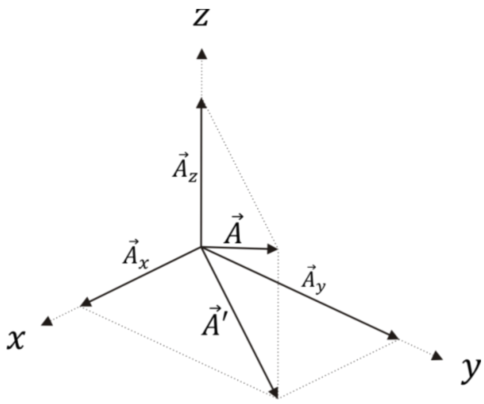


Figura 2. 17

Componentes retangulares de um vetor



(Decomposição Ortogonal)

Figura 2. 18

Base de vetores ortonormais

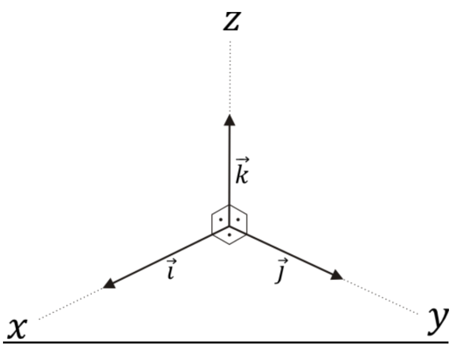


Figura 2. 19

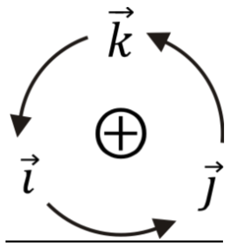


Figura 2. 20

$\vec{i} \perp \vec{j}$

$\vec{j} \perp \vec{k}$ $\qquad |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ (Vetores unitários)

Representação de um vetor em uma base ortonormal

$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ **(Equação 2.21)**

$A_x,\ A_y\ e\ A_z$ são escalares associados às direções $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$.

Observe que A_x, A_y e A_z podem ser positivos ou negativos conforme as componentes coincidam ou não com as orientações dos vetores unitários.

Intensidade de um vetor em base de vetores ortonormais

Do teorema de Pitágoras, duas vezes aplicado:

$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ **(Equação 2.22)**

Observe que:

$\left|\vec{A'}\right| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ **(Equação 2.23)**

Direção de um vetor em base de vetores ortonormais

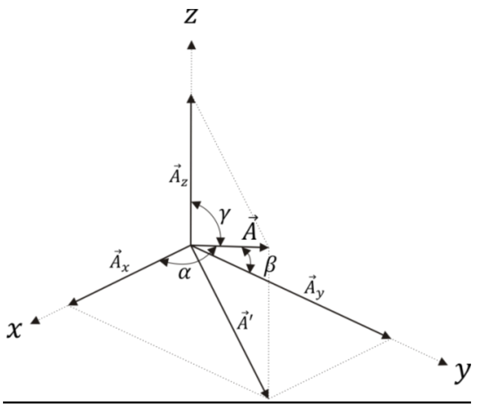


Figura 2. 21

Ângulos diretores:

$\alpha = (\vec{A}, \vec{\imath})$

$\beta = (\vec{A}, \vec{\jmath})$

$\gamma = (\vec{A}, \vec{k})$

Plano $\vec{A}, \vec{\imath}$:

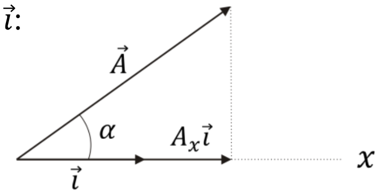


Figura 2. 22

Cossenos diretores:

$\cos\alpha = \frac{A_x}{|\vec{A}|}$

$\cos\beta = \frac{A_y}{|\vec{A}|}$

$\cos\gamma = \frac{A_z}{|\vec{A}|}$

O vetor unitário na direção de $\vec{A}$ é:

$\vec{U}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{A_x}{|\vec{A}|}\vec{\imath} + \frac{A_y}{|\vec{A}|}\vec{\jmath} + \frac{A_z}{|\vec{A}|}\vec{k}$ **(Equação 2.24)**

$\vec{U}_A = \cos\alpha\,\vec{\imath} + \cos\beta\,\vec{\jmath} + \cos\gamma\,\vec{k}$ **(Equação 2.25)**

A intensidade de $\vec{U}_A$ será:

$\left|\vec{U}_A\right| = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ **(Equação 2.26)**

Observe ainda que:

$\vec{A} = \left|\vec{A}\right|\vec{U}_A = \left|\vec{A}\right|\left(\cos\alpha\,\vec{\imath} + \cos\beta\,\vec{\jmath} + \cos\gamma\,\vec{k}\right)$

$\vec{A} = \left|\vec{A}\right|\cos\alpha\,\vec{\imath} + \left|\vec{A}\right|\cos\beta\,\vec{\jmath} + \left|\vec{A}\right|\cos\gamma\,\vec{k}$

$\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}$ **(Equação 2.27)**

2.6- Adição e Subtração de Vetores Cartesianos

Sejam $\vec{A}$ e $\vec{B}$ dois vetores quaisquer. Numa base de vetores ortonormais a adição e a subtração tornam-se.

$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\vec{\imath} + \left(A_y + B_y\right)\vec{\jmath} + (A_z + B_z)\vec{k}$ **(Equação 2.28)**

$\vec{R} = \vec{A} - \vec{B} = (A_x - B_x)\vec{\imath} + \left(A_y - B_y\right)\vec{\jmath} + (A_z - B_z)\vec{k}$ **(Equação 2.29)**

<u>Sistema de Forças Concorrentes</u>

Seja $\{\vec{F_i}\}_{i=1}^{n}$ um sistema de forças. Então a sua resultante em uma base de vetores ortonormais.

$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F_i} = \sum_{i=1}^{n}F_{xi}\,\vec{\imath} + \sum_{i=1}^{n}F_{yi}\,\vec{\jmath} + \sum_{i=1}^{n}F_{zi}\,\vec{k}$ **(Equação 2.30)**

- Ex: 2.8, 2.9, 2.10 e 2.11, págs. 38 a 40

2.7- Vetor Posição

<u>Coordenadas cartesianas ortogonais</u>

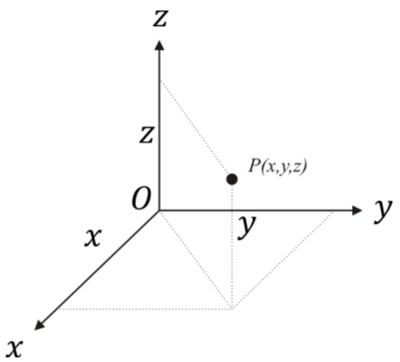


Figura 2. 23

<u>Vetor Posição</u>

Localiza um ponto do espaço a partir de um vetor e de uma relação a um ponto de referência.

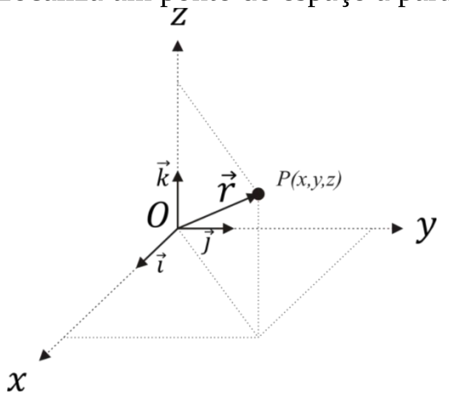


Figura 2. 24

Em base de vetores ortonormais:

$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

Em relação a um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais

Notação:

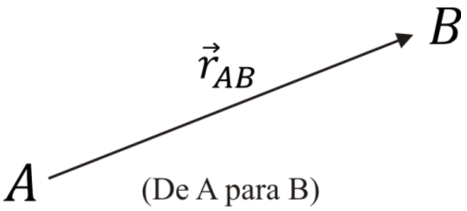


Figura 2. 25

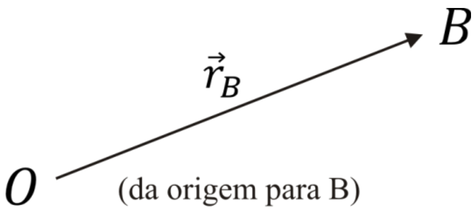


Figura 2. 26

Subtração de Vetores Posição:

$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$ **(Equação 2.31)**

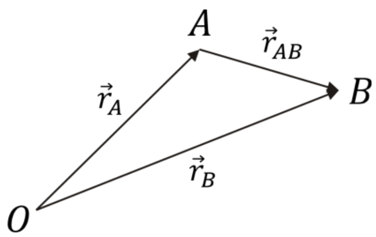


Figura 2. 27

Em base de vetores ortonormais:

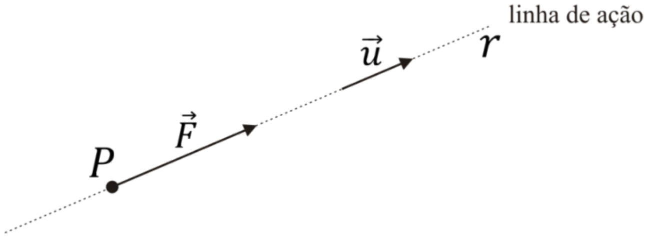
$\vec{r}_{AB} = (x_B - x_A)\vec{\imath} + (y_B - y_A)\vec{\jmath} + (z_B - z_A)\vec{k}$ **(Equação 2.32)**

Subtraem-se as coordenadas de A das de B.

- Exemplos 2.12, págs.47 e 48

2.8- Vetor Força Orientado ao Longo de uma Reta.

Linha de ação de uma força:



$$\begin{cases} r // \vec{F} \\ P \in r \end{cases}$$

Figura 2. 28

$\vec{U}$ é o vetor unitário orientado segundo a reta r.

$\vec{F} = |\vec{F}|\vec{U}$ **(Equação 2.33)**

- Exemplo 2.13, 2.14 e 2.15, págs. 49 – 52

2.9- Produto Escalar.

Define-se o produto escalar entre dois vetores quaisquer $\vec{A}\ e\ \vec{B}$ como:

$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\Theta$ **(Equação 2.34)**

Lê-se "A escalar B"

Observe que $\vec{A}.\vec{B}$ é um número real ∀

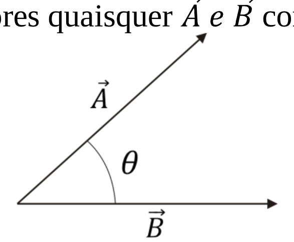


Figura 2. 29

<u>Leis de Operações</u>

- Lei comutativa:

$\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$ **(Equação 2.35)**

- Multiplicação por escalar:

$a(\vec{A}.\vec{B}) = (a\vec{A}).\vec{B} = \vec{A}.(a\vec{B}) = \vec{A}.\vec{B}a$ **(Equação 2.36)**

- Lei distributiva:

$\vec{A}.(\vec{B}+\vec{D}) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{D}$ **(Equação 2.37)**

<u>Definição de Vetor Cartesiano</u>

Dada uma base de vetores ortonormais $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$, então:

$\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1$

$\vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{j}.\vec{k} = 0$

Desta forma o produto escalar entre dois vetores em notação cartesiana se escreve como:

$\vec{A}.\vec{B} = (A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}).(B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k})$

$\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$ **(Equação 2.37)**

Observe que:

$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}|^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$ **(Equação 2.38)**

<u>Aplicações</u>

Determinar o ângulo entre dois vetores com retas concorrentes

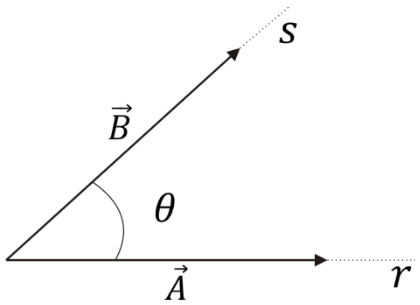


Figura 2. 30

$\Theta = ar\cos\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$ $\quad (0 \le \theta \le \pi)$ **(Equação 2.39)**

Componentes de um vetor na direção de um vetor ou de uma reta

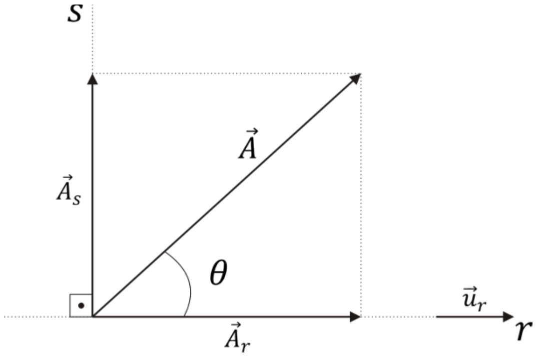


Figura 2. 31

$\vec{A}.\vec{u}_r = |\vec{A}|\cos\Theta = |\vec{A}_r|$ **(Equação 2.41)**

Logo:

$\vec{A}_r = (\vec{A}.\vec{u}_r)\vec{u}_r$ **(Equação 2.42)**

$\vec{A}_s = \vec{A} - \vec{A}_r$ **(Equação 2.43)**

A componente $\vec{A}_s$ tem intensidade dada de duas formas:

a) Por Pitágoras:

$|\vec{A}_s| = \sqrt{|\vec{A}|^2 - |\overrightarrow{A_r}|^2}$ **(Equação 2.44)**

b) Por Trigonometria:

$|\vec{A}_s| = |\vec{A}|\sin\Theta$ **(Equação 2.45)**

- Exemplos 2.16 e 2.17, págs. 60 a 62