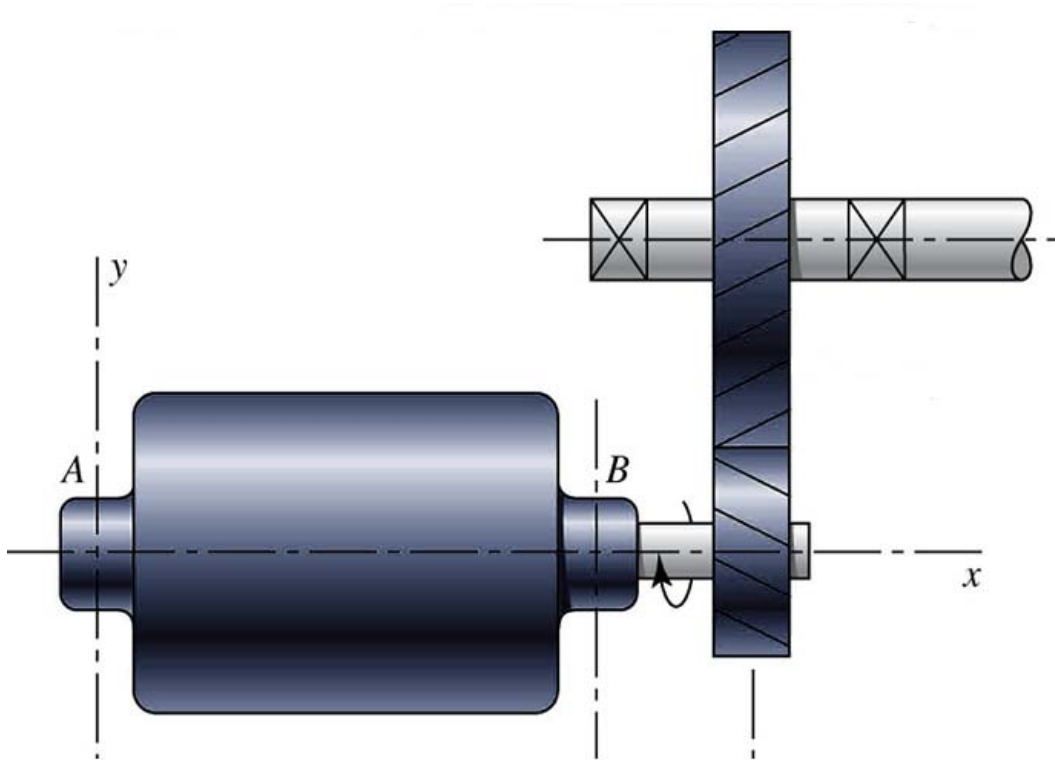


# **ANÁLISE DE FORÇA - ENGRENAGENS CILÍNDRICAS DE DENTES RETOS**

**Prof. Alexandre Augusto Pescador Sardá**

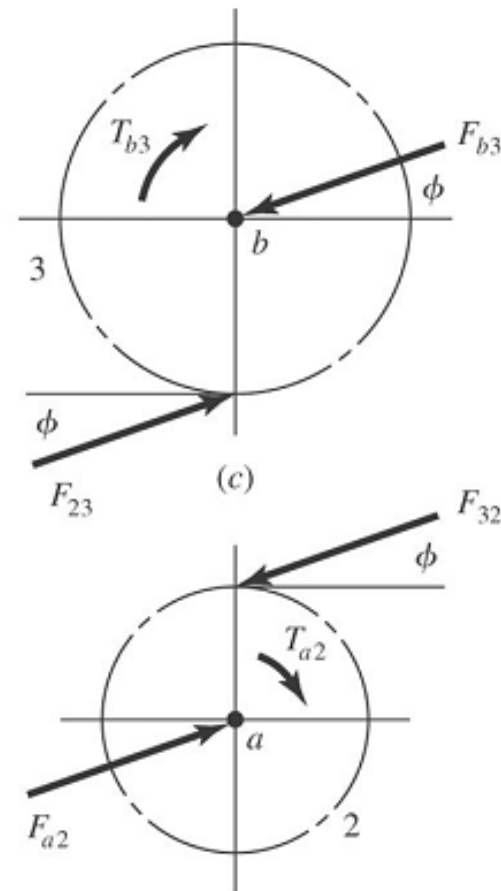
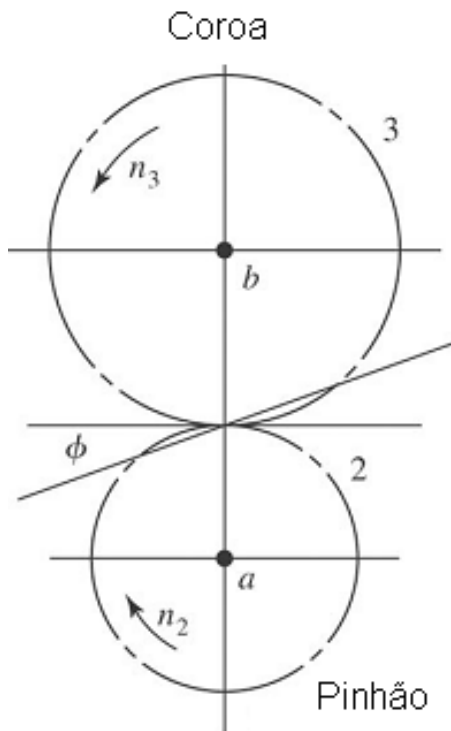
# ENGRENAGENS HELICOIDAIS DE EIXOS PARALELOS

- Ângulo de hélice é o mesmo em cada engrenagem;
- Uma engrenagem deve ter uma hélice destra (mão direita) e a outra sestra (mão esquerda);



# ANÁLISE DE FORÇA – ENGRENAGENS CILÍNDRICAS DE DENTES RETOS

- As reações entre dentes engrenados ocorre ao longo da linha de pressão;





# ANÁLISE DE FORÇA – ENGRENAGENS CILÍNDRICAS DE DENTES RETOS

$$H = \frac{W_t V}{33000}$$

$$W_t = \frac{60(10^3)H}{\pi d n}$$

$W_t$  é a carga transmitida, kN

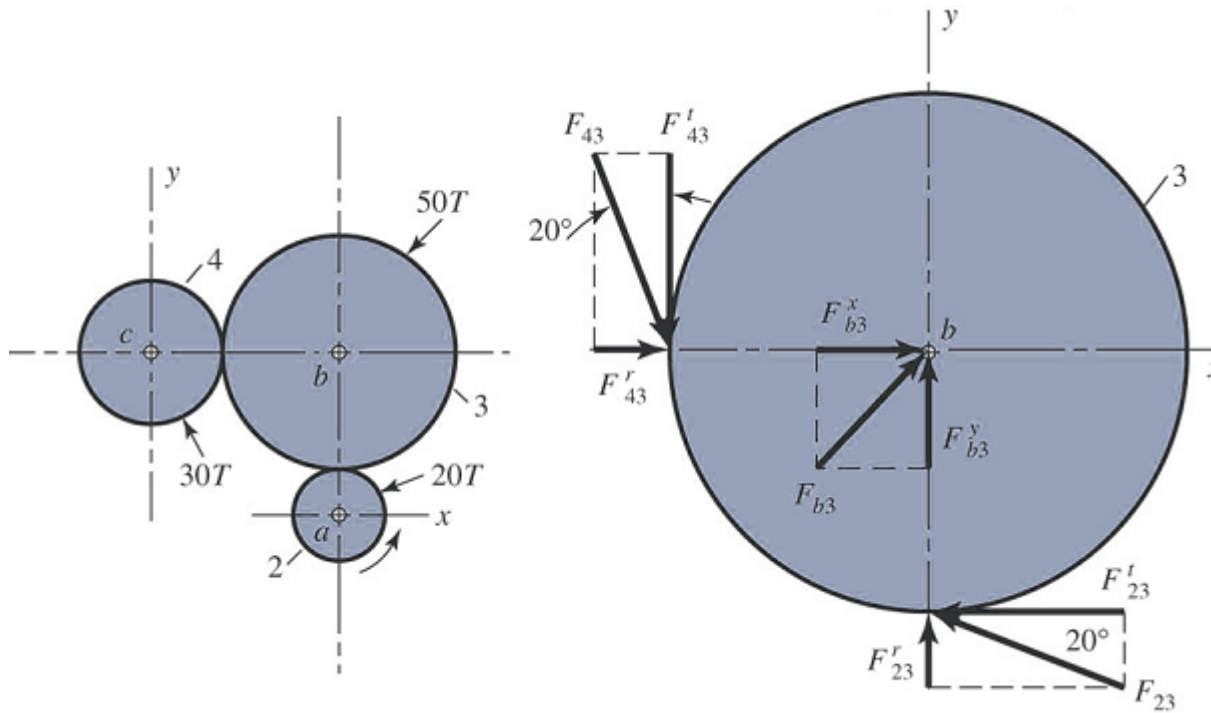
$H$  = Potência, kW

$d$  = diâmetro da engrenagem, mm

$n$  = velocidade, rpm

# EXERCÍCIOS

- O pinhão 2 roda a 1750 rpm e transmite 2,5 kW à engrenagem intermediária 3. Os dentes são cortados segundo o sistema de 20 de profundidade completa e têm um módulo  $m = 2,5$  mm. Desenhe um diagrama de corpo livre da engrenagem 3 e mostre todas as forças que atuam sobre a mesma.



# EXERCÍCIOS

- diâmetros primitivos:

$$d_2 = N_2 m = 20(2,5) = 50 \text{ mm}$$

$$d_3 = N_3 m = 50(2,5) = 125 \text{ mm}$$

$$W_t = \frac{60(10^3)H}{\pi d_2 n} = \frac{60(10^3)2,5 \text{ kW}}{\pi 50(1750)} = 0,546 \text{ kN}$$

$$F_{23}^t = 0,546 \text{ kN}$$

$$F_{23}^r = F_{23}^t \tan 20^\circ = 0,199 \text{ kN}$$

$$F_{23} = \frac{F_{23}^t}{\cos 20^\circ} = \frac{0,546}{\cos 20^\circ} = 0,581 \text{ kN}$$

# EXERCÍCIOS

- Uma vez que a engrenagem 3 é intermediária, não transmite qualquer potência (torque) ao eixo ligado a si; assim, a reação tangencial da engrenagem 4 sobre a engrenagem 3 também é igual a  $W_r$ .

$$F_{43}^t = 0,546 \text{ kN}$$

$$F_{43}^r = 0,199 \text{ kN}$$

$$F_{43} = 0,581 \text{ kN}$$

- As reações nos eixos, nas direções x e y, são:

$$F_{b3}^x = -(F_{23}^t + F_{43}^r) = -(-0,546 + 0,199) = 0,347 \text{ kN}$$

$$F_{b3}^y = -(F_{23}^r + F_{43}^t) = -(0,199 - 0,546) = 0,347 \text{ kN}$$

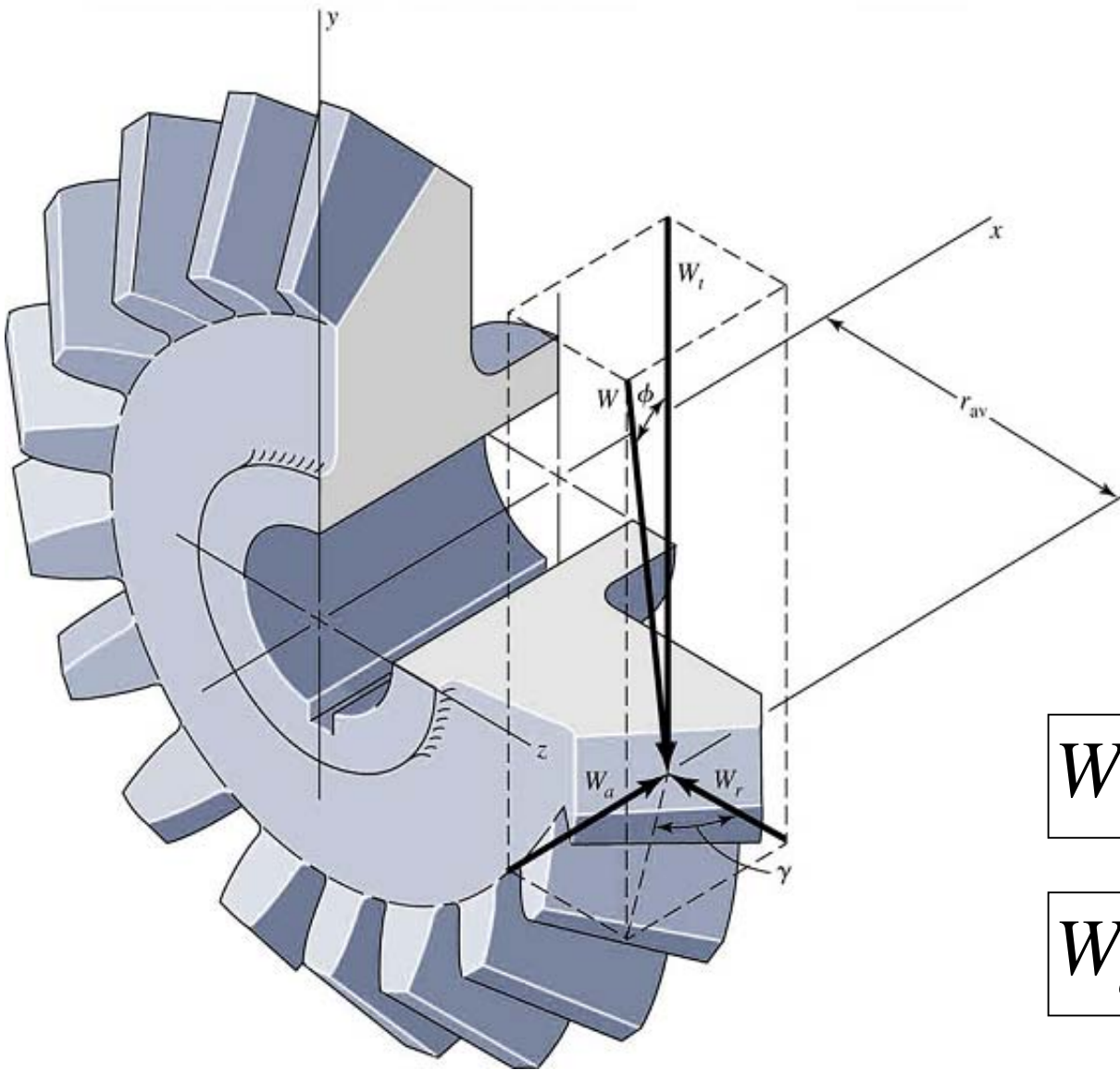
- A reação resultante sobre o eixo é:

$$F_{b3} = \sqrt{(0,347)^2 + (0,347)^2} = 0,491 \text{ kN}$$



# ANÁLISE DE FORÇA – ENGRENAGENS CÔNICAS

- Considera-se a carga tangencial ou transmitida que ocorreria se todas as forças fossem concentradas no ponto médio do dente.



$$W_t = \frac{T}{r_{av}}$$

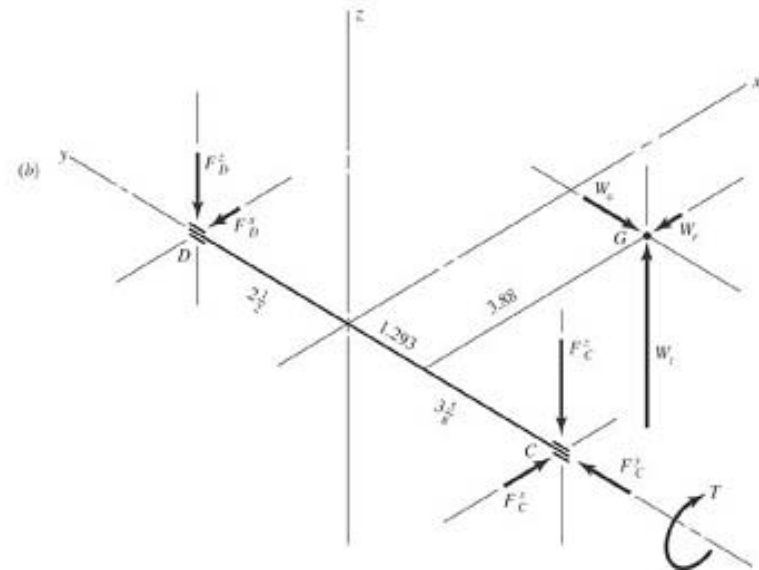
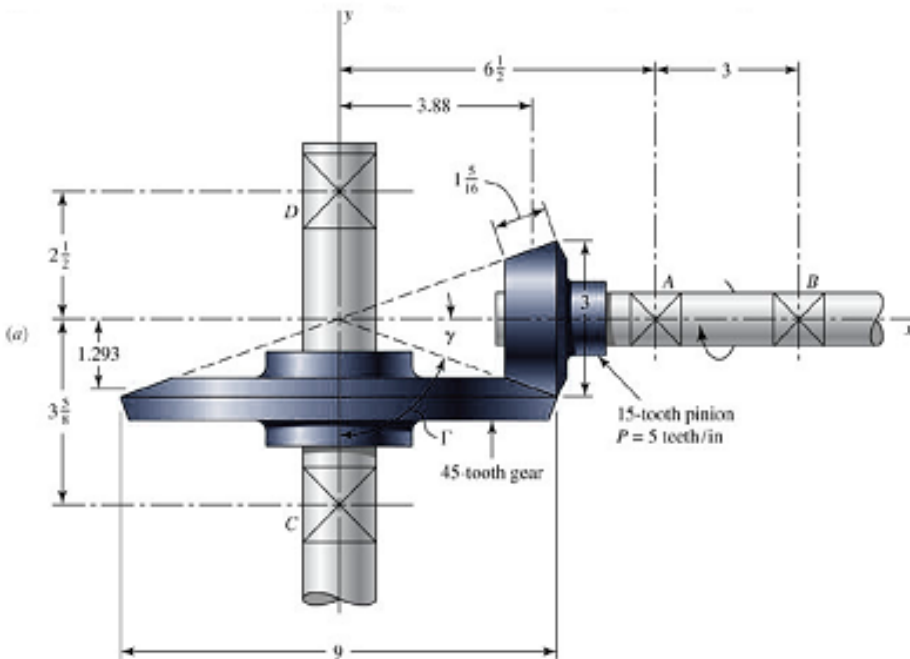
$$W_r = W_t \tan \phi \cos \gamma$$

$$W_a = W_t \tan \phi \operatorname{sen} \gamma$$



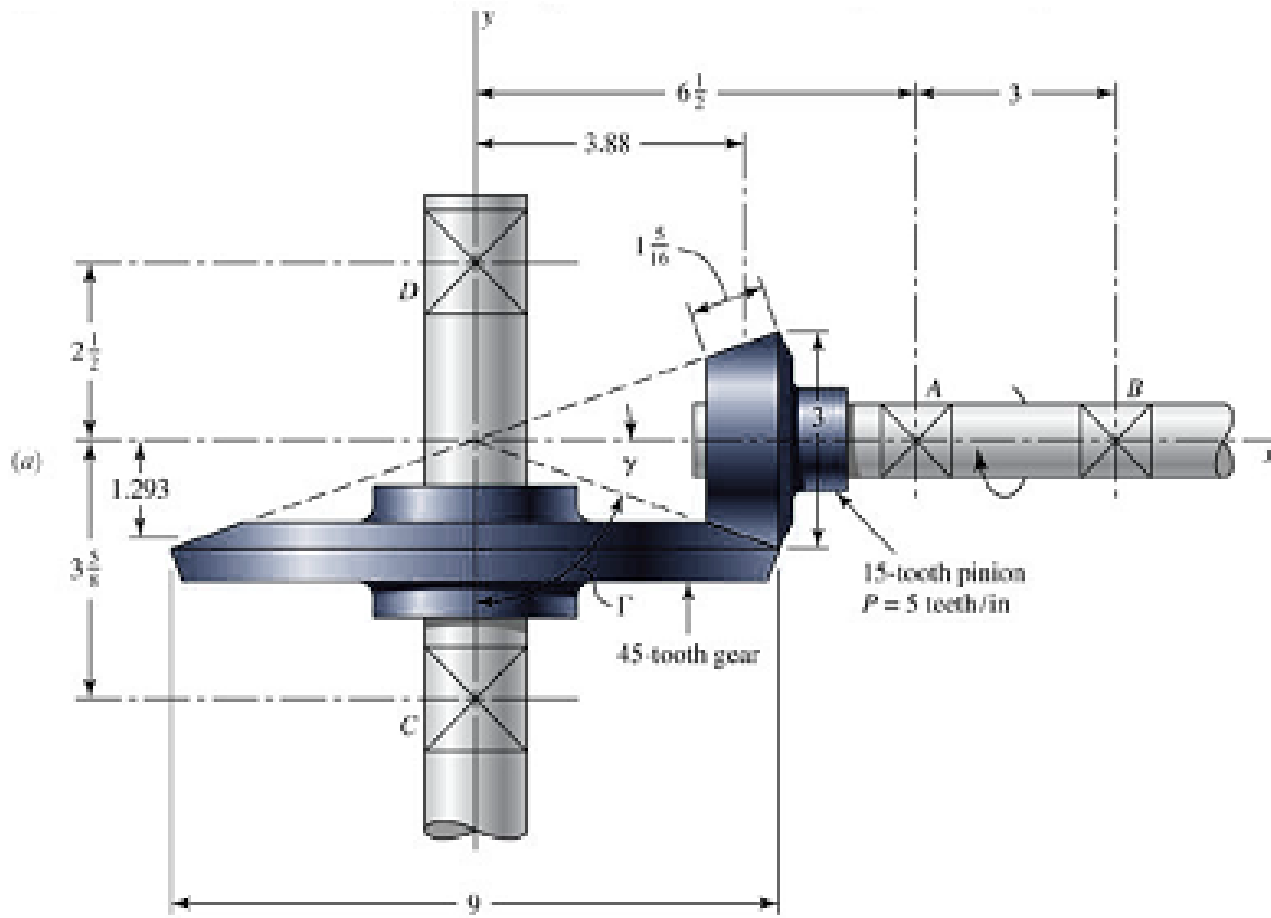
# EXERCÍCIO 13.7 – SHIGLEY – PG.659.

- Diagrama de corpo livre do eixo CD



# EXERCÍCIO 13.7 – SHIGLEY – PG.659.

- Ângulos primitivos:



$$\gamma = \tan^{-1}\left(\frac{3}{9}\right) = 18,43^{\circ}$$

$$\Gamma = \tan^{-1}\left(\frac{9}{3}\right) = 71,56^{\circ}$$

# EXERCÍCIO 13.7 – SHIGLEY – PG.659.

- Velocidade no círculo primitivo:

$$V = 2\pi r_p n = 2\pi \left( 1,293 \text{ in} * 0,02504 \frac{\text{m}}{\text{in}} \right) \frac{600 \text{ rpm}}{60} = 2,03 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

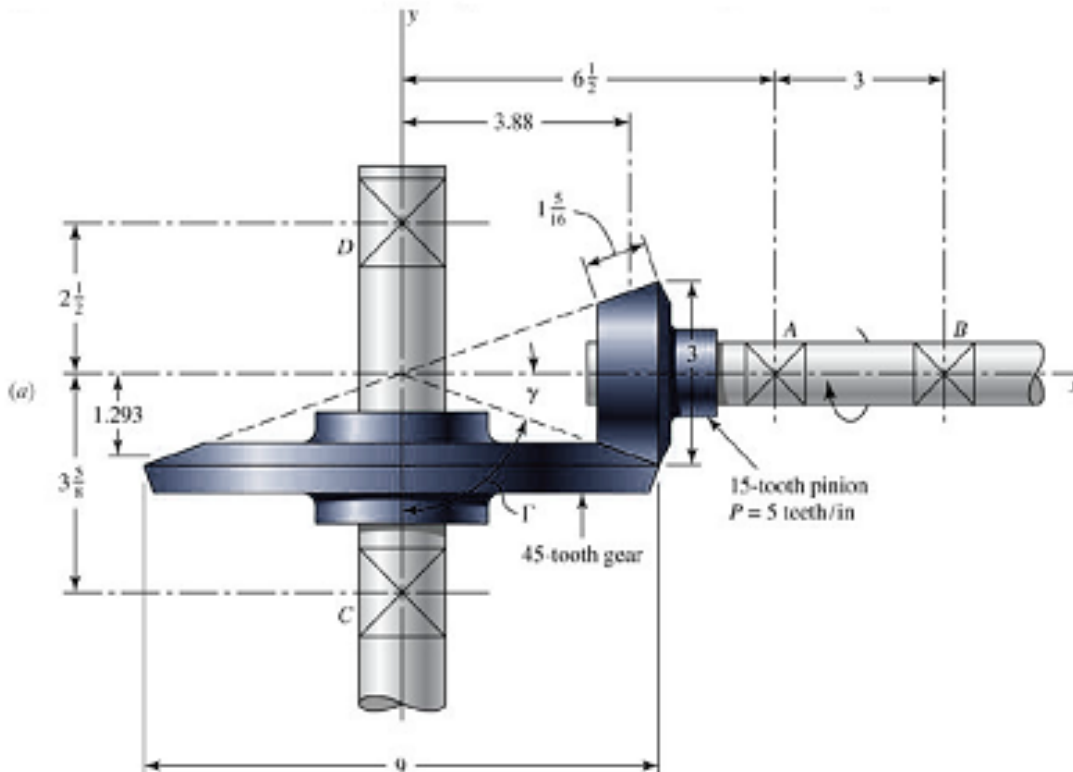
$$Pot = W_t V$$

$$W_t = \frac{Pot}{V}$$

$$W_t = \frac{5 \text{ hp} \cdot 746 \text{ W / hp}}{2,03 \text{ m / s}}$$

$$W_t = 1837,4 \text{ N}$$

Direção positiva do eixo z



## EXERCÍCIO 13.7 – SHIGLEY – PG.659.

$$W_r = W_t \tan \phi \cos \Gamma = 1837,4 \tan 20^\circ \cos 71,6^\circ = 211,09 N$$

Direção negativa do eixo x

$$W_a = W_t \tan \phi \operatorname{sen} \Gamma = 1837,4 \tan 20^\circ \operatorname{sen} 71,6^\circ = 634,5 N$$

Direção negativa do eixo y

Vetor de posição de **D** a **G** (em metros):

$$\vec{R}_{DG} = 9,72\hat{i} - 9,49\hat{j}$$

Vetor de posição de **D** a **C** (em metros):

$$\vec{R}_{DC} = -15,34\hat{j}$$

Momento em relação a **D**:

$$\vec{R}_{DG} \times \vec{W} + \vec{R}_{DC} \times \vec{F}_C + \vec{T} = \vec{0}$$

## EXERCÍCIO 13.7 – SHIGLEY – PG.659.

$$\begin{aligned} & (9,72\hat{i} - 9,49\hat{j}) \times (-211,09\hat{i} - 634,5\hat{j} + 1837,4\hat{k}) + \\ & (-15,34\hat{j}) \times (F_C^x\hat{i} + F_C^y\hat{j} + F_C^z\hat{k}) + T\hat{j} = \vec{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (-17436,9\hat{i} - 17859,5\hat{j} - 8169,74\hat{k}) + \\ & (-15,34F_C^z\hat{i} + 15,34F_C^x\hat{k}) + T\hat{j} = 0 \end{aligned}$$

$$\vec{T} = 17859,5\hat{j}$$

$$F_C^x = 532,5N$$

$$F_C^z = -1136,6N$$

# EXERCÍCIO 13.7 – SHIGLEY – PG.659.

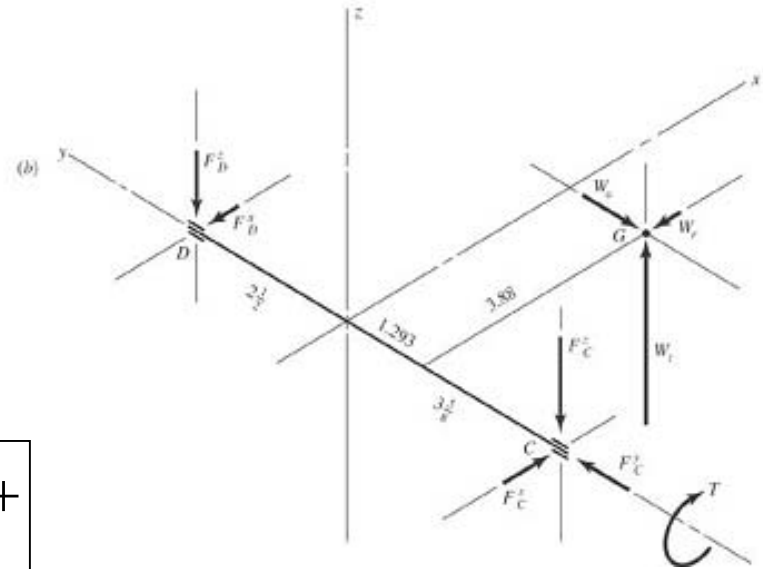
$$\vec{F}_D + \vec{F}_C + \vec{W} = \vec{0}$$

$$\left(F_D^x \hat{i} + F_D^z \hat{k}\right) + \left(532,5 \hat{i} + F_C^y \hat{j} - 1136,6 \hat{k}\right) + \left(-211,09 \hat{i} - 635,05 \hat{j} + 1837,4 \hat{k}\right) = \vec{0}$$

$$F_C^y \hat{j} - 635,05 \hat{j} = 0 \hat{j}$$

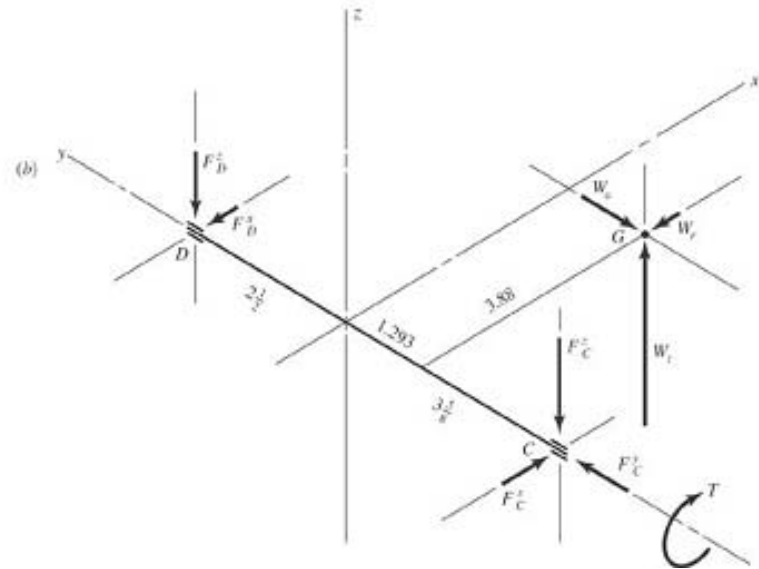
$$F_C^y = 635,05 \text{ N}$$

$$\vec{F}_C = 532,5 \hat{i} - 635,05 \hat{j} - 1136,6 \hat{k}$$





# EXERCÍCIO 13.7 – SHIGLEY – PG.659.



$$\left(F_D^x \hat{i} + F_D^z \hat{k}\right) + \left(532,5 \hat{i} - 635,05 \hat{j} - 1136,6 \hat{k}\right) + \left(-211,09 \hat{i} - 635,05 \hat{j} + 1837,4 \hat{k}\right) = \vec{0}$$

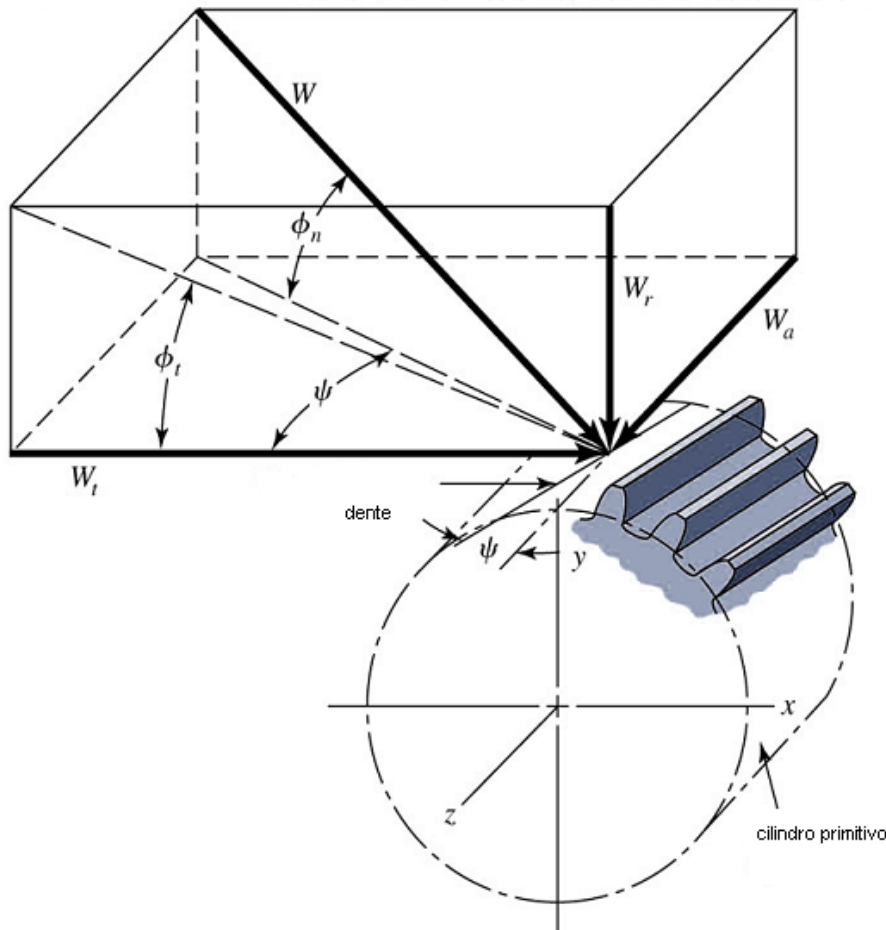
$$F_D^x = -321,41 N$$

$$F_D^z = -700,8 N$$

$$\vec{F}_D = -321,41 \hat{i} - 700,8 \hat{k} \text{ N}$$

# ANÁLISE DE FORÇA – ENGRENAGENS HELICOIDAIS

- O ponto de aplicação dessas forças localiza-se no plano de passo primitivo e no centro da face da engrenagem.



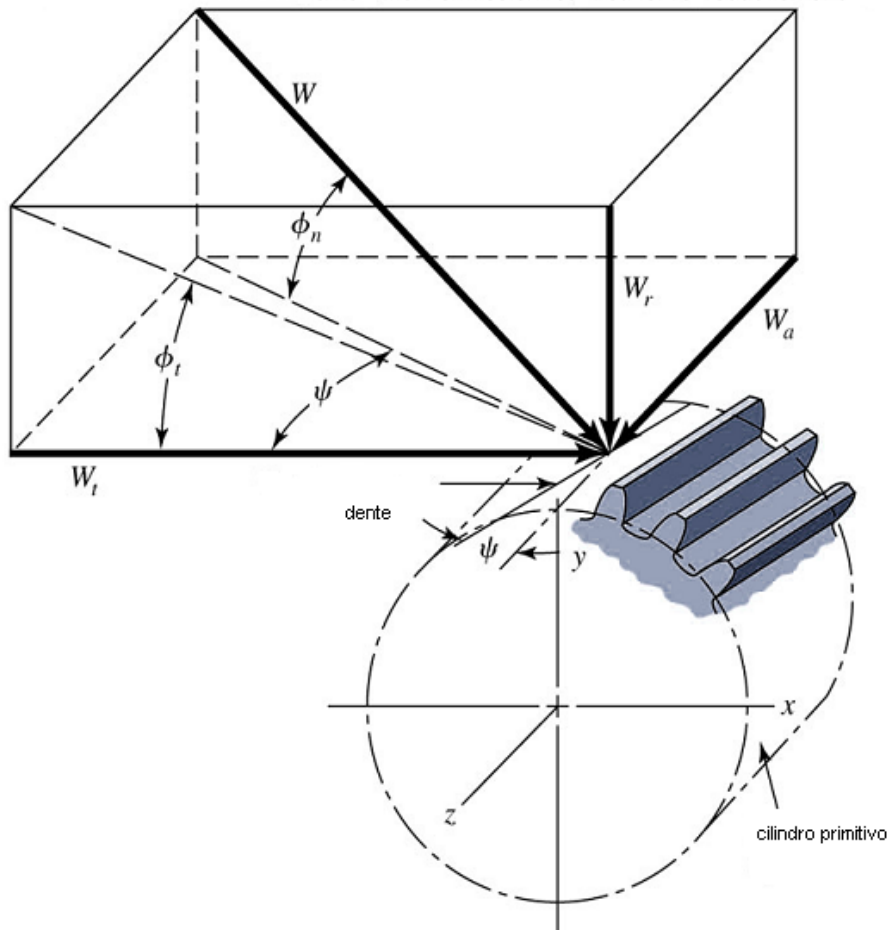
$$W_r = W \operatorname{sen} \phi_n$$

$$W_t = W \cos \phi_n \cos \psi$$

$$W_a = W \cos \phi_n \operatorname{sen} \psi$$

# ANÁLISE DE FORÇA – ENGRENAGENS HELICOIDAIS

- Normalmente,  $W_t$  e as demais forças são requeridas.



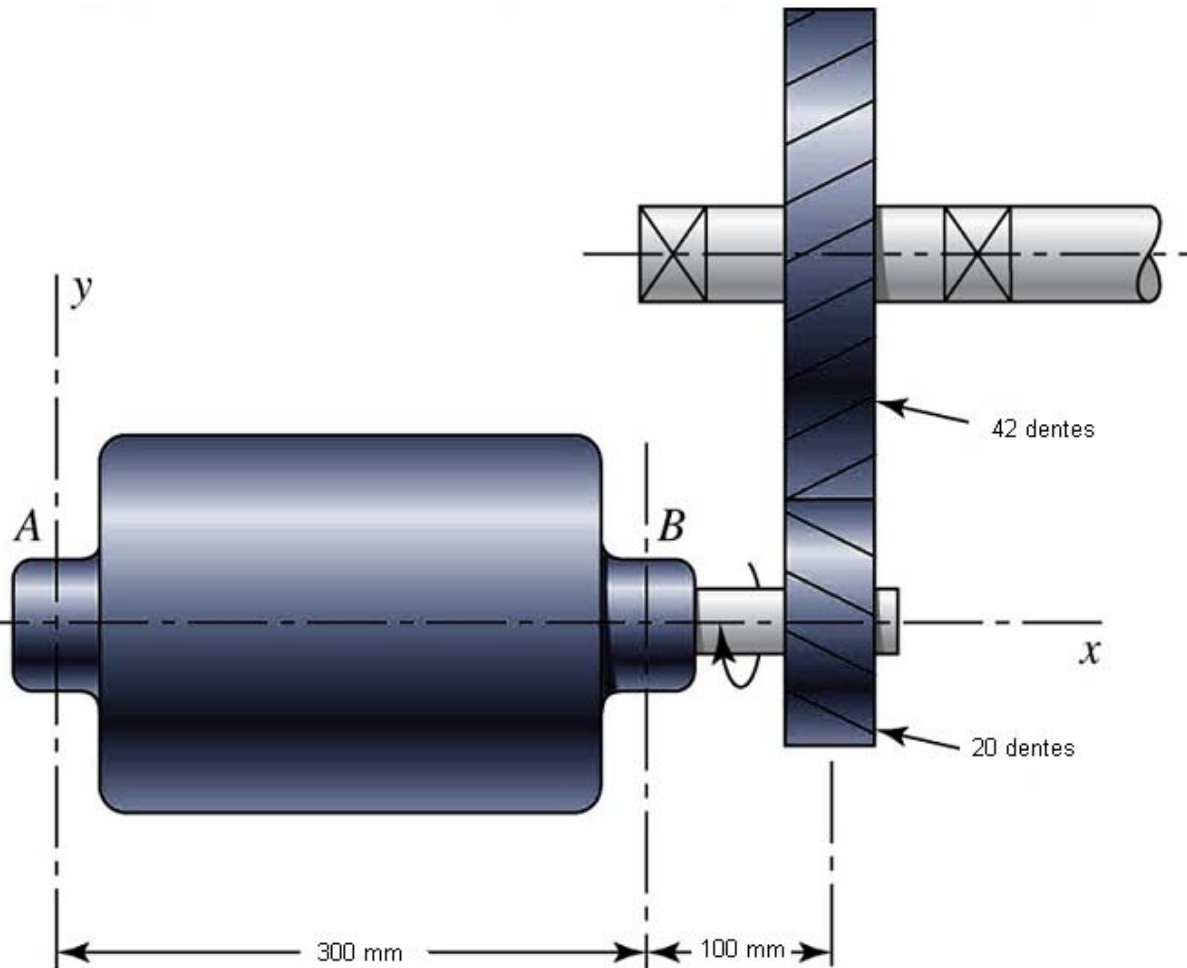
$$W_r = W_t \tan \phi_t$$

$$W_a = W_t \tan \psi$$

$$W = \frac{W_t}{\cos \phi_n \cos \psi}$$

# EXERCÍCIO

- Um motor elétrico de 2 hp gira a 1800 rpm em sentido horário. Fixado ao motor há um pinhão helicoidal de 20 dentes com ângulo de pressão normal de  $25^\circ$ , ângulo de hélice de  $35^\circ$ , e um passo diametral normal de 10 dentes/polegada. Determine as forças atuantes no pinhão bem como as reações de mancal em A e B. O esforço axial deve ser suportado em A.



$$\cos \psi = \frac{\tan \phi_n}{\tan \phi_t}$$

$$\phi_t = \arctan\left(\frac{\tan \phi_n}{\cos \psi}\right)$$

$$\phi_t = \arctan\left(\frac{\tan 25^\circ}{\cos 35^\circ}\right)$$

$$\phi_t = 29,65^\circ$$

# EXERCÍCIO

- Sabe-se que:

$$P_t = P_n \cos \psi = 10 \cos 35^\circ$$

$$P_t = 8,19 \text{ dentes/polegada}$$

$$d_p = \frac{N}{8,19} = \frac{20}{8,19} = 2,442 \text{ polegadas} = 62,02 \text{ mm}$$

$$V = \pi d n = \pi (62,02 \text{ mm}) \frac{1800}{60} \text{ Hz} = 5845,9 \text{ mm/s} = 5,84 \text{ m/s}$$

$$W_t = \frac{Pot}{V}$$

$$W_t = \frac{2 \text{ hp} \cdot 746 \text{ W/hp}}{5,84 \text{ m/s}}$$

$$W_t = 255,2 \text{ N}$$

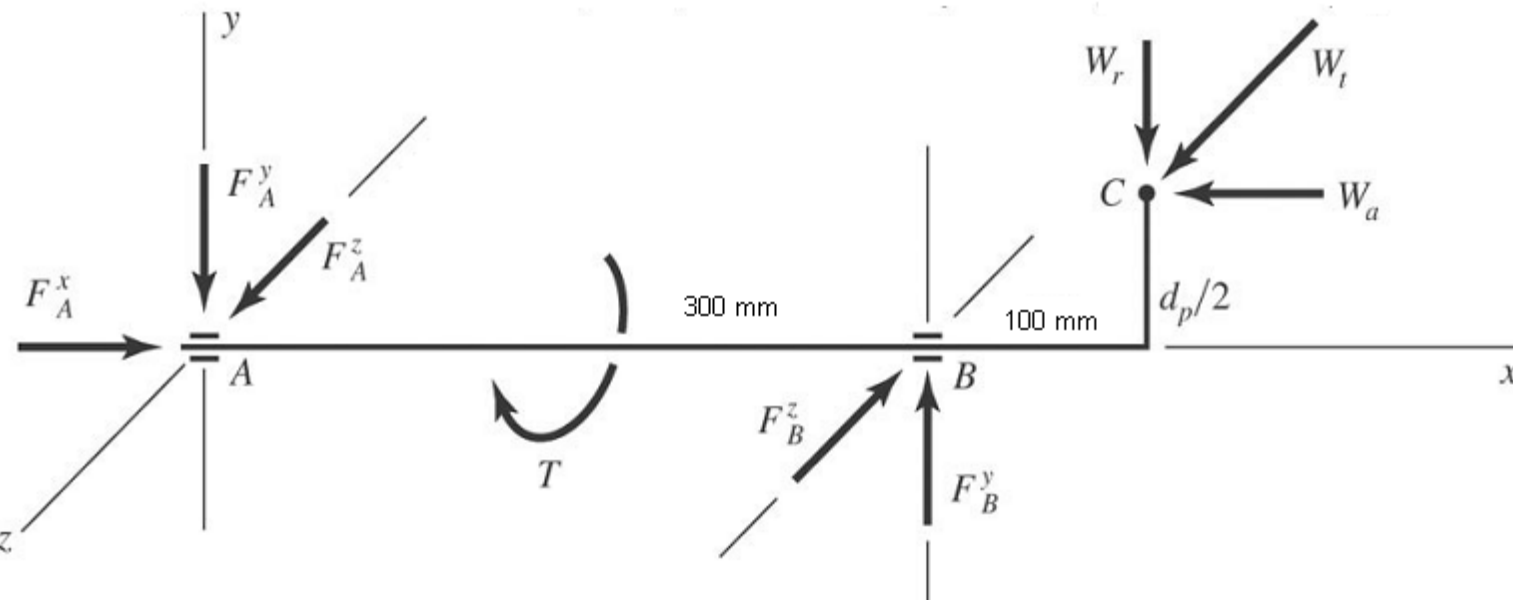
## EXERCÍCIO

$$W_r = W_t \tan \phi_t = 255,2 \tan 29,65^\circ = 145,3 \text{ N}$$

$$W_a = 255,2 \tan 35^\circ = 178,7 \text{ N}$$

$$W = \frac{255,2}{\cos 25^\circ \cos 35^\circ} = 343,7 \text{ N}$$

$$F_A^x = W_a = 178,7 \text{ N}$$



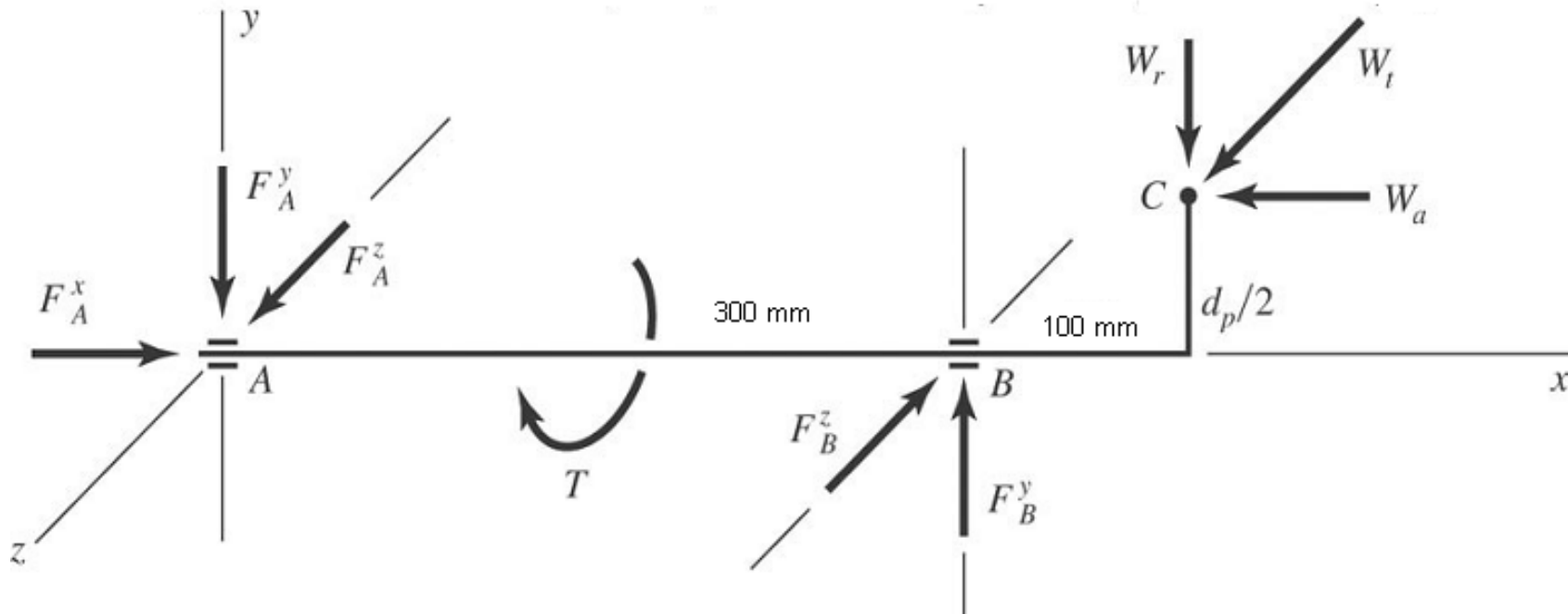
# EXERCÍCIO

- Momento em relação ao eixo z::

$$W_a \frac{d_p}{2} + F_B^y (300\text{mm}) - W_r (400\text{mm}) = 0$$

$$178,7\text{N} \frac{62,02\text{mm}}{2} + F_B^y (300\text{mm}) - 145,3(400\text{mm}) = 0$$

$$F_B^y = 175,3\text{N}$$



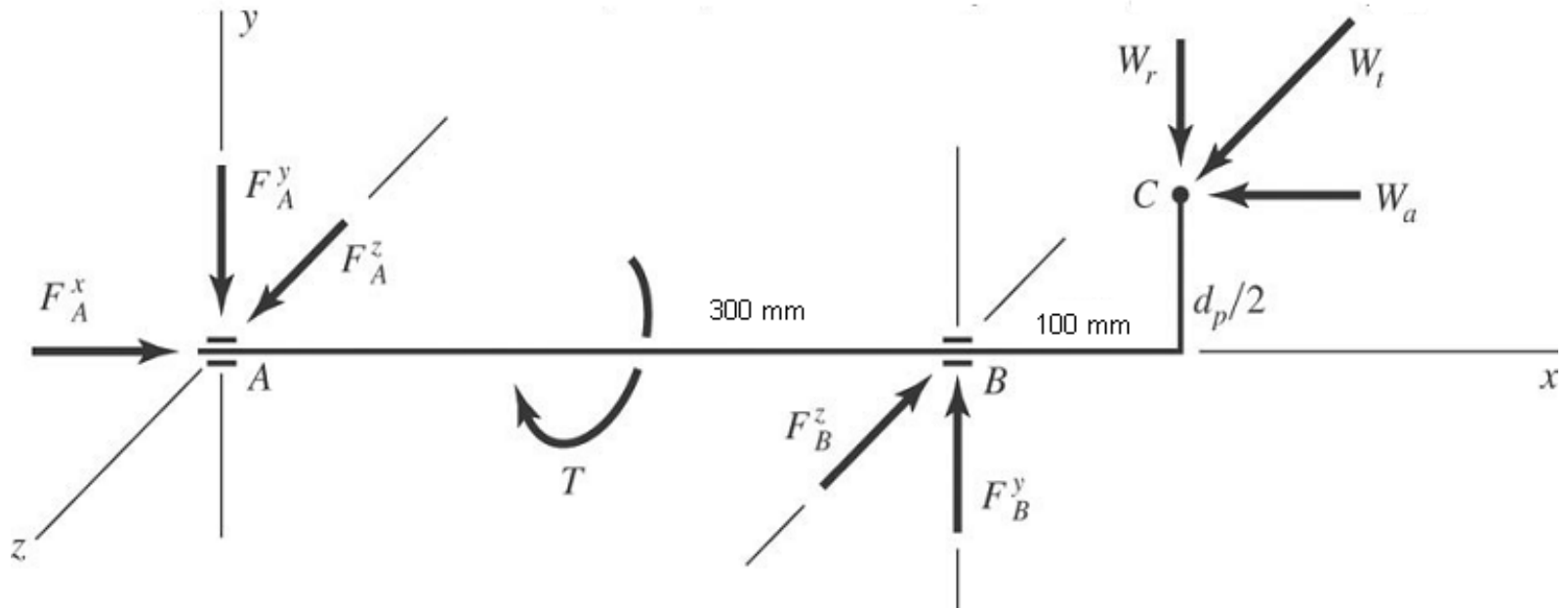
# EXERCÍCIO

- Somando as forças na direção y:

$$F_B^y - F_A^y - W_r = 0$$

$$175,3 - F_A^y - 145,3 = 0$$

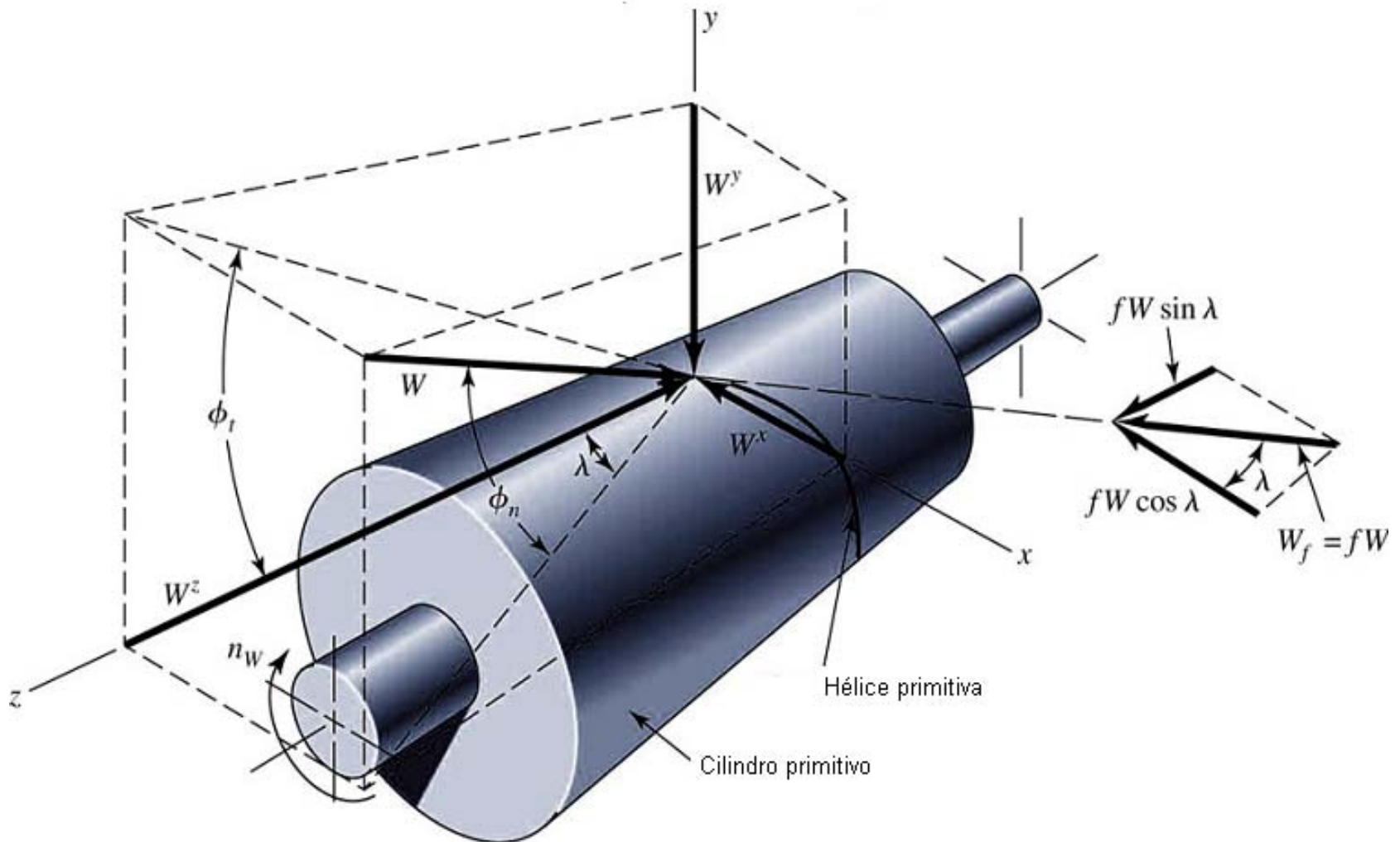
$$F_A^y = 29,96N$$





# ANÁLISE DE FORÇA – ENGRENAGENS SEM-FIM

- Desconsiderando-se o atrito, a única força aplicada pela coroa-sem-fim será a força  $W$ .



# ANÁLISE DE FORÇA – ENGRENAGENS SEM-FIM

$$W^x = W \cos \phi_n \operatorname{sen} \lambda$$

$$W^y = W \operatorname{sen} \phi_n$$

$$W^z = W \cos \phi_n \cos \lambda$$

- W e G indicam as forças que agem no parafuso e na coroa, respectivamente.  $W^y$  é a força radial do parafuso e da coroa sem-fim. A força tangencial no parafuso é  $W^x$  e na coroa  $W^z$ . A força axial no parafuso é  $W^y$  e na coroa  $W^x$ .

$$W_{wt} = -W_{Ga} = W^x$$

$$W_{wr} = -W_{Gr} = W^y$$

$$W_{wa} = -W_{Gt} = W^z$$

# ANÁLISE DE FORÇA – ENGRENAGENS SEM-FIM

- Introduzindo-se o coeficiente de atrito  $f$ , tem-se

$$W^x = W(\cos \phi_n \operatorname{sen} \lambda + f \cos \lambda)$$

$$W^y = W \operatorname{sen} \phi_n$$

$$W^z = W(\cos \phi_n \cos \lambda - f \operatorname{sen} \lambda)$$

- Após alguma manipulação:

$$W_f = fW = \frac{f W_{Gt}}{f \operatorname{sen} \lambda - \cos \phi_n \cos \lambda}$$

# ANÁLISE DE FORÇA – ENGRENAGENS SEM-FIM

$$W_{Wt} = W_{Gt} \frac{\cos \phi_n \operatorname{sen} \lambda + f \cos \lambda}{f \operatorname{sen} \lambda - \cos \phi_n \cos \lambda}$$

- Eficiência definida como:

$$\eta = \frac{W_{Wt} (\textit{sem fricção})}{W_{Wt} (\textit{com fricção})}$$

- Após alguma manipulação:

$$\eta = \frac{\cos \phi_n - f \tan \lambda}{\cos \phi_n + f \cot \lambda}$$

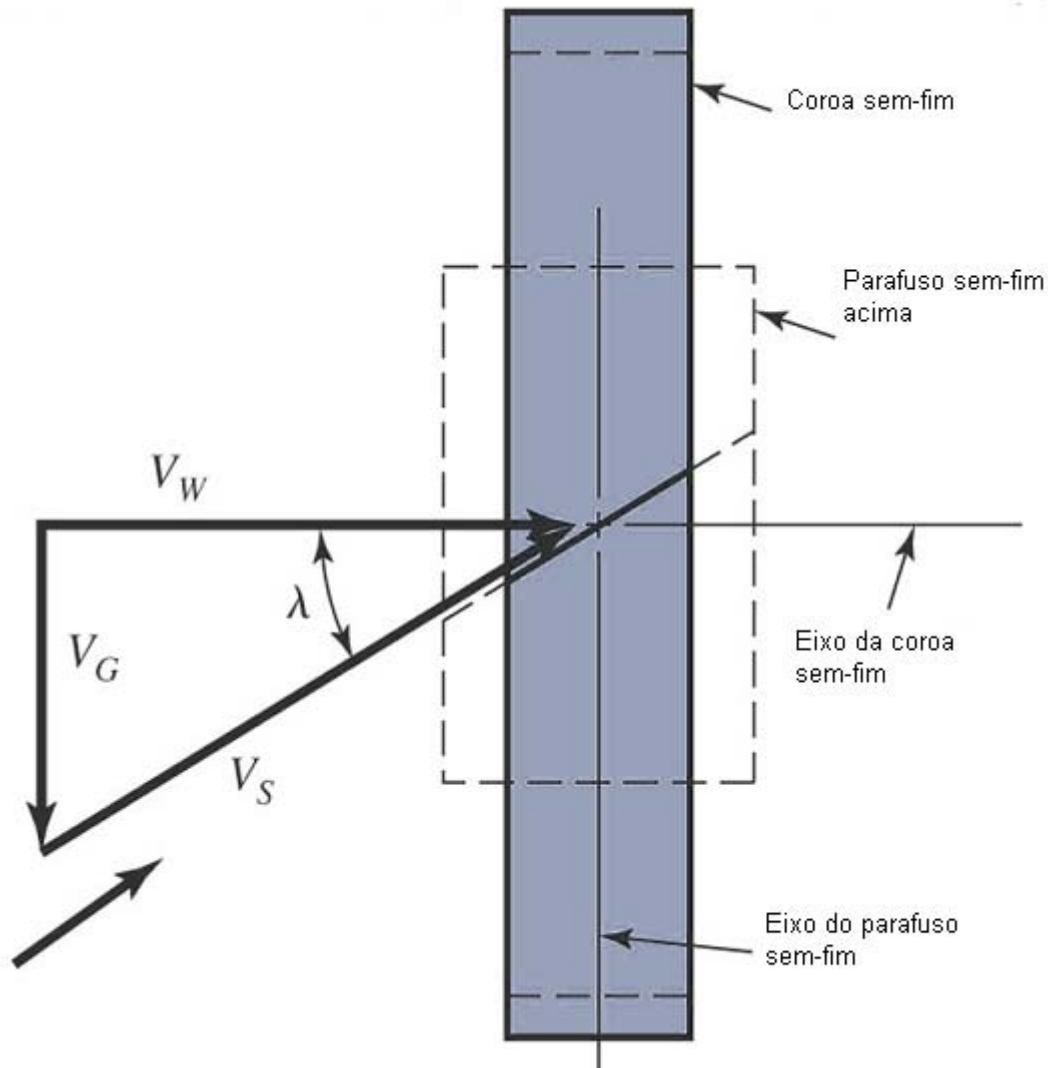
# ANÁLISE DE FORÇA – ENGRENAGENS SEM-FIM

- Eficiência de pares de engrenagens sem-fim para **f = 0,05**

Ângulo de hélice, graus	Eficiência
1,0	25,2
2,0	45,7
5,0	62
7,5	71,3
10,0	76,6
15,0	82,7
20,0	85,9
30,0	89,1

# ANÁLISE DE FORÇA – ENGRENAGENS SEM-FIM

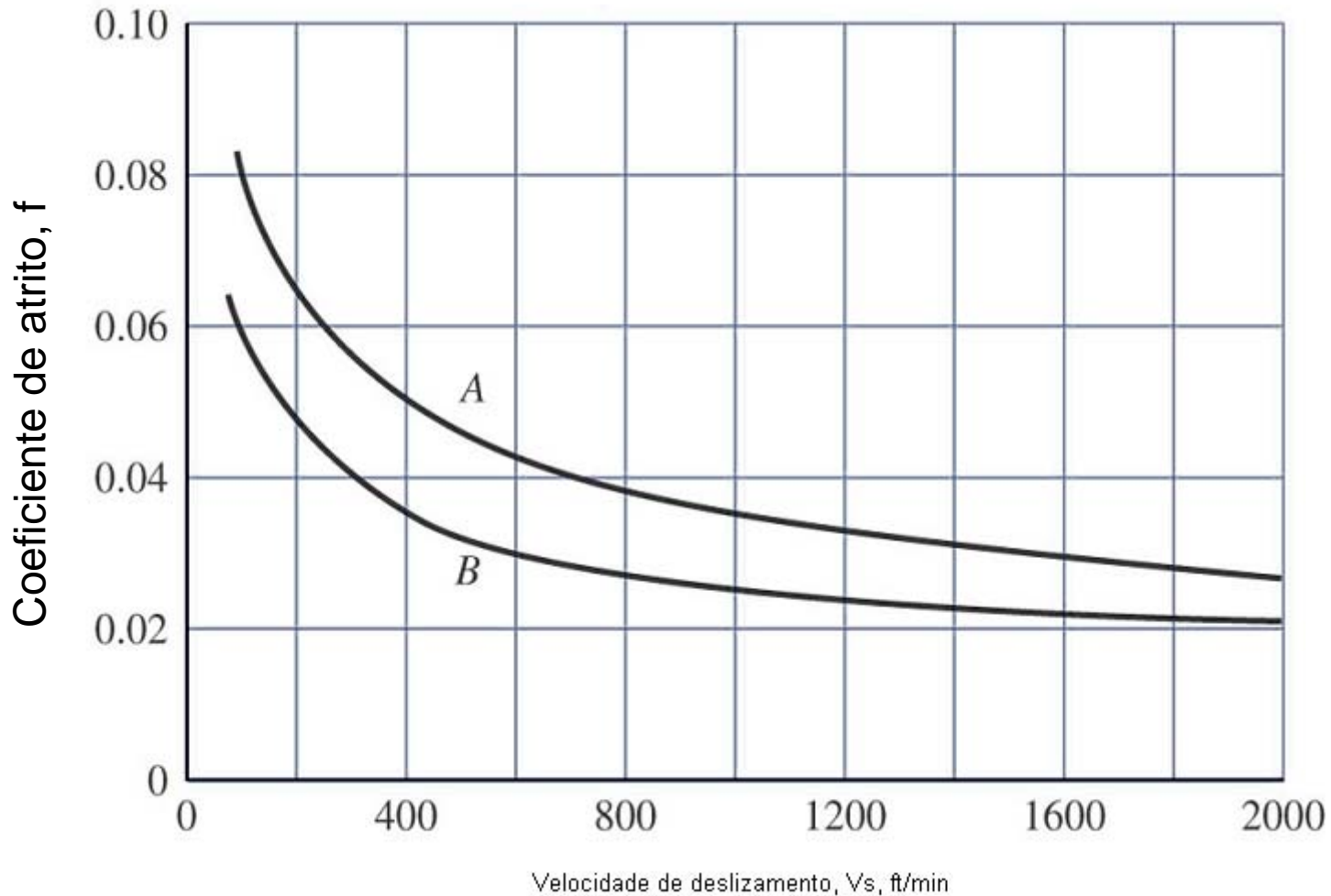
- Coeficiente de atrito é dependente da velocidade relativa ou de deslizamento (experimentos)



$$V_S = \frac{V_W}{\cos \lambda}$$

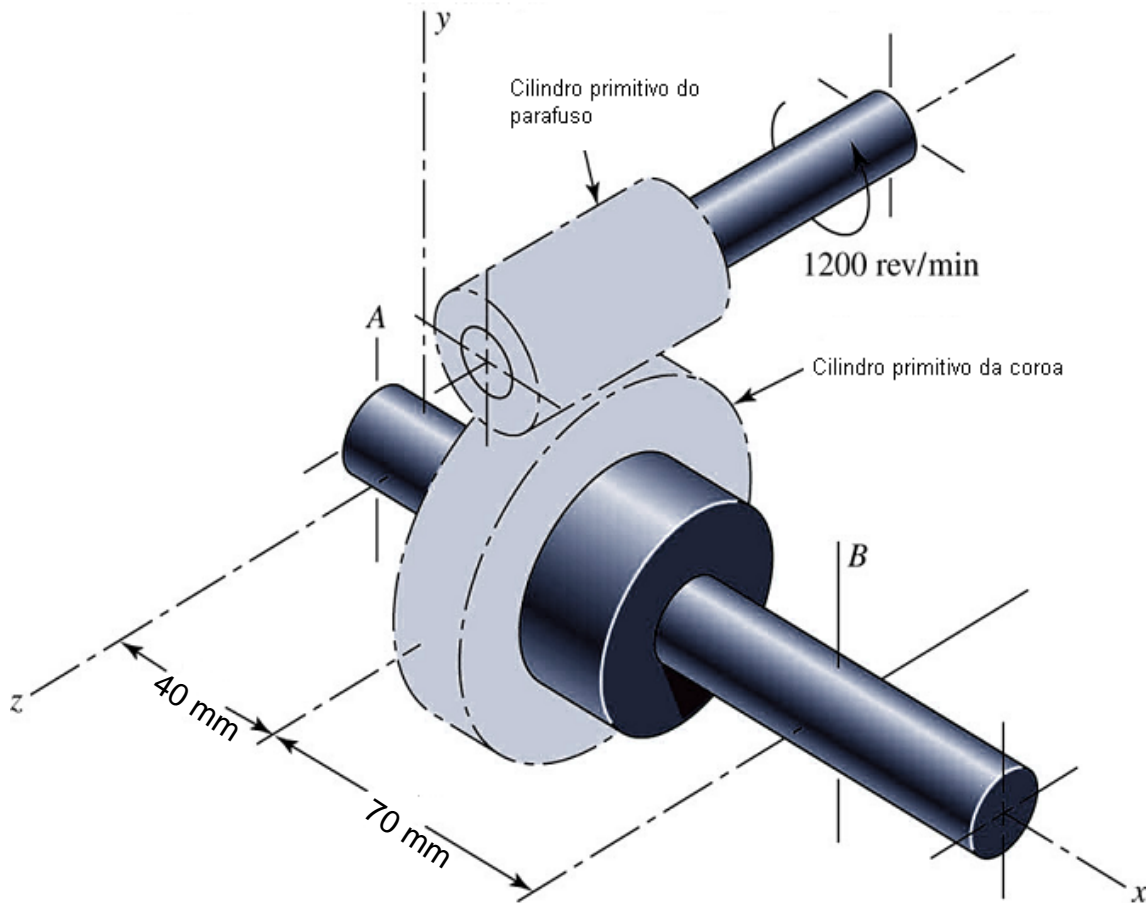
# ANÁLISE DE FORÇA – ENGRENAGENS SEM-FIM

- Valores representativos do coeficiente de atrito para engrenagens sem-fim.



# EXERCÍCIO

- Um pinhão destro sem-fim de 2 dentes transmite 2 hp, a 1000 rpm a uma coroa sem-fim de 20 dentes e passo diametral transversal de 5 dentes/in e uma largura de face de 30 mm. O pinhão apresenta um diâmetro primitivo de 40 mm e uma largura de face de 50 mm. O ângulo de pressão normal vale  $14,5^\circ$ .
- A) Encontre o passo axial, a distância entre centros, o avanço e o ângulo de avanço.
- B) Encontre as forças exercidas pelos mancais contra o eixo da coroa sem-fim.





# EXERCÍCIO

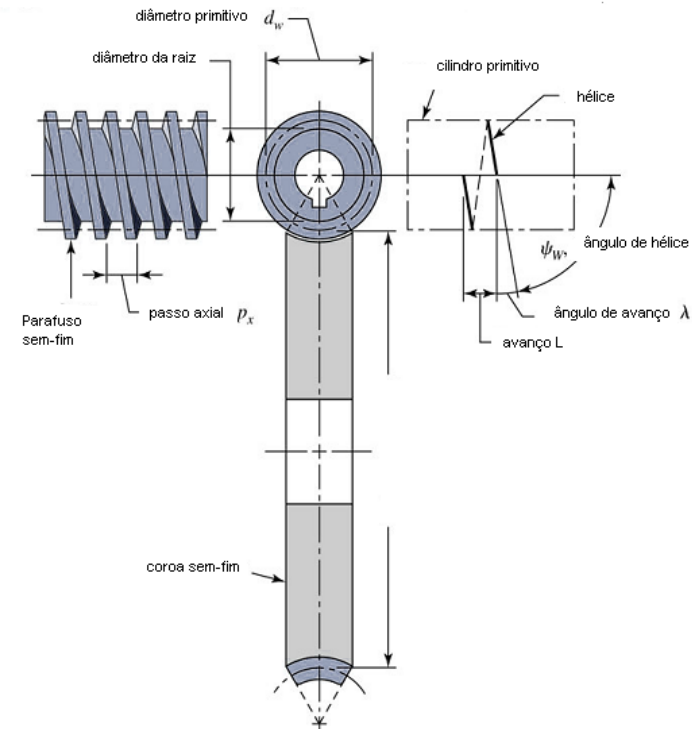
a) O passo axial é igual ao passo transversal da coroa:

$$p_x = p_t = \frac{\pi}{P} = \frac{\pi}{5} = 0,628 \text{ in} = 15,95 \text{ mm}$$

$$d_w = 40 \text{ mm}$$

$$d_G = \frac{N_G}{P} = \frac{20}{5} = 4 \text{ in} = 101,6 \text{ mm}$$

$$C = \frac{d_w + d_G}{2} = \frac{40 + 101,6}{2} = 70,8 \text{ mm}$$



# EXERCÍCIO

Avanço:

$$L = p_x N_w = 15,73 \text{ mm}(2) = 31,90 \text{ mm}$$

$$\tan \lambda = \frac{L}{\pi d_w} = \frac{31,90}{\pi(40)} = 0,25$$

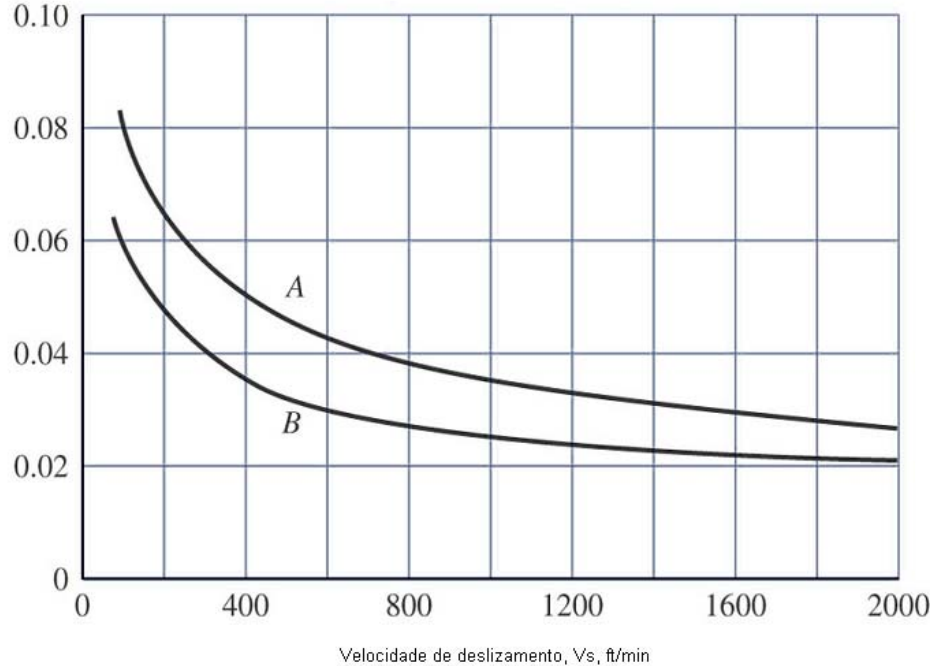
$$\lambda = \frac{3190}{\pi(40)} = 14,24^\circ$$

b) Velocidade na linha primitiva do pinhão:

$$V_w = \pi d_w n_w = \pi(40 \text{ mm}) \frac{1000 \text{ rpm}}{60} = 2094,4 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

$$V_s = \frac{V_w}{\cos \lambda} = \frac{2094,4}{\cos(14,24^\circ)} = 2160,8 \text{ mm/s} = 425,4 \text{ ft/min}$$

# EXERCÍCIO



Considerando-se  $f=0,05$ ;

Forças:

$$W_{wt} = \frac{Pot}{V_w} = \frac{2hp \cdot 746W / hp}{2,094m / s} = -712,5N$$

## EXERCÍCIO

Mas:

$$W_{wt} = -W_{Ga} = W^x$$

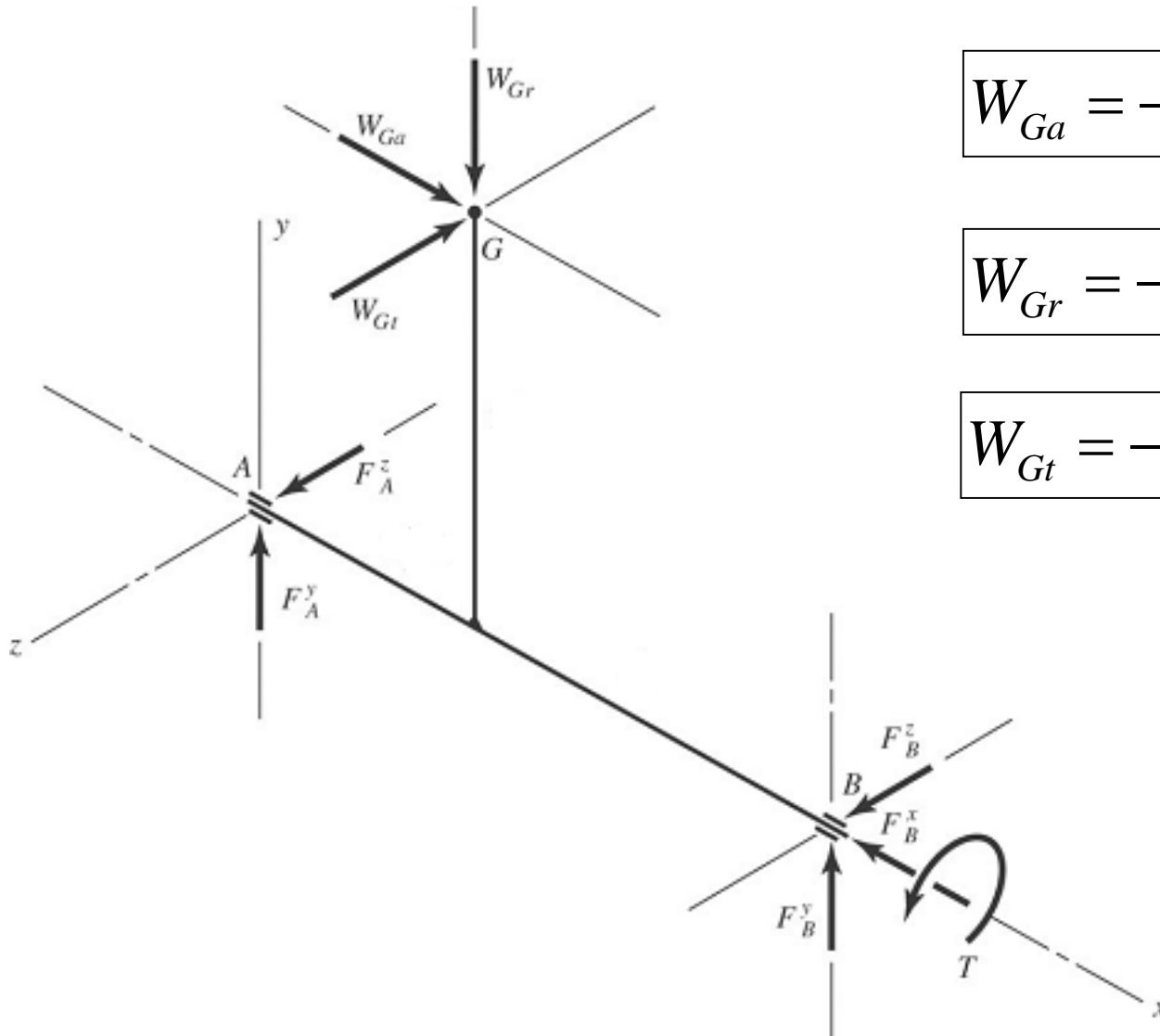
$$W = \frac{W^x}{(\cos \phi_n \operatorname{sen} \lambda + f \cos \lambda)}$$

$$W = \frac{712,5 \text{ N}}{(\cos 14,5^\circ \operatorname{sen} 14,24^\circ + 0,05 \cos 14,24^\circ)} = 2485,9 \text{ N}$$

$$W^y = W \operatorname{sen} \phi_n = 2485,9 \operatorname{sen}(14,5^\circ) = 622,4 \text{ N}$$

$$W^z = W(\cos \phi_n \cos \lambda - f \operatorname{sen} \lambda) =$$
$$2485,9(\cos 14,5^\circ \cos 14,24^\circ - 0,05 \operatorname{sen} 14,24^\circ) = 2302,2 \text{ N}$$

# EXERCÍCIO



$$W_{Ga} = -W^x = 712,5 \text{ N}$$

$$W_{Gr} = -W^y = -622,4 \text{ N}$$

$$W_{Gt} = -W^z = -2302,2 \text{ N}$$

# EXERCÍCIO

Assume-se o mancal B de escora, de forma que o eixo de engrenagens trabalhe em compressão:

Forças na direção x:

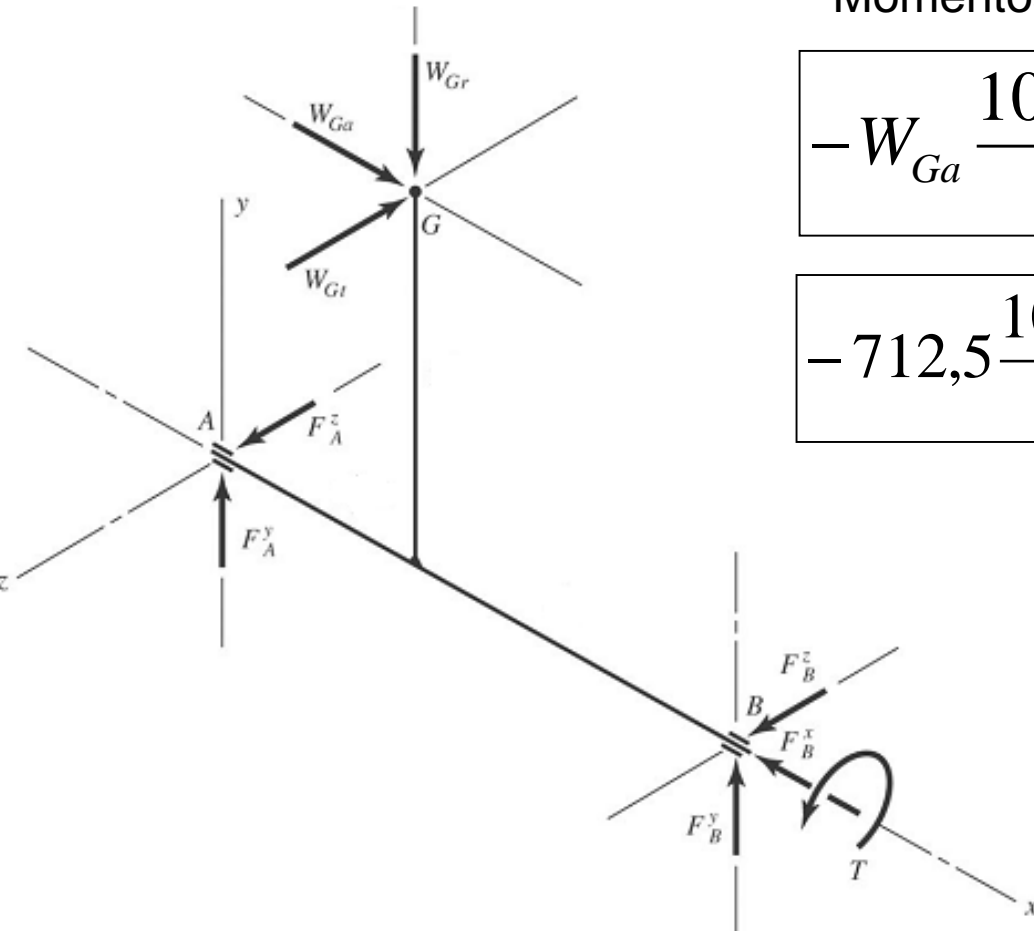
$$F_B^x = W_{Ga} = 712,5 N$$

Momentos em relação a z:

$$-W_{Ga} \frac{101,6}{2} - W_{Gr} 40 + F_B^y (40 + 70) = 0$$

$$-712,5 \frac{101,6}{2} - 622,4(40) + F_B^y (40 + 70) = 0$$

$$F_B^y = 555,4 N$$



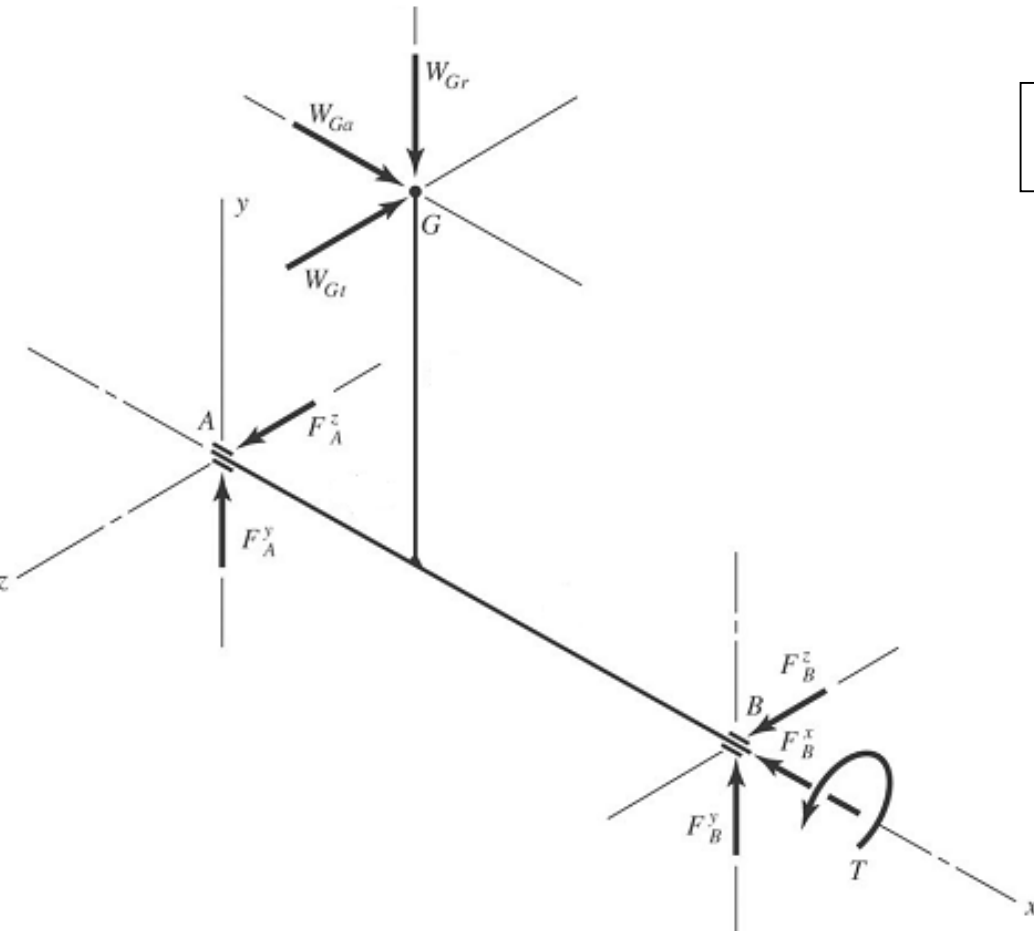
# EXERCÍCIO

Momentos em relação a y:

$$W_{Gt} 40 - F_B^z (40 + 70) = 0$$

$$(2302,2)40 - F_B^z (40 + 70) = 0$$

$$F_B^z = 837,2N$$



# EXERCÍCIO

Somatório de forças em y:

$$-W_{Gr} + F_B^y + F_A^y = 0$$

$$-622,4 + 555,4 + F_A^y = 0$$

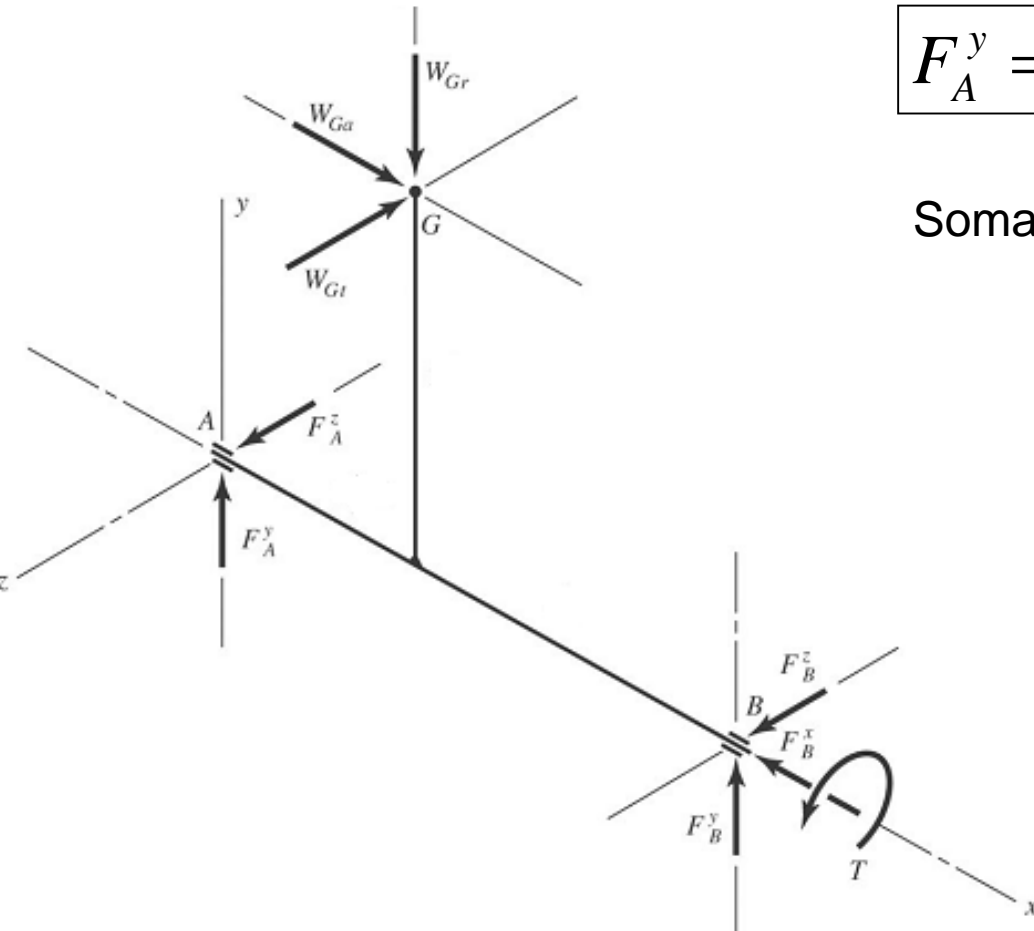
$$F_A^y = 67 \text{ N}$$

Somatório de forças em z:

$$-W_{Gt} + F_B^z + F_A^z = 0$$

$$-2302,2 + 837,2 + F_A^z = 0$$

$$F_A^z = 1465$$





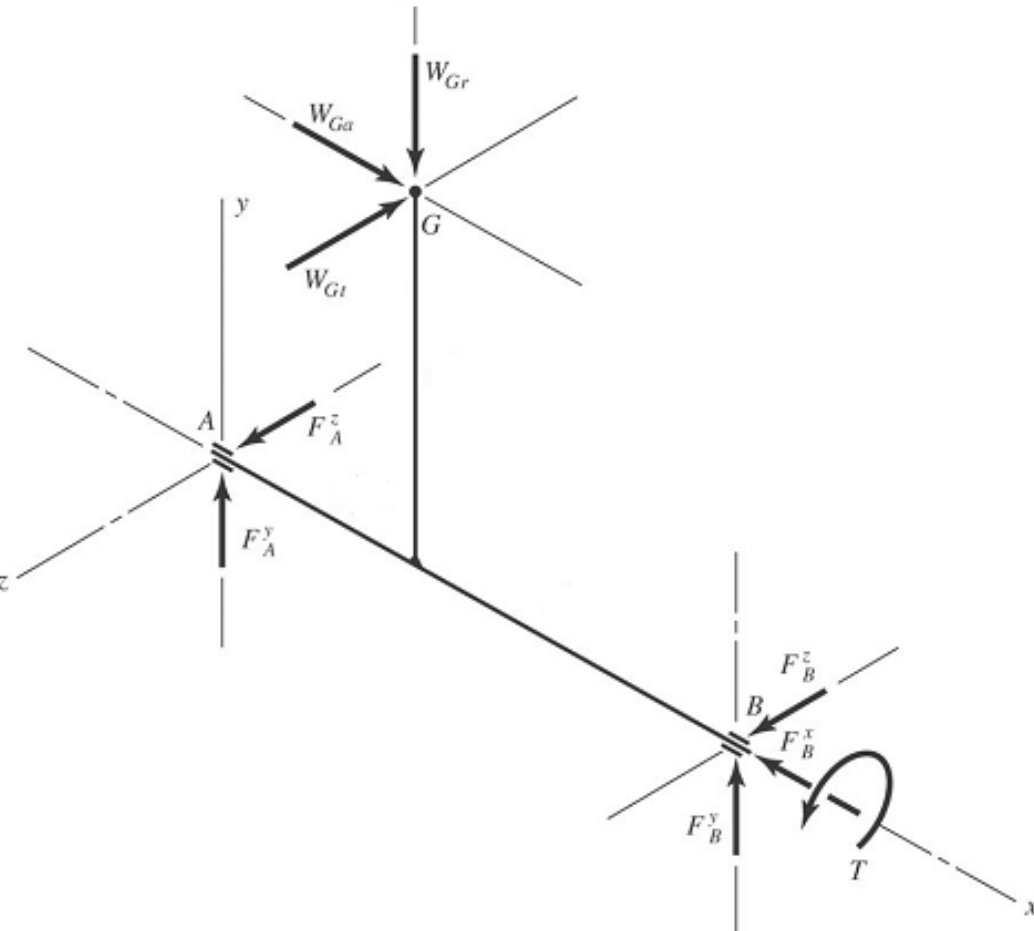
# EXERCÍCIO

Somatório de momentos em x:

$$T - W_{Gt} \frac{d_G}{2} = 0$$

$$T - 2302,2 \frac{0,1016}{2} = 0$$

$$T = 116,95 \text{ Nm}$$

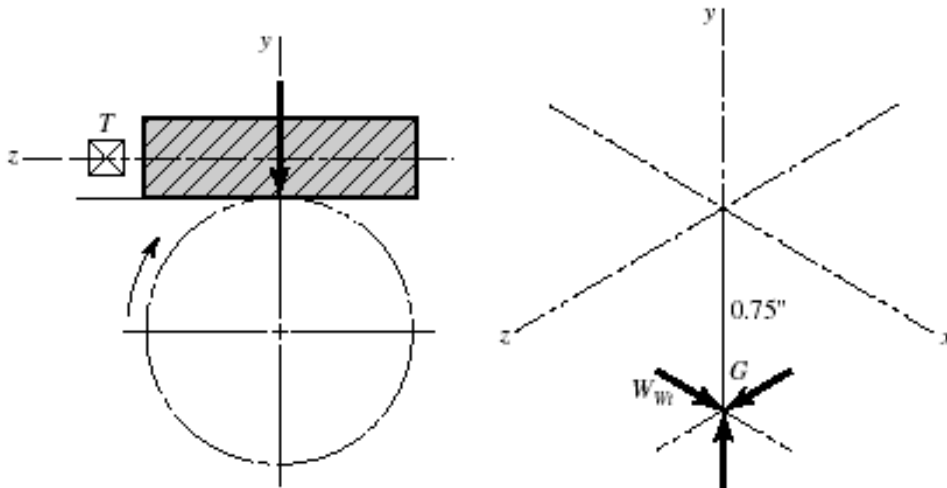


## EXERCÍCIO – 13.43

Um pinhão sem-fim de 2 dentes transmite  $\frac{1}{2}$  hp a 900 rpm a uma coroa sem-fim de 36 dentes, com um passo diametral transversal de 10 dentes/in. O pinhão tem um ângulo de pressão normal de  $14\frac{1}{2}^\circ$ , um diâmetro primitivo de  $1\frac{1}{2}$  in e uma largura de face de  $1\frac{1}{2}$  in. Use um coeficiente de atrito de 0,05 e encontre a força exercida pela coroa sobre o pinhão, bem como o torque de entrada. Para a mesma geometria mostrada no Problema 13-41, a velocidade do pinhão é horária com relação ao eixo z.

$$V_w = \frac{\pi(1,5)900}{12} = 353,42 \text{ ft} / \text{min}$$

$$V_w = \pi(1,5 \cdot 25,4 \text{ mm} / \text{in}) \frac{900}{60} = 1795,4 \text{ mm} / \text{s} = 1,80 \text{ m} / \text{s}$$



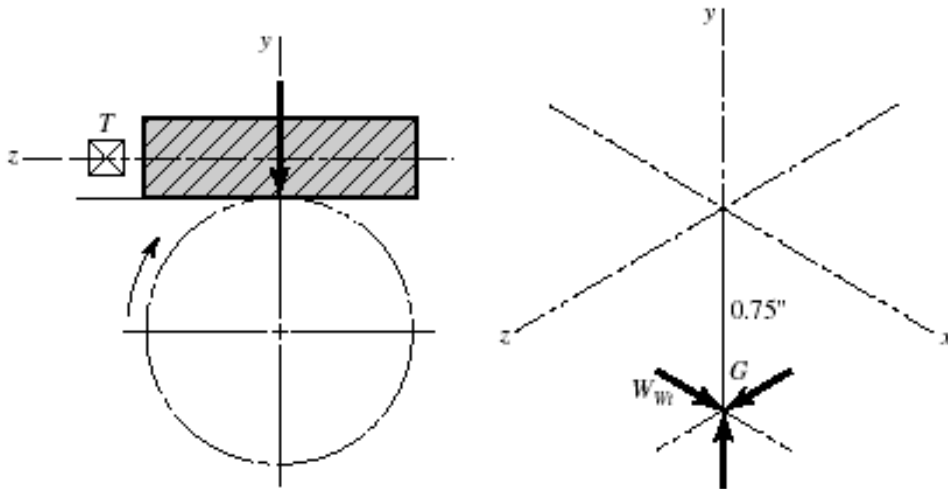
## EXERCÍCIO – 13.43

$$H = 0,5 \text{ hp} = 373 \text{ W} = 0,373 \text{ kW}$$

$$W_x = W_{wt} = \frac{33000 H}{V} = \frac{33000(0,5)}{353,42} = 46,7 \text{ lbf}$$

$$W_x = W_{wt} = \frac{60(10^3) H}{\pi d n} = \frac{60(10^3)(0,373)}{\pi (1,5 \cdot 25,4) 900} = 0,207 \text{ kN}$$

$$p_t = p_x = \frac{\pi}{10} = 0,3141 \text{ in} = 7,98 \text{ mm}$$



## EXERCÍCIO – 13.43

$$L = p_x N_W = 0,3141(2) = 0,628 \text{ in}$$

$$L = p_x N_W = 7,98(2) = 15,96 \text{ mm}$$

$$\tan \lambda = \frac{L}{\pi d_w} = \frac{0,628 \text{ in}}{\pi (1,5 \text{ in})} = 0,133$$

$$\tan \lambda = \frac{15,96 \text{ mm}}{\pi (38,1 \text{ mm})} = 0,133$$

$$\lambda = 7,59^\circ$$

$$W = \frac{W^x}{(\cos \phi_n \operatorname{sen} \lambda + f \cos \lambda)}$$

$$W = \frac{46,7 \text{ lbf}}{(\cos 14,5^\circ \operatorname{sen} 7,59^\circ + 0,05 \cos 7,59^\circ)} = 263,2 \text{ lbf}$$

$$W = \frac{207 \text{ N}}{(\cos 14,5^\circ \operatorname{sen} 7,59^\circ + 0,05 \cos 7,59^\circ)} = 1166,6 \text{ N}$$

## EXERCÍCIO – 13.43

$$W^y = W \operatorname{sen} \phi_n = 263,2 \text{ lbf} \operatorname{sen}(14,5^\circ) = 65,89 \text{ lbf}$$

$$W^y = W \operatorname{sen} \phi_n = 1166,6 \text{ N} \operatorname{sen}(14,5^\circ) = 292,1 \text{ N}$$

$$W^z = W (\cos \phi_n \cos \lambda - f \operatorname{sen} \lambda) =$$
$$263,2 (\cos 14,5^\circ \cos 7,59^\circ - 0,05 \operatorname{sen} 7,59^\circ) = 250,8 \text{ lbf}$$

$$W^z = 1166,6 (\cos 14,5^\circ \cos 7,59^\circ - 0,05 \operatorname{sen} 7,59^\circ) = 1111,8 \text{ N}$$

$$T = W_{wt} \frac{d_G}{2} = 46,7 \text{ lbf} \frac{1,5 \text{ in}}{2}$$

$$T = 35,025 \text{ lbf in}$$

$$T = W_{wt} \frac{d_G}{2} = 207 \text{ N} \frac{38,1 \text{ mm}}{2}$$

$$T = 3943,4 \text{ N.mm}$$

# EXERCÍCIOS PROPOSTOS

•13.10;

•13.11;

•13.15;

•13.28;

•13.33;

•13.41.

# REFERÊNCIAS

**SHIGLEY, J.E., MISCHKE, C.R., BUDYNAS, R.G., *Projeto de Engenharia mecânica, 7ª edição, Bookman.***