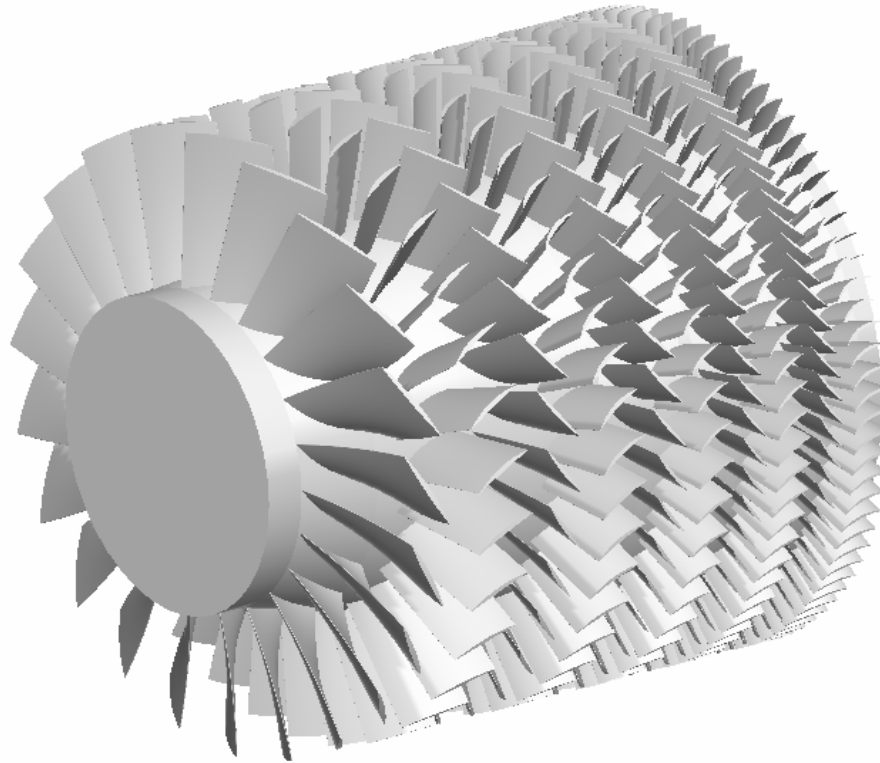


# INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

# MÁQUINAS DE FLUXO



Rotor do compressor da turbina TAPP – compressor axial

## Grupo de Turbinas

João Roberto Barbosa

2010

MÁQUINAS DE FLUXO  
NOTAS DE AULAS - 2010  
**APRESENTAÇÃO**

1/15

A **finalidade** das **Notas de Aula** de **MÁQUINAS de FLUXO** é apresentar **resumo das aulas** → reduzir tempo gasto com anotações.

Servem como **guia de estudo e não como livro-texto**.

Dão visão geral das máquinas de fluxo. Para responder todas as questões é preciso estudo mais aprofundado.

**É um roteiro para estudo; portanto não substituirão textos consagrados pela abrangência e clareza.**

Bibliografia abrangente é indicada.

O **aprimoramento** das Notas de Aulas é conseguido com a **contribuição dos alunos, através de comentários e sugestões**.

João Roberto Barbosa, fevereiro de 2010.

**Máquinas de Fluxo**

**2010**

**CONTEÚDO**

Classificação.

Campo de aplicação.

Equações fundamentais.

Transformação de energia.

Semelhança. Grupos adimensionais  
característicos, especificações.

Teoria da asa de sustentação e sua  
aplicação às máquinas de fluxo.

Cavitação.

Elementos construtivos.

Características de funcionamento.

Anteprojeto.

**CARGA HORÁRIA (semanal)**

2 aulas teóricas e 1 aula de exercícios

2 aulas de laboratório

5 horas de estudo individual

**Bibliografia**

BARBOSA, J. R., *Máquinas de Fluxo*, São José dos Campos, ITA, 2010

ECK, B., *Fans*, Pergamon Press, NY 1973

PFLEIDERER, C., PETERMANN, H., *Máquinas de Fluxo*, Livros Técnicos e Científicos, 1979.

## OBJETIVO GERAL

Estudar o funcionamento das máquinas de fluxo através de dados experimentais e das leis básicas, principalmente de termodinâmica e de mecânica de fluidos, bem como distinguir os diferentes tipos de máquinas e suas aplicações específicas.

Ao término do curso o aluno deverá ser capaz de realizar o anteprojeto de uma máquina de fluxo, bem como selecionar u'a máquina de fluxo dentre as já produzidas.



## OBJETIVOS ESPECÍFICOS

O aluno deverá ser capaz de:

### **Capítulos 1 - Introdução**

- Descrever uma máquina de fluxo
- Classificar as diferentes máquinas de fluxo
- Discorrer sobre as diferentes aplicações das máquinas de fluxo
- Fazer esquemas de aplicações importantes de máquinas de fluxo

### **Capítulo 2 - Leis de Conservação**

- Descrever modelos físicos e matemáticos utilizados no estudo das máquinas de fluxo
- Escrever as equações básicas aplicáveis às máquinas de fluxo
- Identificar cada termo dessas equações e suas funções
- Discorrer sobre as diferentes aplicações das máquinas de fluxo
- Descrever as hipóteses simplificadoras aplicáveis às máquinas de fluxo e obter as formas simplificadas das equações básicas

- Escrever as equações gerais, as simplificações convenientes ao estudo das máquinas de fluxo e identificar cada termo dessas equações.
- Identificar os termos que precisam ser tratados diferentemente para fluidos compressíveis e incompressíveis
- Definir os elementos e os parâmetros com os quais se montam as equações de conservação e as suas unidades SI (fluxo, superfícies, elemento de superfície, quantidade de movimento, vazão, temperaturas e pressões estáticas e de estagnação, etc.)

### ***Capítulo 3 – Princípios de Conservação Aplicados às Máquinas de Fluxo***

- Descrever os elementos construtivos e as convenções utilizadas no estudo das máquinas de fluxo
- Descrever os componentes principais de uma máquina de fluxo, suas diferentes representações gráficas, e como neles se operam as transformações de energia.
- Montar e saber utilizar as informações advindas dos triângulos de velocidades
- Identificar as variáveis envolvidas na modelação do funcionamento de máquinas de fluxo (do fluido, da instalação, de controle).
- Identificar as aproximações que são adotadas no caso de se considerar o escoamento 1-D.

- Entender como operam as máquinas de fluxo fora das condições de projeto
- Explicar as alterações de funcionamento das máquinas de fluxo fora do ponto de projeto.
- Saber associar as diferentes formas construtivas ao grau de reação das máquinas de fluxo
- Associar os elementos dos triângulos de velocidades às equações básicas aplicáveis às máquinas de fluxo

#### ***Capítulo 4 – Máquinas de Fluxo Reais***

- Saber quais são as diferenças entre a máquina ideal, estudada até o capítulo anterior, e as máquinas reais.
- Identificar as perdas e suas origens
- Saber identificar e tratar os termos em que a compressibilidade tem influência significativa
- Identificar problemas associados à utilização das máquinas de fluxo em sistemas de bombeamento
- Obter informações de operação de uma máquina de fluxo quando operar com diferentes tipos de fluidos
- Escrever e saber o campo de aplicação das equações de Bernoulli e de Euler, para rotores e estatores, para escoamentos compressíveis e incompressíveis.

- Aplicar as equações de conservação a máquinas axiais, radiais e de fluxo misto.
- Calcular o torque e a potência nas máquinas de fluxo.
- Explicar as diferenças entre as condições de funcionamento de u'a máquina ideal e de u'a máquina real.
- Analisar as perdas em processos reais aplicáveis a máquinas de fluxo.
- Identificar as diferenças entre as teorias da pá isolada e da grade. Calcular os diversos parâmetros relacionados às máquinas de fluxo.
- Selecionar tipos de pás para as máquinas de fluxo e calcular o seu empalhetamento (montagem das grades).
- Descrever as equações aplicáveis a escoamentos compressíveis em máquinas de fluxo.

### ***Capítulo 5 – Desempenho das Máquinas de Fluxo***

- definir desempenho
- Identificar os critérios de desempenho
- Identificar os coeficientes adimensionais aplicáveis a máquinas de fluxo e explicar sua importância

- Transportar características de desempenho de um modelo para uma máquina real
- Definir e utilizar o conceito de velocidade específica em máquinas de fluxo
- Definir o conjunto das variáveis que afetam o desempenho das máquinas de fluxo e classificá-los (do fluido, da máquina e de controle).
- Definir desempenho de uma máquina de fluxo, enumerando os parâmetros de desempenho importantes.
- Obter os parâmetros de desempenho a partir da teoria adimensional.
- Calcular o desempenho num modelo real a partir de informações de ensaios de modelos.
- Selecionar o tipo de máquina (radial, axial, misto) em função da velocidade característica.

### ***Capítulo 6 – Características de Algumas Máquinas de Fluxo***

- Identificar as formas construtivas das máquinas de fluxo mais comuns
- Descrever as características de funcionamento das máquinas de fluxo mais comuns
- Obter as dimensões principais de uma bomba centrífuga
- Obter as dimensões principais de uma bomba axial

- Obter as dimensões principais de um ventilador centrífugo
- Obter as dimensões principais de um ventilador axial
- Obter as dimensões principais de uma turbina Pelton
- Obter as dimensões principais de uma turbina Francis
- Obter as dimensões principais de uma turbina Axial

### **Capítulo 7 – Equilíbrio Radial e Empalhetamento**

- Calcular os triângulos de velocidades em diversas posições radiais
- Identificar valores limitantes para orientação de projeto de máquina de fluxo
- Especificar perfis aerodinâmicos para as diversas aplicações
- Empalhetar uma máquina de fluxo

### **Capítulo 8 – Cavitação**

- Descrever cavitação
- Identificar as principais causas de cavitação
- Identificar em que locais aparece cavitação em máquinas de fluxo
- Saber como resolver ou minimizar os problemas de cavitação

- Explicar o fenômeno da cavitação em máquinas de fluxo e as implicações no seu desempenho.
- Utilizar modelos de cálculo de cavitação.

### **Capítulo 9 – Instalações Hidráulicas**

- Especificar o tipo de máquina ou de máquinas mais adequados a uma determinada aplicação.
- Calcular os parâmetros de funcionamento de bombas em série e em paralelo.
- Dimensionar circuitos hidráulicos utilizáveis em aplicações com máquinas de fluxo.
- Calcular a variação de desempenho de uma máquina de fluxo em função da sua rotação e de suas dimensões geométricas.

### **Capítulo 10 - Anteprojetos**

- Utilizar os conhecimentos adquiridos para pré-dimensionar uma máquina de fluxo (ventilador radial, ventilador axial, compressor axial, etc.)

## OUTROS

Além desses objetivos, pretende-se que o aluno **desenvolva**, durante o curso, uma **atitude responsável de estudo, de pesquisa e de dedicação**, uma **atitude crítica** que o leve a refletir sobre os conteúdos aprendidos e sua **importância para a sua futura atuação como engenheiro**, bem como uma **atitude positiva** para o **prosseguimento de seus estudos** das máquinas de fluxo.

A prática da **disciplina consciente** é fundamental para o completo atingimento dos objetivos do curso. Uma relação de confiança será naturalmente construída.

Dada a metodologia adotada, é **recomendável ler**, antes de cada aula, **as notas de aula** e meditar sobre os temas a serem discutidos, consultando, sempre que possível, a bibliografia adicional inerente.



## METODOLOGIA

- Aulas expositivas (precedidas por período de leitura individual das notas de aulas) e demonstrativas (usando partes de algumas máquinas comuns) integradas, a fim de que o aluno possa melhor compreender os modelos matemáticos adotados.
- Leitura, pelos alunos, de bibliografia recomendada.
- Resolução de exercícios, em classe e em casa, para reforçar a compreensão dos assuntos trabalhados em classe.
- Laboratórios quinzenais, com relatórios individuais - mesmo que as experiências forem em grupos - corrigidos e avaliados.
- Orientação particular pelos professores, por iniciativa do aluno.
- Anteprojeto de uma máquina de fluxo, realizado em sala de aula.

## AVALIAÇÃO

- Avaliações, com notas  $P_1$ ,  $P_2$ .
- Observação do trabalho do aluno em classe, inclusive quando da resolução de séries de exercícios
- Laboratórios quinzenais, com médias bimensais  $M_1$  e  $M_2$ .

As médias nos bimestres serão calculadas dando-se pesos 0,60 e 0,40 às provas e médias dos laboratórios, respectivamente.

**CRONOGRAMA PARA 2010 - primeiro semestre**

aulas às 3<sup>as</sup> -feiras, das 8h às 9h e às 5<sup>as</sup> -feiras, das 8h às 10h

mês	semana	dia	capítulos
março	1	2	
	2	9	
	3	16	
	4	23	
	5	30	
abril	6	6	P1
	7	13	
	8	20	
	recup	27	

mês	semana	dia	capítulos
maio	1	4	
	2	11	
	3	18	
	4	25	
junho	5	1	P2
	6	8	
	7	15	
	8	22	
julho	exame	29	

**MÁQUINAS DE FLUXO**  
**NOTAS DE AULAS - 2010**  
**BIBLIOGRAFIA**

15/15

**Referências**

**edição**

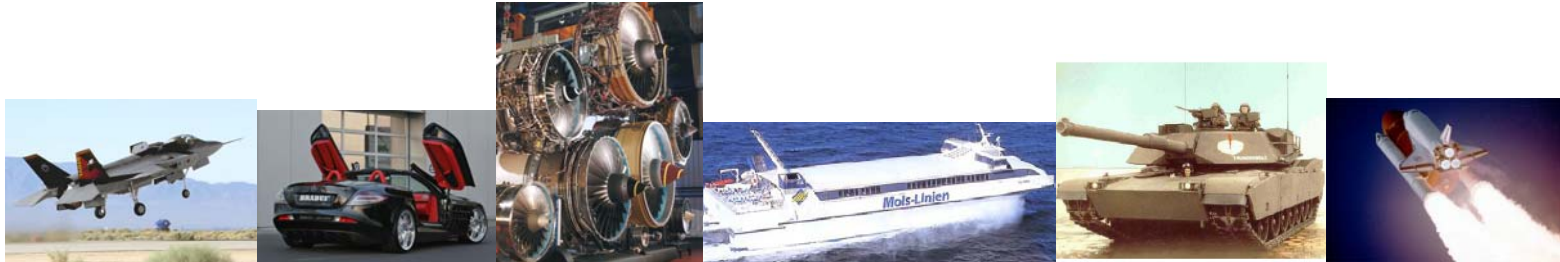
NASA SP-36 - Diversos Autores, Aerodynamic Design of Axial Compressors	1956
THEORY OF WING SECTIONS - Abbott e Doenhoff, Dover Publications Inc.	1959
BOMBAS CENTRÍFUGAS E TURBOCOMPRESSORES, – Carl Pfleiderer, LTC	1964
THEORY OF TURBOMACHINES - G. T. Csanady, Mac Graw-Hill Book	1964
MÁQUINAS DE FLUXO – Carl Pfleiderer, LTC	1972
FANS, B. Eck	1973
MECÁNICA DE FLUIDOS Y MÁQUINAS HIDRÁULICAS, C. Mataix, Ediciones Del Castillo S. A.	1977
COMPRESSORES, E.C. COSTA	1978
<i>FLUID MECHANICS - Douglas, Gasivorek e Swaffield, 2ª edição, Longman</i>	1985
CENTRIFUGAL PUMP HANDBOOK, Sulzer	1987
NUMERICAL COMPUTATION OF INTERNAL AND EXTERNAL FLOWS - Hirsh, Wiley Interscience Publication, John Wiley & Sons	1988
<b>X HYDRAULIC AND COMPRESSIBLE FLOW TURBOMACHINES</b>	<b>1990</b>
FLUID DYNAMICS : THEORETICAL AND COMPUTATIONAL APPROACHES - Warsi, CRC Press	1992
TURBOMÁQUINAS TÉRMICAS, Cláudio Mataix, Ediciones Del Castillo S. A.	1993
FUNDAMENTALS OF GAS TURBINES, Bathie	1996
GAS TURBINE THEORY - Cohen, Rogers e Saravanamuttoo, 4a edição, Longman	1997
COMPRESSOR AERODYNAMICS, N.A. Cumpsty, Longman	1998

**X – referência básica**

## 1 INTRODUÇÃO

### **Afinal, onde estão instaladas as máquinas de fluxo?**

As máquinas de fluxo estão nas indústrias militar, aeronáutica, aeroespacial, automotiva, naval e de geração de energia com alta eficiência.



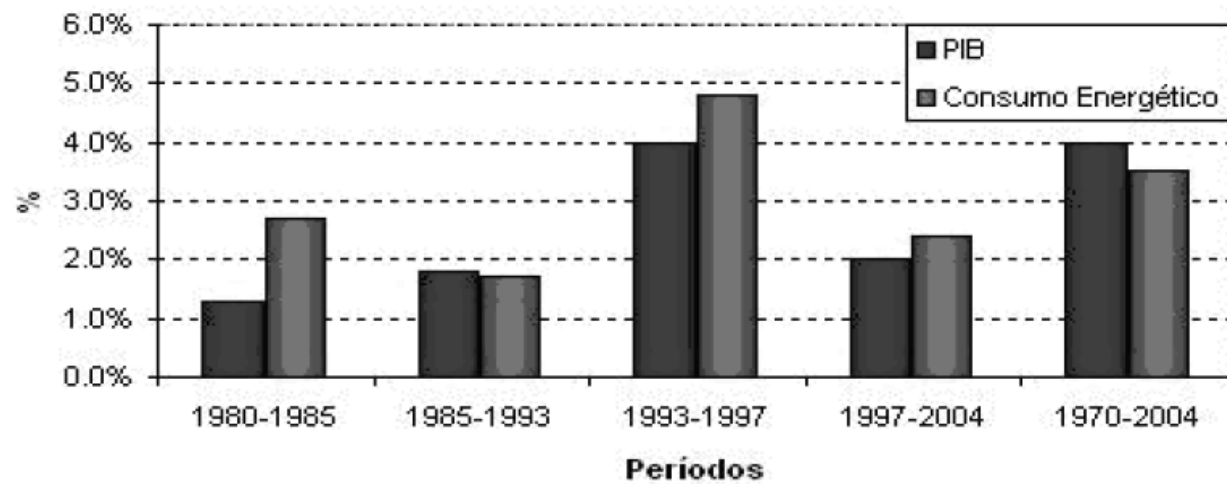
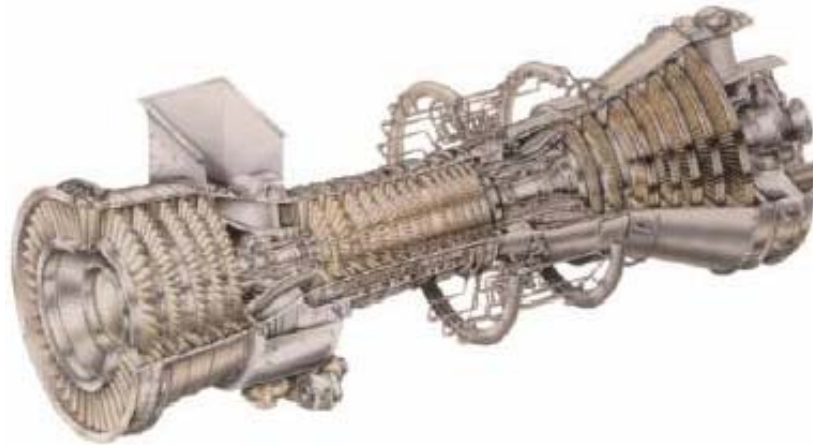
Atualmente existe a preocupação no grande aumento de consumo de energia elétrica no Brasil (necessidade de expansão de hidrelétricas, termelétricas com ciclo combinado e ciclo híbrido, eólica, energia nuclear, célula combustível, micro geradores,...).

# MÁQUINAS DE FLUXO

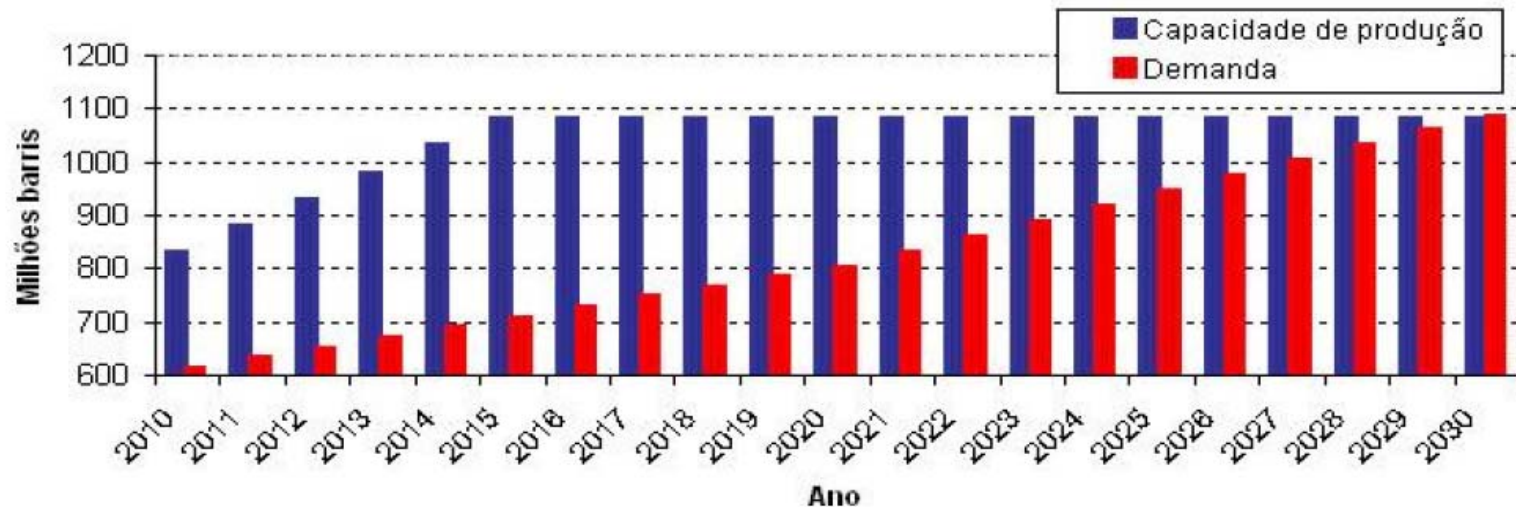
## NOTAS DE AULAS - 2008

1-2/93





Estimativa de exploração de petróleo para 2030:

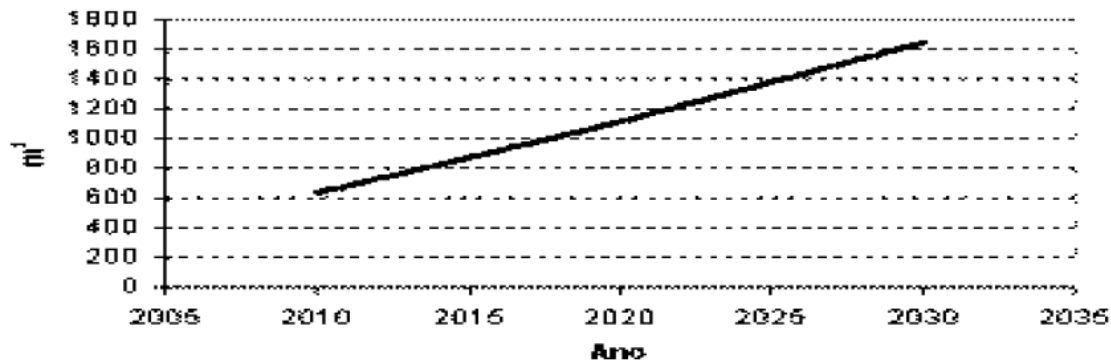


Bronzatti, F. L. e Neto, A. I., Matrizes Energéticas no Brasil: Cenário 2010-2030, XXVII Encontro Nacional de Engenharia de Produção, RJ, 2008



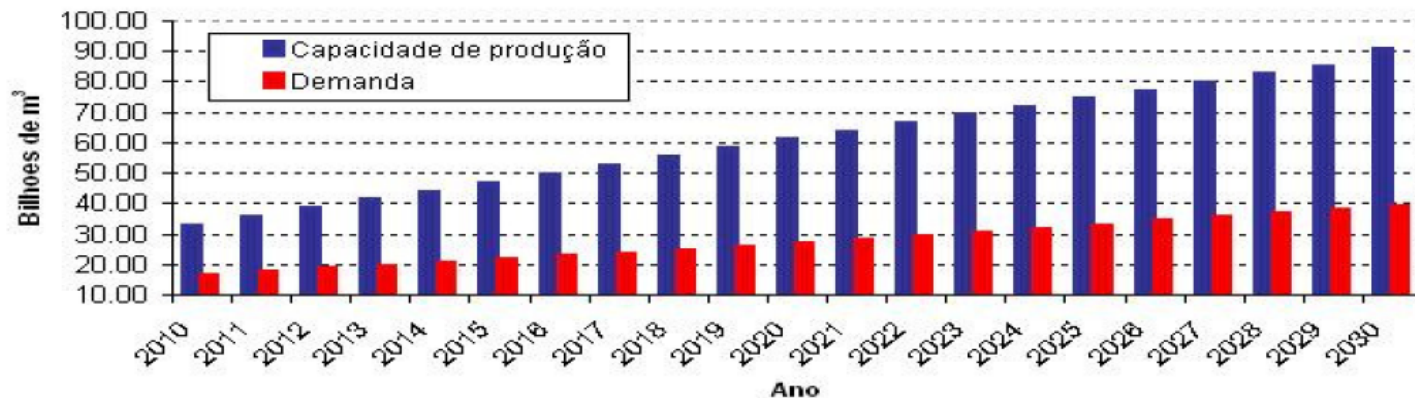
## Gás Natural

As reservas de gás natural brasileiras saltaram de 220 bilhões de m<sup>3</sup> em 1996 para 312,2 bilhões de m<sup>3</sup> em 2005 representando um aumento de 41%, segundo dados da ANP (2006). A oferta de gás natural passou por momentos de incertezas, escassez e falta de definições políticas e ainda hoje sua expansão é dificultada pela falta de infra-estrutura necessária para distribuição. Um dos pontos que vem colocando o gás natural como estratégico na política energética brasileira, é o de que o Brasil não se encontra mais na zona de conforto na oferta de energia elétrica através das usinas hidroelétricas. Logo, as termo- elétricas que utilizam gás natural formam uma espécie de capacidade disponível para uso na geração de energia em caso de escassez de chuvas. Segundo a ANEEL, encontra-se em operação no Brasil 11.000 MW de plantas de geração de energia elétrica a gás natural.]



Em relação ao consumo de gás natural no Brasil, esse tem crescido a uma taxa de 10,3% ao ano. A indústria e o setor energético foram os maiores responsáveis por este crescimento. O setor de transportes também influenciou no aumento da demanda de gás natural: No ano de 2000, os transportes representavam 4% do consumo final de gás natural, já em 2005 esse valor era de 18%.

Levando em conta o cenário de crescimento do país, projeção de reservas e intenções de investimentos da produção de gás natural, estima-se que em 2030 a produção pode chegar a 251,7 milhões de m<sup>3</sup>/dia com crescimento de 5% ano, enquanto que o consumo pode chegar a 4% ao ano.



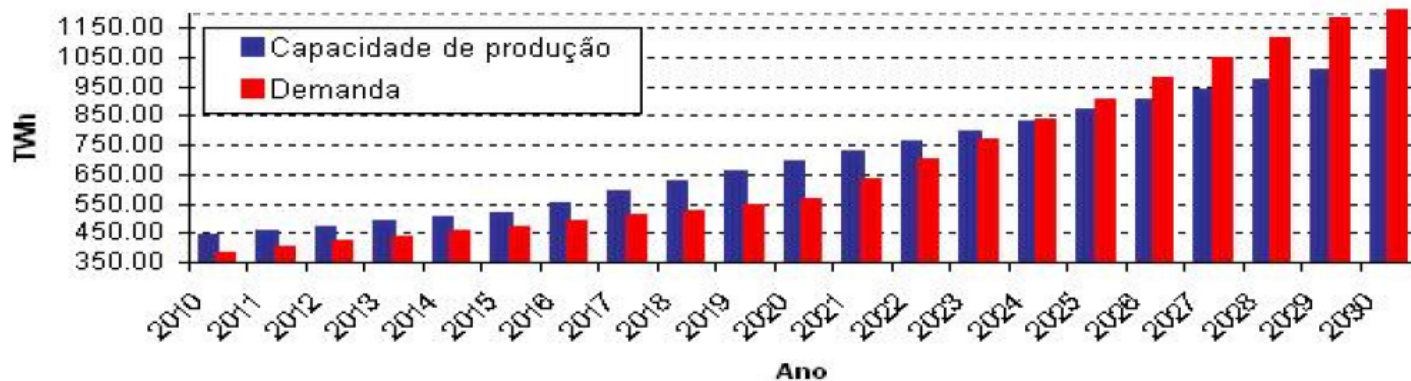
Fonte: Brasil, Ministério de Minas e Energia: Matriz Energética Nacional 2030.

Bronzatti, F. L. e Neto, A. I., Matrizes Energéticas no Brasil: Cenário 2010-2030, XXVII Encontro Nacional de Engenharia de Produção, RJ, 2008

## Hidráulica

A energia elétrica produzida no Brasil pelas grandes hidrelétricas tem um papel importante no desenvolvimento do país, proporcionando auto-suficiência na geração de energia elétrica a baixos custos. Entre 1975 e 2005, a potência instalada evoluiu de 13.724 MW para quase 69.000 MW.

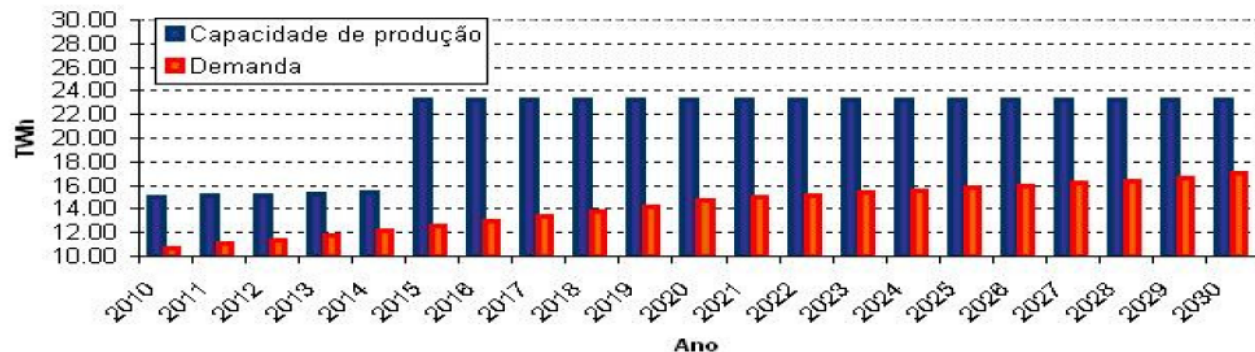
Em 2030, estima-se um consumo de energia elétrica entre 950 e 1.250 TWh/ano, sendo que o consumo atual situa-se em torno de 405 TWh (ANEEL, Atlas de Energia Elétrica no Brasil 2006). Essa diferença exigirá investimentos pesados na expansão da oferta de energia elétrica. No caso deste fornecimento ser realizado por usinas hidrelétricas, mesmo com uma instalação adicional de 120 mil MW, o que eleva para 80% o uso do potencial, ainda assim poderia não ser suficiente para atender a demanda em 2030. Abaixo pode visualizar-se a projeção de produção de demanda de energia elétrica para a fonte hidráulica.



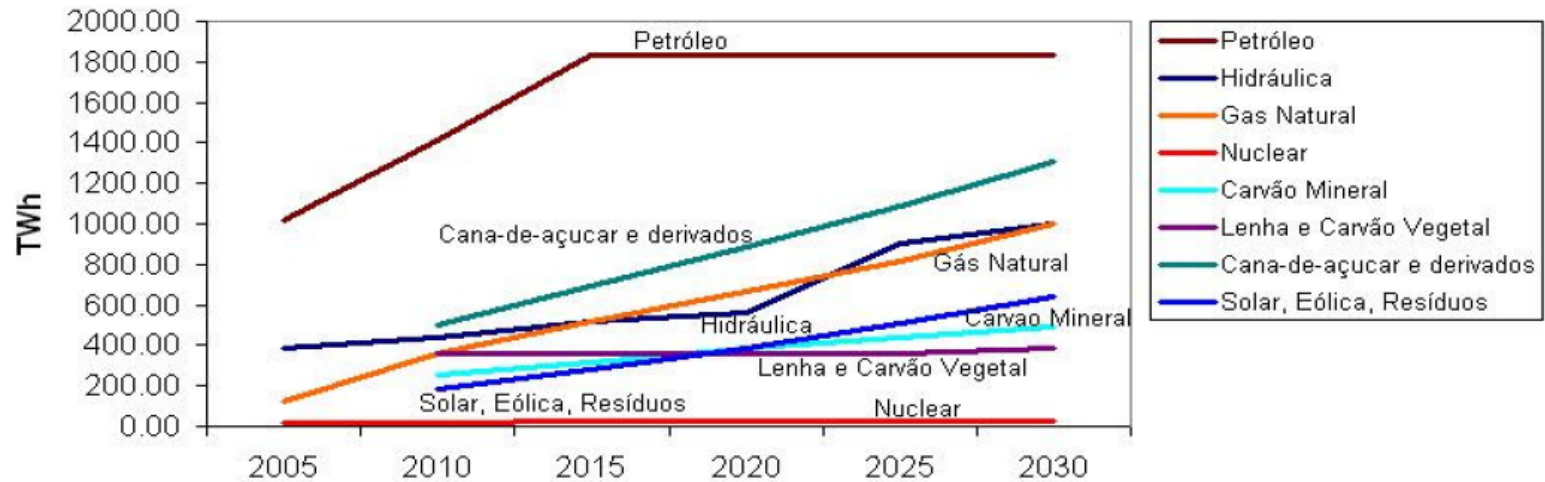
## Nuclear

O uso de energia nuclear no Brasil foi sempre muito discutido pelo viés ideológico. A primeira usina a entrar em operação foi Angra 1, com potência instalada de 657MW e fator de disponibilidade por volta de 80%. A usina Angra 2, com 1350MW, apesar de ter o acordo Brasil-Alemanha fechado em 1975, iniciou plenamente as atividades no ano de 2000 com um fator de disponibilidade de 60%.

Se for levado em conta um cenário para custo de exploração de Urânio entre US\$ 40 e US\$ 80/kg tem-se um potencial de 17500 MW em usinas para geração nuclear e a instalação de até 17 unidades. No entanto, se até 2030 o Brasil continuar com a potência instalada atual e implantar Angra 3, a produção e demanda projetada seria:

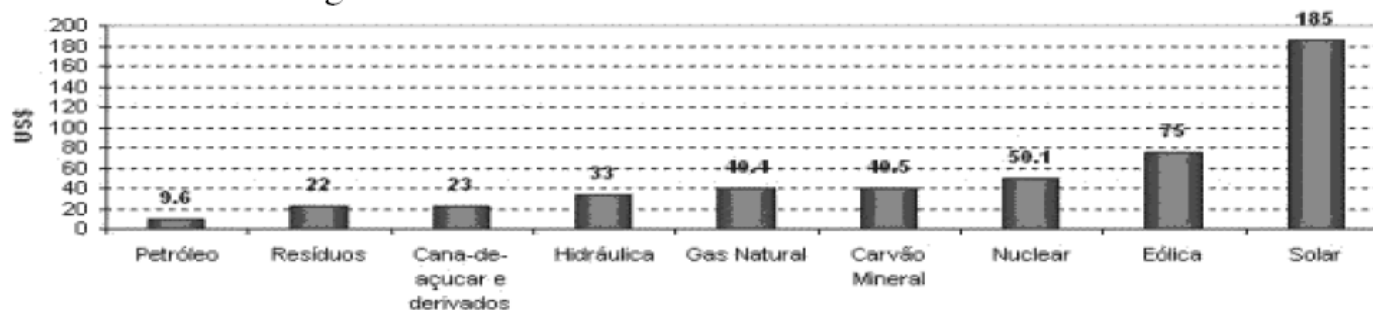


Balço energético consolidado



**Custo por matriz energética**

Além do potencial de produção e a probabilidade de crescimento das reservas, o aspecto de custo também tem grande influência na composição da matriz energética de um país, e, portanto, no balanço energético. Para efeito comparativo, pode-se verificar o custo por MWh para cada fonte de energia:

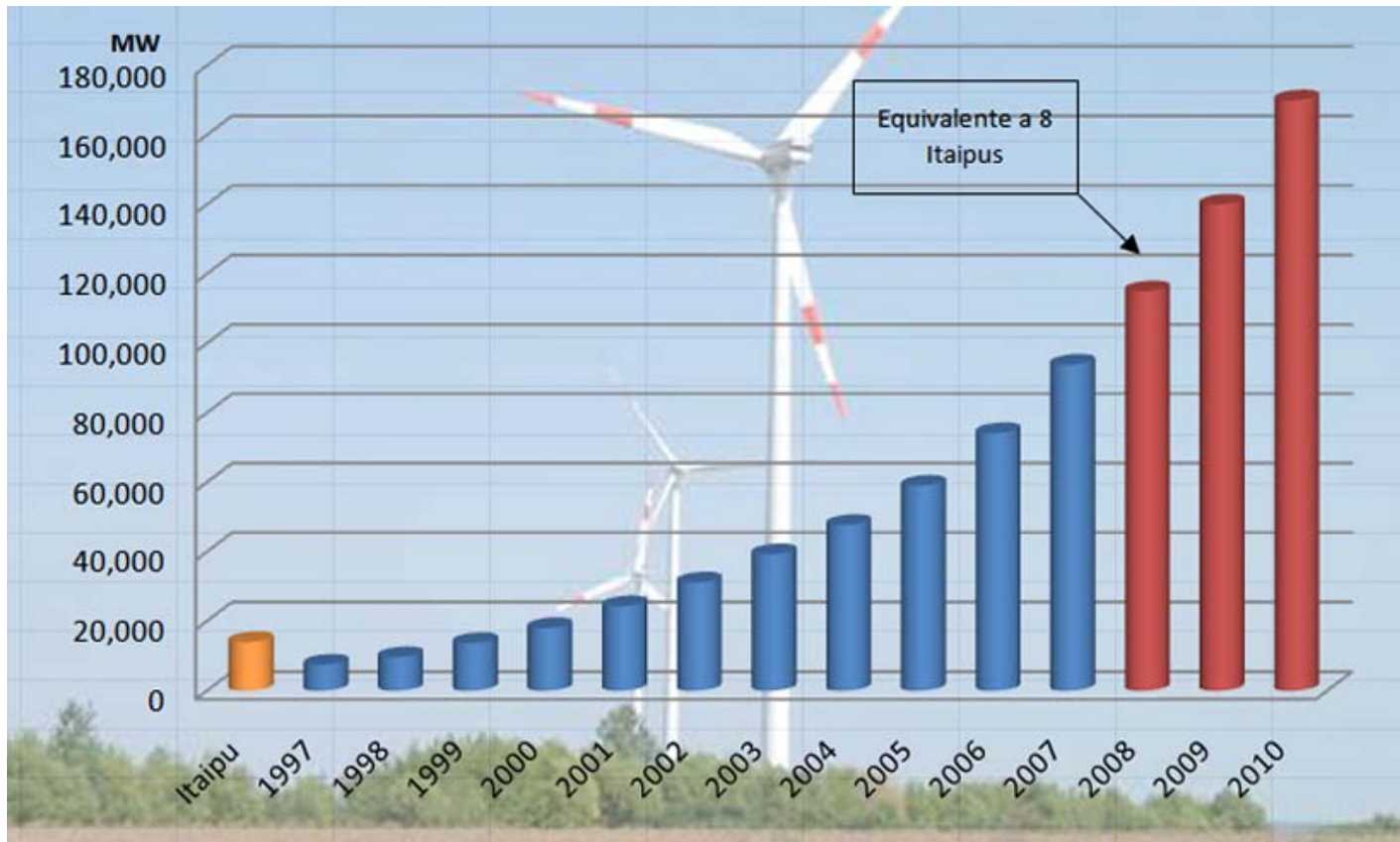


Fonte: W.C Turkenburg Utrecht university, 2003



**MÁQUINAS DE FLUXO**  
**NOTAS DE AULAS - 2008**  
**Matriz de energia eólica (mundial):**

1-11/93



## **Pergunta:**

Ainda existe dúvida na importância em obtenção de tecnologia de projetos de máquinas de fluxo de alto desempenho?



Com relação às máquinas de fluxo:

**Bombas** - equipamentos utilizados em muitas instalações residenciais e industriais.

**Equipamentos de bombeamento** - de diversos tipos tamanhos e atendem inúmeras necessidades.

**Turbinas** - utilizadas em muitas aplicações industriais.

**Ventiladores e compressores** - encontrados em residências e indústrias, de tamanhos que vão de alguns centímetros de diâmetro até muitos metros.

Todas essas máquinas têm em comum a **movimentação contínua de fluido (água, ar, gases)**.

São usualmente chamadas de **máquinas de fluxo** devido a essa particularidade.

Está-se interessado, de um modo geral, em transformação de energias:

- a) energia mecânica em energia de fluido
- b) energia de fluido em energia mecânica

A Lei (ou princípio) da conservação e transformação de energia é uma das leis fundamentais da natureza.

É de caráter geral. Estabelece que, sem alteração da estrutura da matéria, a energia não é criada nem destruída, mas, sim, passa de uma forma a outra, através de transformações físicas e/ou químicas.

Principais formas de energia hoje conhecidas:

do movimento térmico dos átomos e moléculas  
da cinética dos corpos  
do campo gravitacional  
do campo elétrico

do campo magnético  
da radiação eletromagnética  
intramolecular  
de pressão etc

apenas as transformações das formas de energias que um fluido possui serão objeto deste curso

cinética

de pressão

potencial

térmica

de deformação

em energia mecânica e vice-versa.

**energia mecânica** - associada aos movimentos (rotação e/ou translação) dos componentes de uma máquina. Esses movimentos geralmente são utilizados para transmitir potência (ao final é o que se espera das máquinas de fluxo).

**energia hidráulica** - formas de energia que um fluido possui

**máquinas hidráulicas** têm a finalidade de operar transformações **de energia hidráulica em mecânica e vice-versa.**

(Englobadas todas as máquinas que operam com fluidos, tanto incompressíveis como compressíveis)

Definições gerais – usualmente comuns aos usuários de bombas hidráulicas:

- **Sistema de bombeamento:** é o sistema constituído pelos **reservatórios de sucção** (de onde a bomba aspira o fluido de trabalho) e de **descarga** ou de **recalque** (para onde a bomba movimenta o fluido de trabalho), pela bomba, pelas **tubulações** que ligam os diversos componentes do sistema de bombeamento; pelos **componentes acessórios** (cotovelos, válvulas de controle ou unidirecionais), pelos **suportes**.
- **Altura de elevação** ou **altura de carga** ou **altura de bombeamento:** é a quantidade de energia específica (geralmente expressa em metros de coluna de fluido de trabalho) que o rotor da máquina transfere ao **fluido de trabalho** (no caso de bombas) ou que o fluido de trabalho transfere ao **rotor** da máquina (no caso de turbinas).
- **Perda de carga:** é a perda de pressão de estagnação entre dois pontos do sistema de bombeamento.

- **Altura manométrica** ou **altura de elevação manométrica**: é a altura de elevação referida a um fluido de trabalho especificado (geralmente água destilada à temperatura de 4 graus Celsius, com densidade de  $1000 \text{ kg/m}^3$ ). Note-se que esta terminologia pode induzir erro ao poder dar a entender que a energia específica está sendo referenciada a alguma diferença de pressões, como no caso da pressão manométrica.
- **Potência do motor**: é a potência disponibilizada pelo motor na ponta de eixo que é ligada à máquina.
- **Potência de eixo**: é a potência disponibilizada pela máquina no eixo ligado ao rotor. Note-se que a potência de eixo é igual à potência do motor se não houver perdas entre a ponta de eixo do motor e a posição em que o eixo se fixa ao rotor.
- **Potência útil**: é a potência que é efetivamente transferida ao fluido pelo rotor, ou ao rotor, pelo fluido.

- **Potência dissipada:** é a potência consumida pelas perdas viscosas (consumida devido a atrito viscoso, quando o fluido de trabalho se escoar no interior da máquina), volumétricas (consumida devido às perdas volumétricas decorrentes de fugas, escoamento secundário, etc.) e mecânicas (consumida devido a atrito nos mancais, gaxetas, vedações, etc.)

## 1.1 CLASSIFICAÇÃO DAS MÁQUINAS DE FLUIDO

As **máquinas de fluido** são dispositivos que operam transformações de energia, extraindo energia do fluido de trabalho e transformando-a em energia mecânica ou transferindo a energia mecânica ao fluido de trabalho.

Variedade relativamente grande de **tipos** e de **forma**.

Classificadas segundo critérios relacionados aos tipos, formas construtivas e modo de operar a transformação da energia hidráulica.

**Nenhum dos critérios é mais importante do que o outro;  
para cada problema escolhe-se o critério de classificação mais apropriado.**

### 1.1.1 Quanto à direção da transferência de energia

**Máquinas motoras** - Todas as máquinas em que a energia hidráulica é transformada em energia mecânica, tanto na forma de um eixo rodando ou de um pistão se deslocando.

- **Turbinas**: turbinas a vapor, turbinas a gás, turbinas hidráulicas em geral (Francis, Kaplan, Pelton, etc.)
- **Motores**: de pistões, de palhetas, etc.

**Máquinas movidas** - Todas as máquinas que transformam energia mecânica em energia hidráulica (na forma de um fluido em movimento)

- **Bombas**: centrífugas, axiais
- **Ventiladores**: radiais, axiais
- **Compressores**: centrífugos, axiais, etc.

Nas máquinas motoras o trabalho é produzido pelo fluido e a energia mecânica é extraída dele.

Nas máquinas movidas o trabalho é realizado sobre o fluido e a energia hidráulica adicionada a ele.



**Acoplamentos hidráulicos** ou **conversores de torque** - outro tipo de máquina que opera, na seqüência, transformação de energia mecânica em hidráulica e, a seguir, em energia mecânica.

Neste caso, o **fluido é apenas utilizado como um meio para transferência de energia mecânica.**

Servem para que seja possível a **transferência de energia mecânica dar-se de modo suave.**

Exemplos de acoplamentos hidráulicos são as transmissões automáticas / hidramáticas utilizadas em veículos automotores, os dispositivos para manter velocidade constante de eixo, etc.

### 1.1.2 Quanto ao modo como o fluido atravessa a máquina

**Máquina de deslocamento positivo** - se o fluido que atravessa a máquina é admitido num espaço delimitado por partes mecânicas, onde fica isolado. Posteriormente, é forçado (ou liberado) a deixar esse espaço.

- **fluxo intermitente**<sup>1</sup> - o escoamento (taxa de massa) é fixado pelo volume do espaço que isola o fluido intermitentemente e pela frequência dessa intermitência

**Máquinas de fluxo** - o fluido se escoia continuamente através de seus componentes, sem ficar isolado em espaço físico delimitado

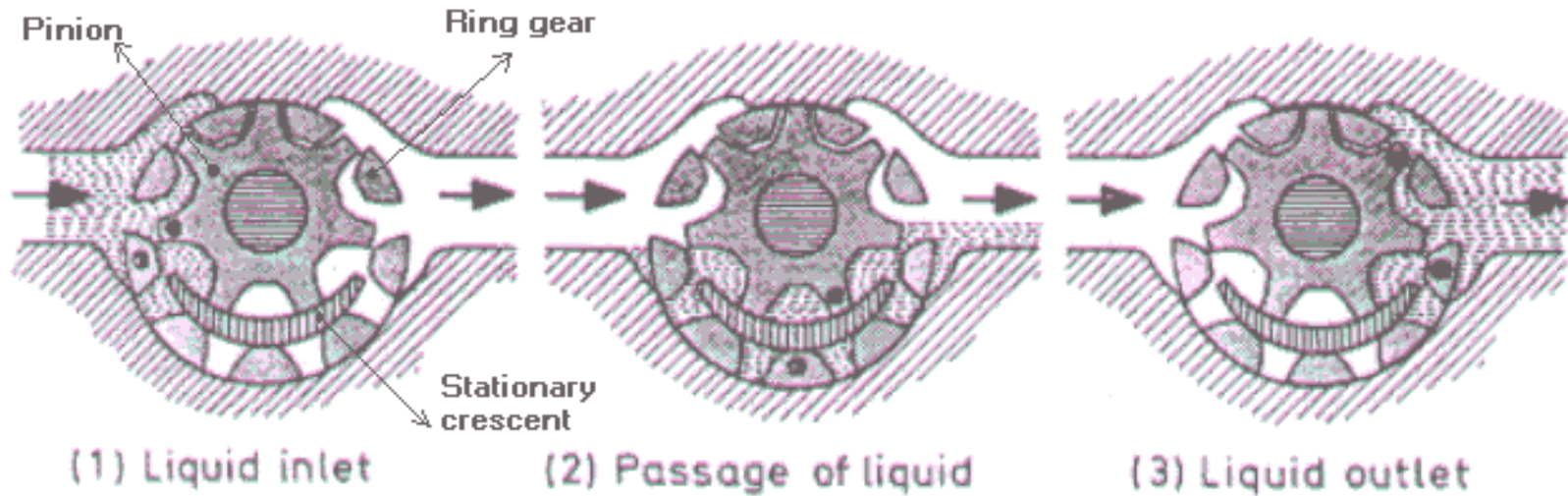
– **fluxo contínuo** - passagem livre do fluido, desde a sua entrada até a sua descarga

**Características das máquinas de fluxo** - **um rotor, que gira constantemente e que força o fluido a atravessá-lo continuamente.** A transferência de energia fluido-rotor ou rotor-fluido é contínua.

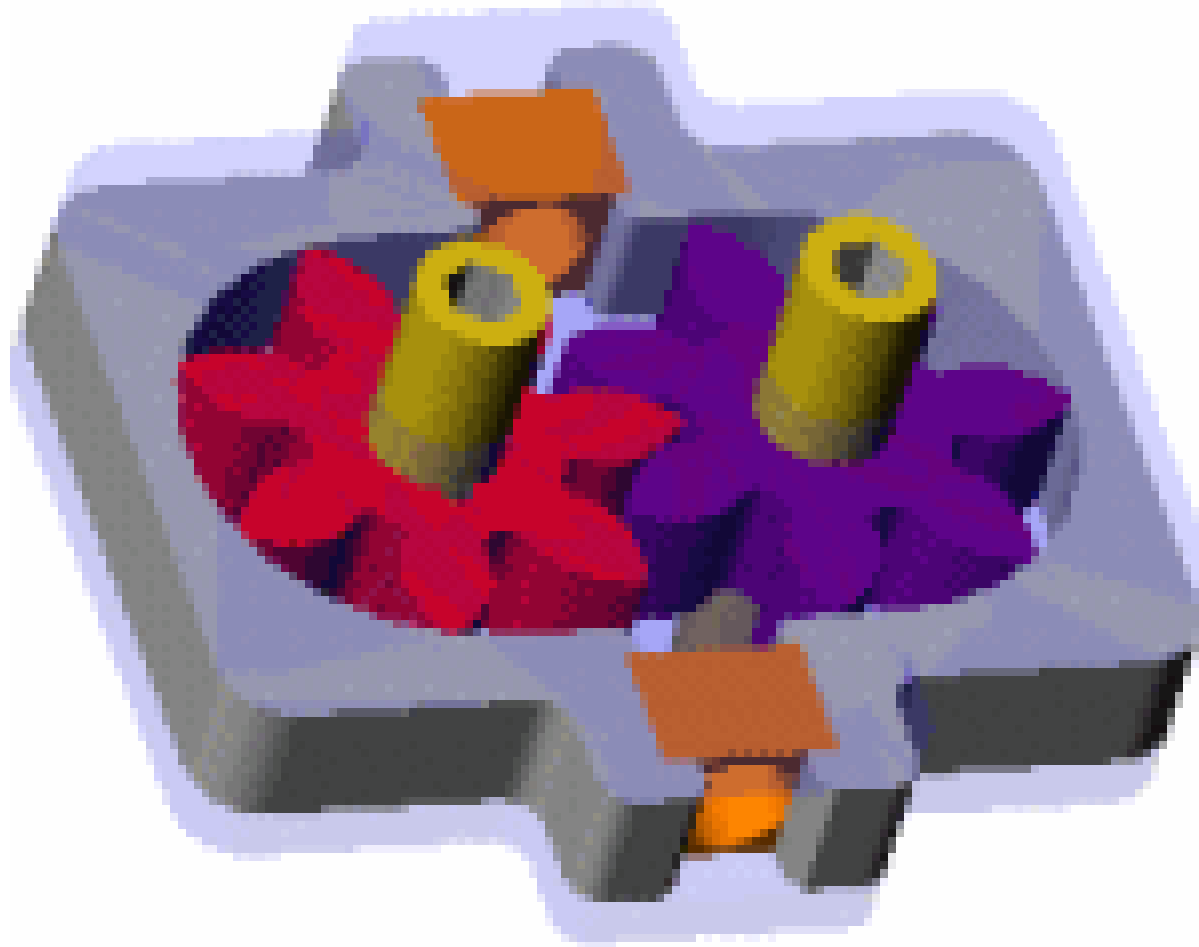
---

<sup>1</sup> Deve-se observar que, muitas vezes, o fluxo pode parecer contínuo, como no caso das máquinas de palhetas e de engrenagens.

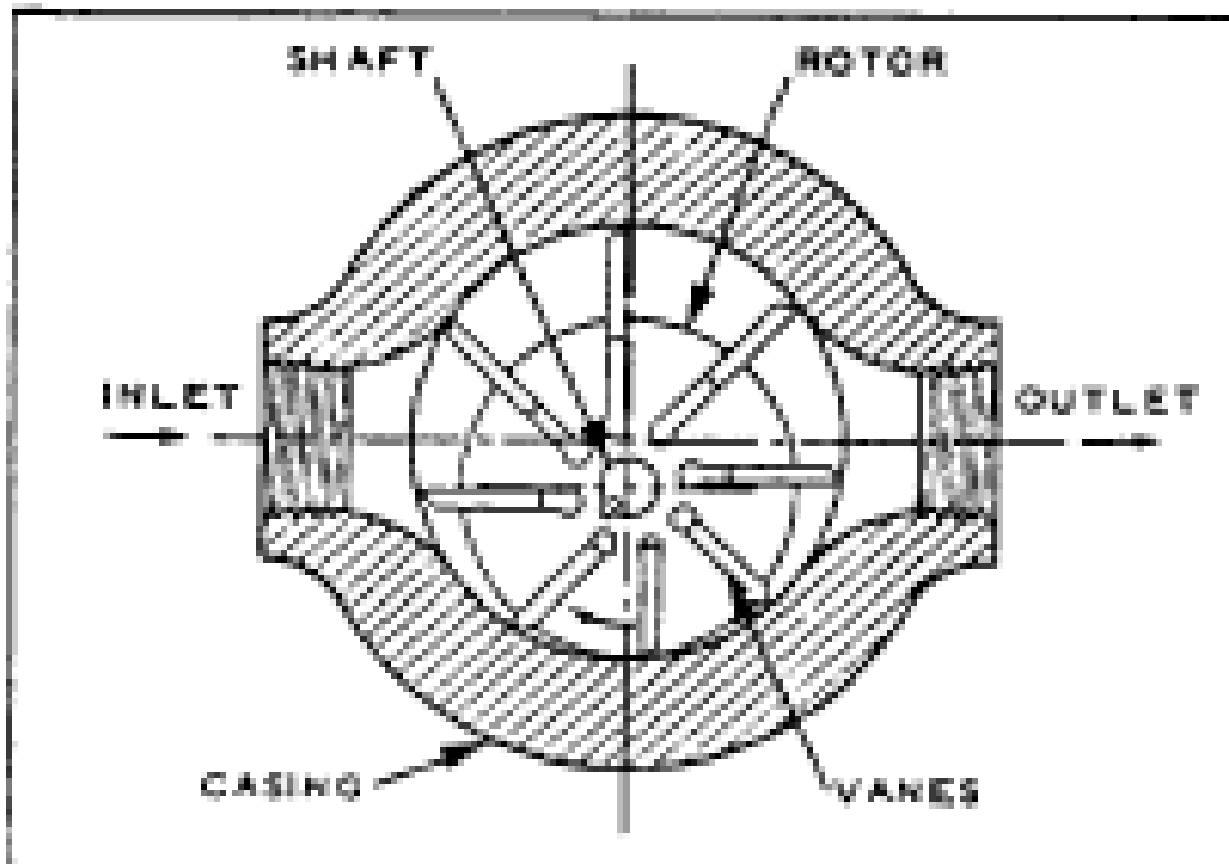
Nessas máquinas, após o fluido deixar o espaço delimitado em que ficou aprisionado, o ciclo se repete com a admissão de nova quantidade de fluido.



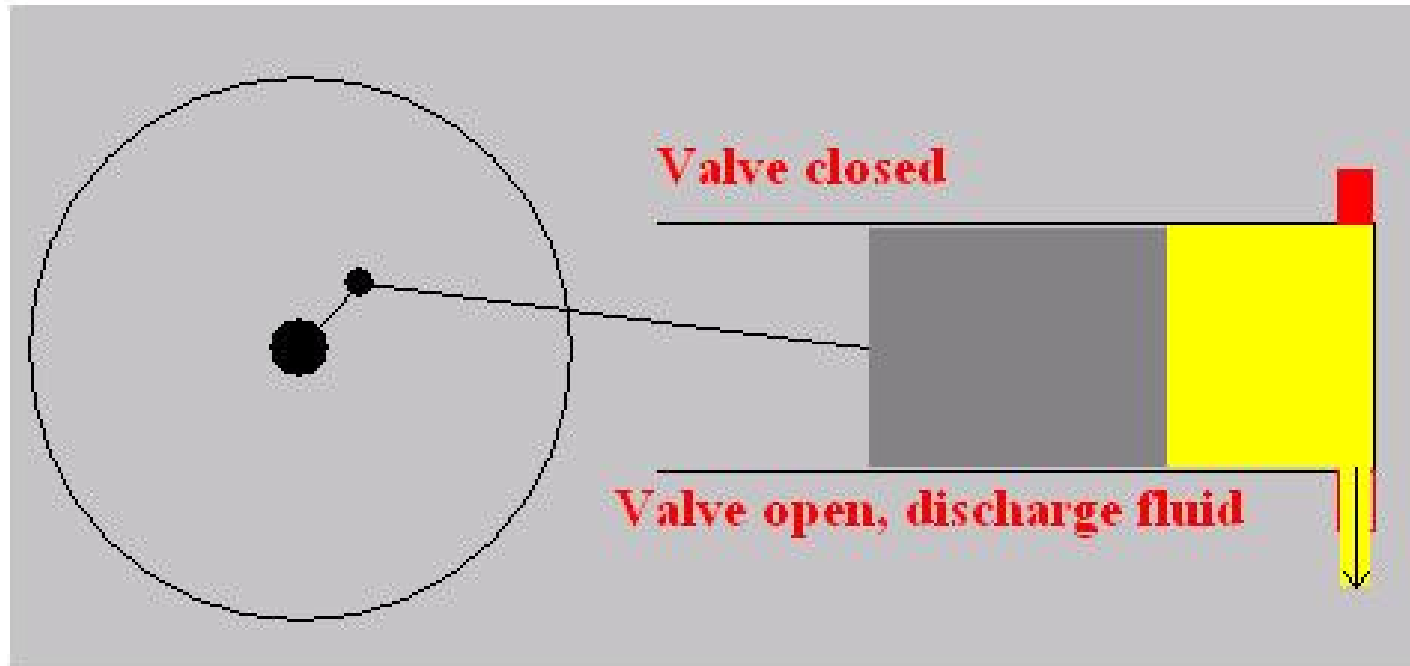
Bomba de engrenagens internas



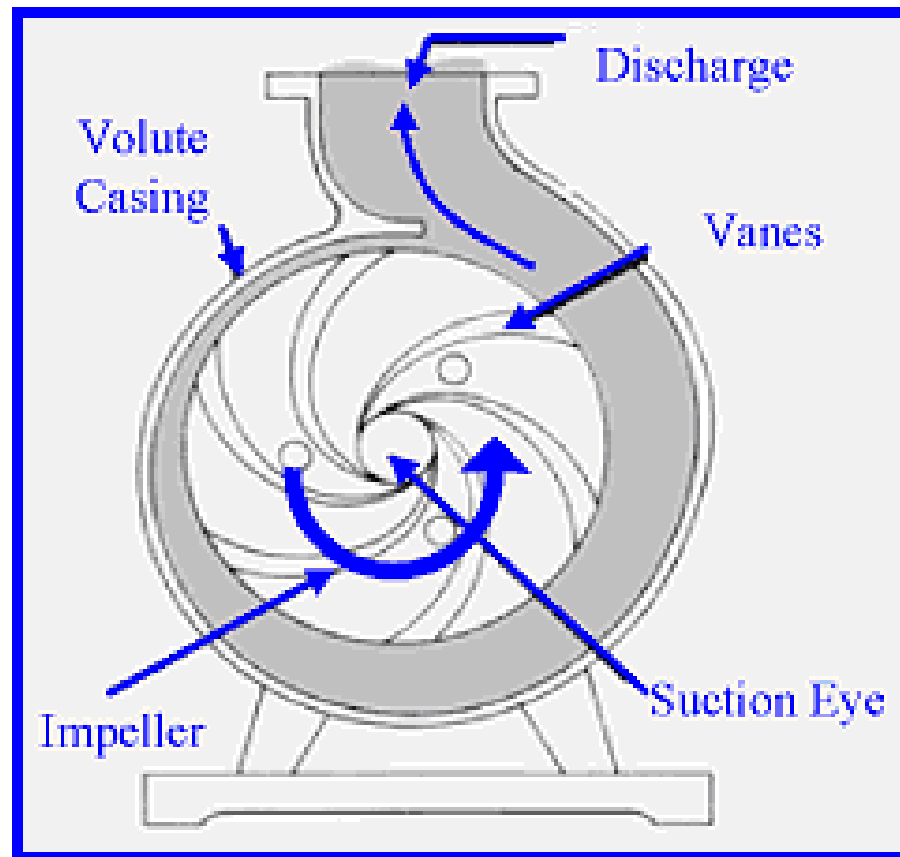
Bomba de engrenagens

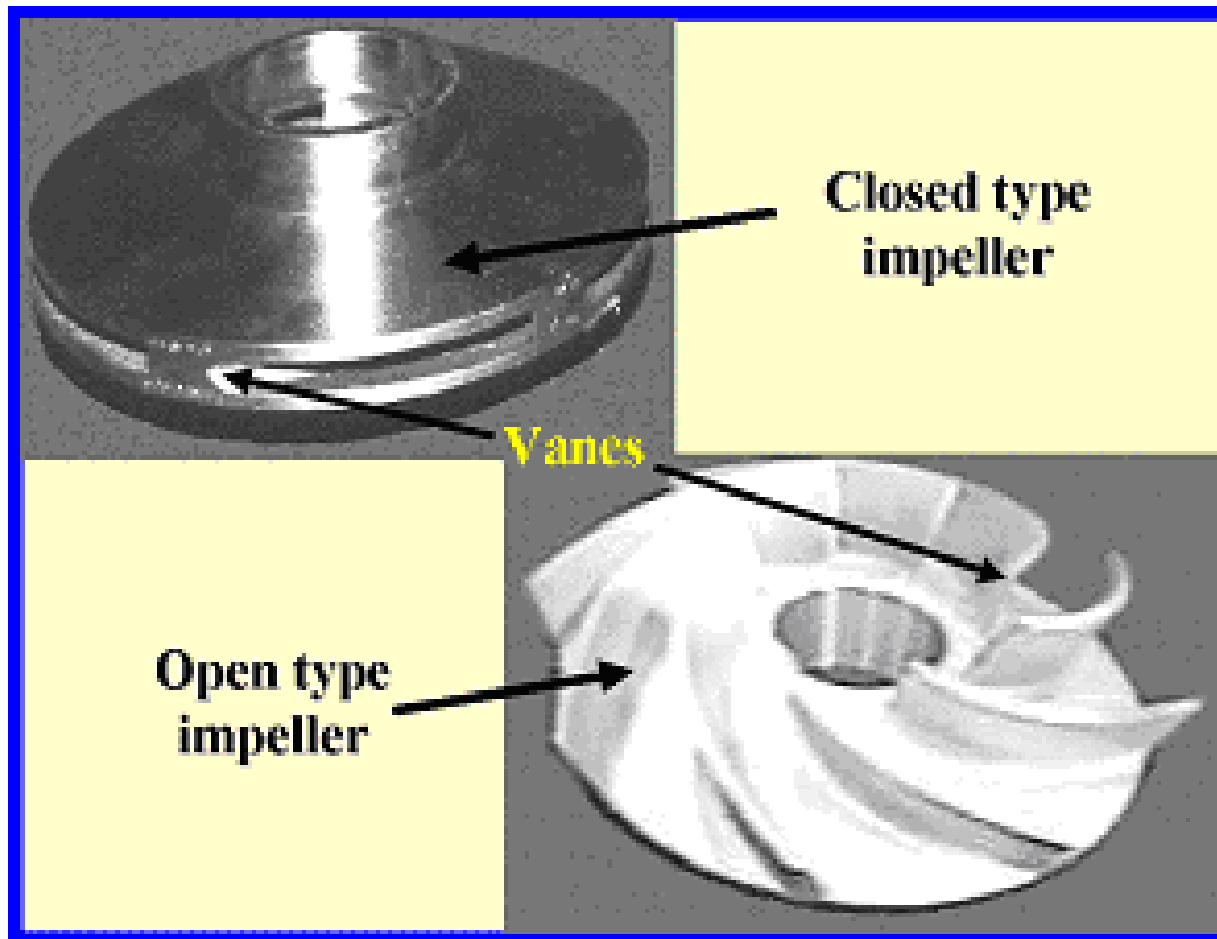


Bomba de palhetas



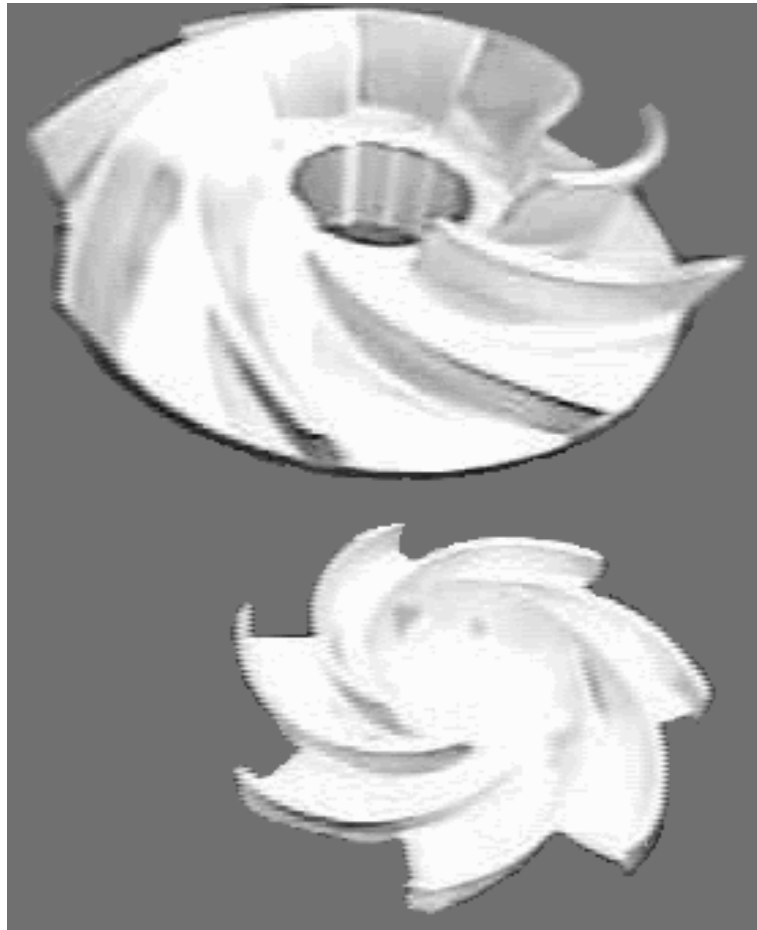
Bomba de pistão





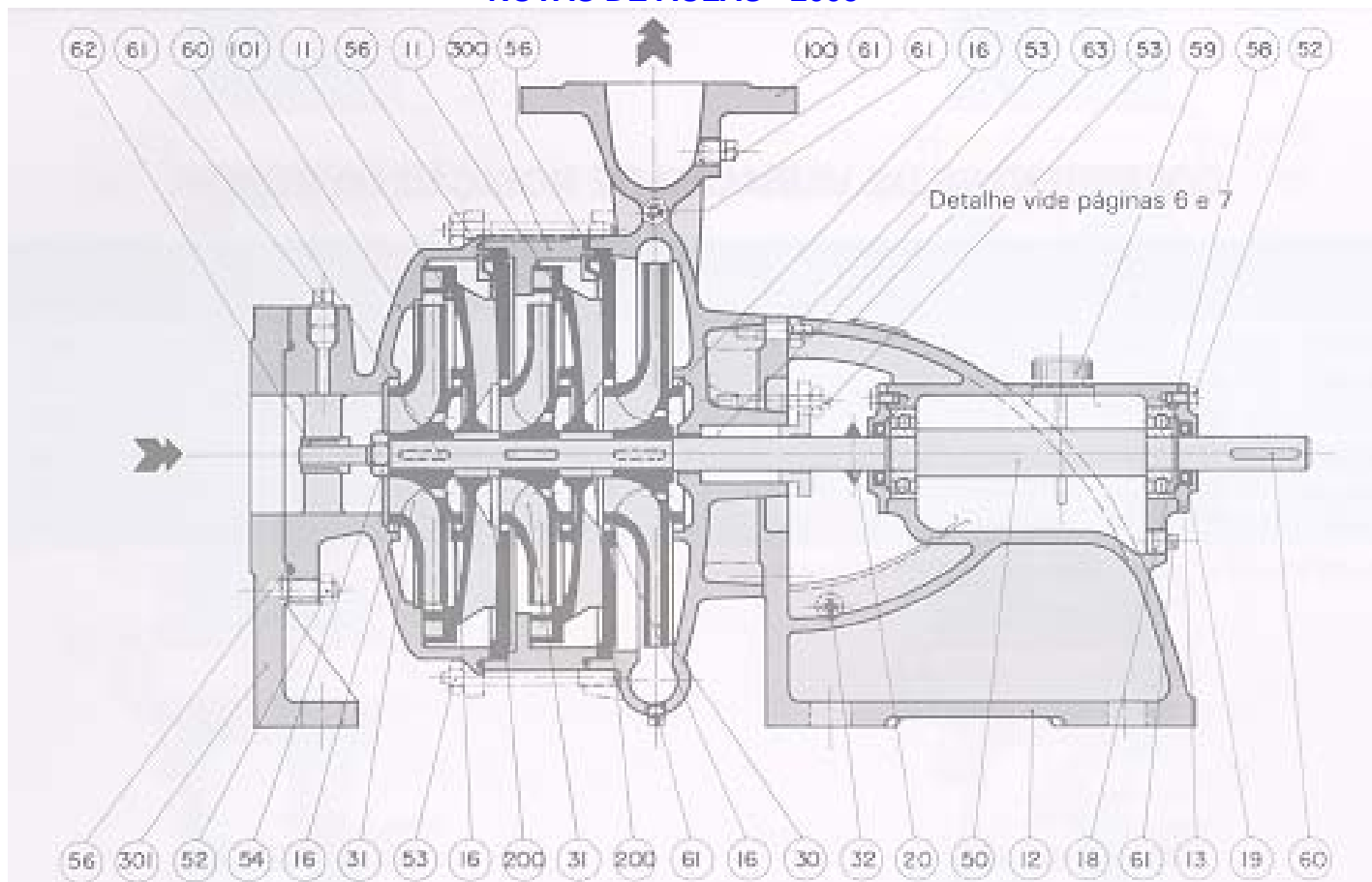
Rotores de bombas centrífugas (fechado e aberto)





**Rotores de bombas centrífugas (aberto)**





**Bomba radial de vários estágios**

**MÁQUINAS DE FLUXO**  
**NOTAS DE AULAS - 2008**  
**QUANTO À DIREÇÃO DO ESCOAMENTO**

1-32/93

**radial** ou **centrífuga** - escoamento é na direção perpendicular ao seu eixo de rotação

**axial** - escoamento é na direção do eixo de rotação

**diagonal** ou de **fluxo misto** - componentes radiais e axiais são de mesma ordem de grandeza

**tangencial** - escoamento incidente no rotor é tangencial

### 1.1.3 Quanto ao modo de injeção nas turbinas

**Modo de injeção** - maneira como a roda da (rotor) turbina é alimentada pelo distribuidor (estator, injetor):

- **Injeção total** – a entrada do fluido no rotor é feita de modo uniforme sobre toda a periferia da roda. Geralmente todas as turbinas de reação utilizam injeção total.
- **Injeção parcial** – o fluido chega ao rotor apenas por uma parte da periferia da roda da turbina num único ou em vários pontos (turbina Pelton, turbina a vapor com bocal de Laval)

#### 1.1.4 Quanto à variação da pressão no rotor

máquina **de ação** ou **de impulso** - pressão do fluido, ao atravessar o rotor, permanece constante

**turbina** Pelton (tangencial), turbina a vapor de ação

máquina e dita **de reação** - pressão do fluido, ao atravessar o rotor, varia  
**turbinas hidráulicas hélice, Kaplan, Francis; turbinas de reação (a vapor ou a gás)**

**grau de reação** da máquina - função da percentagem da variação de pressão no rotor relativamente ao estágio

**MÁQUINAS DE FLUXO**  
**NOTAS DE AULAS - 2008**

1-35/93

**Tabela 1.1-1 - Classificação das máquinas de fluido**

	MOVIDAS		MOTORAS		ACOPL.HIDR.
MÁQUINAS DE FLUXO	BOMBAS, VENTILADORES, COMPRESSORES		TURBINAS		
	SEM CARENAGEM	CARENADAS	REAÇÃO	IMPULSO	
	<ul style="list-style-type: none"><li>• Hélices</li><li>• Parafusos</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• axiais</li><li>• radiais</li><li>• mistas</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• axiais (Kaplan)</li><li>• radiais (Banki)</li><li>• mistas (Francis)</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• moinho de vento</li><li>• Pelton</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• acoplamento hidráulico</li><li>• conversor de torque</li></ul>
MÁQUINAS DE DESLOCAMENTO POSITIVO	BOMBAS E COMPRESSORES		MOTORES		
	RECIPROCATIVAS	ROTATIVAS			
	<ul style="list-style-type: none"><li>• acionamento direto</li><li>• acionamento por virabrequim</li><li>• swashplate</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• parafusos</li><li>• engrenagens</li><li>• palhetas</li><li>• lóbulos</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• reciprocativas (pistões)</li><li>• palhetas</li><li>• engrenagens</li></ul>		<ul style="list-style-type: none"><li>• prensa hidráulica</li><li>• macaco hidráulico</li></ul>

**Tabela 1.1-2 - Características das máquinas de fluido**

**MÁQUINAS DE FLUXO**  
**NOTAS DE AULAS - 2008**

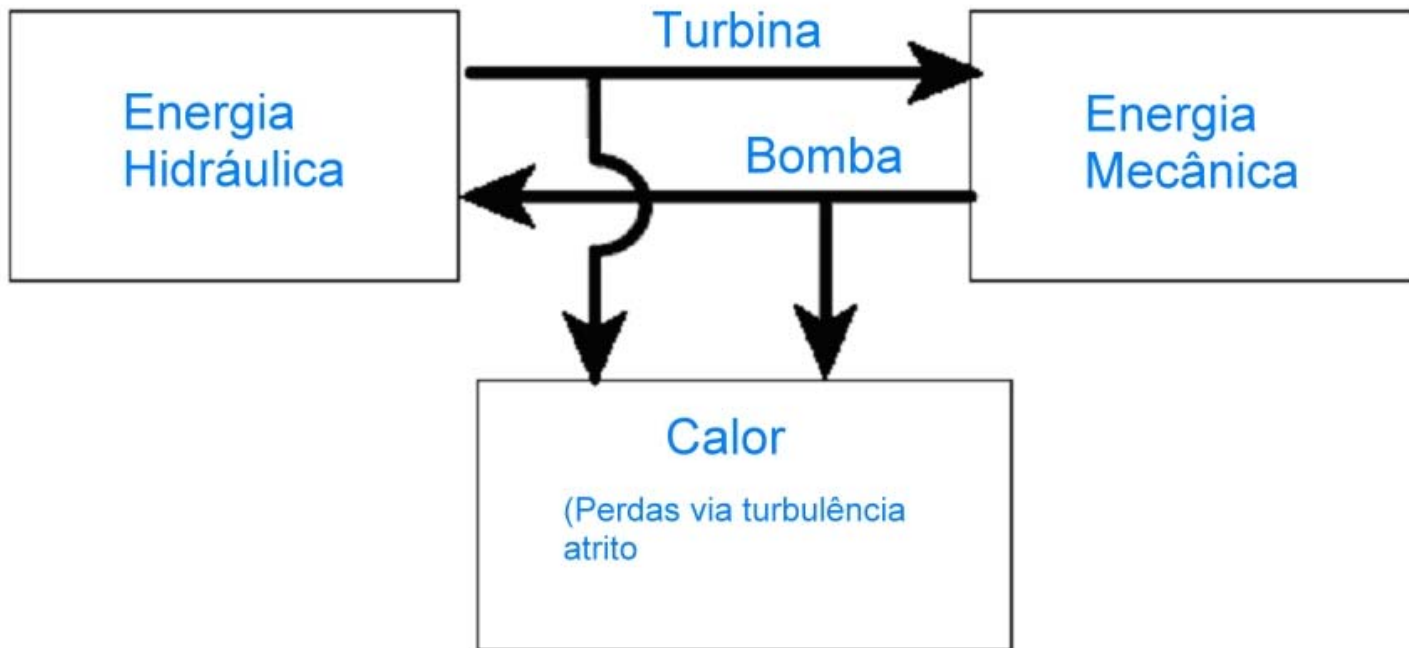
1-36/93

Características	Máquinas de Fluxo	Máquinas de Deslocamento Positivo
rotação	elevada	média e baixa
potência específica	elevada	média e baixa
movimento	rotativo	alternativo de alguma de suas partes
pressão de trabalho	baixa	média e alta
viscosidade do fluido de trabalho	média e baixa	todas
vazão	contínua	intermitente
energia cinética	utilizada para operar a transformação de energia	não toma parte no processo de transferência de energia
complexidade mecânica	elevada	geralmente mais simples
peso/potência	baixo	elevado
tamanho/potência	baixo	elevado

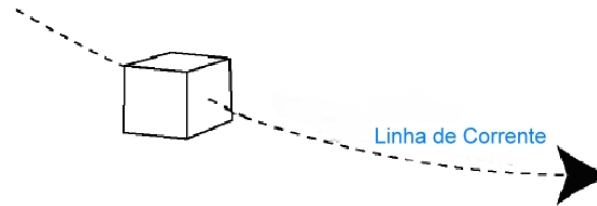
Uma rápida inspeção na tabela acima pode explicar **porque as turbinas a gás são os motores apropriados para utilização em aeronaves**, trens, plataformas marítimas, visto que têm baixas relações peso-potência e volume-potência.



### 1.1.5 Balanço energético numa máquina e seus circuitos



### 1.1.6 As diversas formas de energia hidráulica



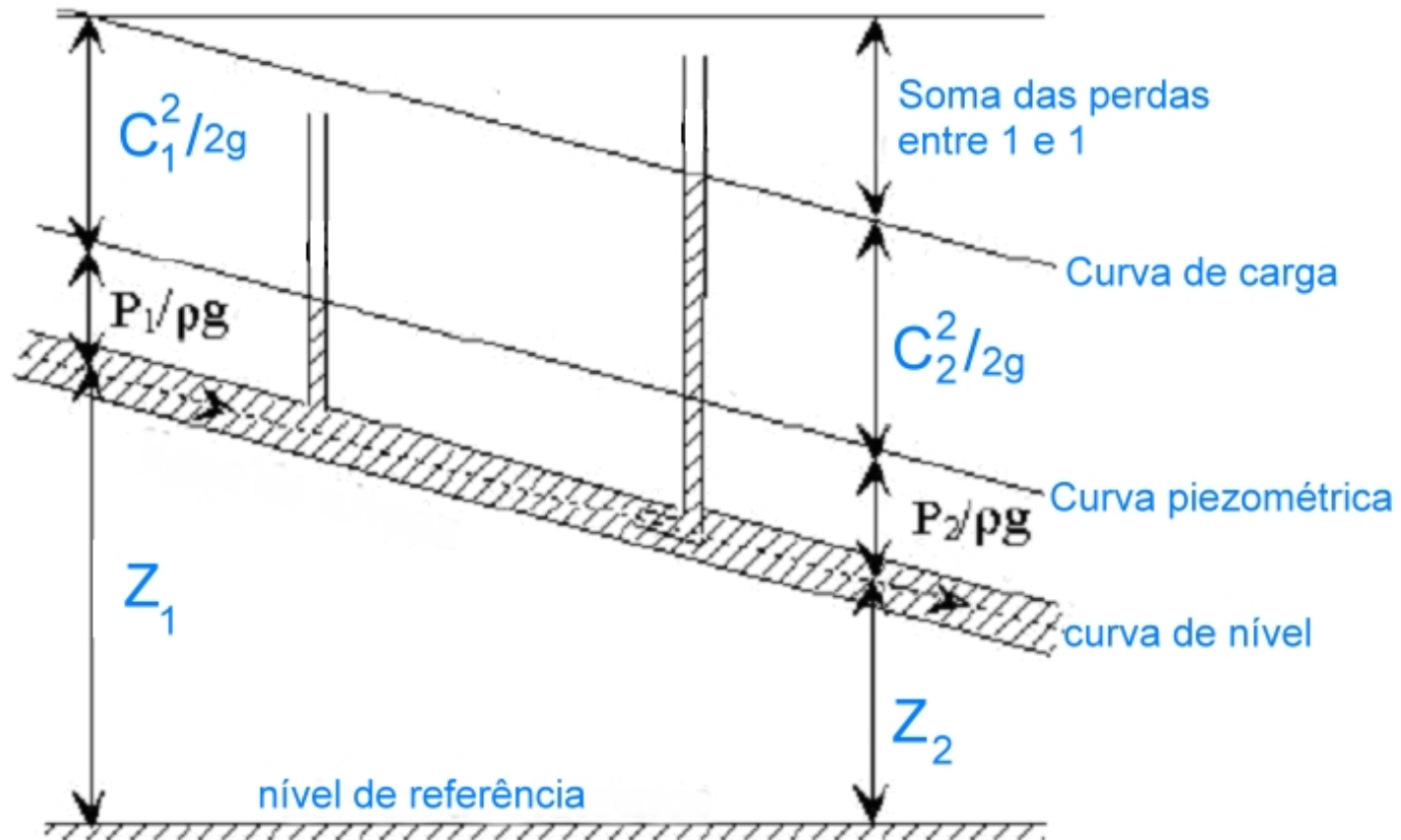
A **energia específica** de uma partícula em um escoamento é dada por

$$E = gH = e + \frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz$$

J/kg	Energia interna	Energia cinética	Energia potencial de pressão	Energia potencial de posição
------	-----------------	------------------	------------------------------	------------------------------

A **carga hidráulica** é dada por  $H = \frac{E}{g}$  (metros de coluna de água).

## Carga hidráulica



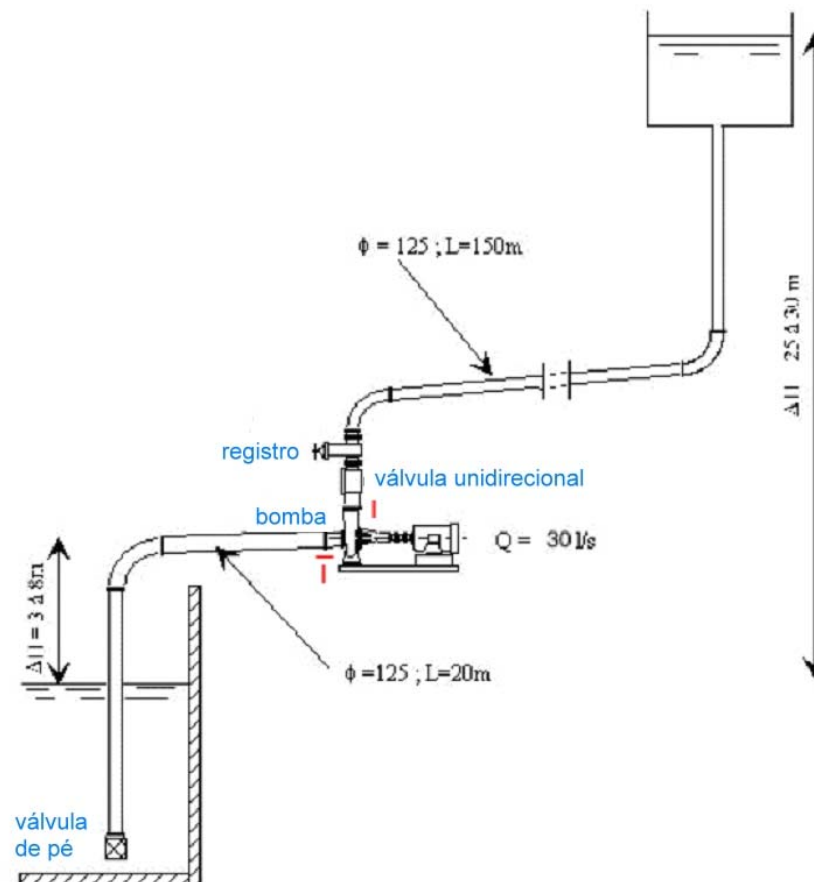
**variação da energia entre o flange de entrada e o de descarga**

$$E = E_E - E_D \quad (\text{J/kg})$$

**altura de queda** (turbina) ou **altura de elevação** (bomba)

$$H = H_D - H_E \quad (\text{mca} - \text{metros de coluna de água})$$

### 1.1.7 Exemplo de uma instalação de bombeamento

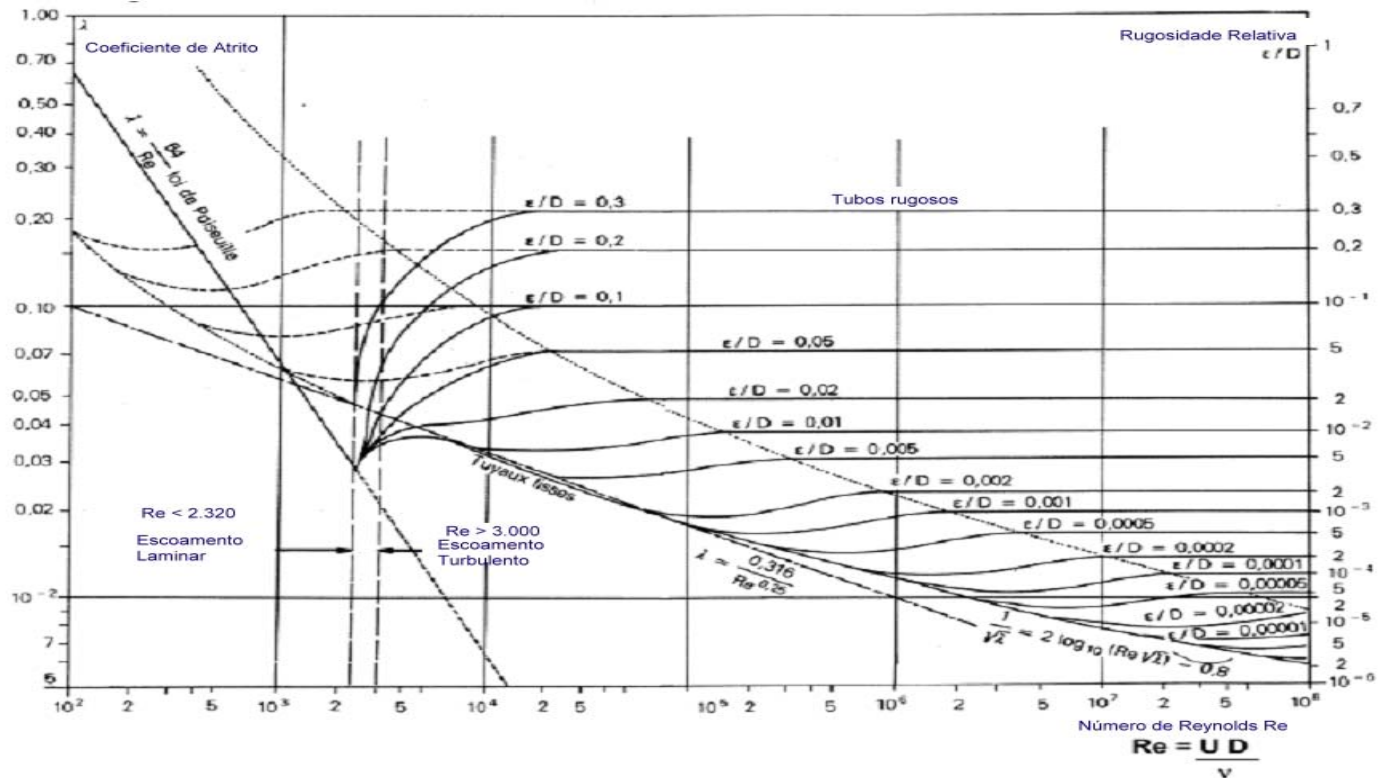


## Perdas nas tubulações – correlações de Colebrook-Nikuradse

Diagrama de Colebrook-Nikuradse

Varição do coeficiente de perda de carga em função do Número de Reynolds, para tubos lisos e tubos rugosos

$$\Delta H = \lambda \frac{L}{Dh} \frac{U^2}{2g} = \left( \lambda \frac{L}{Dh} \frac{1}{S^2 2g} \right) Q^2$$



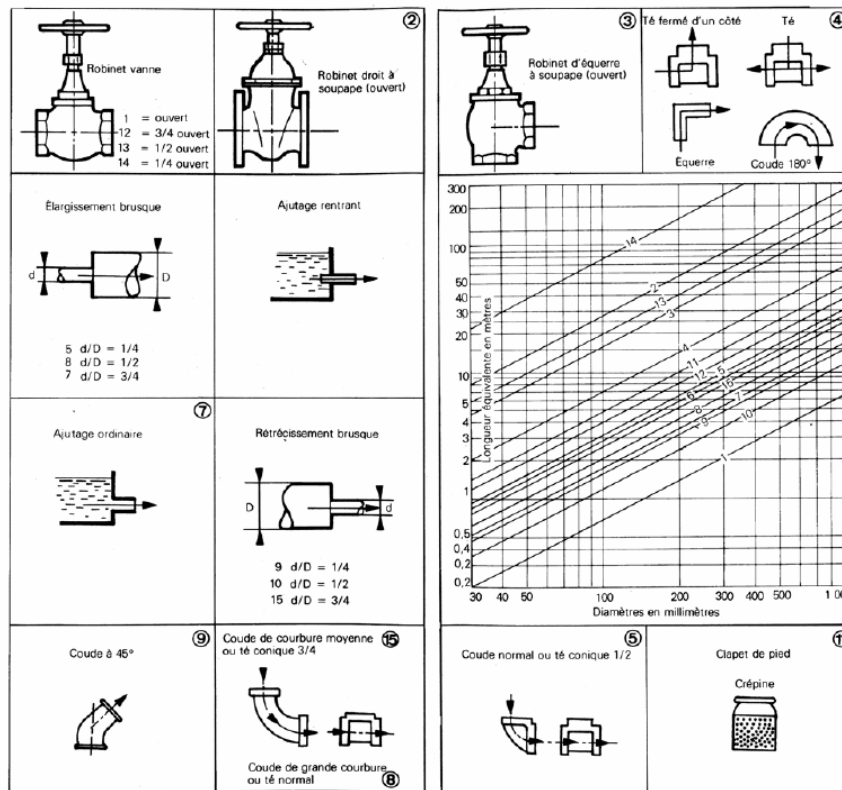
# MÁQUINAS DE FLUXO

## NOTAS DE AULAS - 2008

1-43/93

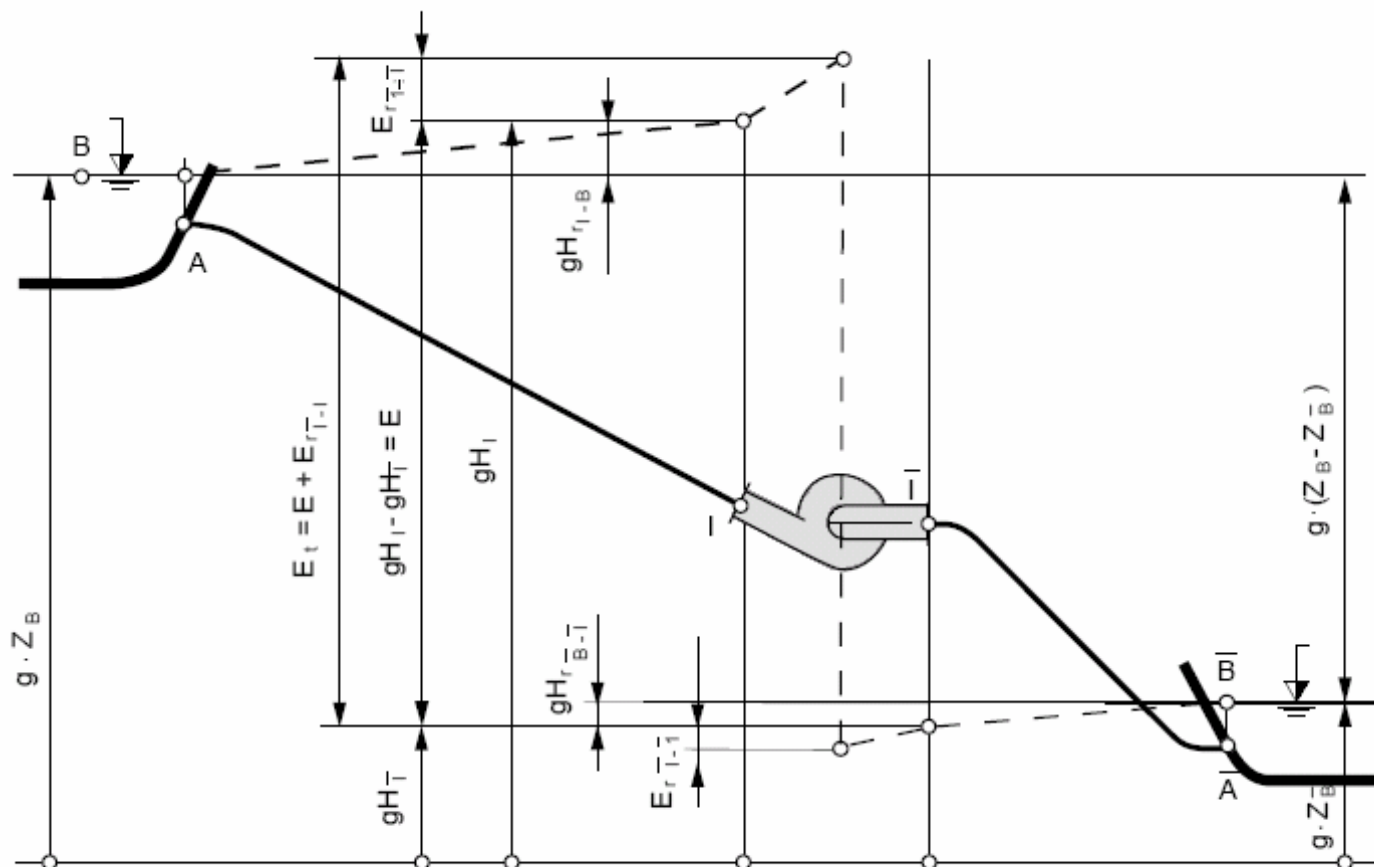
Perdas de carga nos diversos elementos de uma tubulação - estimadas utilizando-se os dados de Tabelas como a seguinte

Pertes de charge singulières



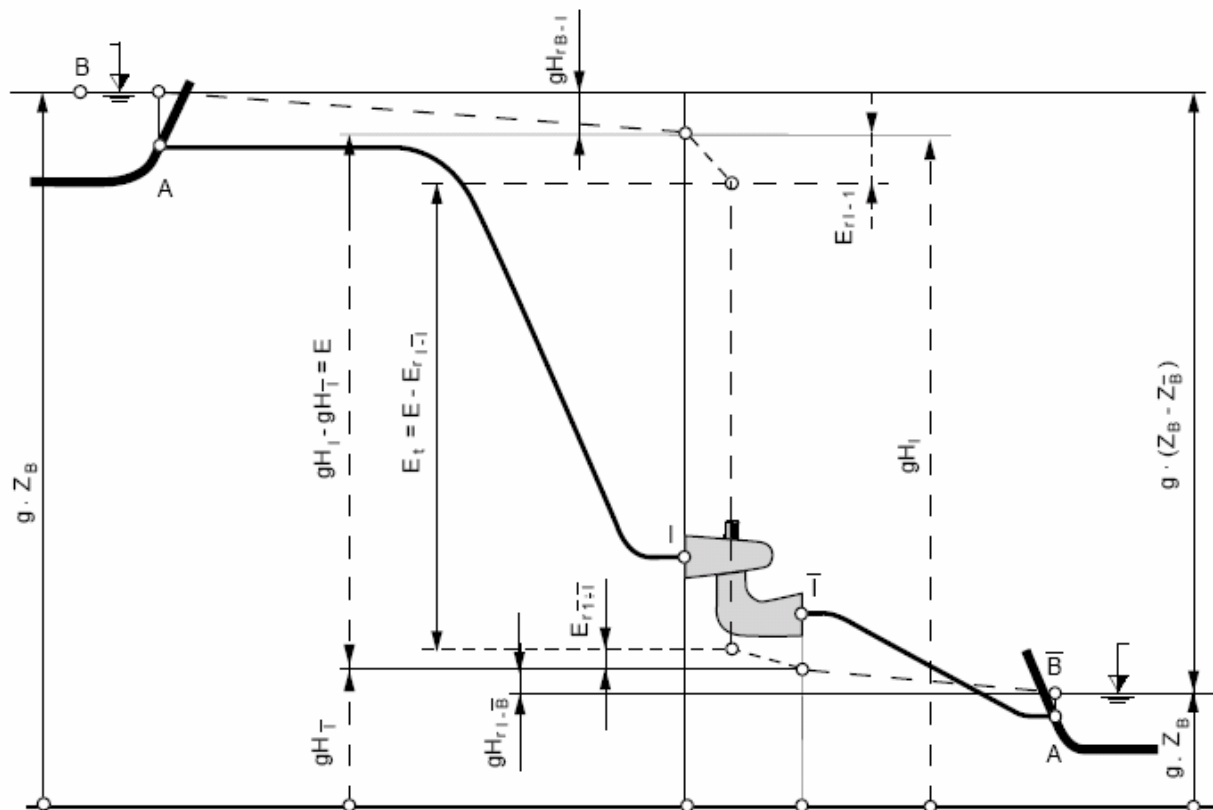
Documents Guinard)

Evolução da energia específica num sistema de bomba



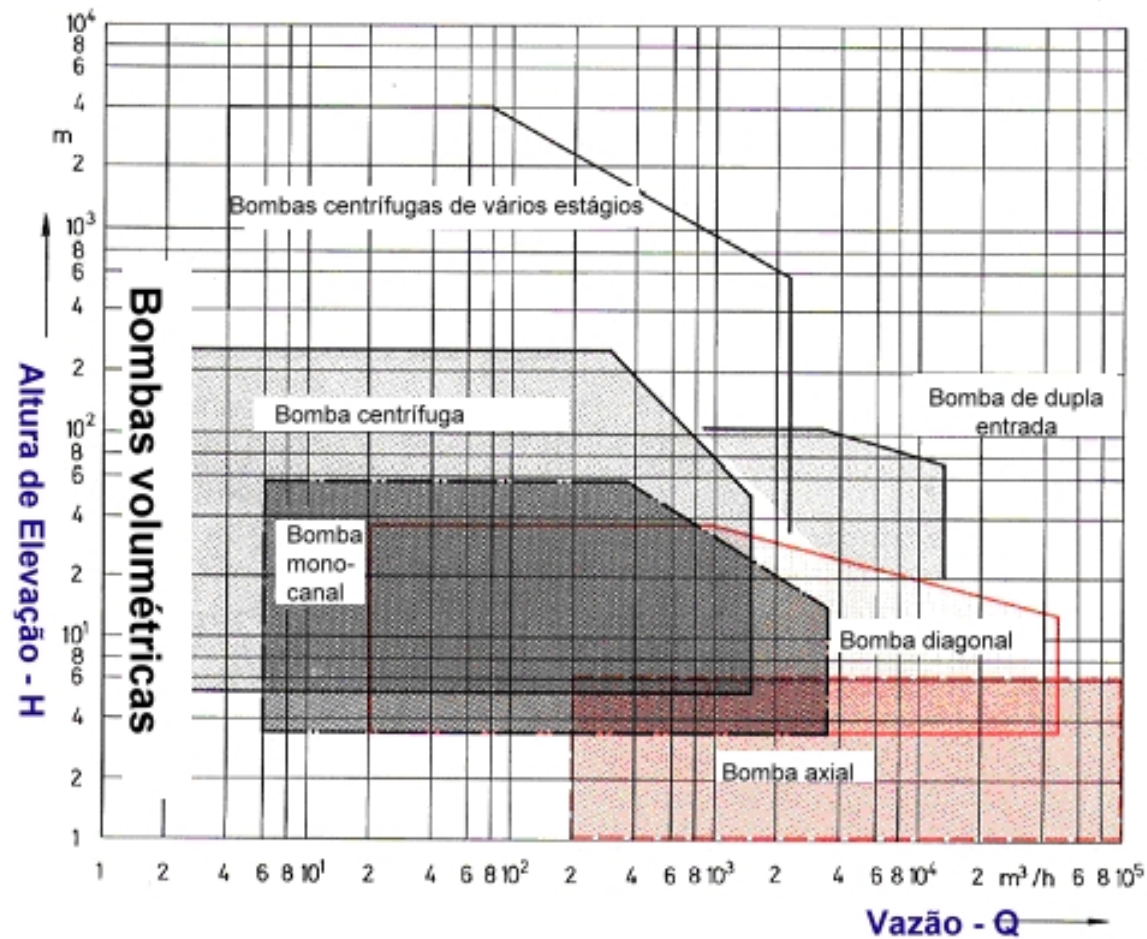


Evolução da energia específica num sistema de bombeamento



Evolução da energia específica num sistema de turbina

### 1.1.8 Campo de utilização de uma bomba



## 1.2 CAMPO DE APLICAÇÃO DAS MÁQUINAS DE FLUXO

Máquinas de fluxo - transformam energia hidráulica em mecânica e vice-versa.

Pode haver outros tipos de máquinas que realizam essas mesmas tarefas **mas as máquinas de fluxo, por serem mais eficientes e economicamente competitivas, encontram aplicações bem definidas.**

Em geral, as **máquinas de fluxo** são melhores adaptadas a **grandes vazões e baixas pressões**, enquanto que as de **deslocamento positivo** são mais adequadas para **pequenas vazões e grandes pressões**.

Nos extremos dessas faixas (**pequenas e grandes vazões e pressões**) há tanto máquinas de fluxo como de deslocamento positivo que podem ser utilizadas para realizarem a mesma tarefa.

Quanto ao **tipo de aplicação** - máquinas principais e máquinas auxiliares

As **máquinas principais** - envolvidas diretamente com a conversão de energia da aplicação em foco

Usina geradora de energia elétrica são **máquinas principais**:

- Turbinas hidráulicas do tipo Kaplan, hélice, Francis, Pelton, Banki
- Turbinas a gás industriais e aeroderivadas

Nessa mesma usina são **equipamentos auxiliares**:

- Bombas (das mais variadas aplicações)
- Turbinas a gás utilizadas para partida das turbinas principais
- Bombas de circulação, de reposição, etc., das instalações de turbinas a vapor
- Ventiladores dos insufladores das caldeiras
- Turbocompressores dos superalimentadores dos motores diesel principais
- Embreagens hidráulicas dos motores de partida das turbinas a gás principais

Numa instalação para propulsão de aeronaves são máquinas de fluxo principais as turbinas e os compressores das turbinas a gás que produzem o empuxo. São auxiliares as turbinas do sistema de ar condicionado, de geração de energia elétrica para a aeronave; das APUs, as bombas de transferência, etc.

**Faixa muito extensa de potências operadas pelas máquinas de fluxo:**

**alguns quilowatts** - turbinas das pequenas centrais hidroelétricas e as turbinas a gás que produzem alguns newtons de empuxo

**dezenas de MW** - grandes turbinas hidráulicas das usinas de Itaipu e Ilha Solteira; turbinas a vapor ou a gás das usinas termelétricas

**Turbinas hidráulicas e a gás – existem na mesma faixa de potência.**

Para uma mesma aplicação, a escolha de uma ou de outra obedece a critérios diversos, dentre eles certamente o econômico, o prazo de colocação em funcionamento, o local de instalação, a disponibilidade do potencial energético (hidráulico ou térmico), o meio ambiente, etc.

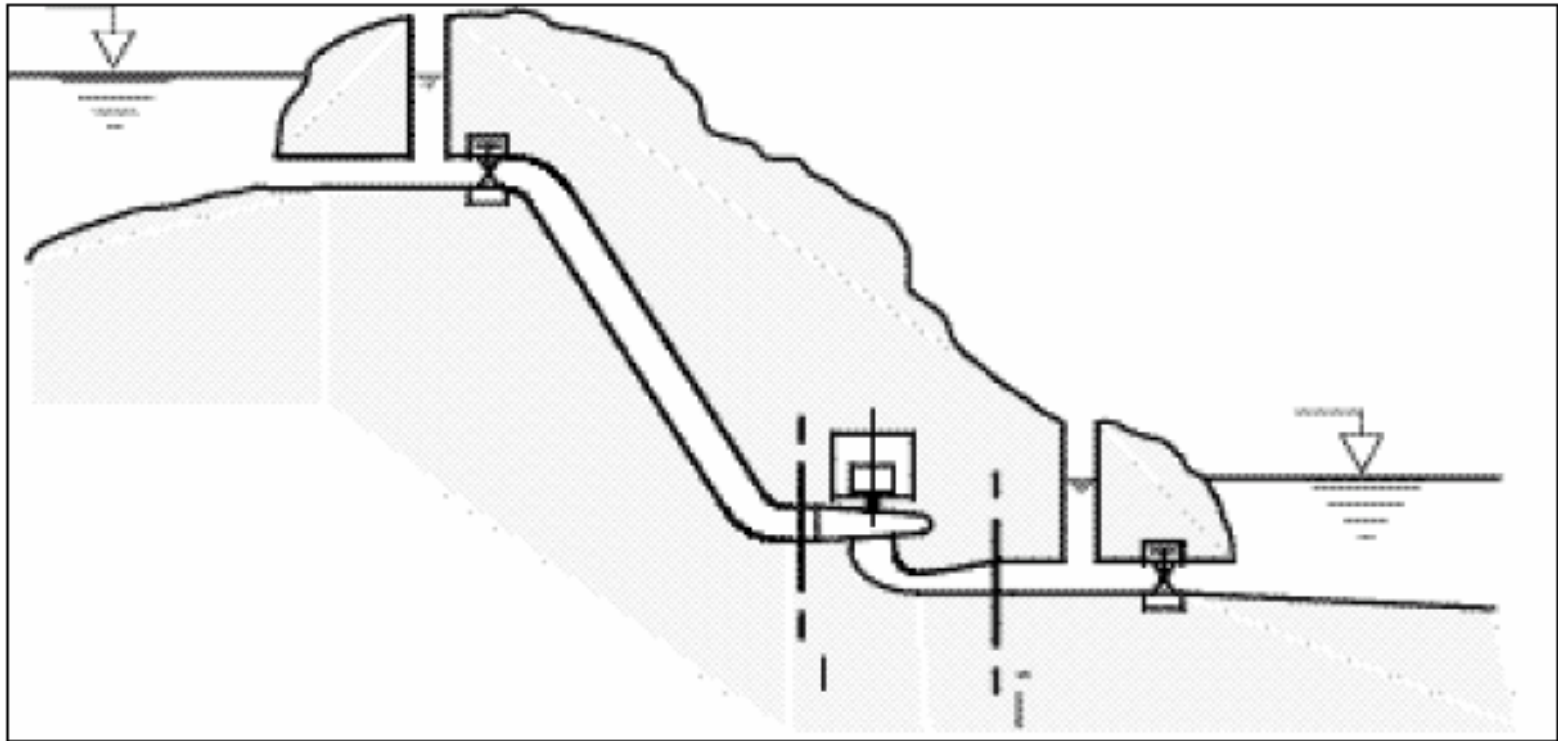
**O processo de seleção da melhor aplicação é muito complexo** e deve envolver também o fator político, calçado por estudos de prioridades nacionais, de conservação do meio ambiente, de proteção à indústria local, etc.

**Tais considerações não fazem parte da abordagem deste curso que, apenas, se deterá em análises para projeto e/ou avaliação de desempenho das máquinas de fluxo.**

Como **geração de energia elétrica em grande escala é feita através de máquinas de fluxo** e como a energia elétrica consumida no país é política, econômica, social e intensivamente muito significativa, é primordial que o engenheiro (ou outro profissional) que vai lidar com essas máquinas, tanto na fase de projeto como nas de avaliação, de seleção, etc., tenha em mente todos esses aspectos que o mundo frio do dimensionamento não abriga.

Uma **instalação hidráulica é um conjunto mais ou menos complexo de elementos** como reservatórios, dutos e aparelhos, contendo pelo menos uma máquina hidráulica, organizados para desempenhar uma função determinada, com troca de energia (potência) útil com o meio exterior. A troca de energia é feita pela máquina hidráulica.

**A natureza e a disposição desses elementos que constituem uma instalação hidráulica podem variar muito, em função da instalação e da função a desempenhar.**



Seções de referência de uma máquina hidráulica



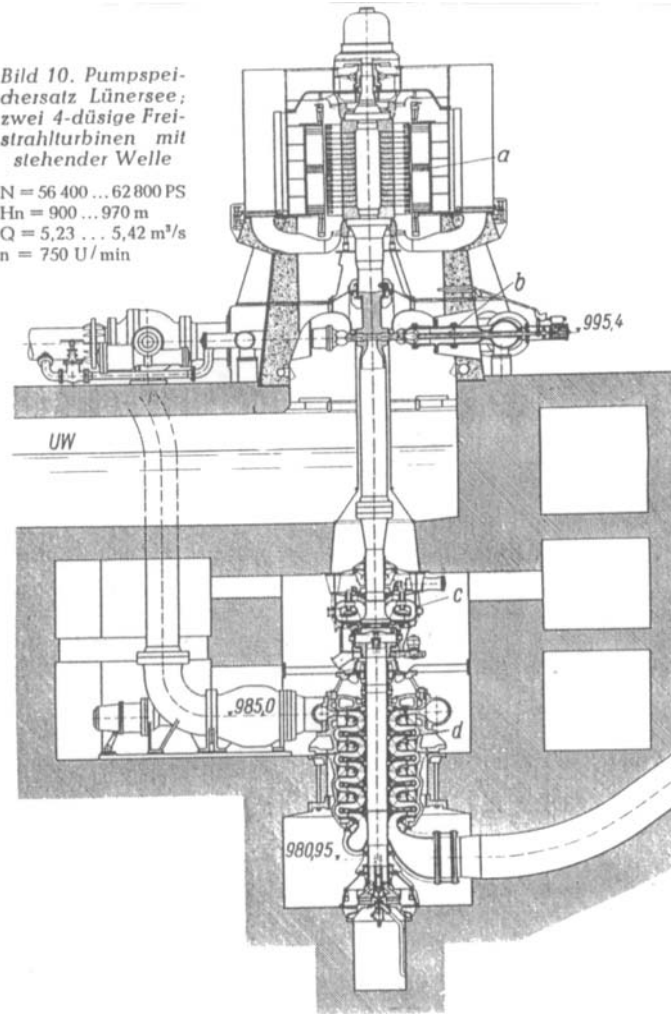
# MÁQUINAS DE FLUXO

## NOTAS DE AULAS - 2008

1-53/93

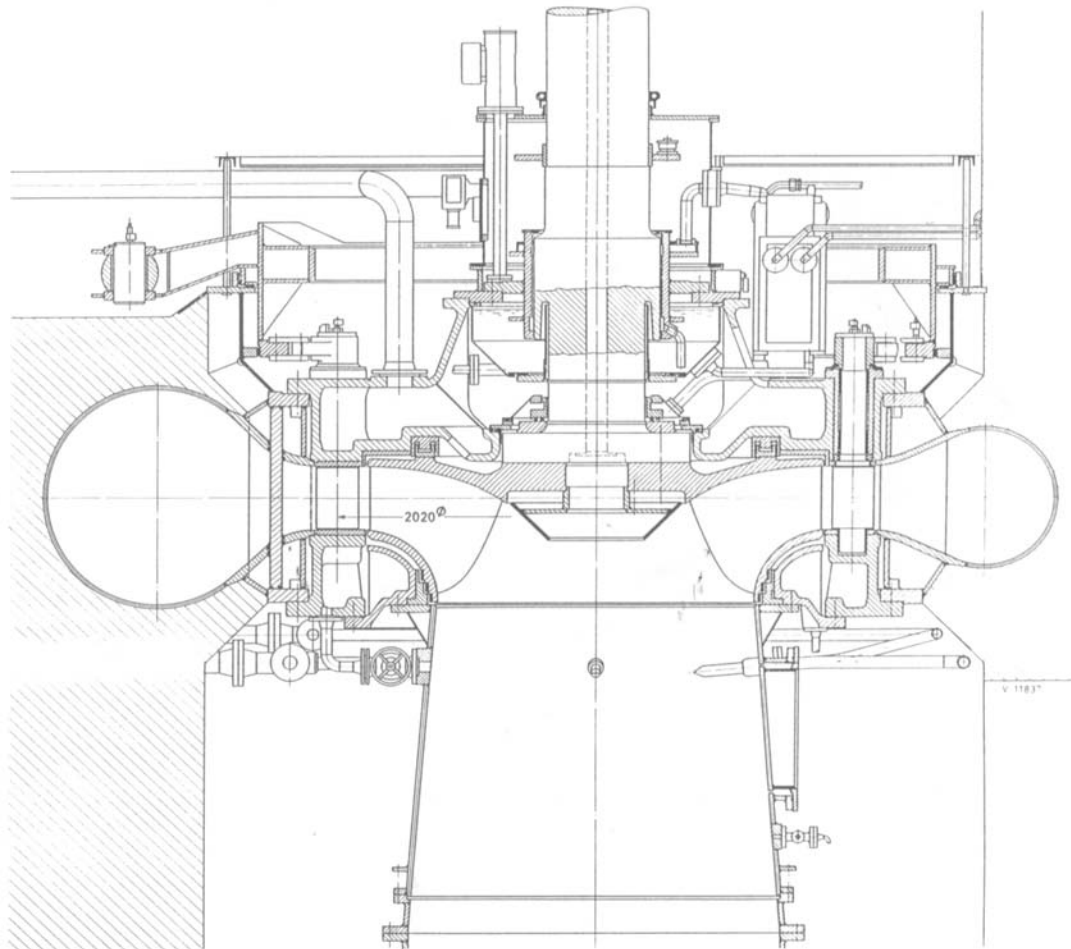
Bild 10. Pumpspeichersatz Lünensee;  
zwei 4-düsige Freistrahlturbinen mit  
stehender Welle

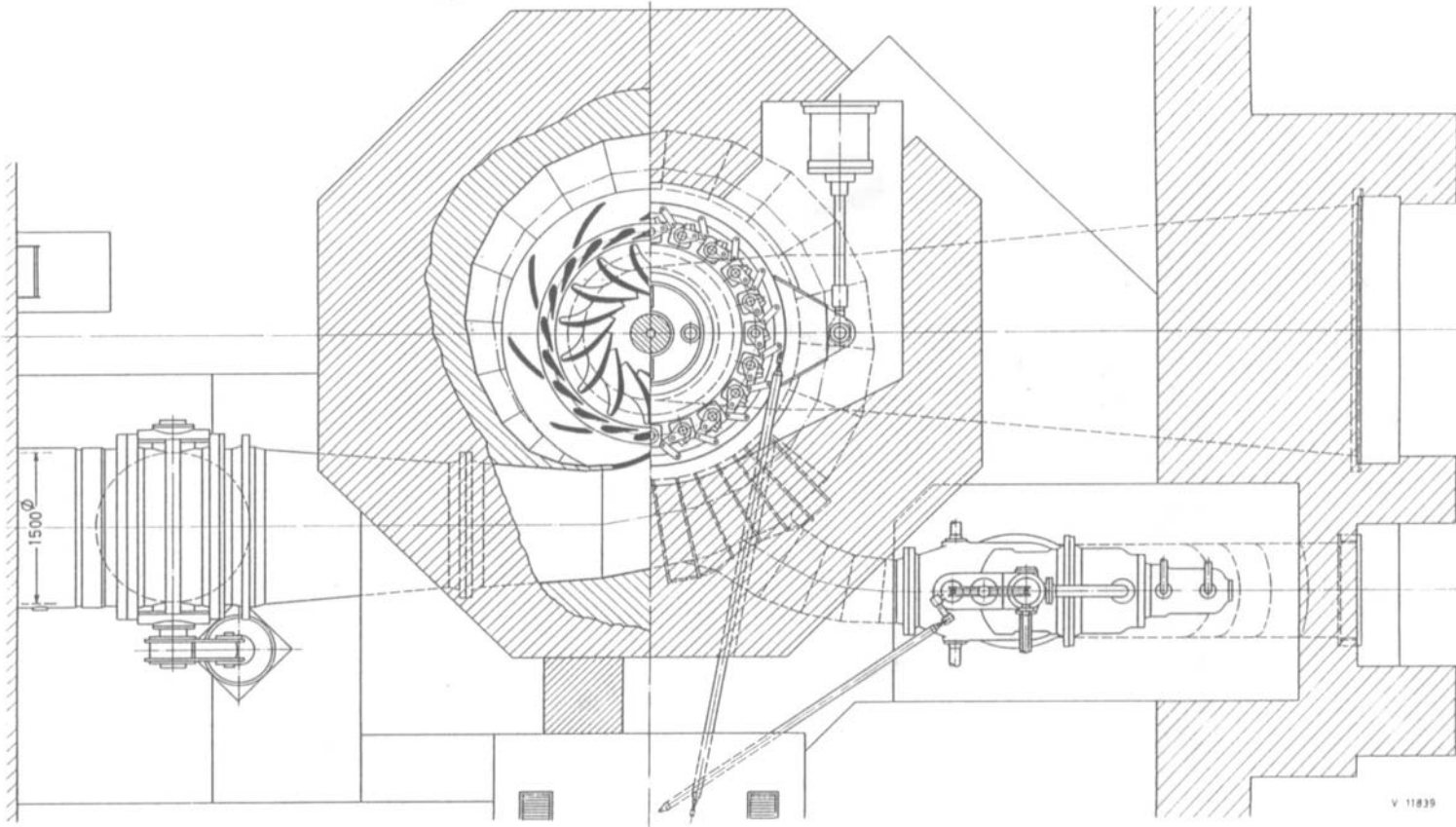
$N = 56\,400 \dots 62\,800$  PS  
 $H_n = 900 \dots 970$  m  
 $Q = 5,23 \dots 5,42$  m<sup>3</sup>/s  
 $n = 750$  U/min

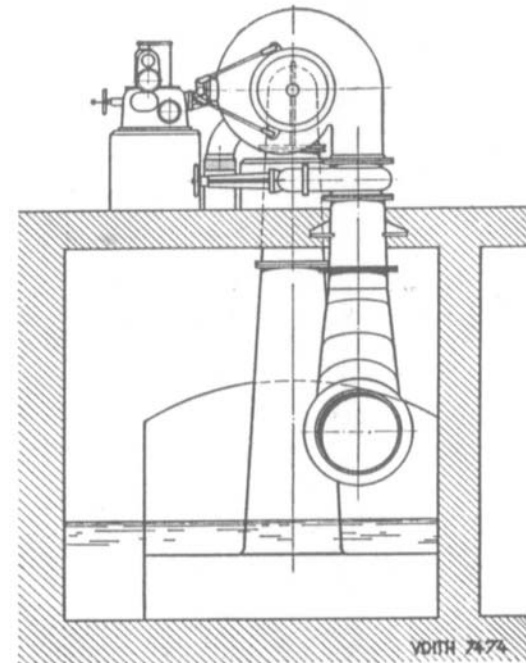
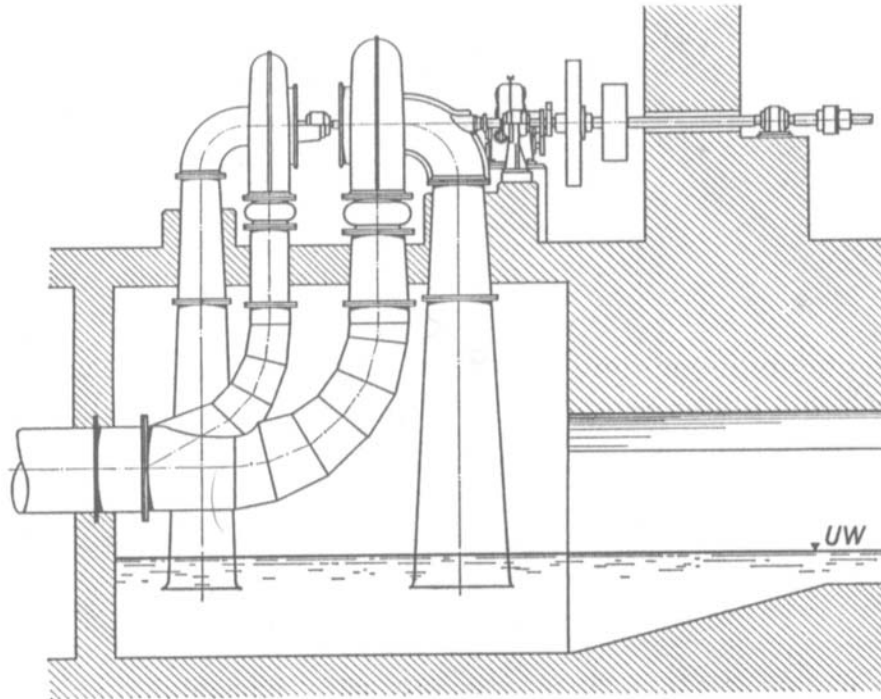


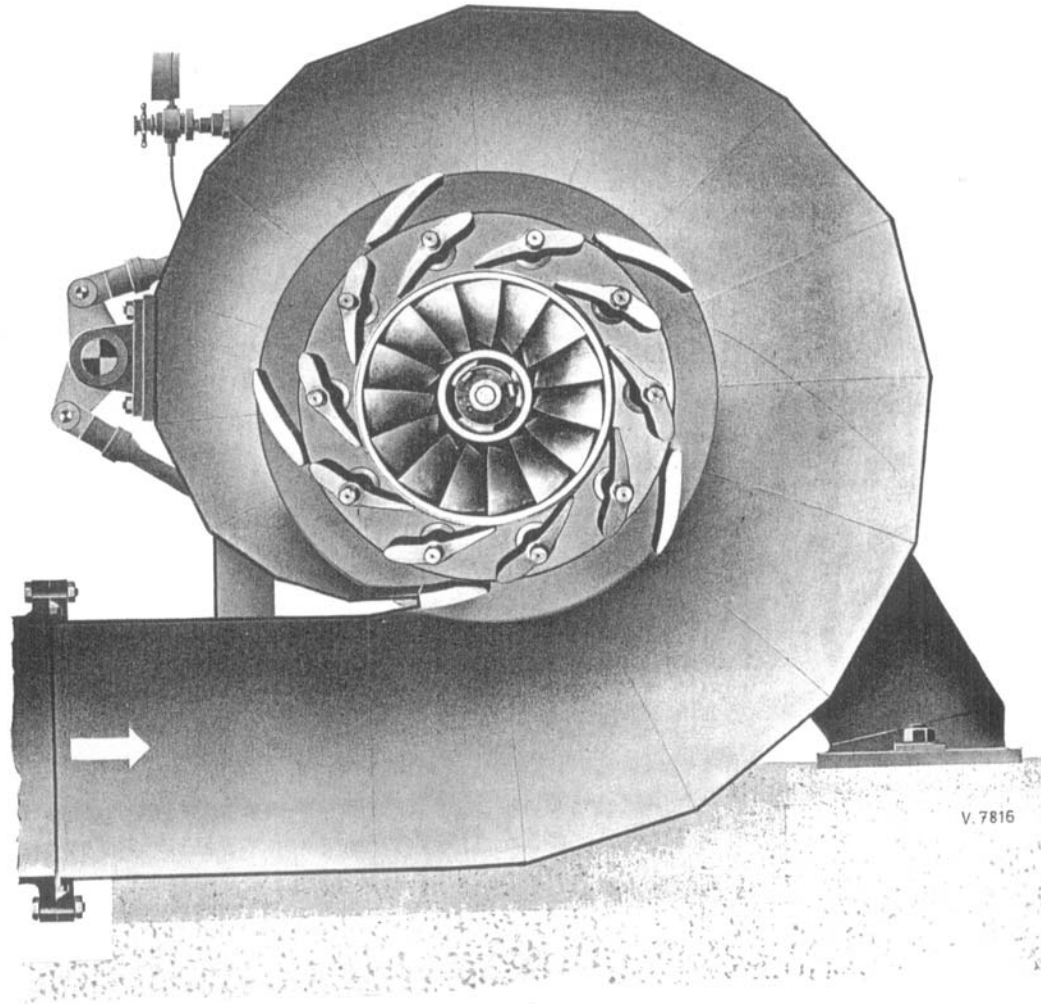
**MÁQUINAS DE FLUXO**  
**NOTAS DE AULAS - 2008**

1-54/93





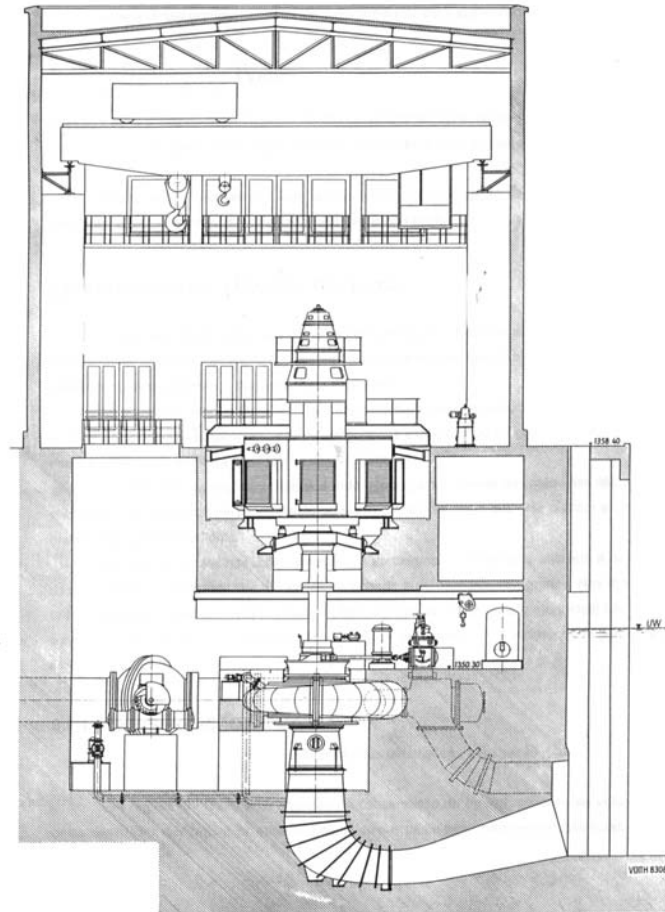






## MÁQUINAS DE FLUXO NOTAS DE AULAS - 2008

1-58/93

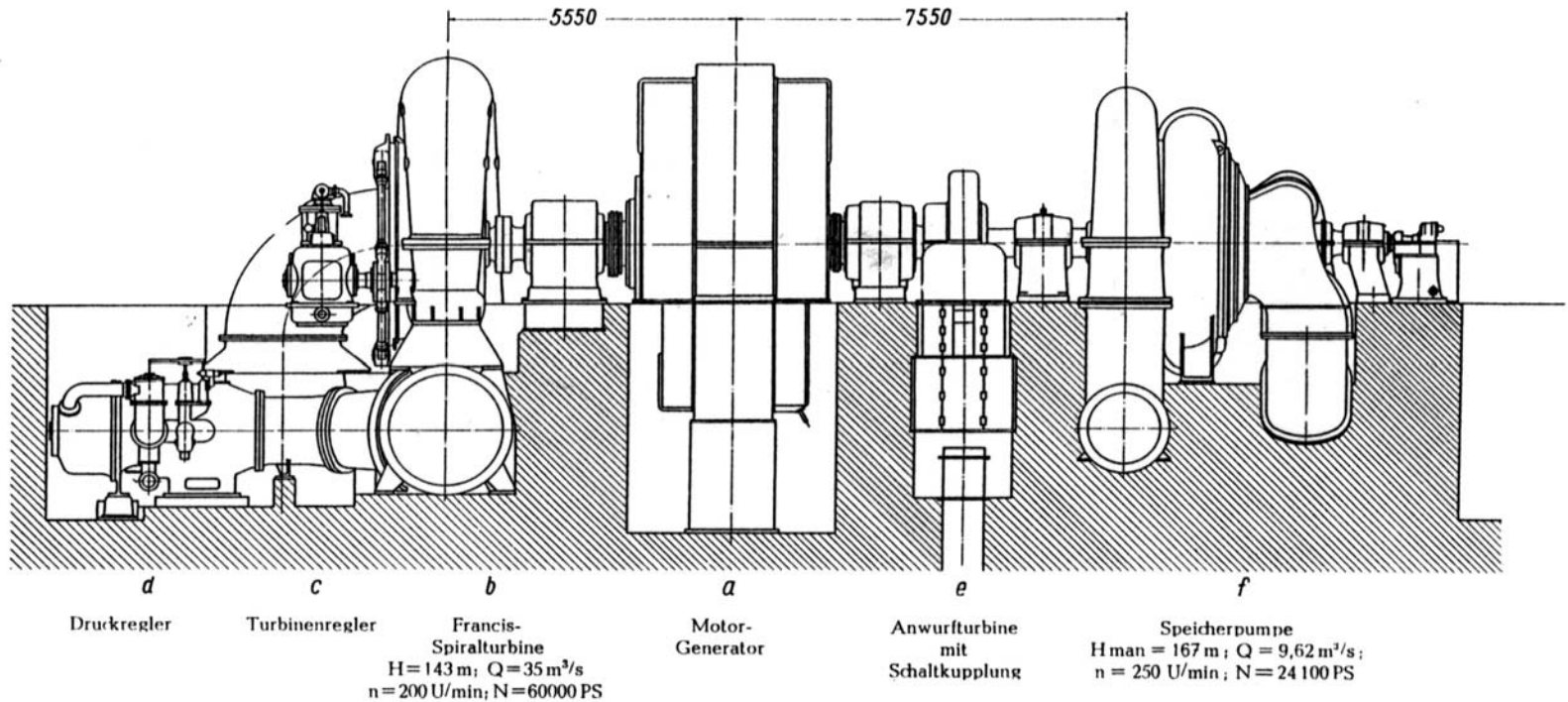


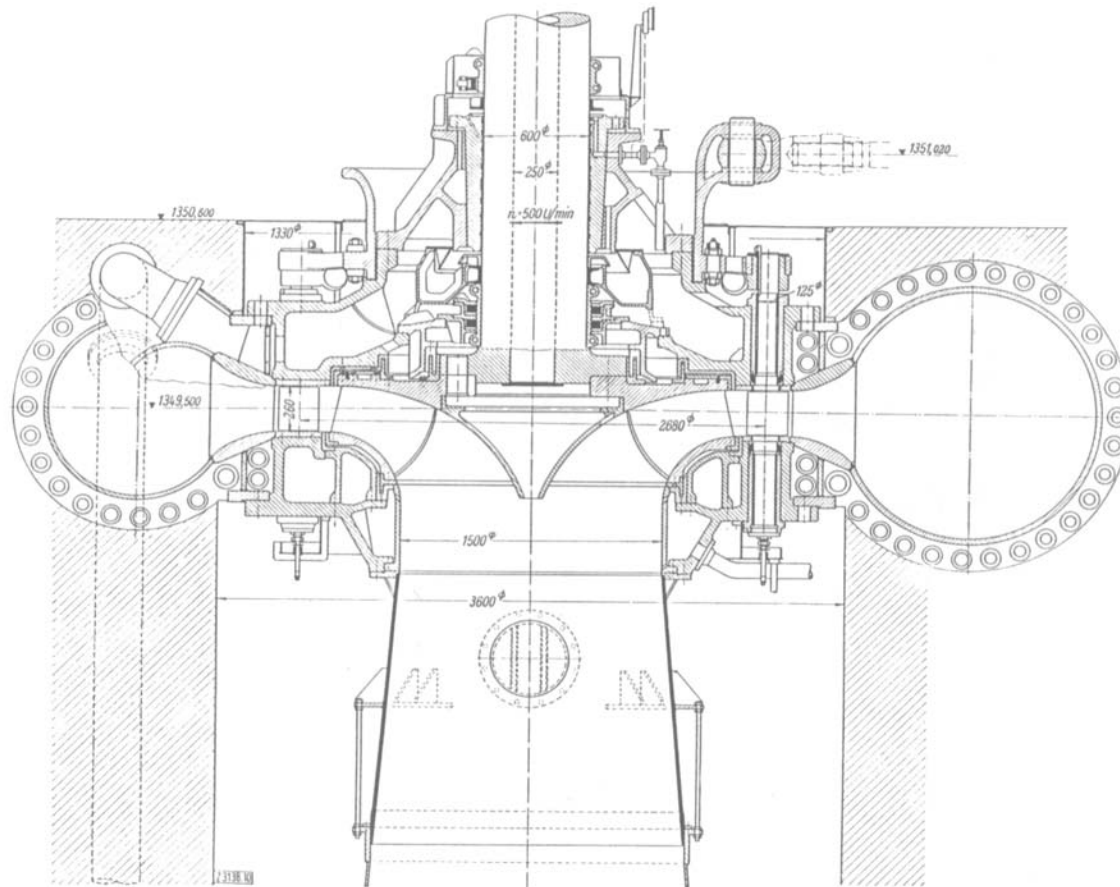
- 3 Corte da sala de máquinas, com a turbina Francis-espiral III. A montante da turbina, como órgão de fecho, uma válvula esférica de 1500 mm de diâmetro interior, com acionamento hidráulico. O regulador-piloto da turbina está instalado no piso do alternador. O equipamento de produção de óleo sob pressão, o acumulador e os servomotores do distribuidor encontram-se no pavimento intermédio acima da turbina. O regulador de pressão é indicado a tracejado, à direita da evoluta.

# MÁQUINAS DE FLUXO

## NOTAS DE AULAS - 2008

1-59/93





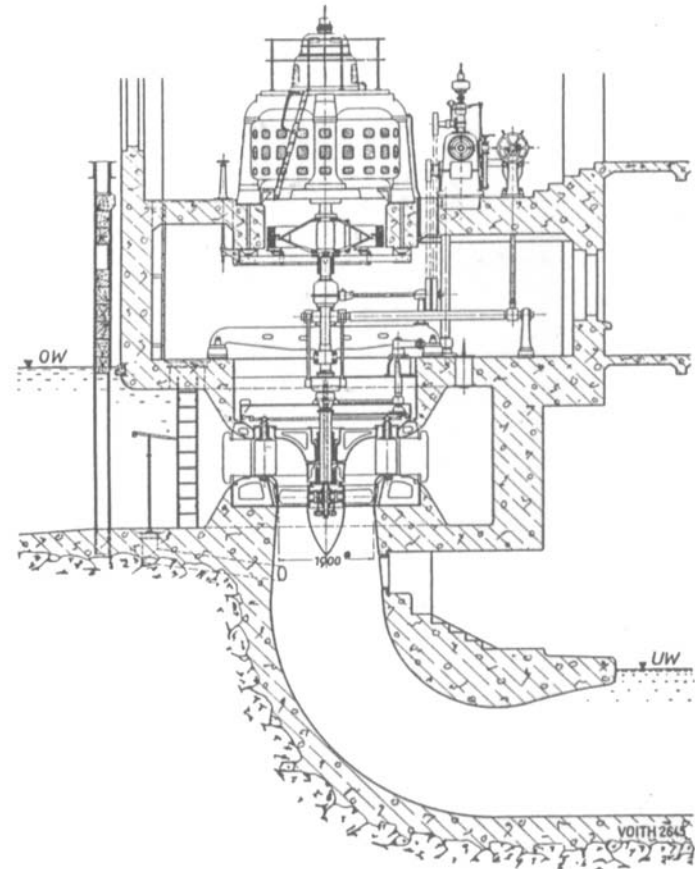
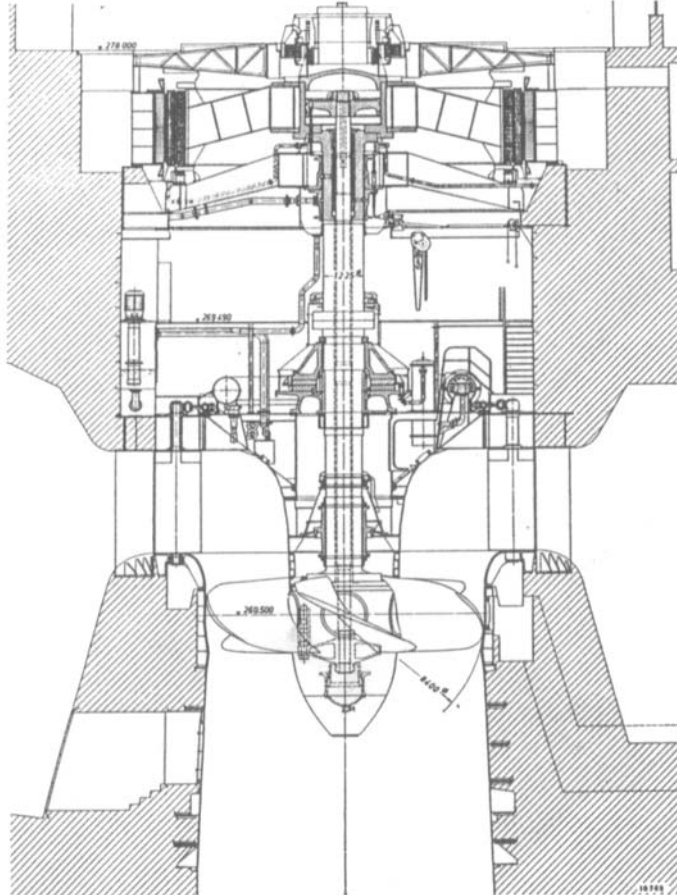
Corte da turbina Francis-espiral III. A evoluta é bipartida; as duas partes são ligadas por flanges. Tampa da turbina e pás directrizes de aço vazado. Abaixo da chumaceira-guia, lubrificada a óleo sob pressão, encontra-se um empanque de anéis de carbono. A parte superior do tubo de aspiração é abaixável permitindo a revisão da roda motriz. Admissão de ar ao tubo de aspiração por meio da camisa situada abaixo da roda motriz.  $H = 311$  m,  $Q = 20,35$  m<sup>3</sup>/s,  $n = 500$  rpm,  $N = 76\,000$  CV.

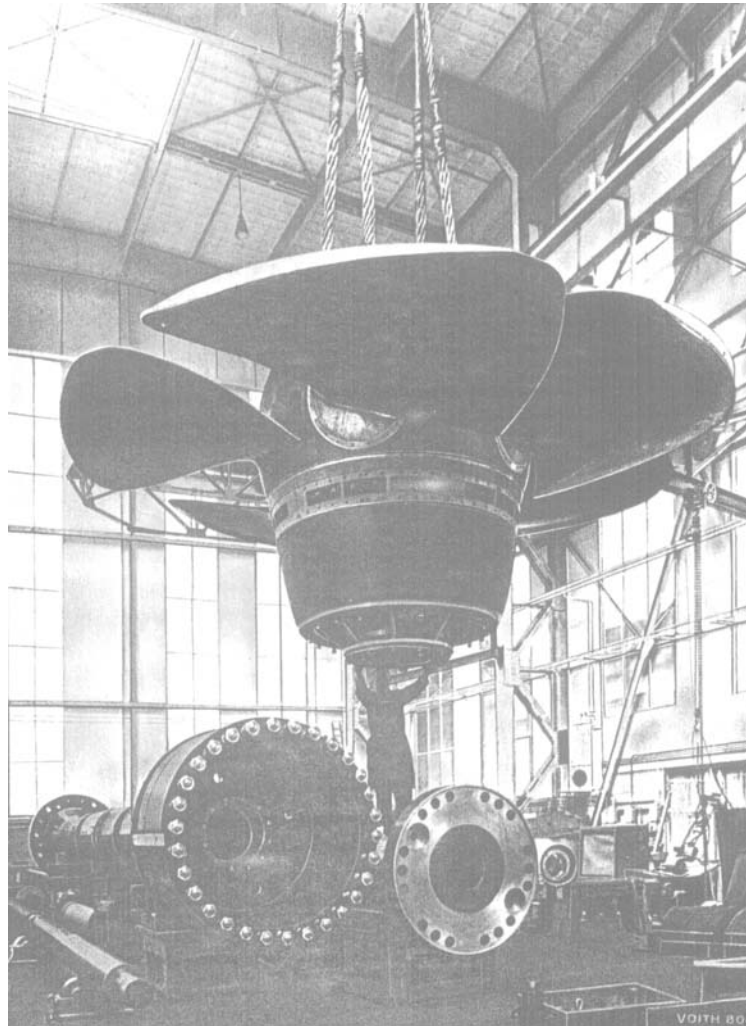


# MÁQUINAS DE FLUXO

## NOTAS DE AULAS - 2008

1-61/93

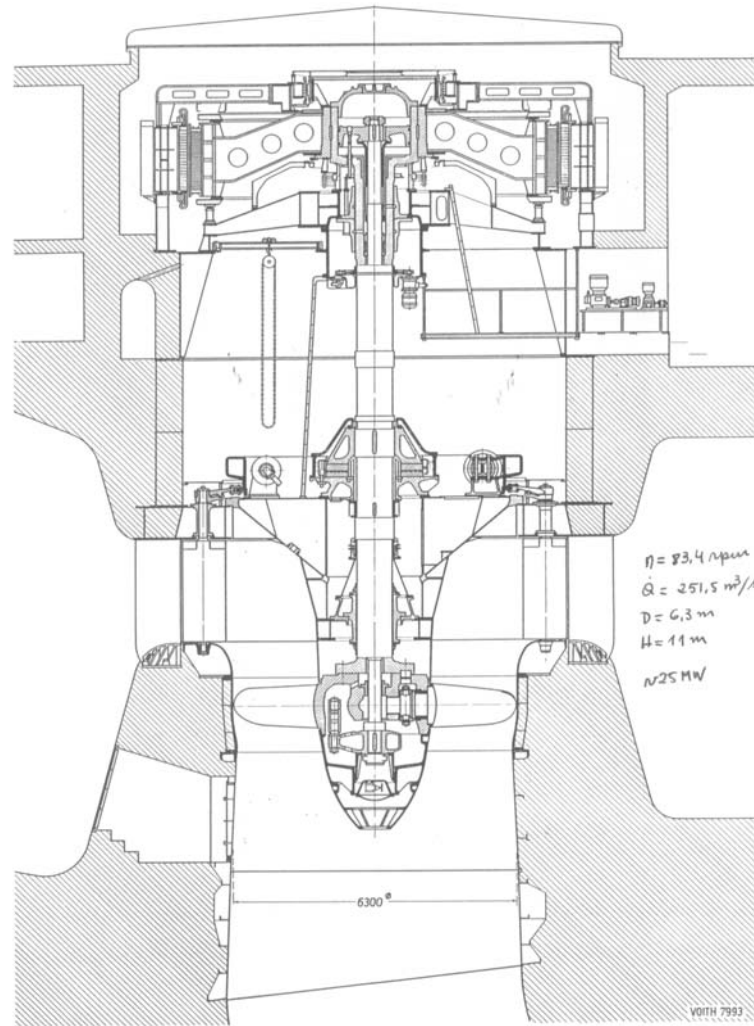




# MÁQUINAS DE FLUXO

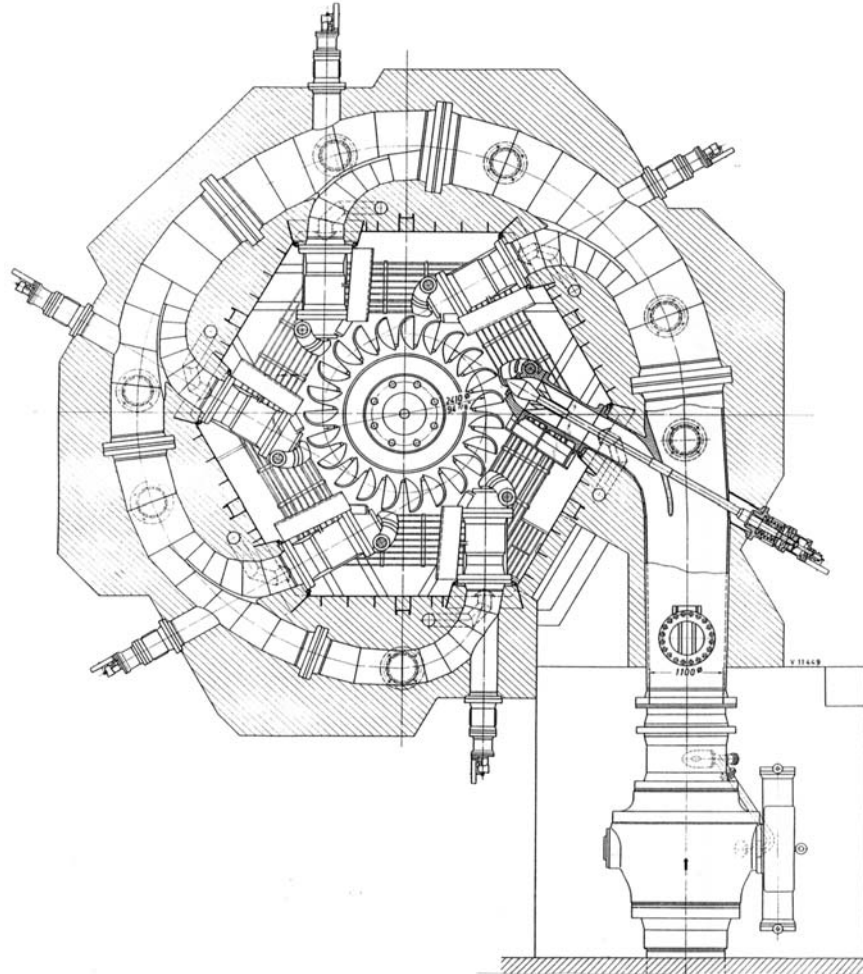
## NOTAS DE AULAS - 2008

1-63/93

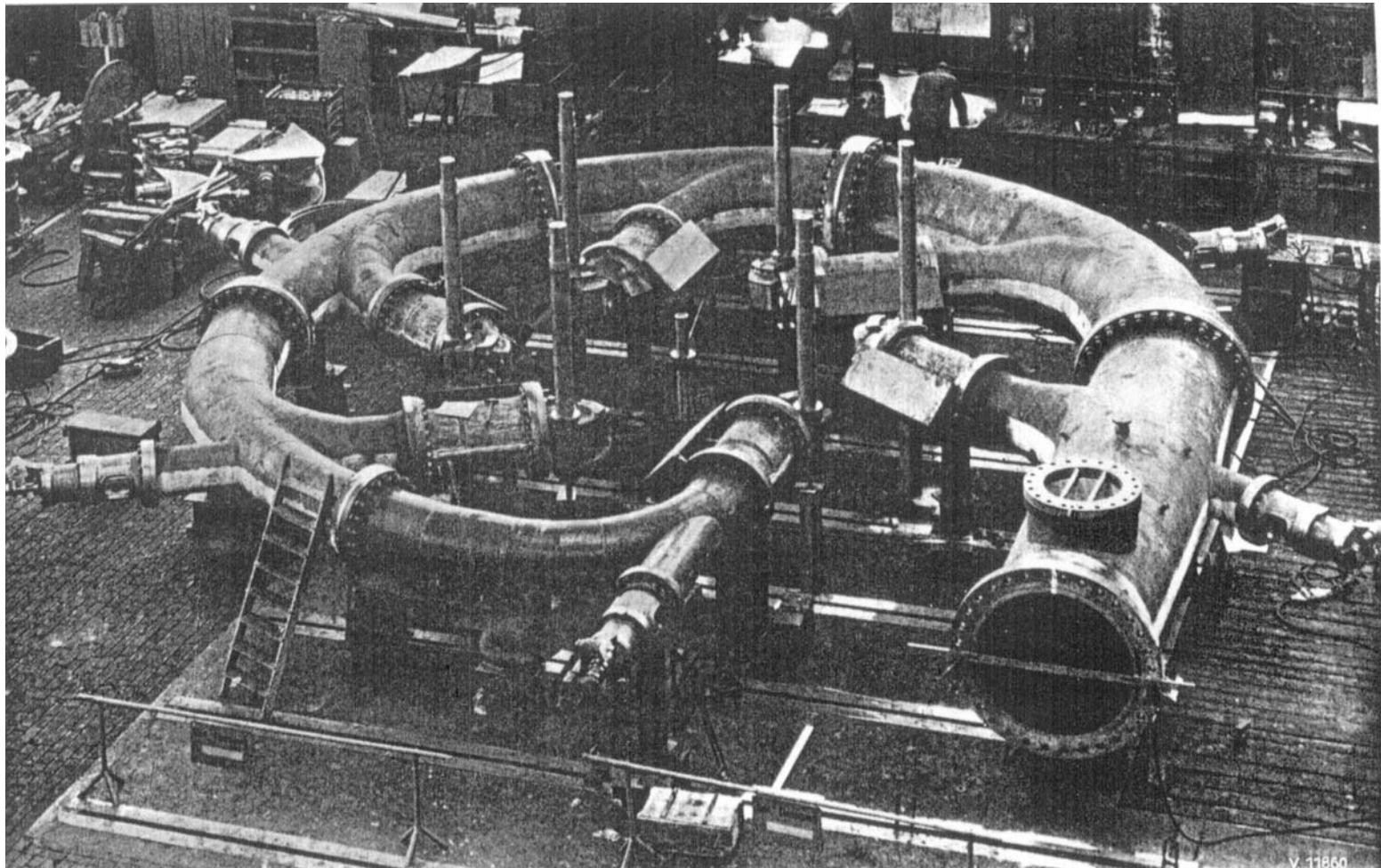


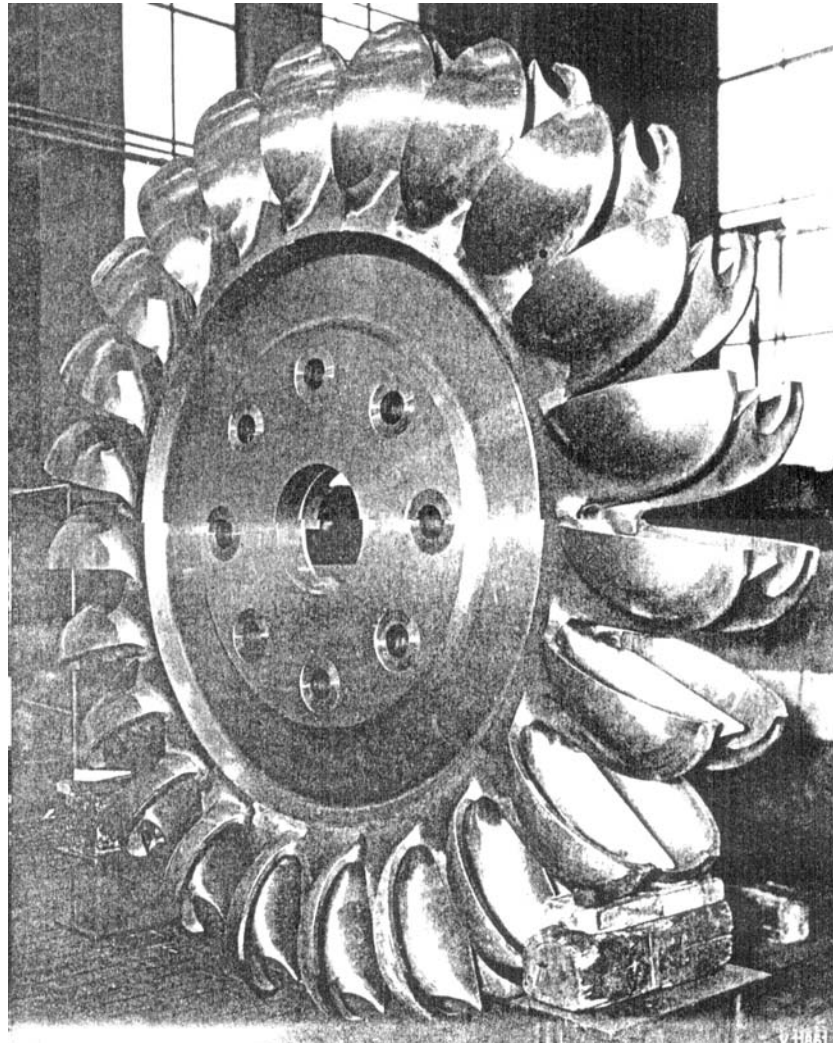
**MÁQUINAS DE FLUXO**  
**NOTAS DE AULAS - 2008**

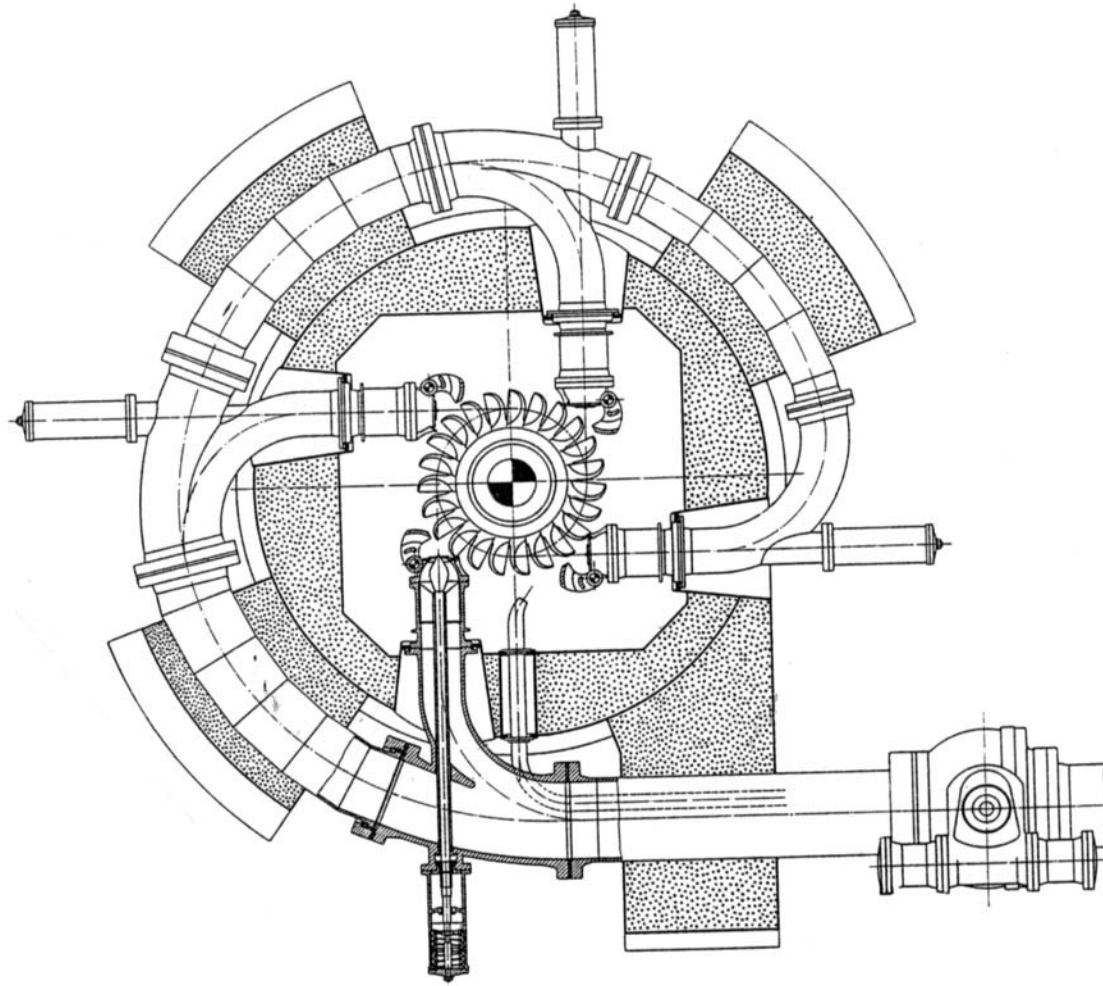
1-64/93



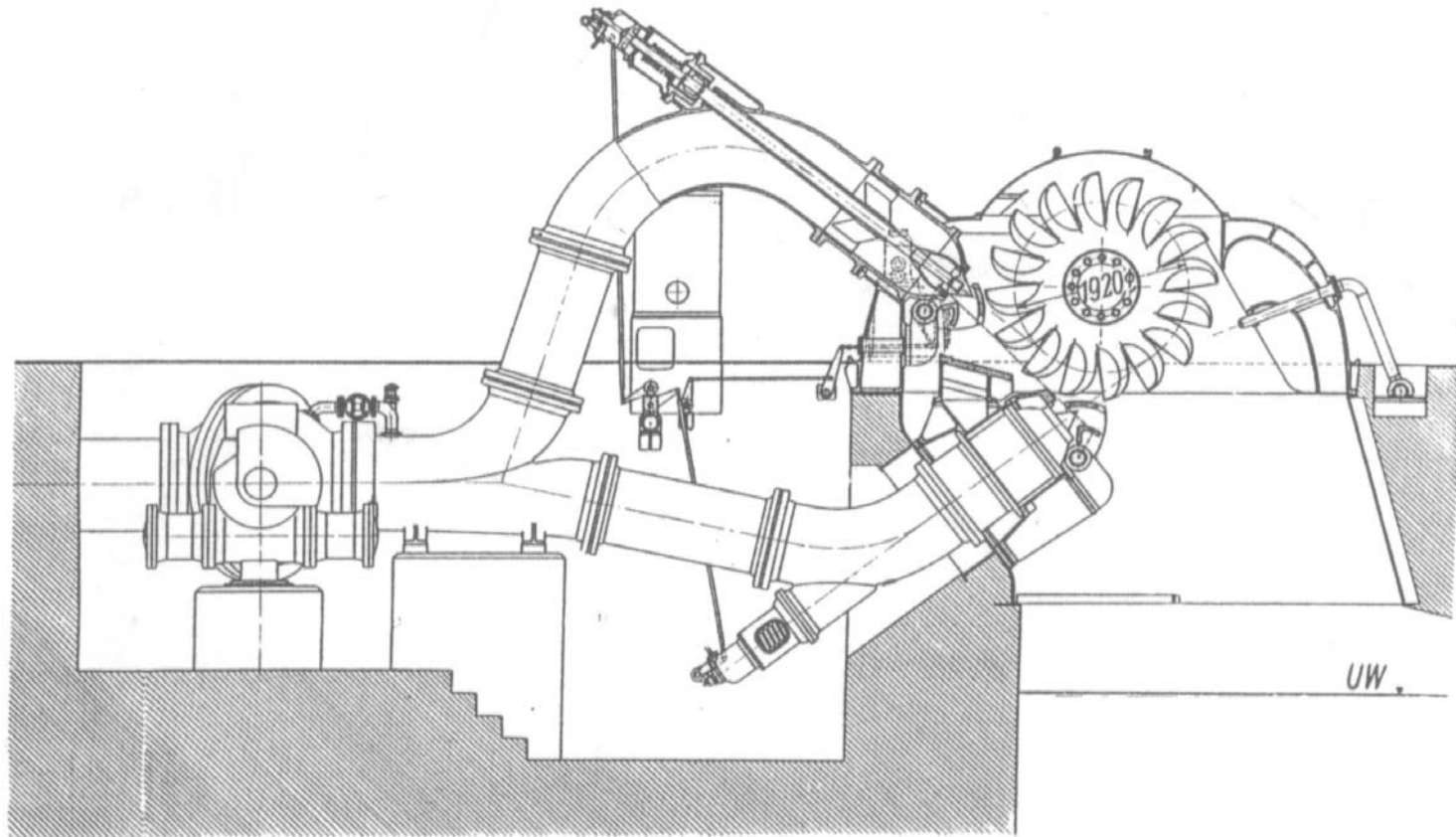










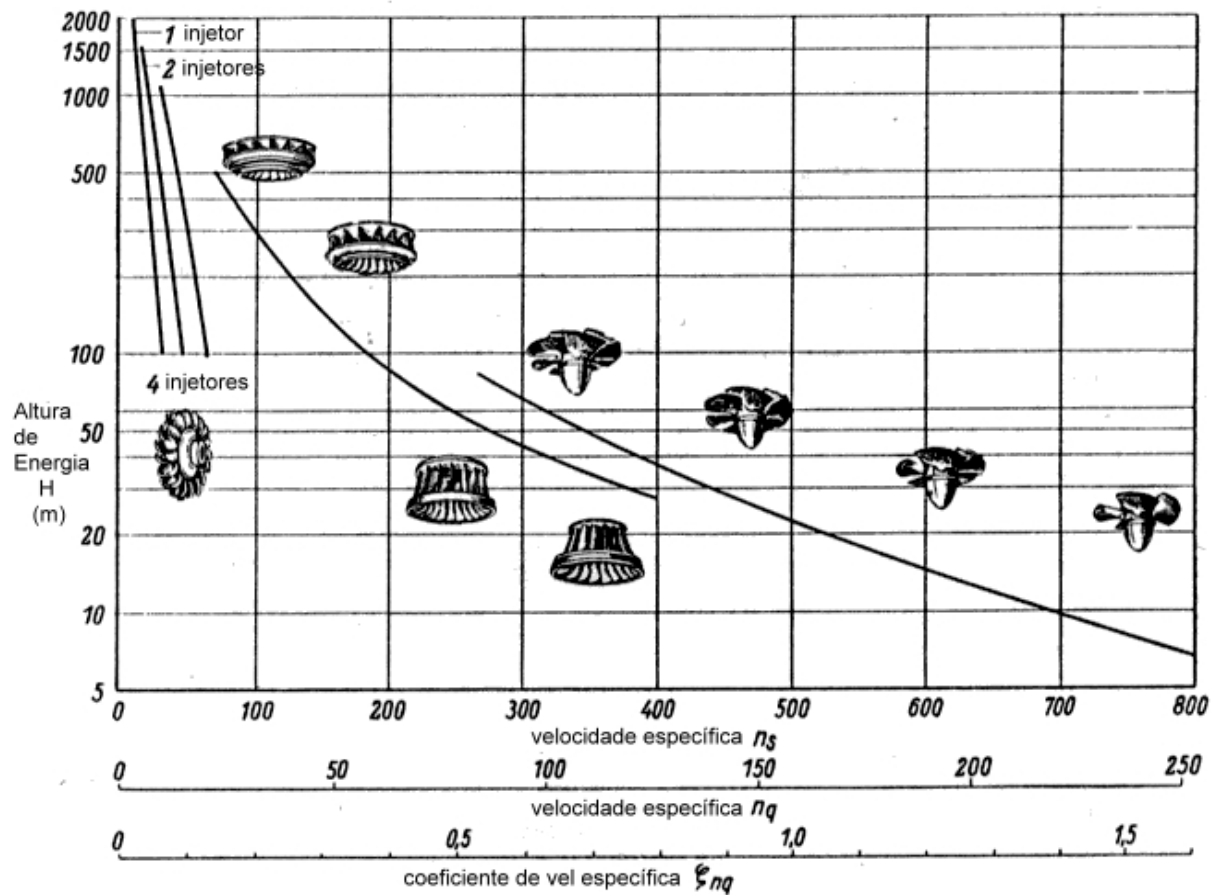




# MÁQUINAS DE FLUXO

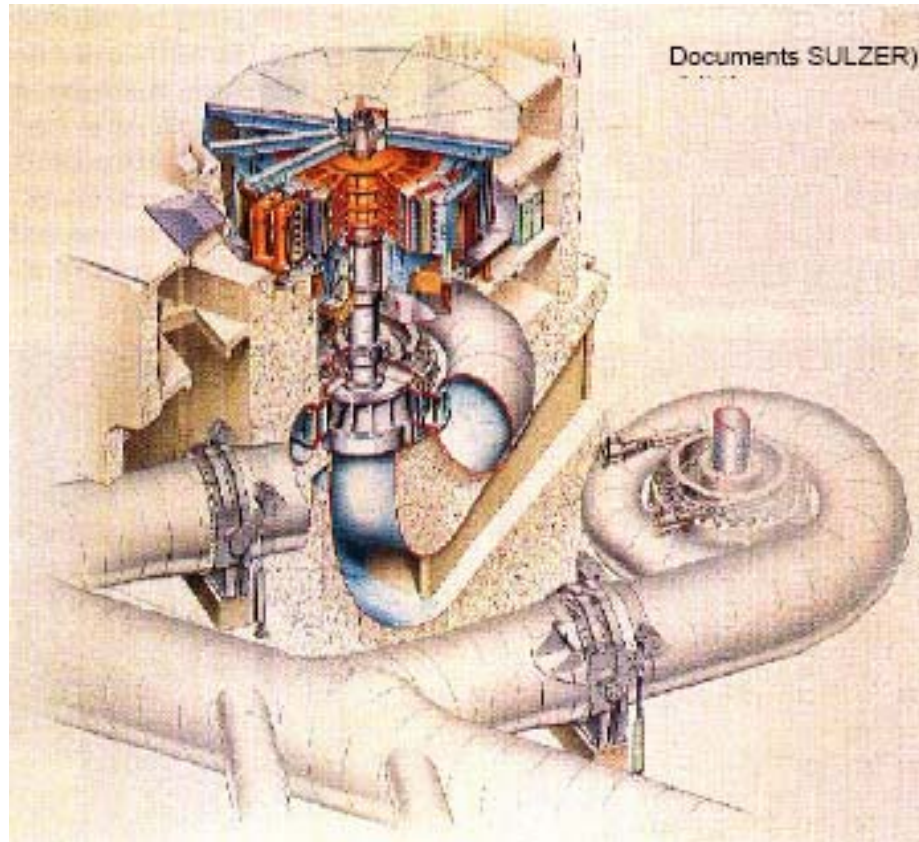
## NOTAS DE AULAS - 2008

1-69/93

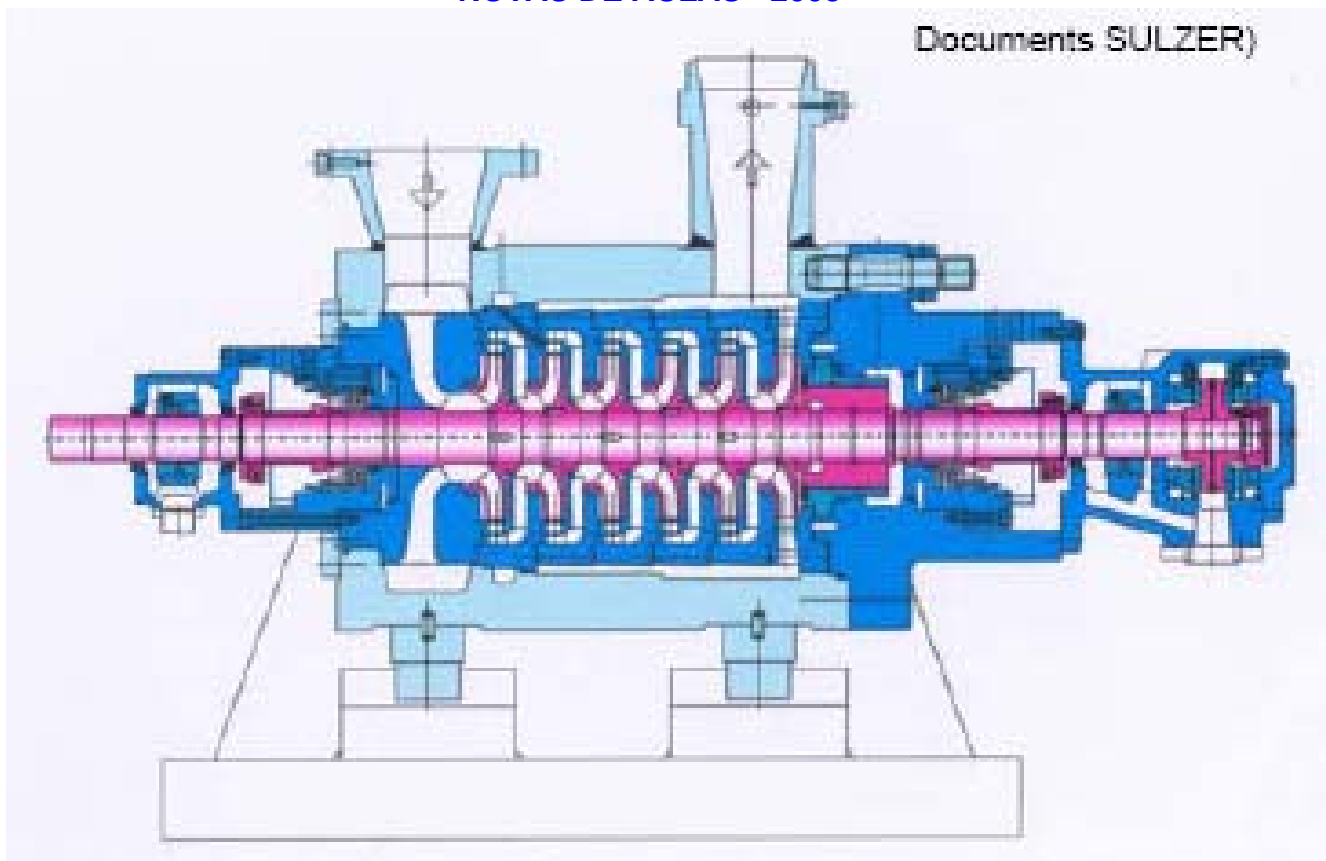


MÁQUINAS DE FLUXO  
NOTAS DE AULAS - 2008  
**Alguns tipos de máquinas**

1-70/93



Grupo turbogenerador hidráulico

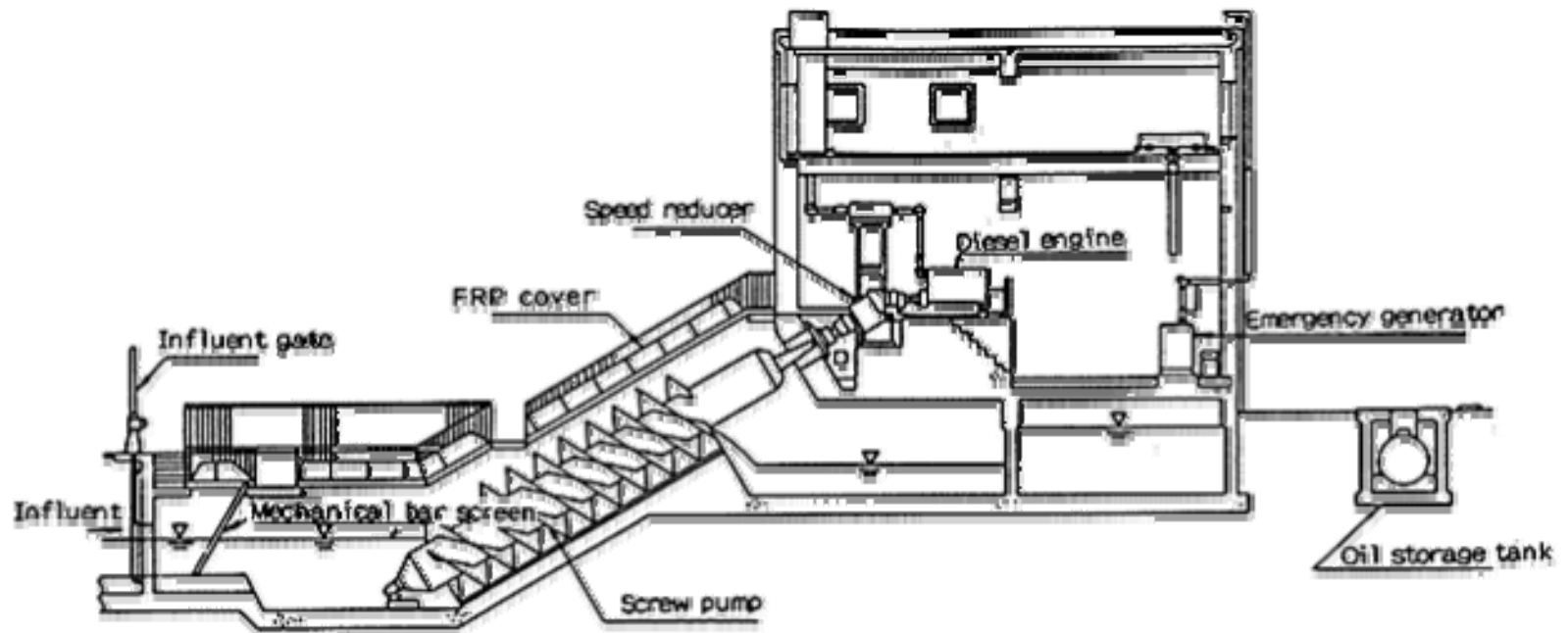


Bomba radial de vários estágios

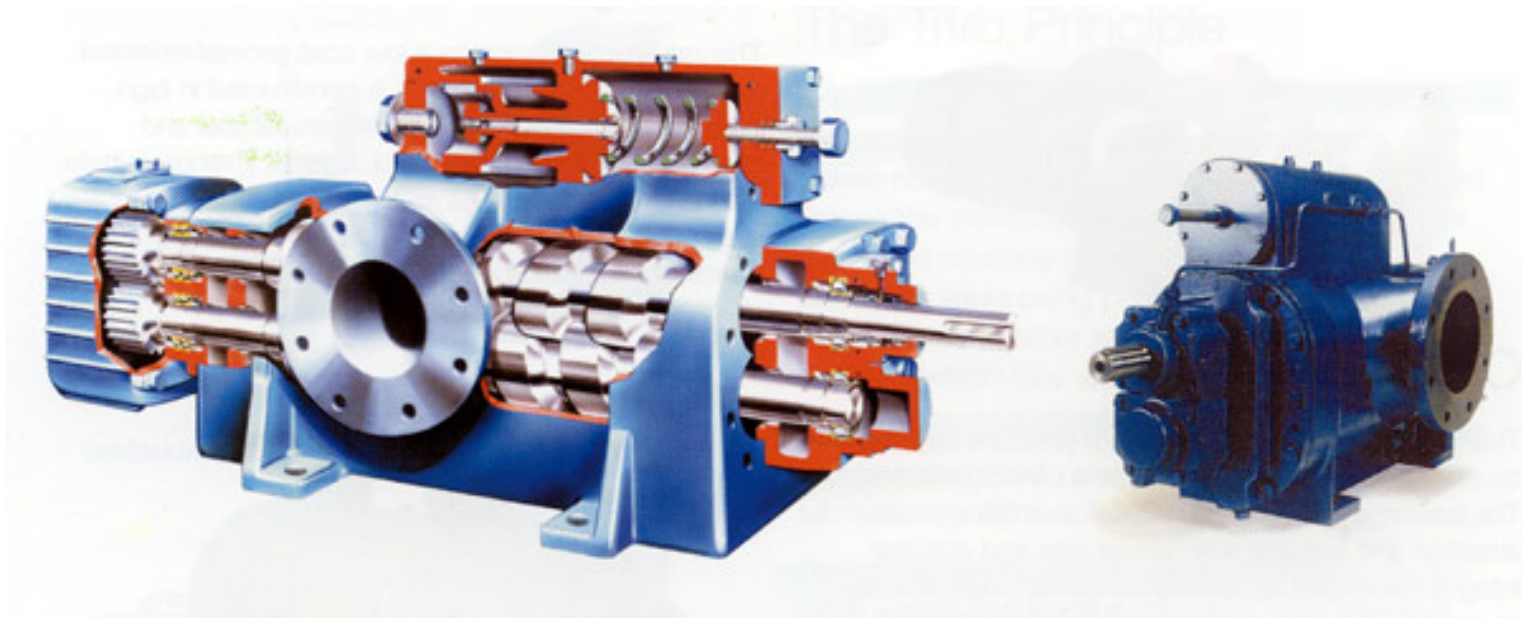




**Bomba de Arquimedes**

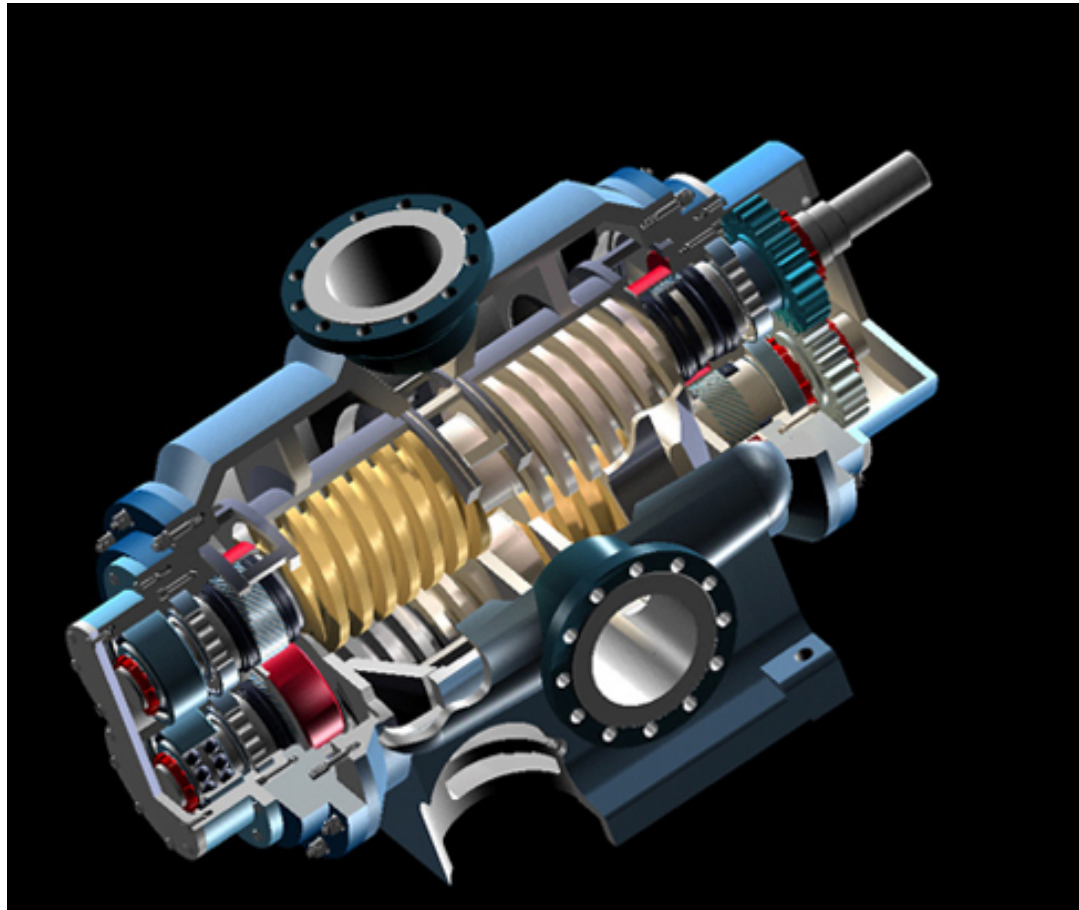


Esquema de instalação de uma bomba de Arquimedes



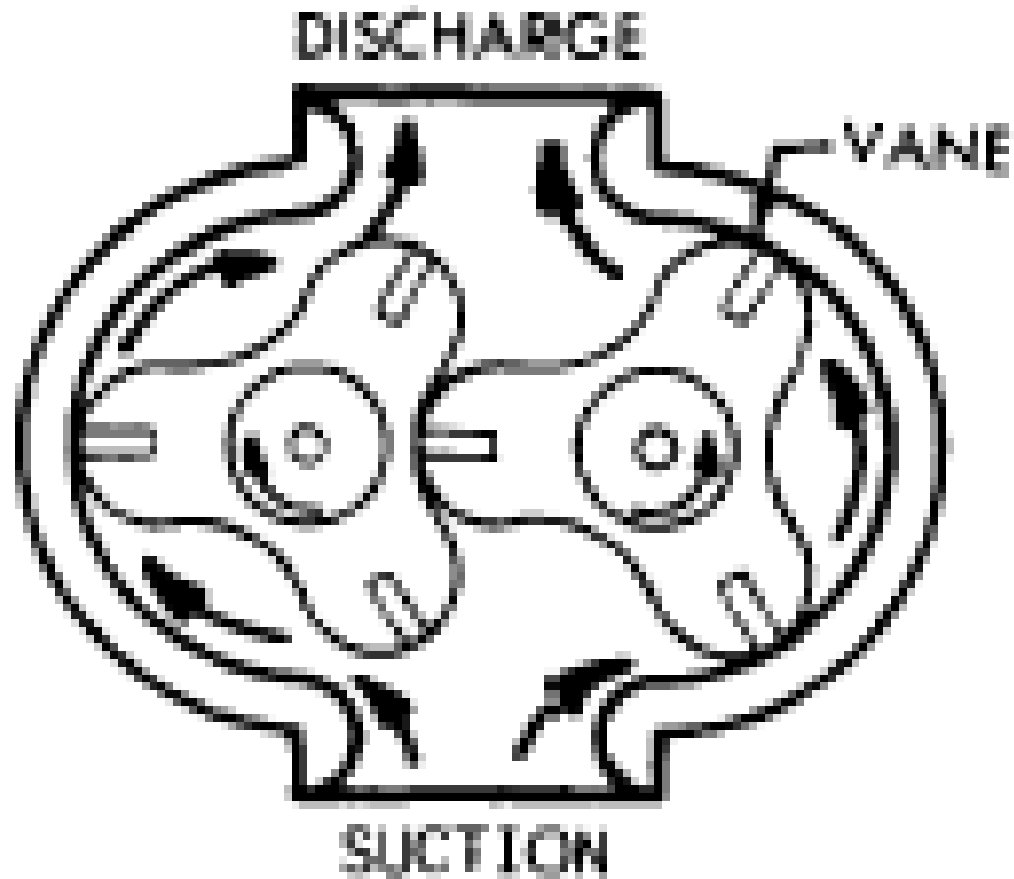
**Bomba de parafusos**





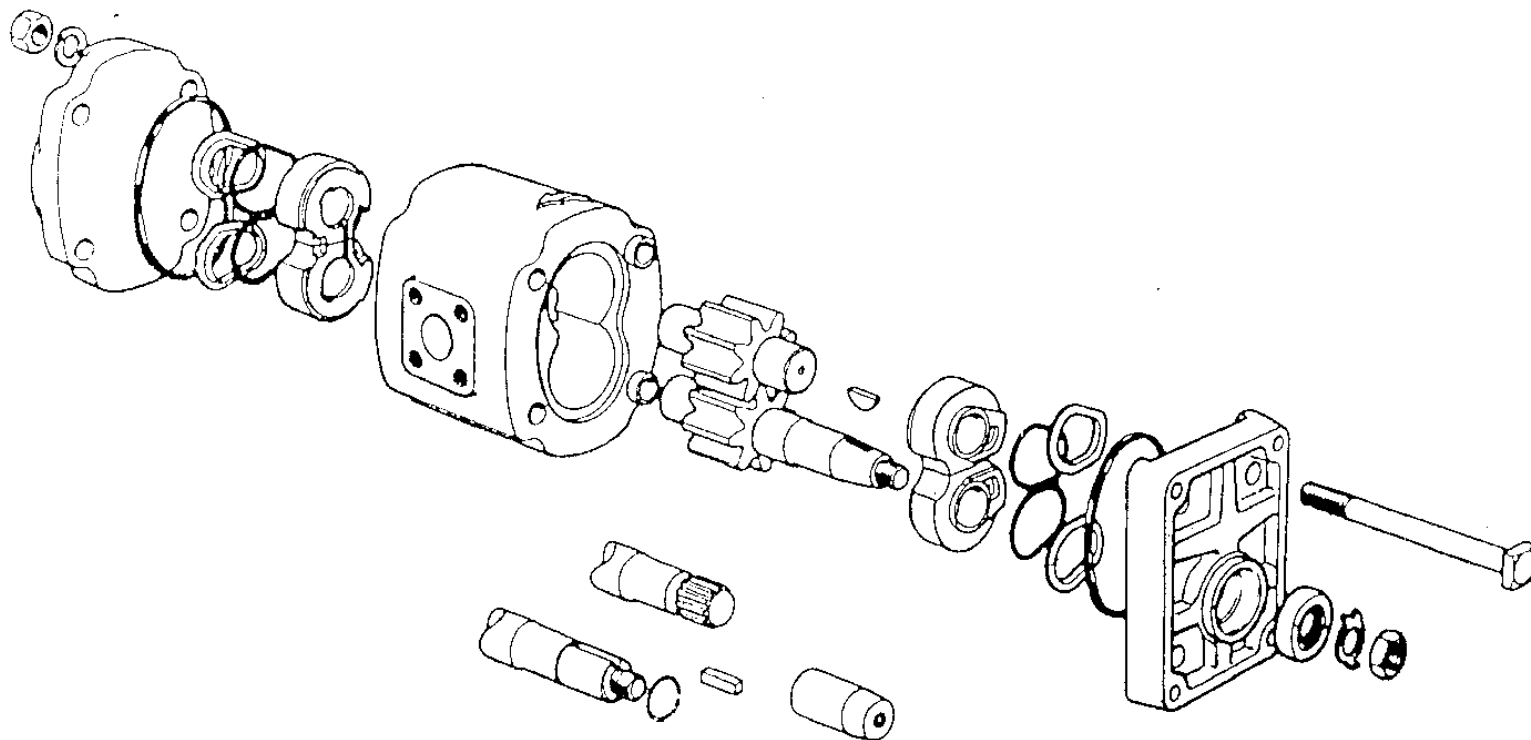
**Bomba de parafusos**



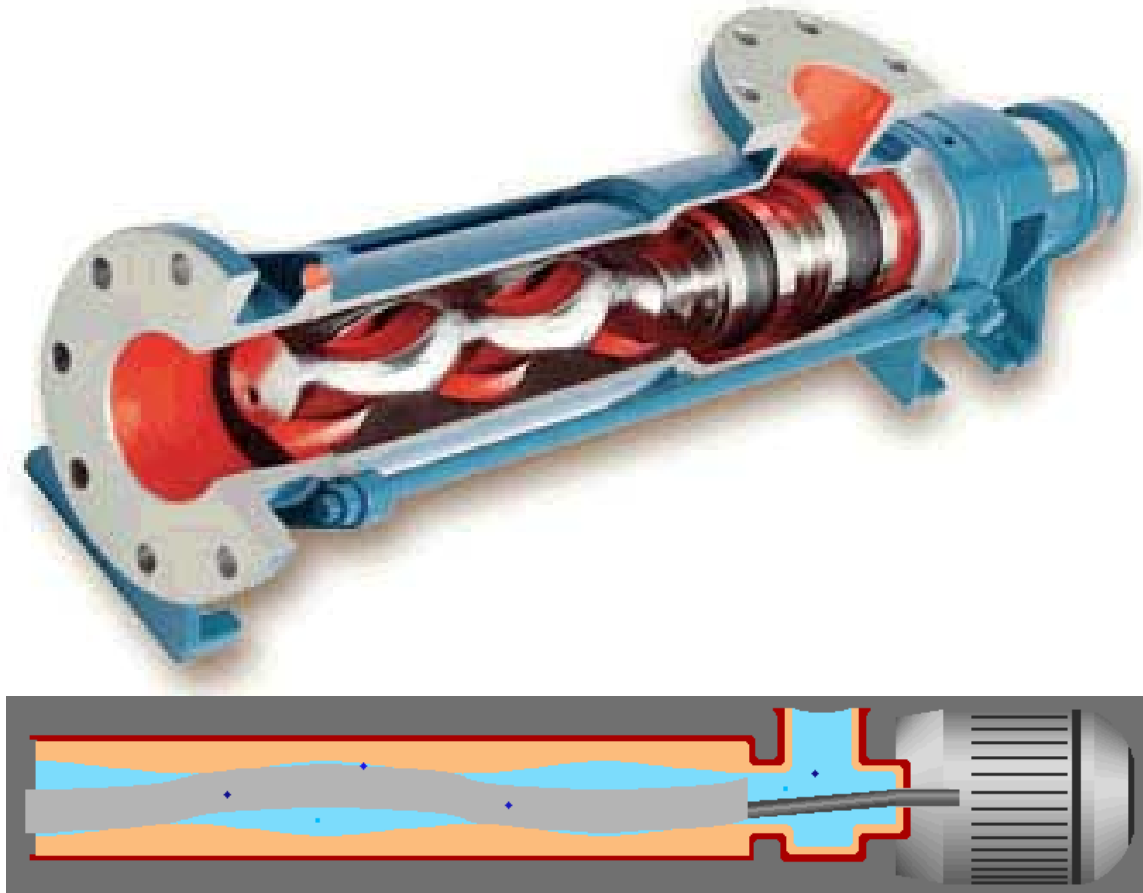


Bomba de lóbulos

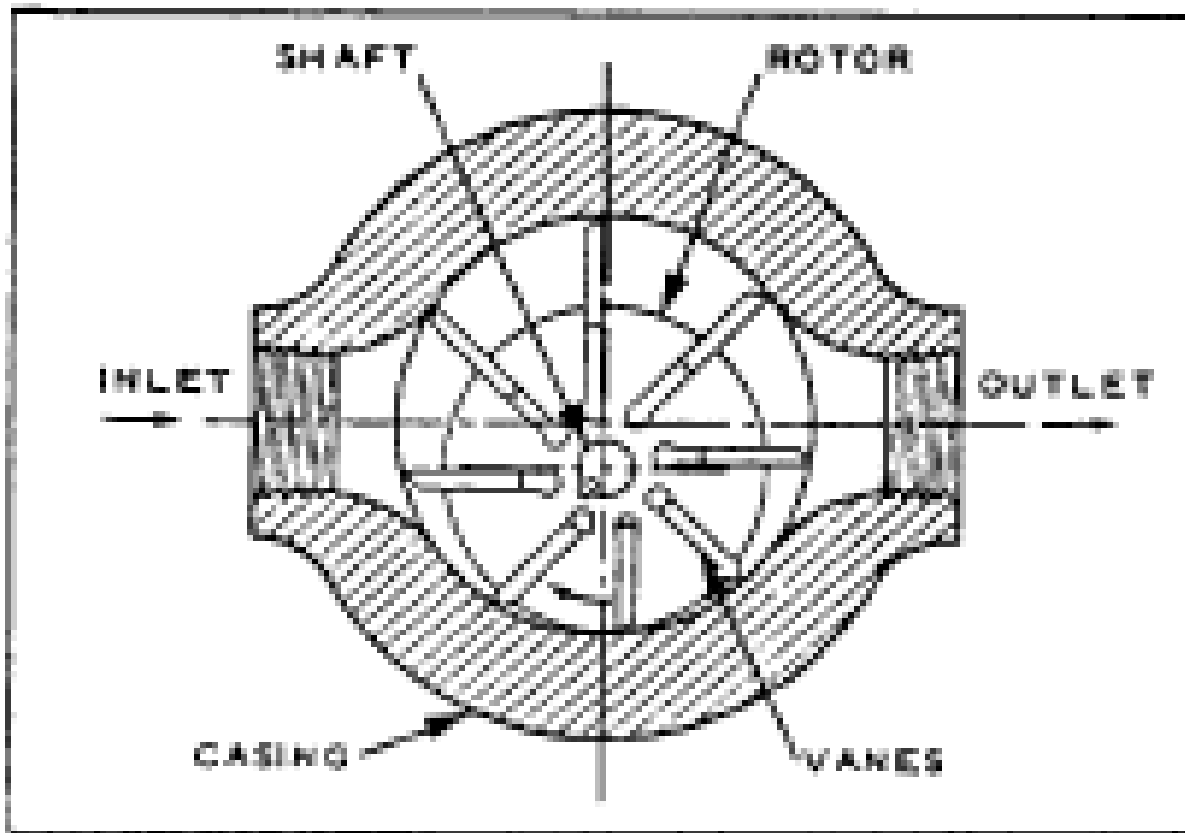




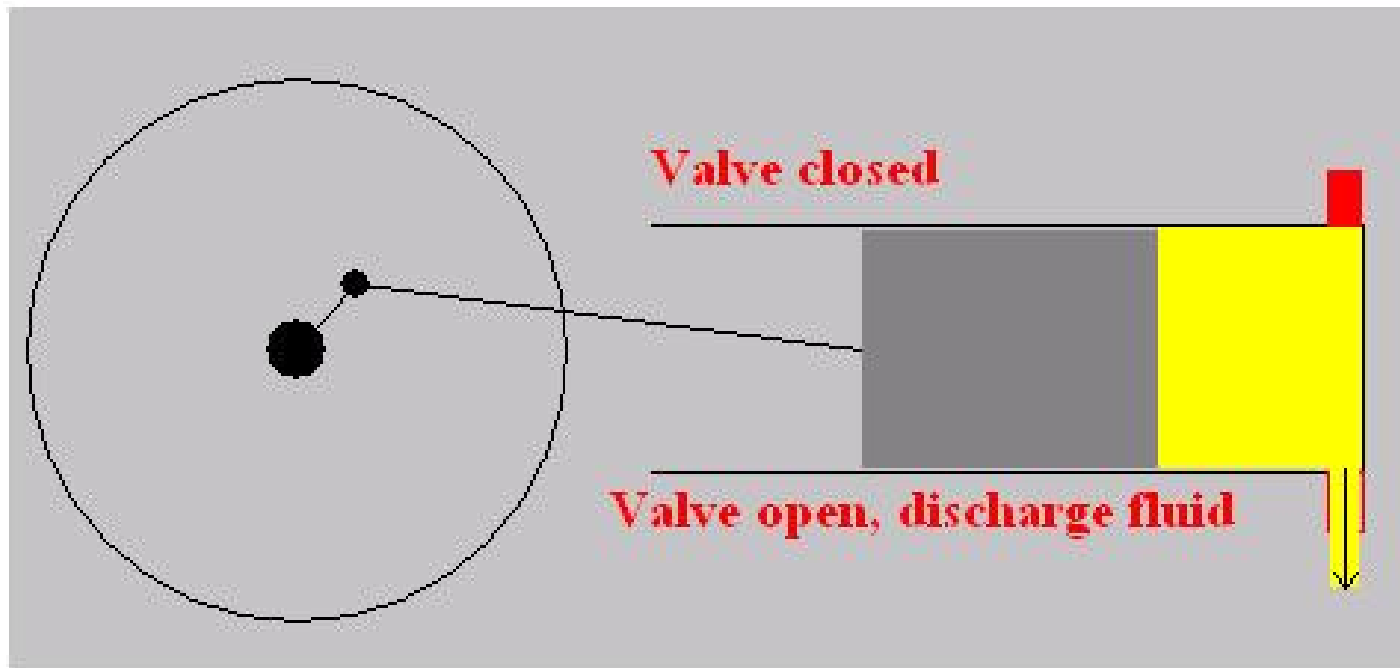
**Bomba de engrenagens**



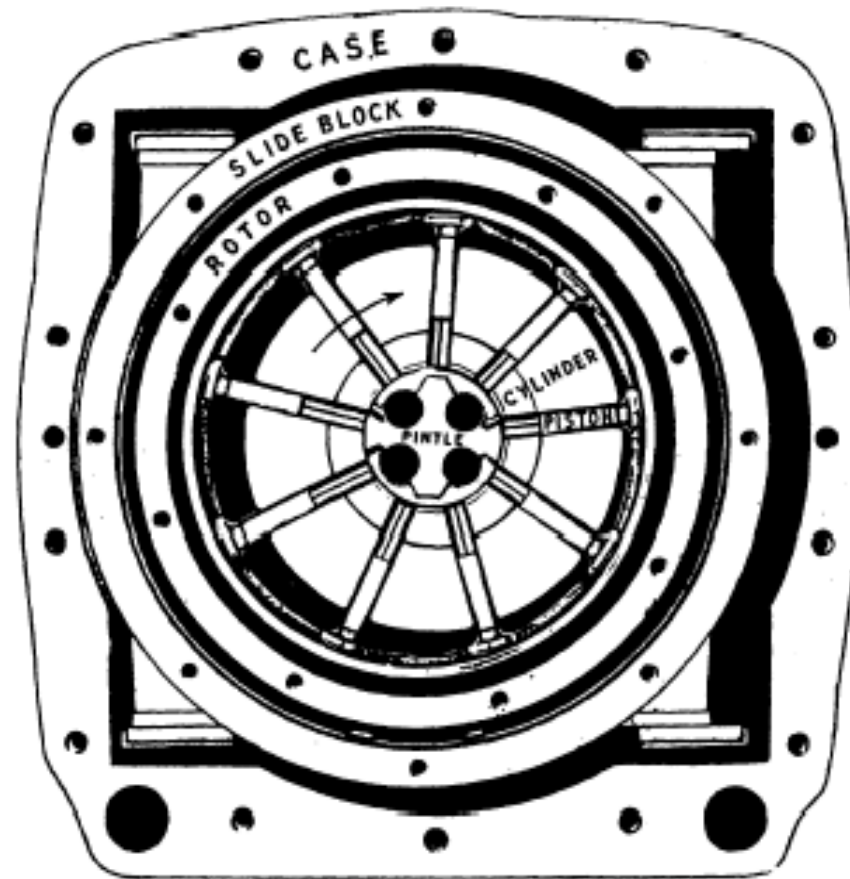
**Bomba de cavidade progressiva**



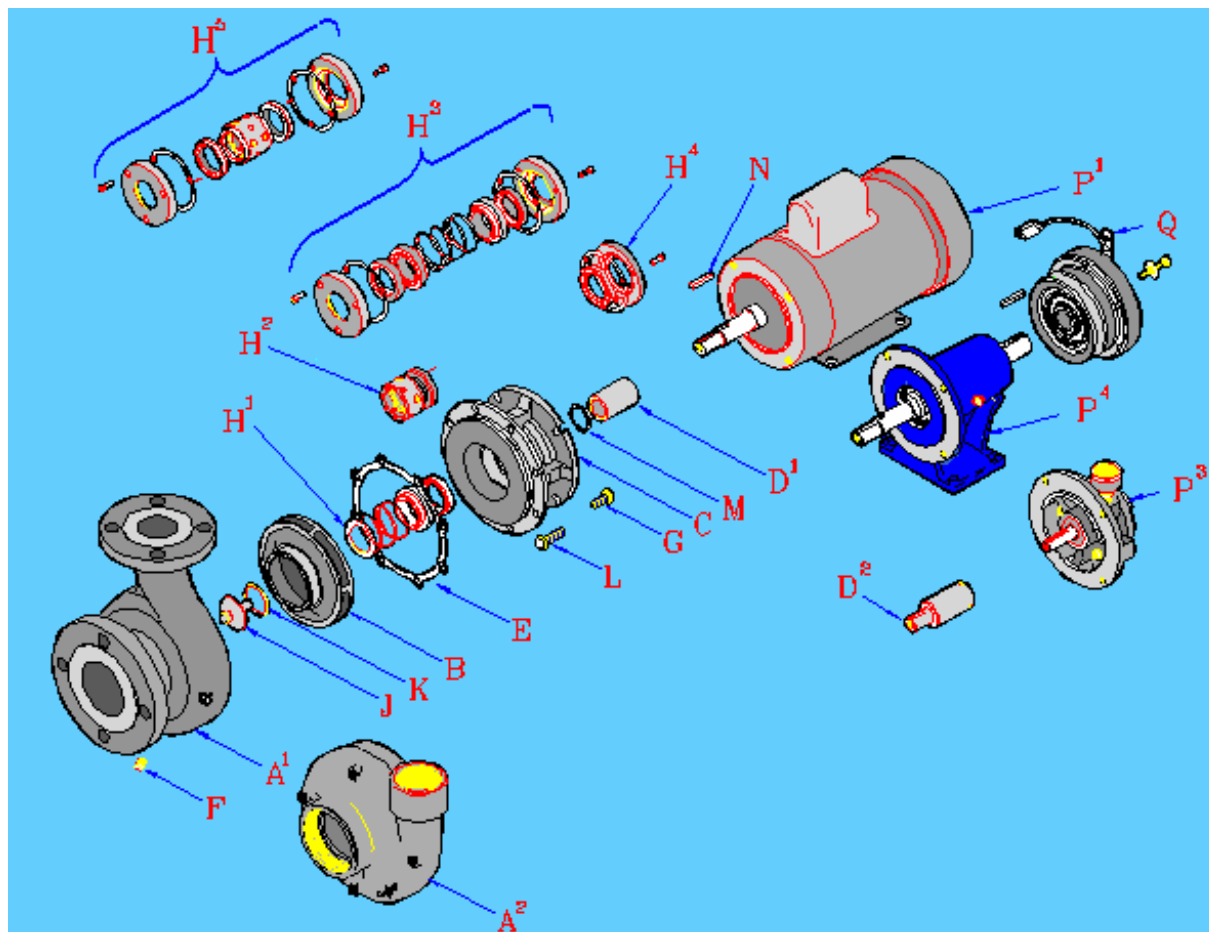
Bomba de palhetas



Bomba de pistão

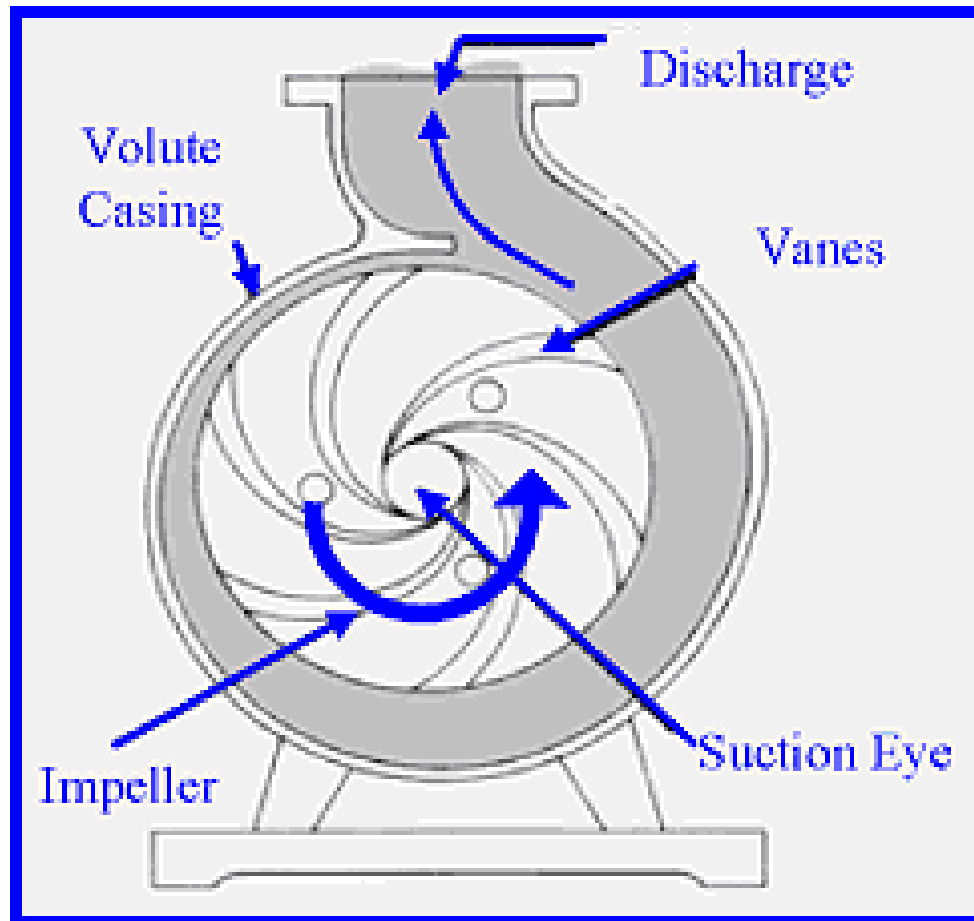


Bomba rotativa de pistões radiais



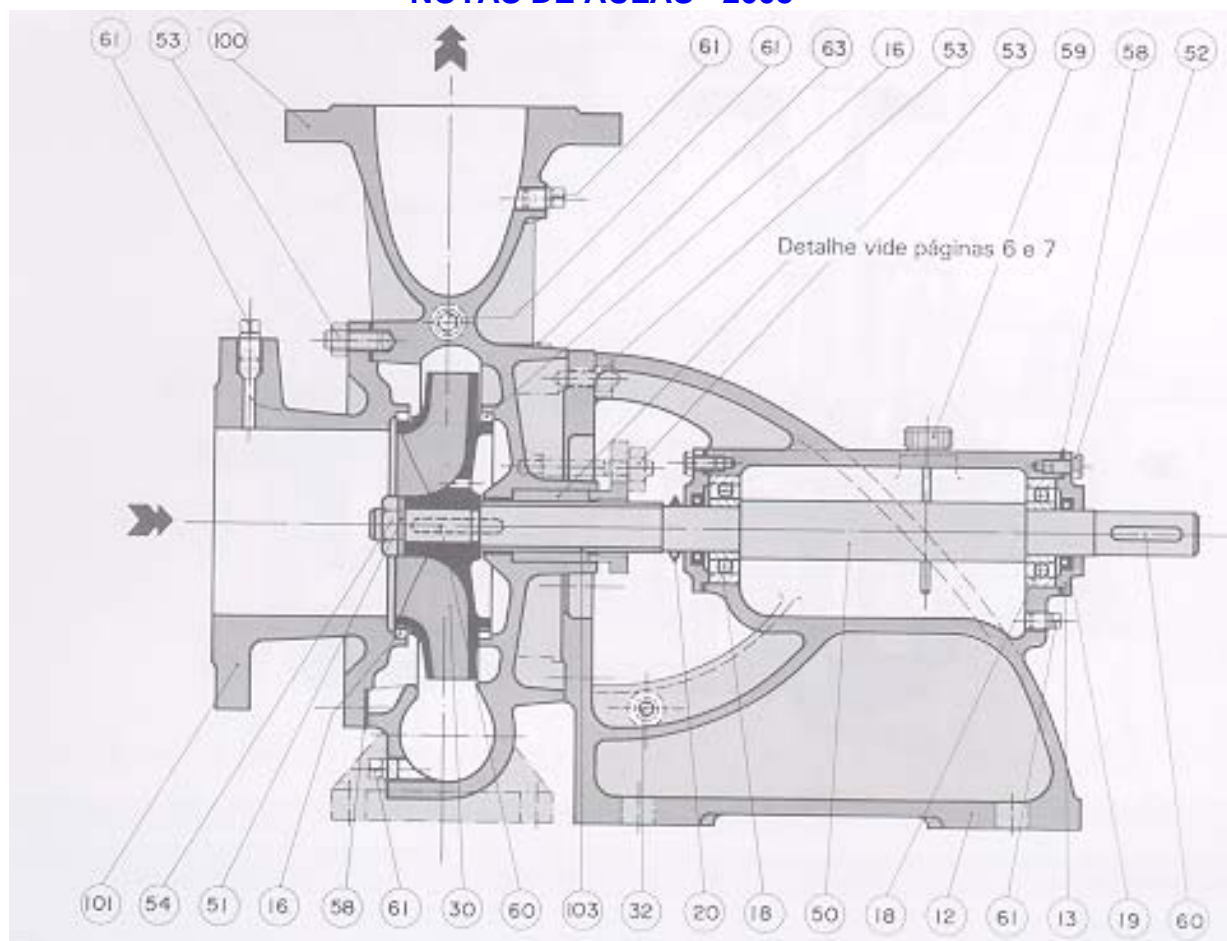
Bomba centrífuga - vista explodida





Esquema de bomba radial

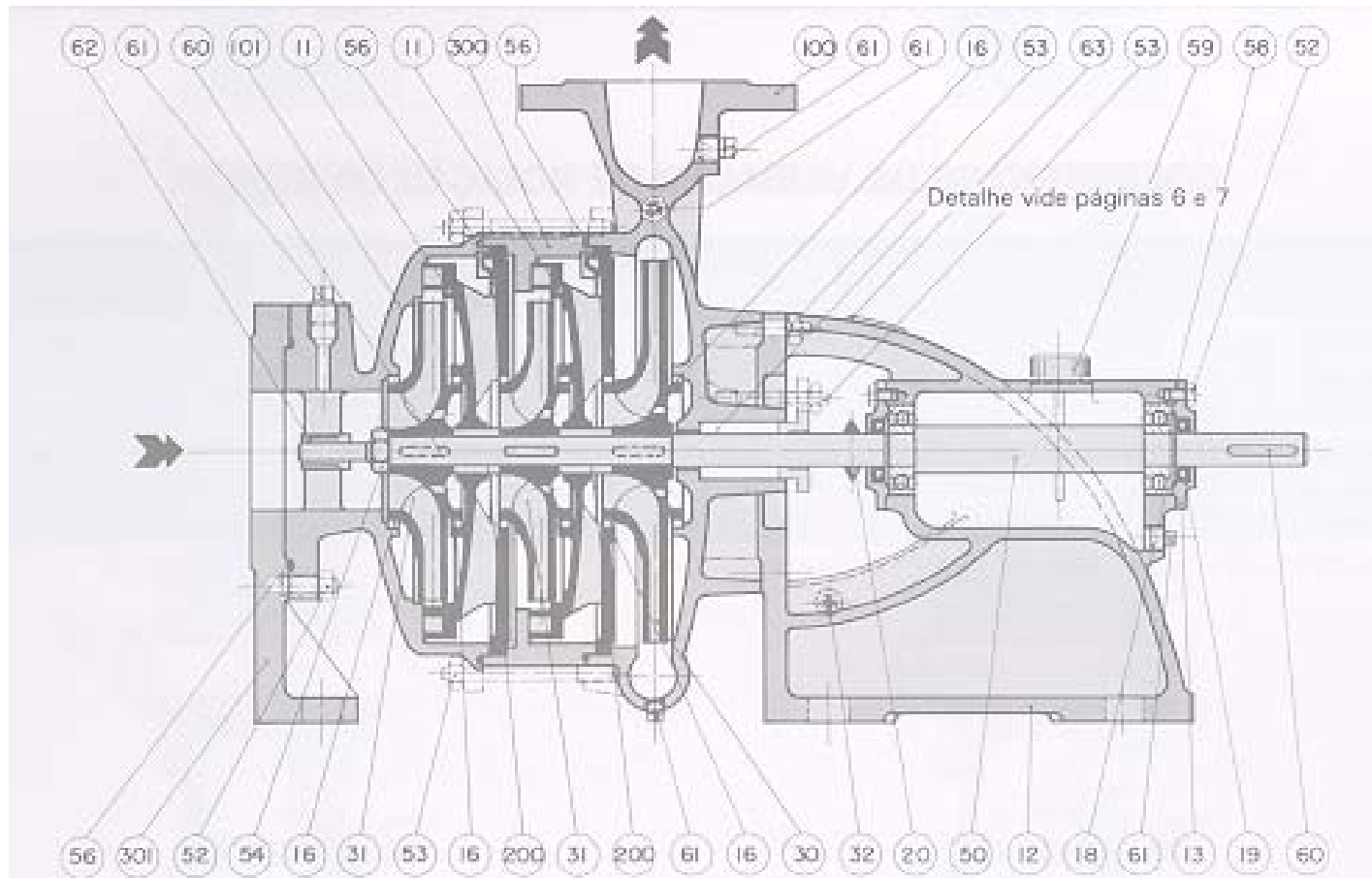




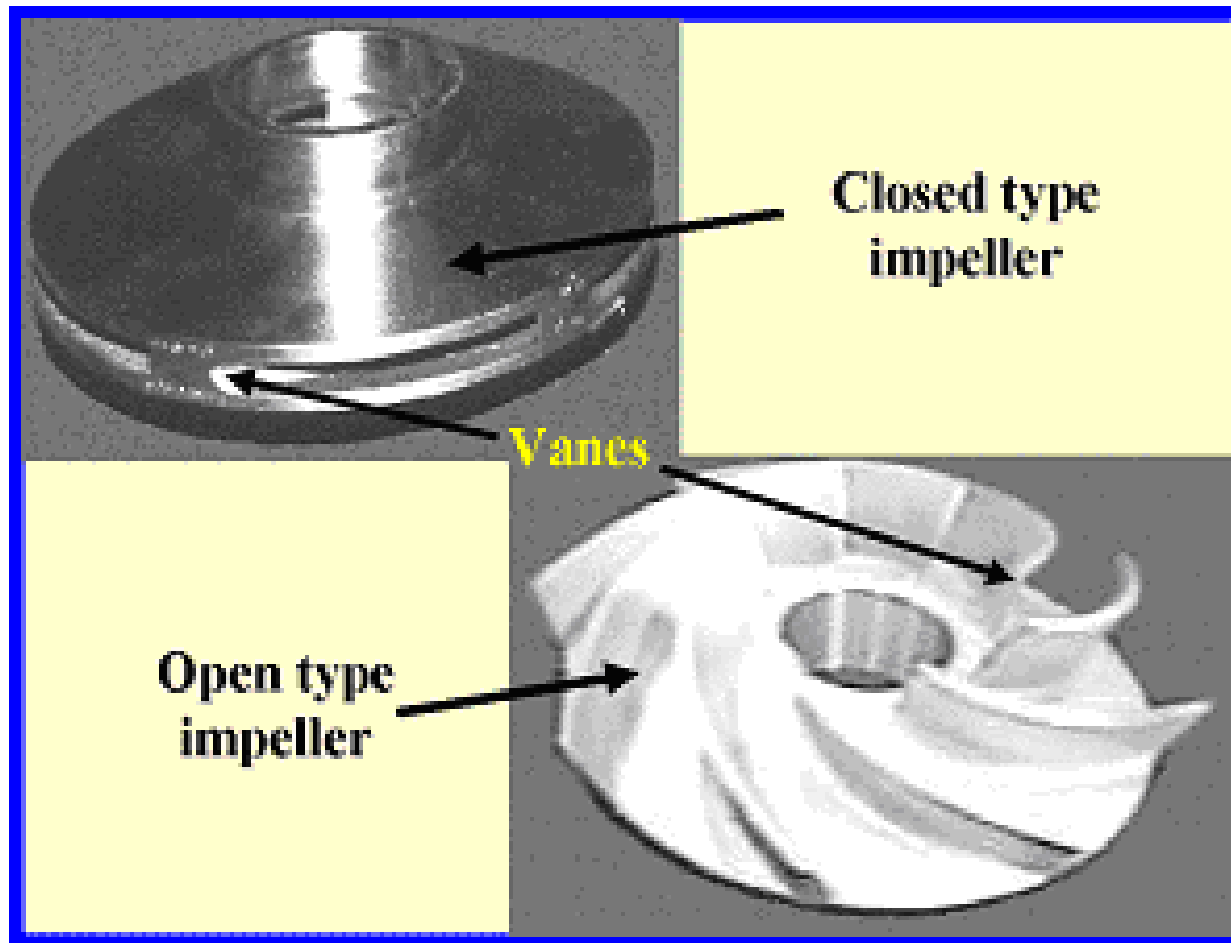
**Bomba centrífuga**



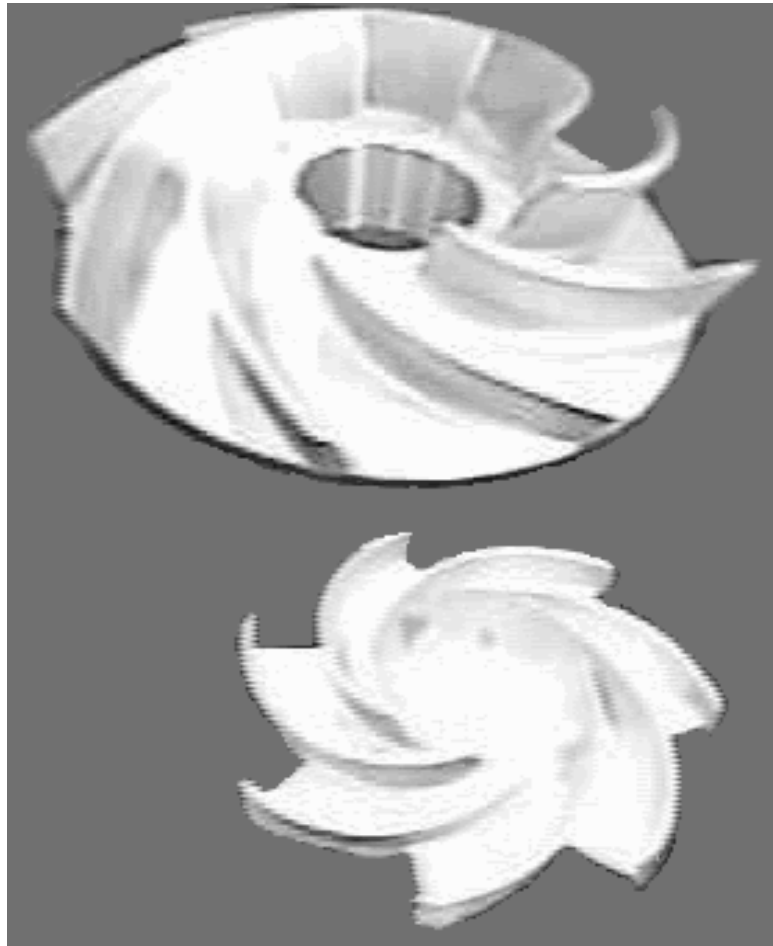
**Bomba centrífuga de vários estágios**



**Bomba radial de vários estágios**



Rotores de bombas centrífugas (fechado e aberto)



**Rotores de bombas centrífugas (aberto)**



ONGC - Bombay High North  
NAM "K8-FA3"  
Statoll "Gulfaks B".



**Bomba radial vertical**





**Bomba centrífuga monobloco**

## 2. LEIS DE CONSERVAÇÃO

### 2.1 MODELOS FÍSICOS E MATEMÁTICOS

O estudo das máquinas em geral, e das máquinas de fluxo em particular, requer modelos físicos e matemáticos que as representem, dentro da precisão desejada, todos os seus pontos de operação.

Modelos são essenciais à exploração da potencialidade de desempenho da máquina, bem como das suas características indesejáveis de operação.

Durante o projeto da máquina é necessário simular de seu funcionamento em todo o seu campo de operação para se antever alguma condição que possa ser indesejável ou de desempenho insatisfatório. Se for antecipado o aparecimento de algum problema, é possível saná-lo ainda na fase de projeto, antes de a máquina ser construída.

O avanço das ciências e o aperfeiçoamento dos modelos físicos e matemáticos, bem como da capacidade computacional para a obtenção de soluções numéricas de complexos sistemas de equações diferenciais multidimensionais, deram ao projetista ferramentas que permitem construção de máquinas muito eficientes.

O estágio do desenvolvimento das simulações numéricas tem reduzido sensivelmente o tempo de projeto e dado ensejo a uma redução acentuada da necessidade de ensaios de desenvolvimento e de modelos em escala reduzida, acarretando diminuição do tempo e dos custos de fabricação.

### Modelos unidimensionais

- Simples, podem gerar informações apropriadas ao estudo de tendências de comportamento da máquina.
- Quando calibrados com dados experimentais e utilizados os conhecimentos acumulados com a experiência, são capazes de prever razoavelmente corretamente o funcionamento da máquina.
- Geralmente são adequados para o estudo preliminar, embora possam ser utilizados para projetos de máquinas mais simples
- Ainda hoje existem em operação contínua muitas máquinas de fluxo de grande responsabilidade, cujos projetos foram baseados em modelos bastante simples.

O (ante-)projeto das máquinas hidráulicas é feito a partir de modelos unidimensionais, dos quais se obtêm as dimensões (geometria básica) da máquina.

Esses modelos também permitem a simulação do desempenho da máquina e, portanto, explorar suas potencialidades e limitações.

No pré-dimensionamento obtêm-se as dimensões e formas principais dos componentes da máquina (geometria da máquina).

Passa-se ao dimensionamento dos canais por onde o fluido irá escoar, o que é obtido com a utilização de modelos mais complexos, bidimensionais e tridimensionais.

Ao se definir a geometria da máquina é preciso observar que o fluxo é contínuo e, portanto, deve-se dar atenção especial aos locais que possam apresentar obstáculos à sua passagem livre e suave. Superfícies contínuas e suaves devem ser utilizadas.

Há fenômenos de escoamento que não podem ser avaliados por modelos 2-D, visto que são essencialmente tridimensionais.

Caso se esteja interessado na otimização de desempenho, é necessário o conhecimento pormenorizado do escoamento, o que requer modelação 3-D.

Projetos mais sofisticados requerem a utilização de modelos 2-D e 3-D interativamente, que permitem calcular com precisão os campos de velocidades, de temperaturas e

de pressões e, destes, o desempenho da máquina.

Modelos 3-D são complexos e caros.

Os recursos computacionais de hoje permitam o cálculo 3-D do escoamento numa máquina completa.

A prática não é largamente utilizada diretamente para o projeto da máquina devido ao custo (processamento e pessoal especializado).

Não se usam recursos 3-D, mas, sim, uma combinação de modelos, utilizados interativamente.

- 1-D (que dão dimensões principais),
- 2-D (que dão formas geométricas mais apropriadas) e
- 3-D (que dão propriedades do escoamento em algumas regiões críticas)

Os modelos 1-D são aperfeiçoados pelos fabricantes da máquina e considerados "quase **secretos**" ("proprietary"), pois fazem uso de dados experimentais e de suas correlações obtidas geralmente depois de muitos anos de pesquisa e grandes despesas com a implantação e operação de laboratórios especiais.

Os estudos que requerem modelos 2-D e 3-D são realizados com ajuda de programas desenvolvidos por companhias especializadas em "softwares" comerciais (pacotes computacionais como NREC, NUMECA, FLUENT, CFX, FIRE, PHOENICS)

No ITA são desenvolvidos programas computacionais específicos para dimensionamento de turbomáquinas e simulação numérica de desempenho de diversos tipos de máquinas, com ênfase em turbinas a gás

- 1-D para pré-dimensionamentos
- 2-D para aperfeiçoamento das formas dos canais das máquinas
- 3-D para cálculo de escoamento em passagens entre pás
- Termodinâmicos para simulação numérica de turbinas a gás de alto desempenho (genérico, simula virtualmente todos os tipos de turbinas a gás a partir da montagem de um motor por seus componentes principais)

Este curso dá ênfase aos fundamentos da modelação.

Parte-se das equações de conservação na forma completa (3-D), fazem-se considerações simplificadoras e chega-se a modelos 1-D adequados ao projeto das máquinas de fluxo.

Para um projeto completo é preciso **aperfeiçoar** o modelo básico com a utilização de coeficientes empíricos adequados, com análises 2-D e 3-D.

O domínio completo da tecnologia de projeto das máquinas de fluxo será conseguido após a realização de vários projetos, fabricação de protótipos, levantamento experimental das características das máquinas e, principalmente, análise dos resultados de ensaios.



A **aproximação no nível espacial** define o número de variáveis espaciais a ser usado no modelo.

- o escoamento de fluido é essencialmente 3-D → adotar modelo com menos dimensões requer o uso de algum tipo de média nas direções consideradas.
- médias → perda de informações do escoamento → devem ser compensadas por informações empíricas (dados experimentais).

A **aproximação no nível dinâmico** define o número de variáveis ligadas à estimativa da influência das diversas forças no comportamento do sistema.

- a evolução dinâmica do escoamento depende do equilíbrio de forças que agem nele → especificação das forças dominantes para simplificar o modelo.
  - Exemplo: eliminação da parte relativa à aceleração da gravidade quando as forças gravitacionais não forem importantes (escoamento de gases versus escoamento de líquidos).
- modelo 2-D pá-a-pá (escoamento num rotor centrífugo) → componente de força (centrífuga) existe, é importante, mas pode não estar embutida no modelo.

## 2.2 EQUAÇÕES BÁSICAS

Leis que governam o escoamento de um fluido são bem conhecidas e identificadas pela observação de que

a evolução de um sistema físico é caracterizada pela  
massa  
quantidade de movimento  
energia  
em cada instante.

A conclusão de que a conservação daquelas propriedades é observada foi um dos grandes acontecimentos da ciência moderna.

Um escoamento de fluido é considerado conhecido se sua

- velocidade
- pressão estática
- temperatura estática

são conhecidas a qualquer instante.

Em casos em que a temperatura permanece praticamente invariável, a temperatura não é considerada (como nas turbinas hidráulicas).

**Princípio geral da conservação:**

***a variação da quantidade de uma propriedade extensiva*** (que depende da massa)

***em um volume especificado é devida***

- ***à soma*** (líquida) ***de fontes*** (da propriedade) ***internas***
- ***ao balanço da quantidade*** (da propriedade) ***que atravessa a fronteira do volume.***

***em cada instante.***

Em outras palavras o princípio de conservação estabelece que

**a variação de uma propriedade extensiva num volume especificado é devida às fontes e sumidouros dessa propriedade no interior do volume, mais o fluxo da propriedade através da fronteira do volume, em cada instante**

- O fluxo é gerado devido ao transporte convectivo do fluido e ao movimento molecular (sempre presente).
- O efeito do movimento molecular expressa a tendência do fluido em atingir a condição de equilíbrio.
- As diferenças em intensidade da propriedade considerada acarretam transferência espacial destinadas a homogeneizar o fluido.
- Essa contribuição é proporcional ao gradiente da propriedade correspondente (porque a contribuição deve ser nula numa distribuição homogênea).

## 2.3 CONSERVAÇÃO DA MASSA

A terminologia utilizada nestas notas de aula utiliza “equação de conservação” para massa, quantidade de movimento e energia, terminologia esta que precisa ser entendida em sentido amplo. Há autores que preferem a terminologia “lei da conservação de massa, lei da quantidade de movimento de Newton e primeira lei da termodinâmica”, aqui chamadas de princípios.

### 2.3.1 Forma integral

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \rho dV + \iint_{SC} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0$$

é a **forma integral da equação da conservação de massa** para um volume de con-

trole VC limitado por uma superfície SC e imerso num escoamento cujo campo de velocidade é  $\vec{v}$  (**velocidade relativa** à superfície).

A equação # 2-1 representa o **princípio da conservação de massa** na forma integral. Deve-se notar que esta forma é aplicável a qualquer tipo de escoamento, inclusive com descontinuidades como aquele onde aparecem ondas de choque.

### 2.3.2 Forma diferencial

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

é a **forma diferencial do princípio da conservação de massa**.

Deve-se observar que as equações # 2-1 e # 2-2 são também aplicáveis a escoamentos em regime transitório.

**Todas as variáveis envolvidas dependem das 3 coordenadas espaciais e do tempo**



## 2.4 CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO LINEAR

### 2.4.1 Forma integral

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \rho \vec{v} dV + \iint_{SC} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = - \iint_{SC} P \vec{I} \cdot \vec{n} dS + \iint_{SC} \vec{\tau} \cdot \vec{n} dS + \iiint_{VC} \rho \vec{g} dV$$

# 2-3

é a **forma integral da lei de conservação da quantidade de movimento linear**.

### 2.4.2 Forma diferencial

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \vec{v} + P \vec{I} - \vec{\tau}) - \rho \vec{g} = \vec{0}$$

# 2-4

é a **forma diferencial da lei de conservação da quantidade de movimento linear**.

As equações # 2-3 e # 2-4 também se aplicam a escoamentos transitórios, isto é, que variam com o tempo.

## 2.5 CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO ANGULAR

### 2.5.1 Forma geral

$$\vec{M} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \rho \vec{r} \times \vec{v} dV + \iint_{SC} \rho \vec{r} \times \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS$$

# 2-5

### 2.5.2 Uso corrente em máquinas de fluxo

Para o estudo das máquinas de fluxo freqüentemente se usa apenas a componente na direção do eixo de rotação da máquina e regime permanente, para o cálculo do momento e da potência associados ao escoamento através do rotor da máquina de fluxo.

$$M_z = \iint_{SC} r V_u dm$$

É importante concluir dessa expressão que apenas a projeção da velocidade absoluta na direção tangencial (na direção da velocidade  $U$ ),  $V_u$ , contribui para o momento na direção axial e, portanto, para a potência transferida para o eixo ou dele extraída.

## 2.6 CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

### 2.6.1 Formas integrais

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \rho e dV + \oint_{SC} \rho e \vec{v} \cdot \vec{n} dS + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \rho \frac{v^2}{2} dV + \oint_{SC} \rho \frac{v^2}{2} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = - \oint_{SC} \vec{q} \cdot \vec{n} dS + \iiint_{VC} \dot{q}_v dV + \iiint_{VC} \rho \vec{g} \cdot \vec{v} dV + \oint_{SC} (-P\vec{v} + \vec{\tau} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{n} dS$$

Agrupando as energias interna e cinética:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) dV + \oint_{SC} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = - \oint_{SC} \vec{q} \cdot \vec{n} dS + \iiint_{VC} \dot{q}_v dV + \iiint_{VC} \rho \vec{g} \cdot \vec{v} dV + \oint_{SC} (-P\vec{v} + \vec{\tau} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{n} dS$$

## 2.6.2 Forma diferencial

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) \right) + \vec{\nabla} \bullet \left( \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) \vec{v} \right) + \vec{\nabla} \bullet \vec{q} - \rho \vec{g} \bullet \vec{v} - \dot{q}_v - \vec{\nabla} \bullet (-P \vec{v} + \vec{\tau} \bullet \vec{v}) = 0$$

# 4-

## **2.7 SIMPLIFICAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO**

Embora as formas das equações de conservação apresentadas anteriormente possam ser bastante simples, sua manipulação é bastante complexa. A complexidade deve-se ao fato de estarem escritas na forma vetorial e por serem tridimensionais. Mais complexo, ainda, é o processo de sua solução, notadamente para volumes de controle de geometrias complexas, como as encontradas nas máquinas em geral.

No estudo das máquinas de fluxo alguns parâmetros globais são de interesse. Geralmente se procuram relações entre a taxa de escoamento do fluido (vazão) e a diferença de pressões (ou de altura de energia) através de um rotor e, portanto, não se procura calcular as propriedades do escoamento em todos os pontos da máquina, mas apenas à entrada e à saída do rotor. Essas relações dependem do tipo de máquina considerada e, portanto, de parâmetros geométricos do rotor. Relações fundamentais podem ser obtidas a partir das equações de conservação da quantidade de movimento angular a máquinas de geometria simples.

Outros tipos de simplificações, além das geométricas, podem ser adotados e ficarão evidentes dos desenvolvimentos a serem feitos a seguir. As simplificações mais usuais são as indicadas a seguir. Serão implementadas durante a obtenção de alguns modelos nos capítulos seguintes:

- **Regime permanente** (utilizado na maioria dos casos):

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

- **Forças de volume desprezíveis**

Boa aproximação, no caso de o fluido de trabalho ser gás: Nem sempre pode ser desprezada a sua contribuição para o caso de o fluido ser líquido.

$$g\Delta z = 0$$

- **Escoamento adiabático**

Não há troca de calor pelas superfícies sólidas da máquina. Na realidade, existe troca de calor pelas superfícies sólidas. Entretanto, mesmo nas turbinas a gás, com temperatura das superfícies acima de 800 K, a quantidade de calor que atravessa as superfícies metálicas é muito pequena, quando comparada com as



demais formas de energia. Essa hipótese é, portanto, válida.

$$\dot{q}_s = 0$$

- **Ausência de fontes e de sumidouros de energia (geração interna)**

$$\dot{q}_v = 0$$

- **Radiação desprezível e ausência de reações químicas e nucleares**

Embora as superfícies da máquina possam estar a temperaturas elevadas, como no caso das turbinas a gás, o calor perdido por radiação é muito pequeno quando comparado com as demais formas de energia envolvidas: daí poder ser desconsiderado. Para a maioria das máquinas de fluxo o escoamento é congelado, isto é, não há reações químicas. Embora no caso das turbinas a gás possam ocorrer reações químicas nas turbinas (resultante de alguma anomalia da câmara de combustão), este caso não é considerado. Na realidade, o problema da câmara de combustão é que precisa ser resolvido para impedir o prosseguimento das reações químicas na turbina.

$$q_H = 0$$

- **Fluido não viscoso**

Embora todos os fluidos sejam viscosos, a influência da viscosidade se restringe à região da camada limite. Nos casos em que a região da camada limite é pequena, relativamente à região total de escoamento, bons resultados globais, tanto qualitativa quanto quantitativamente, podem ser obtidos com o modelo invíscido. Para levar em conta os efeitos viscosos recorre-se a correlações empíricas para corrigir os resultados obtidos com o modelo invíscido.

$$\vec{\tau} = \vec{0}$$

- **Escoamento unidimensional**

Leva em conta apenas uma coordenada espacial, que pode ser curvilínea. Nos casos em que as propriedades do escoamento variam pouco ao longo das seções transversais dos canais da máquina, pode-se admitir que as propriedades do escoamento ao longo de uma linha de corrente sejam representativas do escoamento em todas as demais linhas de corrente. Costuma-se escolher a linha de corrente localizada na posição da altura média das pás como a linha de corrente de referência, como o que é feito Nestas Notas de Aula.

- **Escoamento de simetria axial**

Admite-se que as variações das propriedades do escoamento sejam importantes apenas na direção radial e na direção axial. Isto implica que se admite que as propriedades do escoamento não variam sensivelmente ao longo de um arco de circunferência (centrado no eixo da máquina) unindo duas pás consecutivas. É um modelo bidimensional, mais complexo que o modelo unidimensional da linha de corrente média, mencionado acima.

### 3. PRINCÍPIOS DE CONSERVAÇÃO APLICADOS ÀS MÁQUINAS DE FLUXO

Equações na **forma vetorial** completa **não são adequadas para cálculos.**

São genéricas e podem, portanto, ser **aplicadas a qualquer tipo de fluido** e não apenas para água e ar, que são os fluidos mais comuns.

O **dimensionamento** das máquinas de fluxo e o **cálculo de seu desempenho** são realizados através de **versões simplificadas dessas equações.**

**O tratamento a ser dado a todas as máquinas de fluxo é unificado.**

Entretanto, não é possível a obtenção de equações simplificadas que sirvam para escoamentos incompressíveis e compressíveis devido à compressibilidade (a densidade varia significativamente nos escoamentos compressíveis).

A **formulação integral** será a utilizada para se obterem **informações globais** sobre a máquina.

Os pormenores construtivos dos diversos tipos de máquinas precisam ser conhecidos para que as integrações indicadas nas equações de conservação sejam realizadas (volumes e superfícies dos canais por onde se escoia o fluido).

**Alguns conceitos importantes precisam, portanto, ser introduzidos.**

### 3.1 ELEMENTOS CONSTRUTIVOS E CONVENÇÕES

As máquinas de fluxo são constituídas basicamente de:

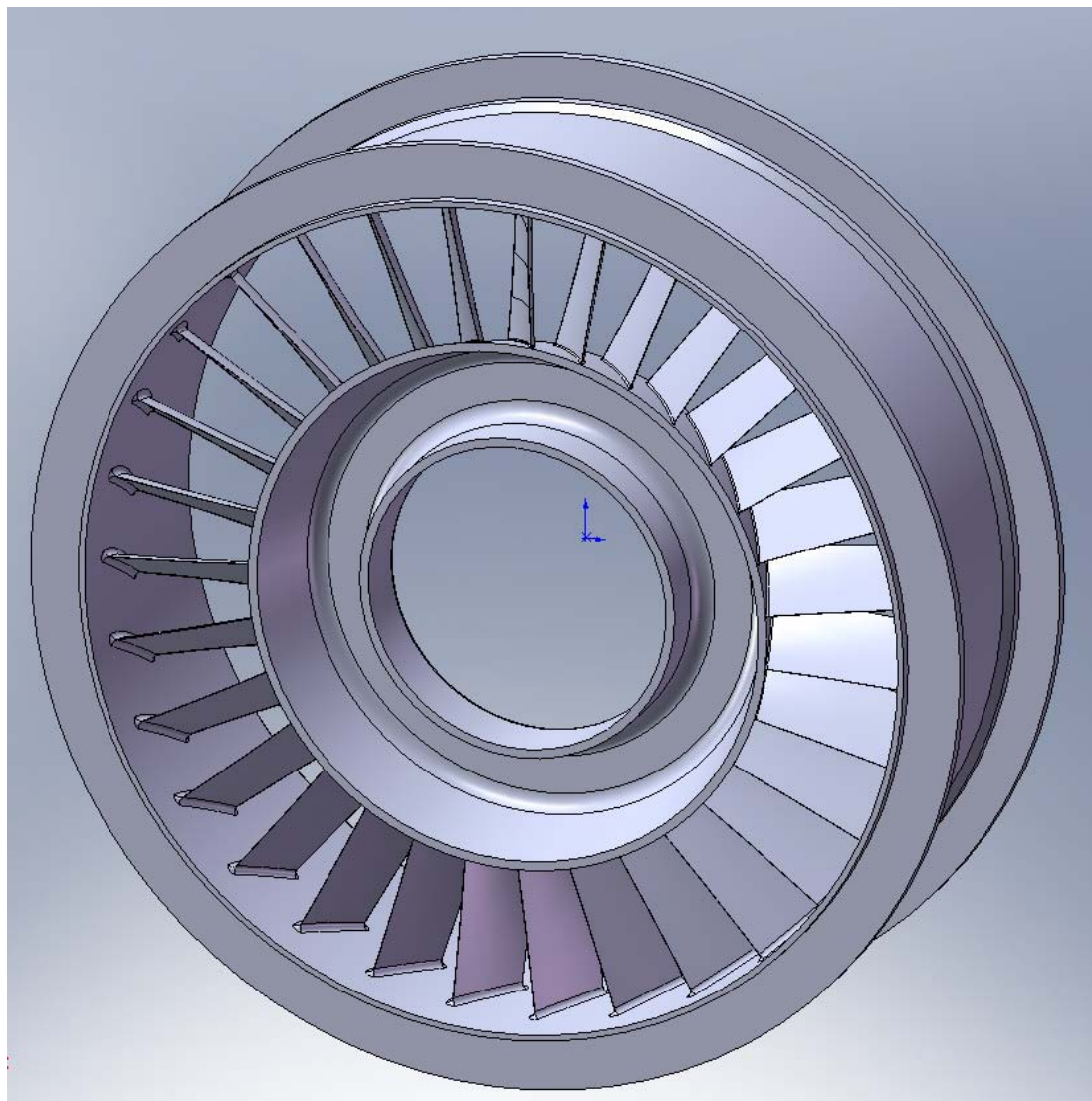
1. **Sistema diretor**, onde a energia de pressão é transformada em energia cinética (ou vice-versa).

Serve também para orientar o escoamento e/ou para regular a vazão de fluido (e, em consequência, da potência).

Esse sistema é fixo, no sentido de não girar com o eixo da máquina.

O **sistema diretor** recebe designações diferentes, dependendo do tipo de máquina; por exemplo:

- **Estator** ou **injetor**, nas máquinas hidráulicas;
- **Estator**, **IGV** ("inlet guide vane"), **NGV** ("nozzle guide vane"), nas turbinas a gás.

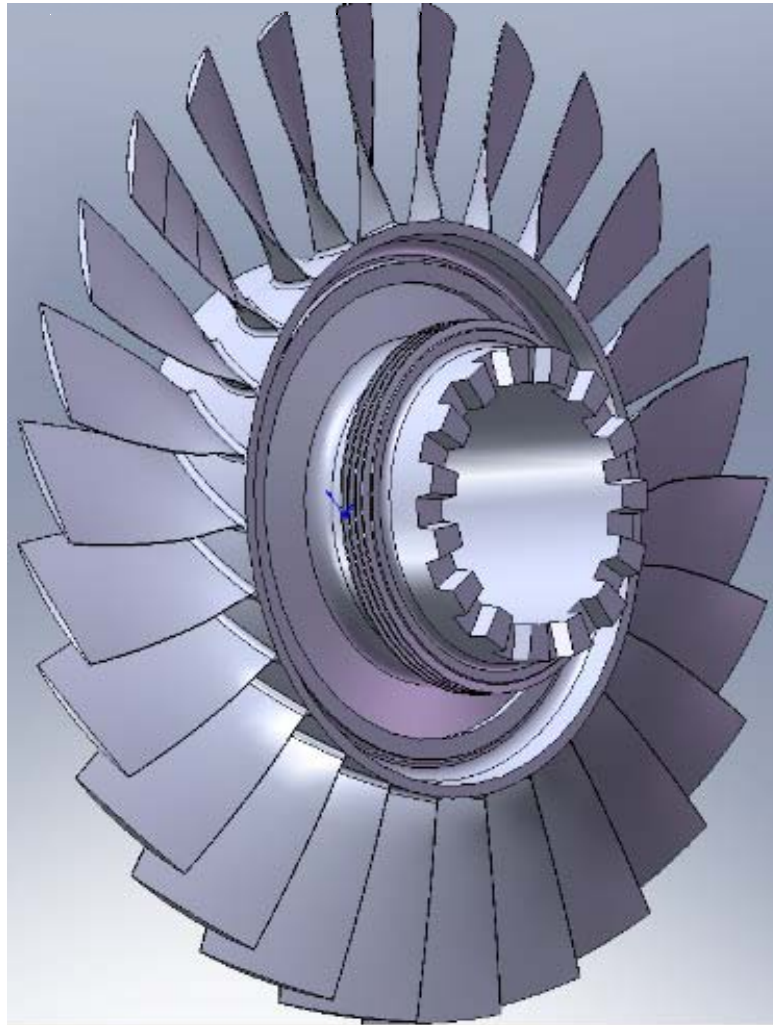


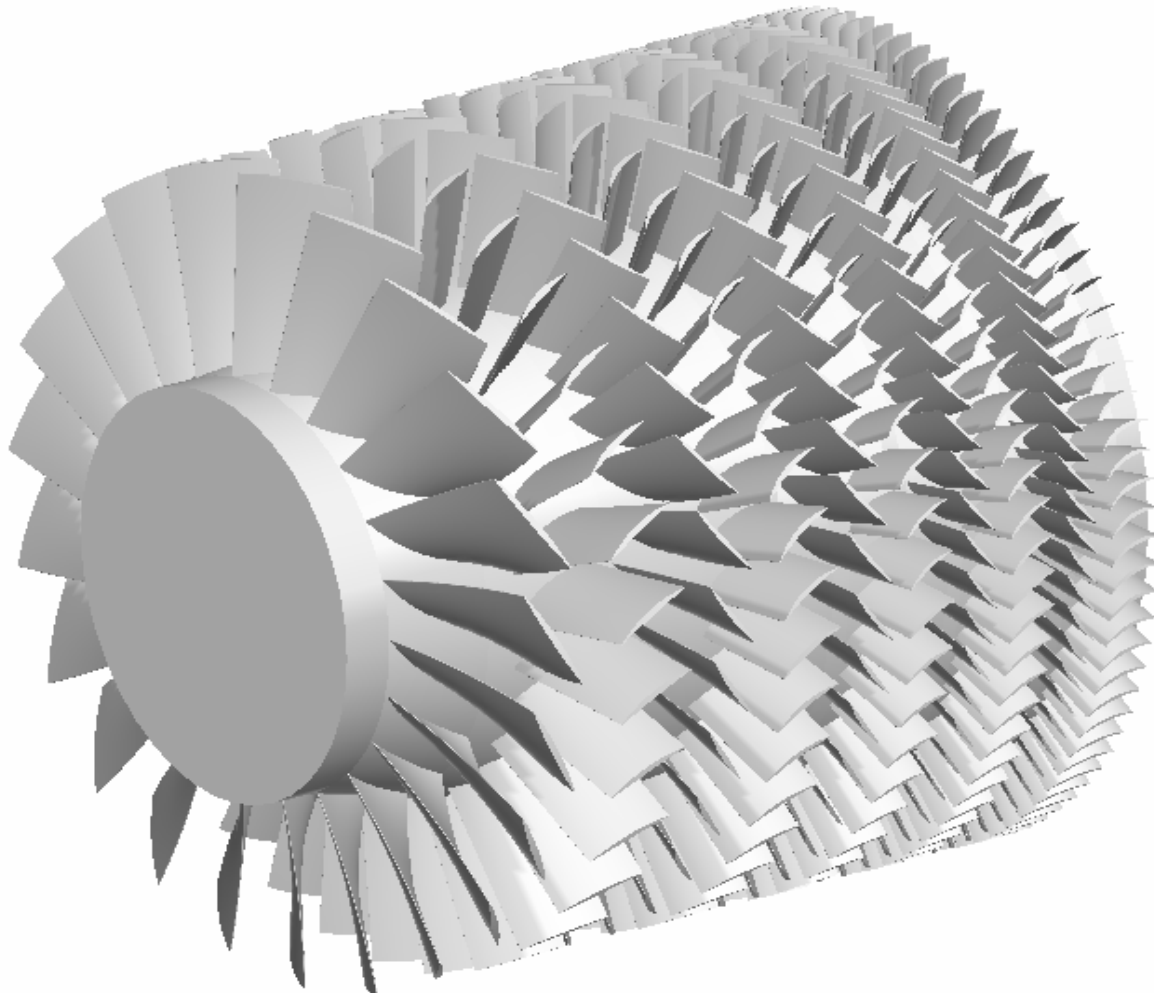
2. **Sistema rotor** (rotor, disco, impelidor), de pás móveis, onde a energia de pressão e/ou cinética é transformada em energia cinética e mecânica (ou vice-versa).

3.

As pás são móveis no sentido de girarem com o eixo da máquina.







A seqüência de montagem desses sistemas varia com o tipo de máquina.

máquinas motoras (turbinas) → estator seguido de um rotor

máquinas movidas (bombas e compressores) → rotor seguido de estator.

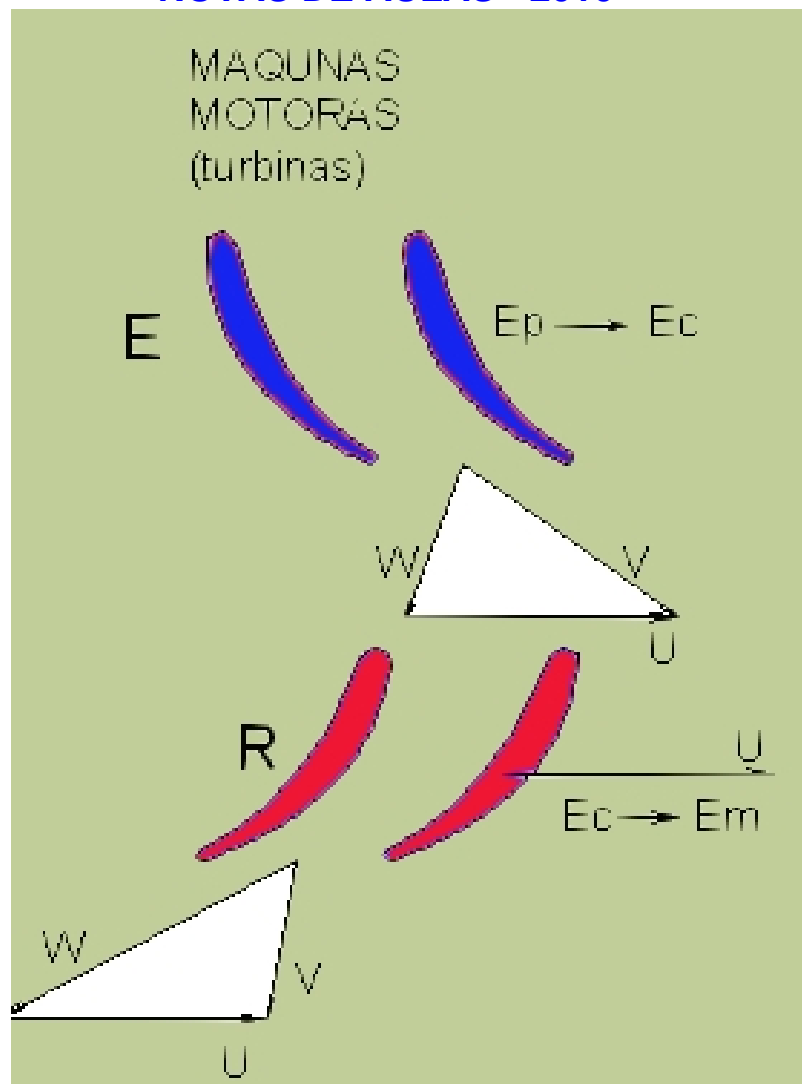
Grades de uma turbina axial (máquina motora) e de uma bomba axial (máquina movida)

→ Fig 5.1.

Rotor e estator constituídos por discos (ou tambores) aos quais se fixam as pás.

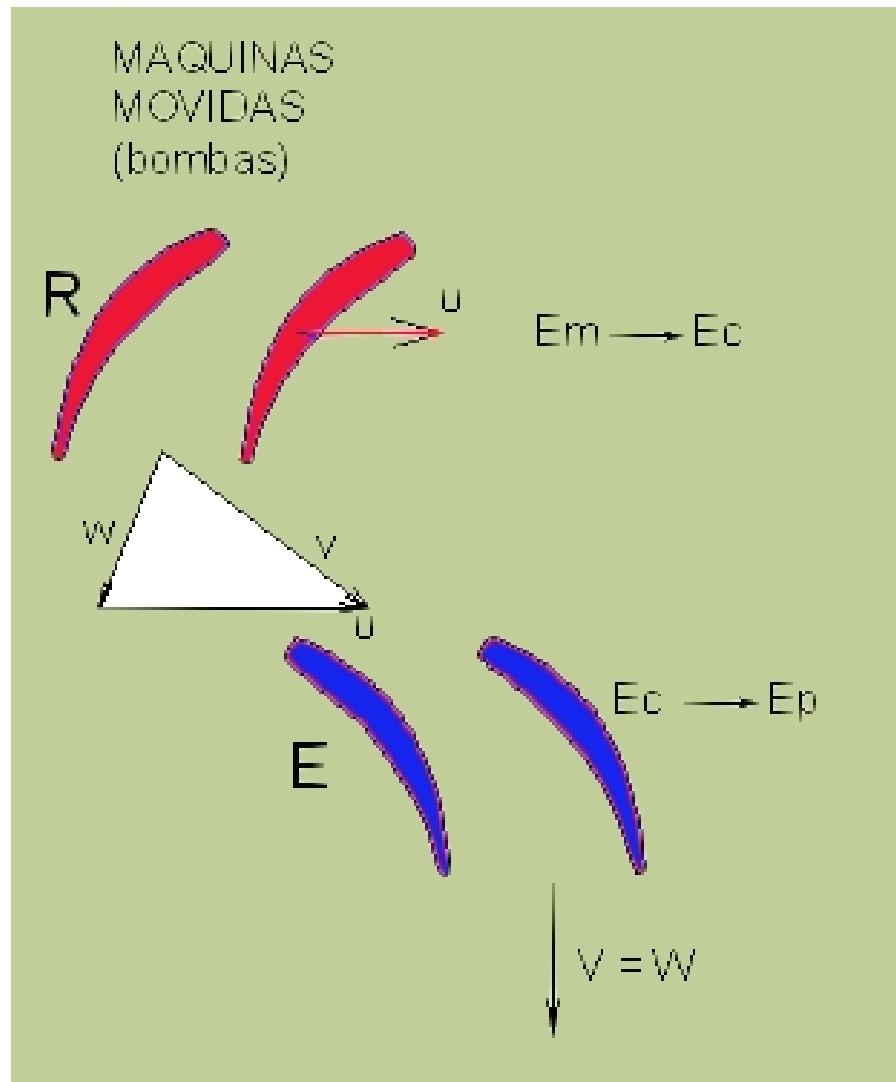
As pás formam canais por onde circula o fluido. Esses canais servem para dirigir o escoamento.

As pás têm seção de forma aerodinâmica, para minimizar perdas de pressão de estagnação do fluido.



MÁQUINAS DE FLUXO  
NOTAS DE AULAS - 2010

3-10/162



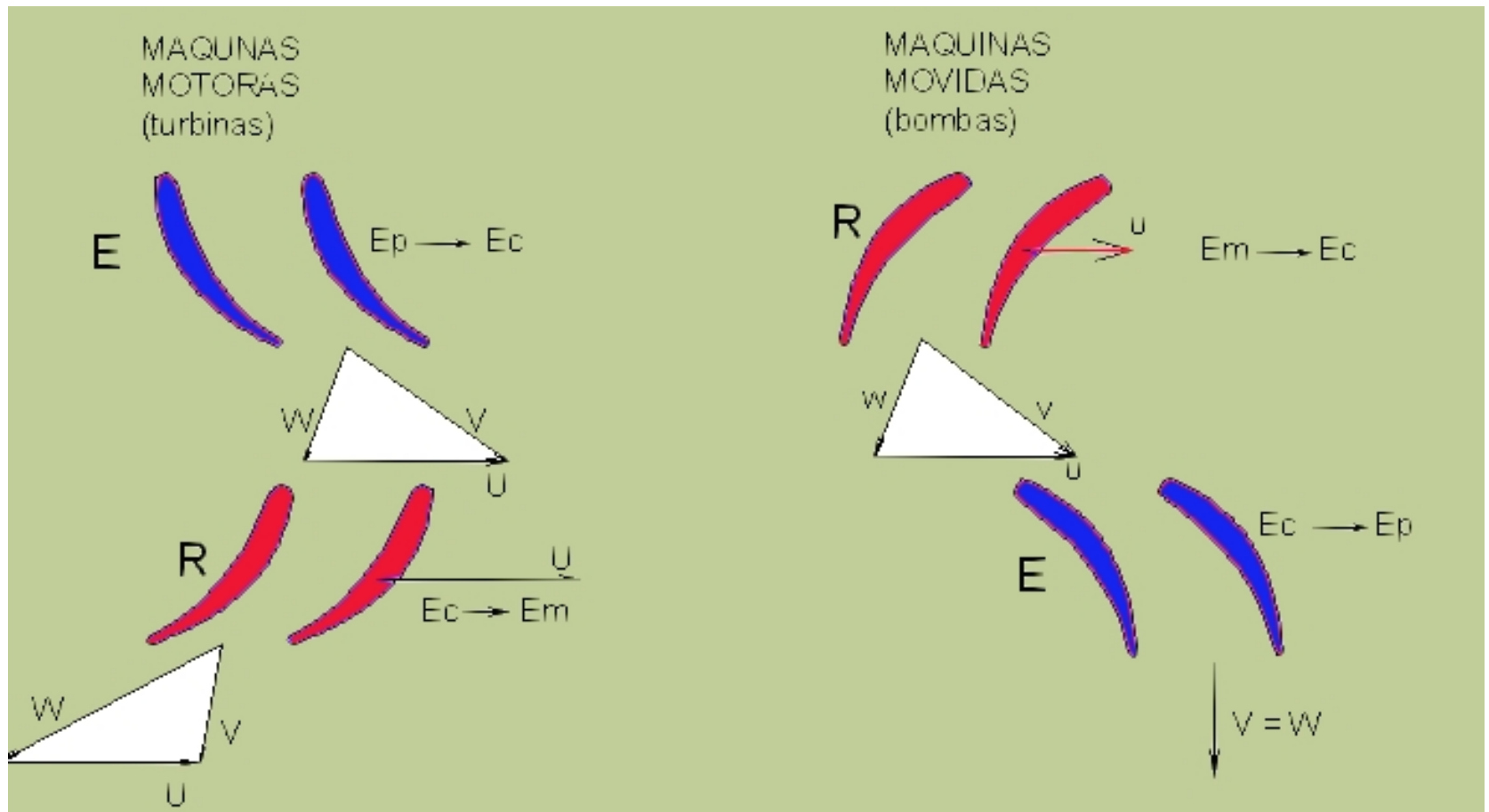


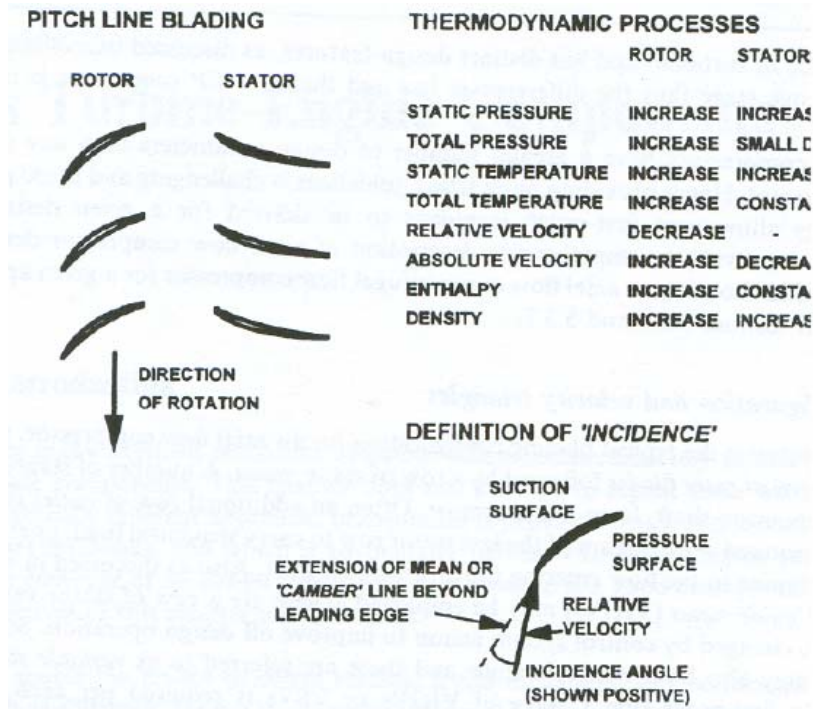
Figura 3-1 - Estágios de máquinas de fluxo

# MÁQUINAS DE FLUXO

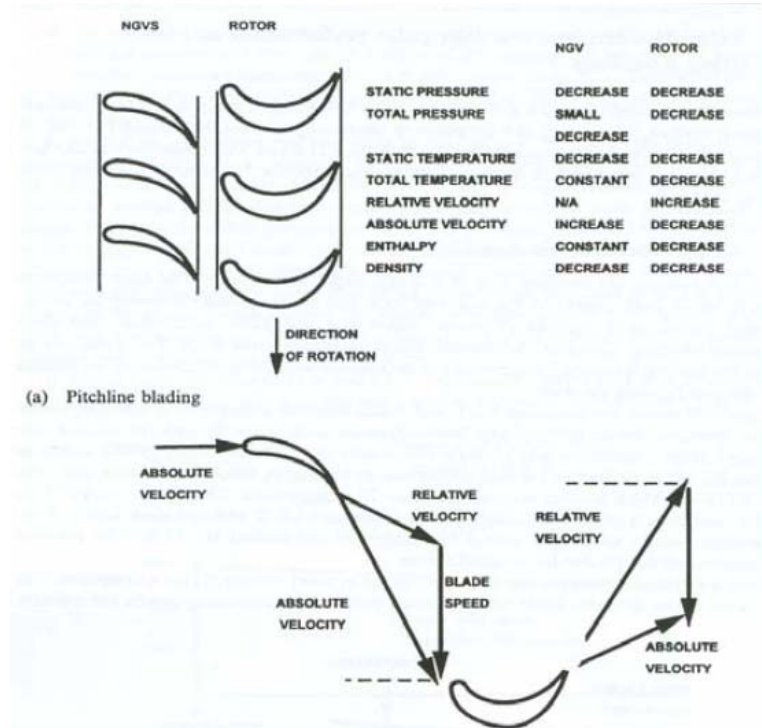
## NOTAS DE AULAS - 2010

3-12/162

### Compressor



### Turbina



Comportamento do fluido de trabalho em um compressor e em uma turbina

É comum convencionar, para as máquinas de fluxo:

$\vec{V}$     Velocidade absoluta do escoamento (referido a um referencial fixo)

$\vec{W}$     Velocidade relativa do escoamento (referida às pás)

$\vec{U}$     Velocidade tangencial ou periférica (velocidade da pá)

$$\vec{U} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad \vec{\omega} = \text{velocidade angular do eixo do rotor}$$

$\vec{r}$  = vetor de posição do ponto considerado na grade, em relação ao eixo do rotor.

Tem-se que

$$\vec{V} = \vec{W} + \vec{U}$$

que é a equação vetorial que determina o **triângulo de velocidades** para um ponto



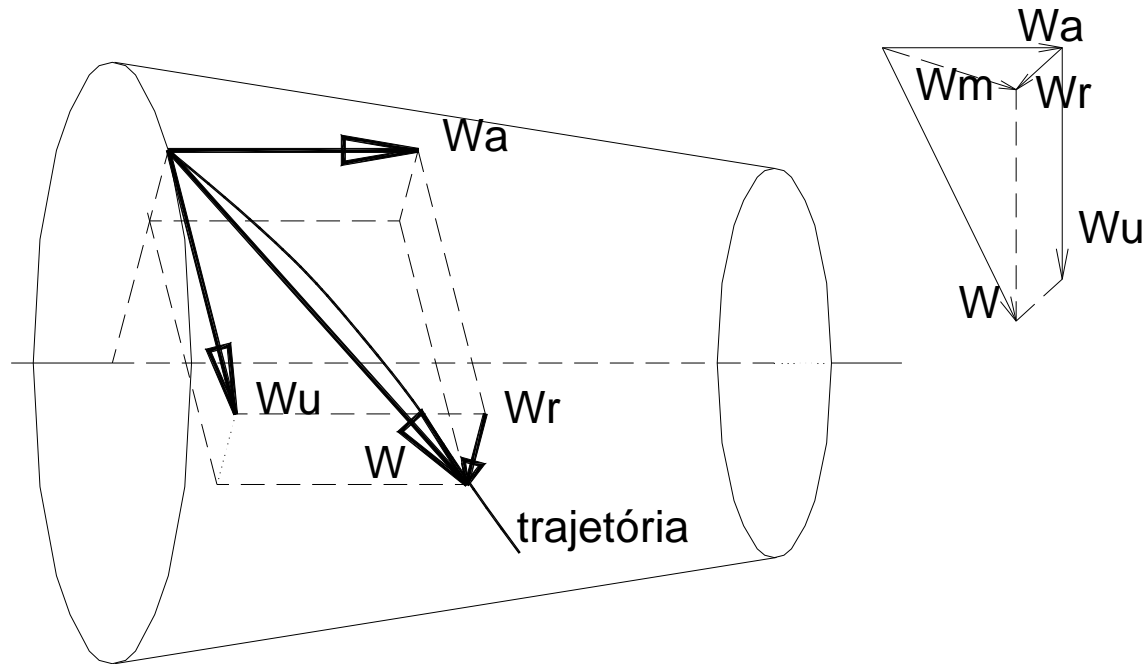
qualquer de um escoamento.

Utilizando-se um sistema de coordenadas cilíndrico, a velocidade relativa  $\vec{W}$  pode ser decomposta nas componentes **axial** ( $W_a$ ), **radial** ( $W_r$ ) e **tangencial** ( $W_u$ ), de sorte que

$$\vec{W} = W_r \vec{e}_r + W_u \vec{e}_\theta + W_a \vec{e}_z \quad \# 3-2$$

e, analogamente,

$$\vec{V} = V_r \vec{e}_r + V_u \vec{e}_\theta + V_a \vec{e}_z \quad \# 3-3$$



**Figura 3-2 - Decomposição da velocidade relativa**

Chama-se de componente **meridional** a velocidade resultante da adição das componentes axial e radial:

$$\vec{W}_m = W_r \vec{e}_r + W_a \vec{e}_z$$

$$\vec{V}_m = V_r \vec{e}_r + V_a \vec{e}_z$$

# 3-5

As máquinas radiais caracterizam-se por terem as componentes axiais das velocidades relativa e absoluta nulas:

$$V_a = 0 \quad \text{e} \quad W_a = 0,$$

de onde resulta:

$$V_m = V_r \quad \text{e} \quad W_m = W_r.$$

Então,

$$\vec{V} = V_m \vec{e}_r + V_u \vec{e}_\theta$$

e

$$\vec{W} = W_m \vec{e}_r + W_u \vec{e}_\theta$$

As máquinas axiais caracterizam-se por terem as componentes radiais das velocidades relativa e absoluta nulas:

$$V_r = 0 \quad \text{e} \quad W_r = 0,$$

de onde resulta

$$V_m = V_a$$

e

$$W_m = W_a$$

Então,

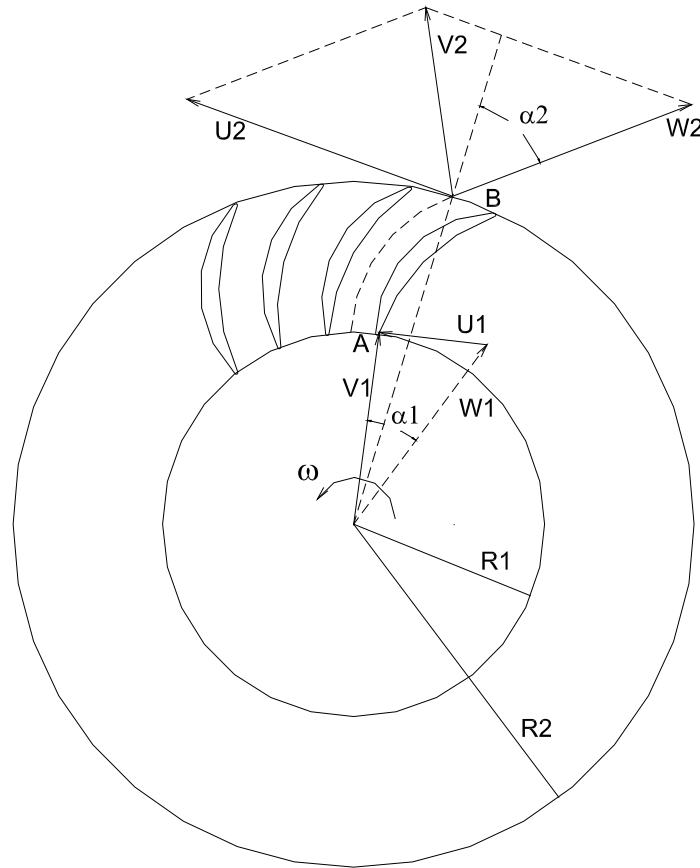
$$\vec{V} = V_u \vec{e}_\theta + V_m \vec{e}_z$$

e

$$\vec{W} = W_u \vec{e}_\theta + W_m \vec{e}_z$$

Figura 3-3 a Figura 3-5 representam máquinas radiais, axiais e mistas, respectivamente. Nelas são indicadas as trajetórias das partículas e as componentes da velo-

cidade relativa.



**Figura 3-3 - Máquina Radial**

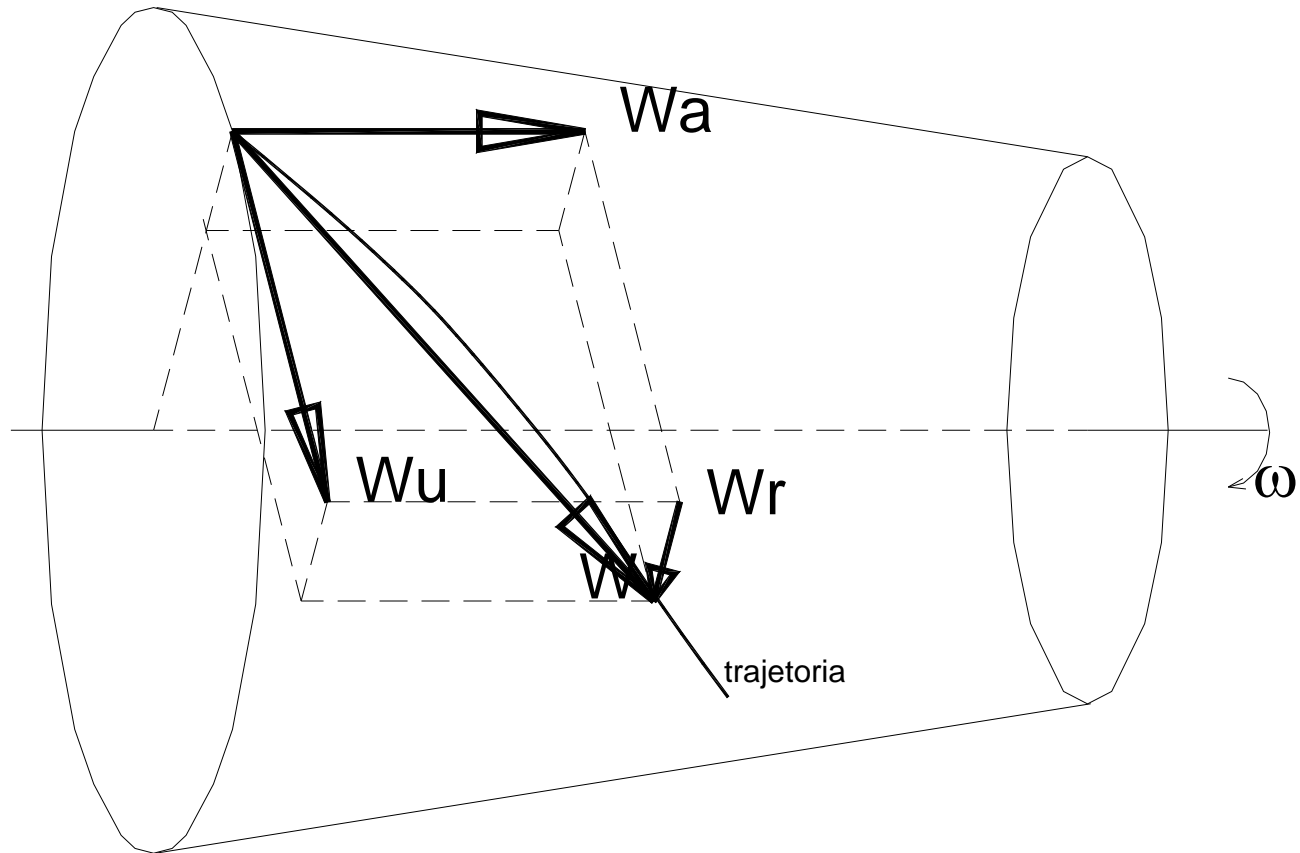
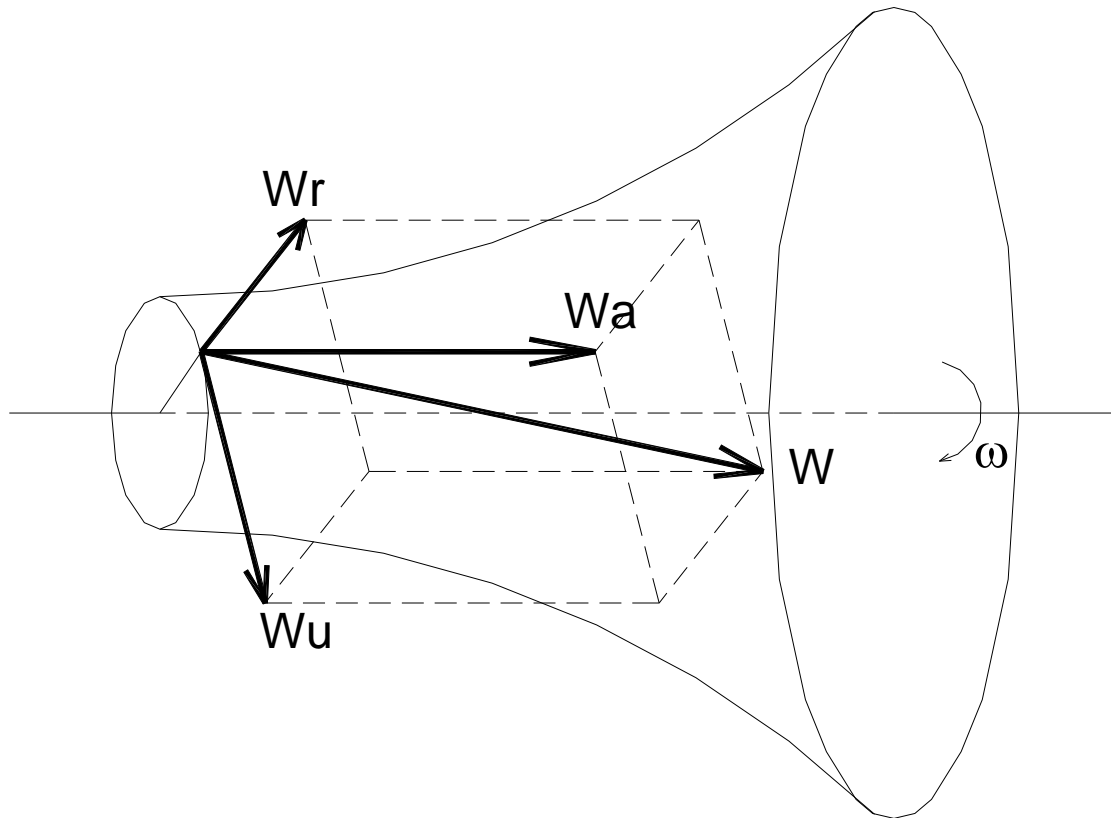


Figura 3-4- Máquina axial



**Figura 3-5- Máquina de Fluxo Misto (diagonal)**

## 3.2 TRIÂNGULOS DE VELOCIDADES

A equação # 3-1  $\vec{V} = \vec{W} + \vec{U}$  define um **triângulo de velocidades**.

É instrutiva a resolução gráfica dessa equação (desse triângulo).

Seja um ponto qualquer à entrada da grade.

Para facilidade de visualização, esse ponto coincide com o bordo de ataque da pá (está, pois, sobre a sua linha de esqueleto).

Para esse ponto pode-se montar a Figura 5-6:



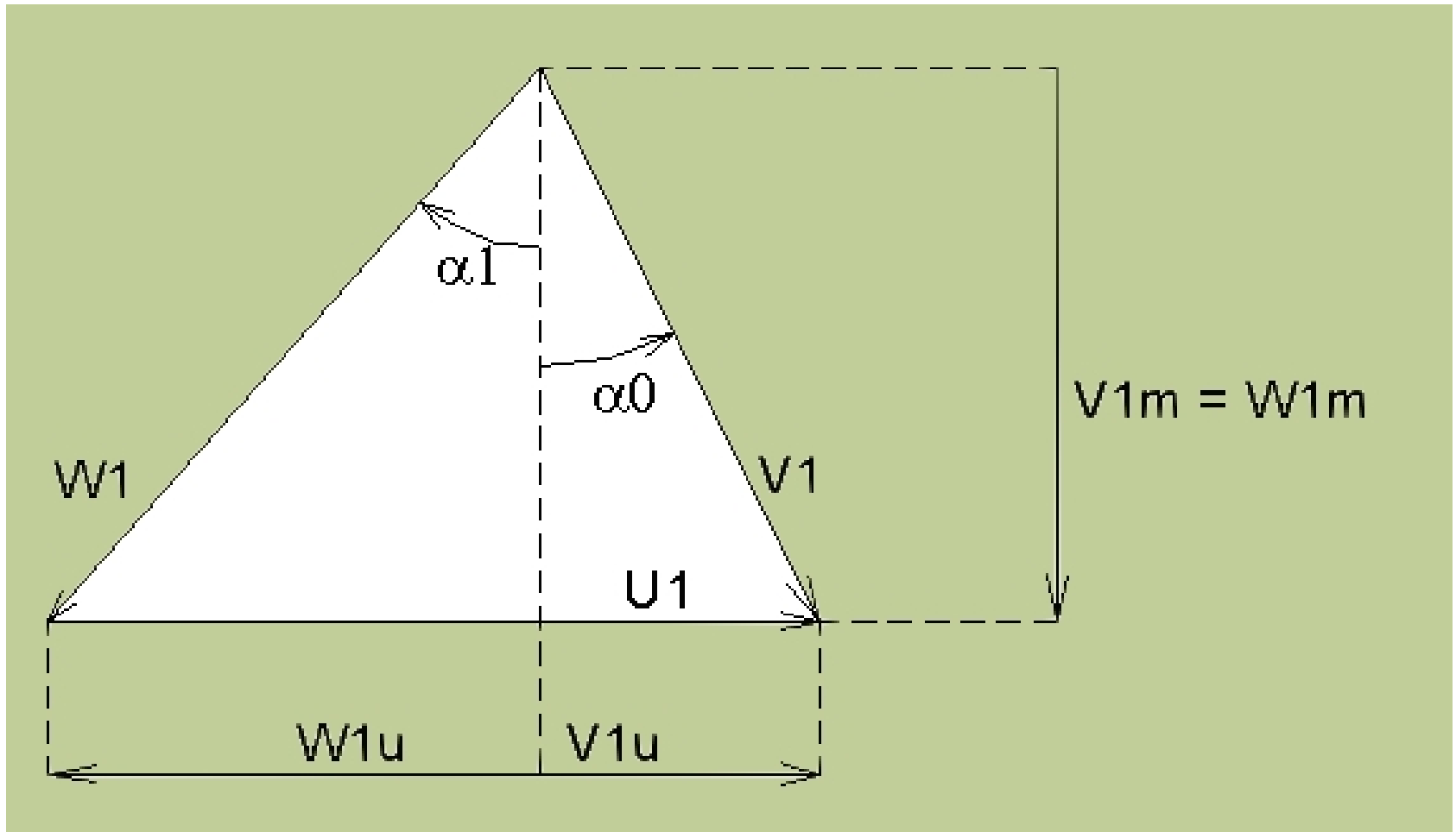


Figura 3-6- Triângulos de Velocidades (entrada da grade)

Nesse triângulo,  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$  são os ângulos que as direções das velocidades absoluta e relativa fazem com a direção meridional, respectivamente.

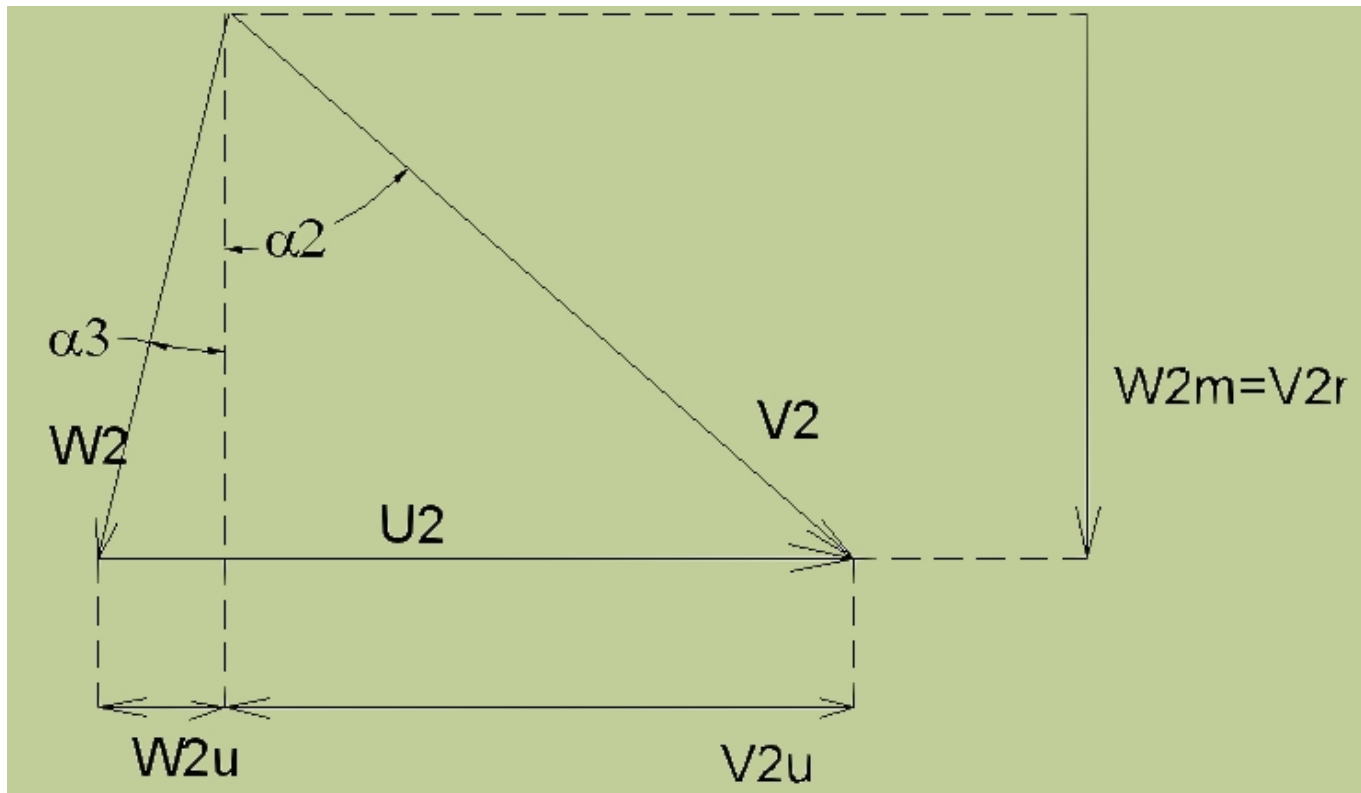


Figura 3-7- Triângulo de Velocidades (saída da grade)

Nesse triângulo,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$  são os ângulos que as direções das velocidades absoluta e relativa fazem com a direção meridional, respectivamente.

Montagem sobreposta desses triângulos de velocidades torna mais fácil a obtenção dos dados para os cálculos de vazão e de potência.

Deve-se observar que se traçam os triângulos de velocidades em relação à velocidade meridional e que, no caso das máquinas axiais, essa velocidade coincide com a velocidade axial; no caso das máquinas radiais, ela coincide com a velocidade radial.

Figura 3-8 e Figura 3-9 mostram os triângulos de velocidades para máquinas axiais movidas (compressores) e motoras (turbinas). A aproximação feita,  $U_1 = U_2$ , é válida para as máquinas cujas razões de raios,  $R_b/R_t$ , sejam próximas de 1, nas quais o escoamento é, praticamente, axial.

Nas máquinas em que essas razões de raios são pequenas, da ordem de 0,5, o escoamento deixa de ser predominantemente axial e ao se adotar  $U_1 = U_2$  faz-se aproximação muito grosseira, uma vez que a componente radial não é desprezível.

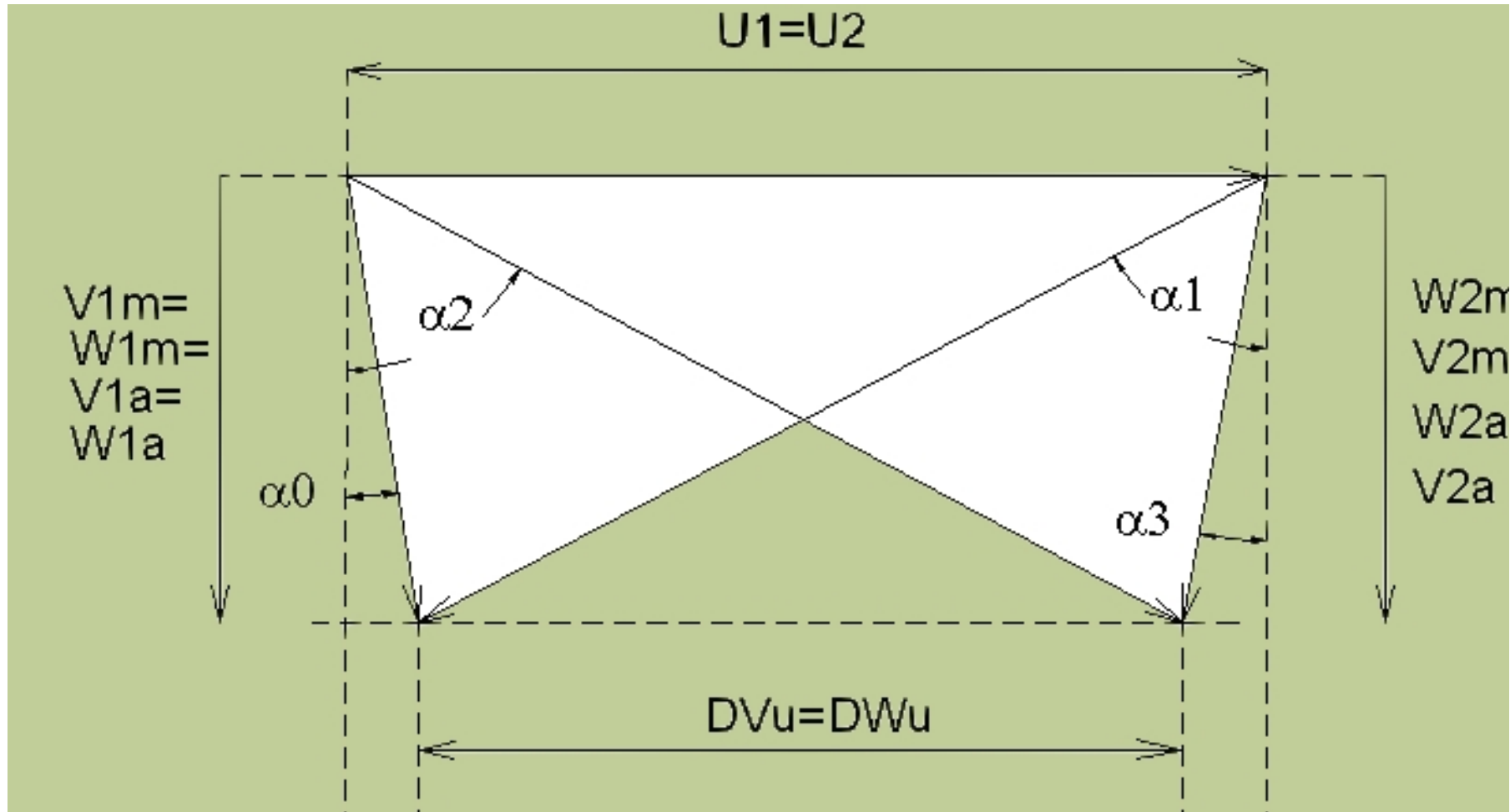


Figura 3-8- Triângulos de velocidades para compressores e bombas

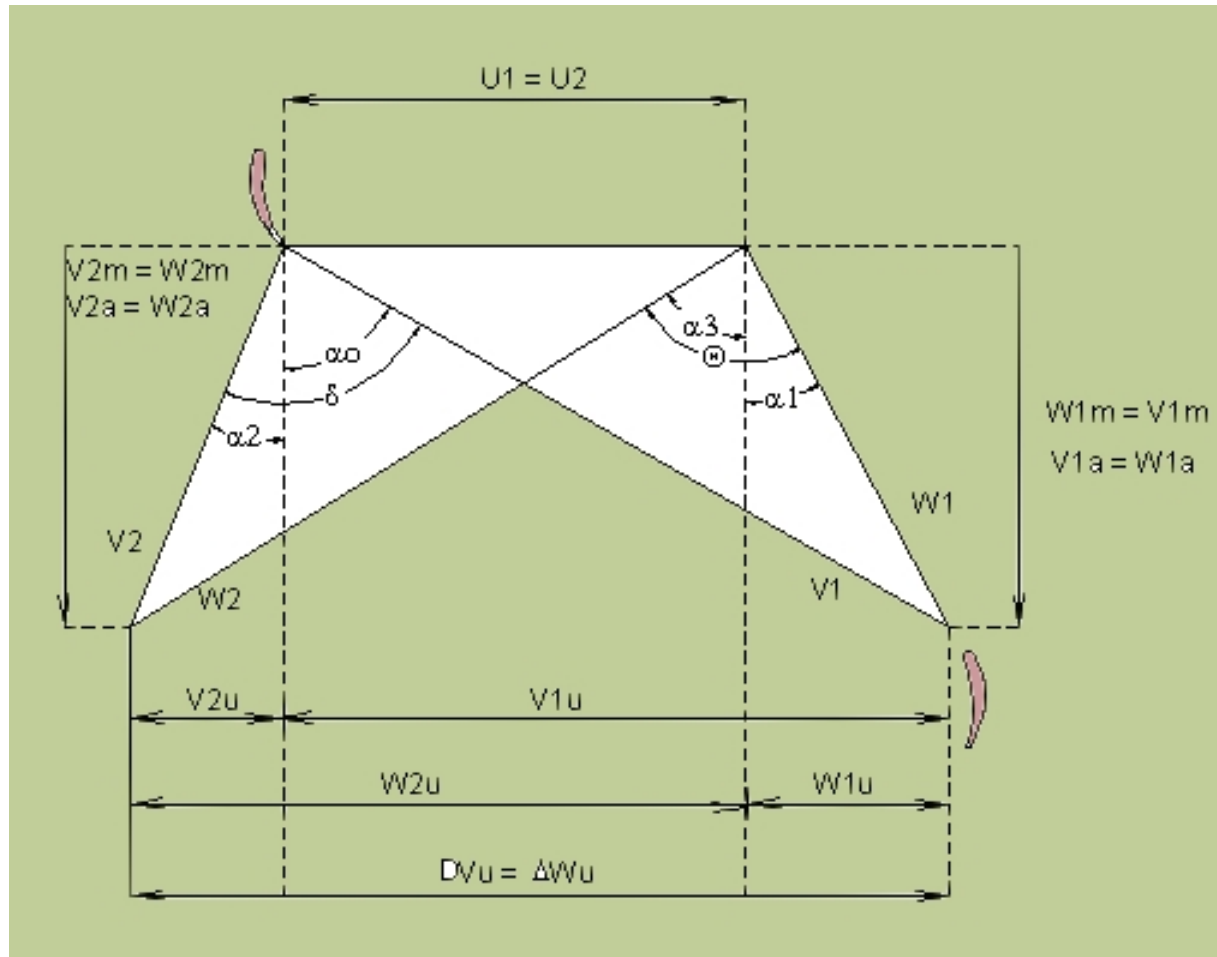
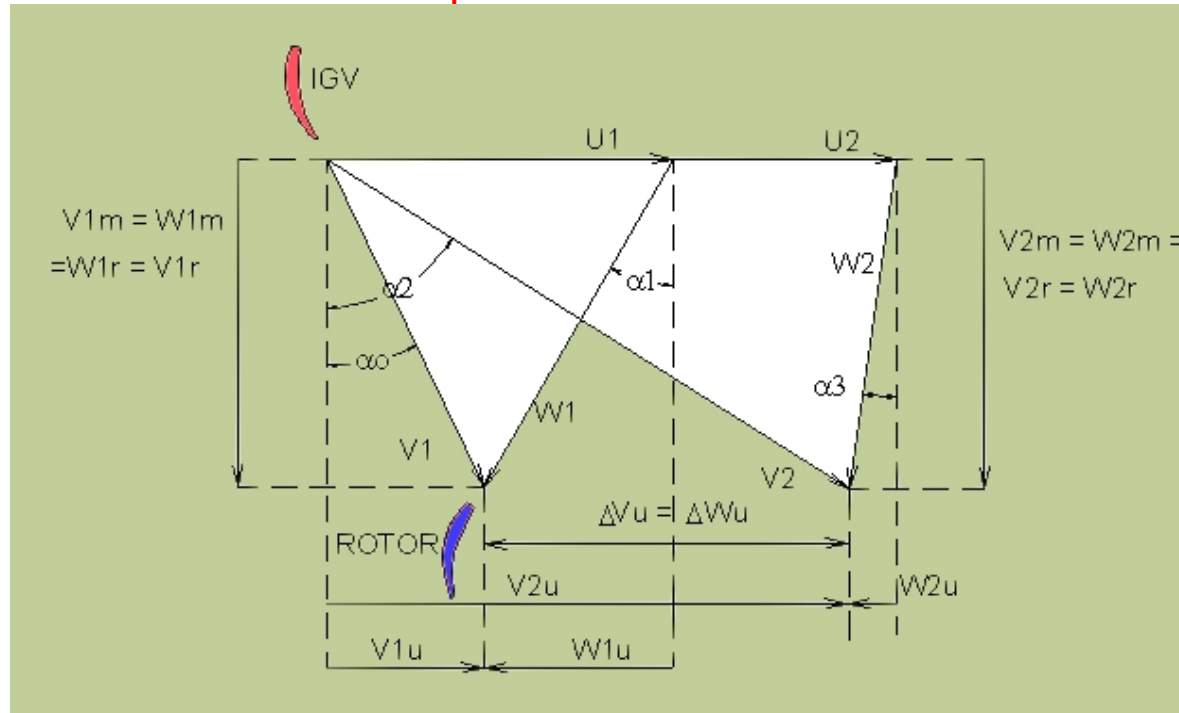


Figura 3-9- Triângulos de velocidades para máquinas axiais motoras

Foram colocados, para melhor compreensão, juntamente com os triângulos de velocidades, 2 perfis de pás, orientados de acordo com as direções indicadas pelas velocidades absoluta (no bordo de fuga do estator) e relativas ( $W_1$  no bordo de ataque e  $W_2$  no bordo de fuga do rotor).

No caso de máquina radiais movidas,  $U_1 < U_2$ , de onde resultam os triângulos de velocidades, indicados na Figura 3-10.

Máquina radial movida:



**Figura 3-10- Triângulos de velocidades para compressores e bombas centrífugos**

Para máquinas motoras, geralmente se tem  $U_1 > U_2$  (entrada pela periferia do rotor) e a Figura 3-11 é um exemplo de triângulos para máquinas motoras (turbinas).



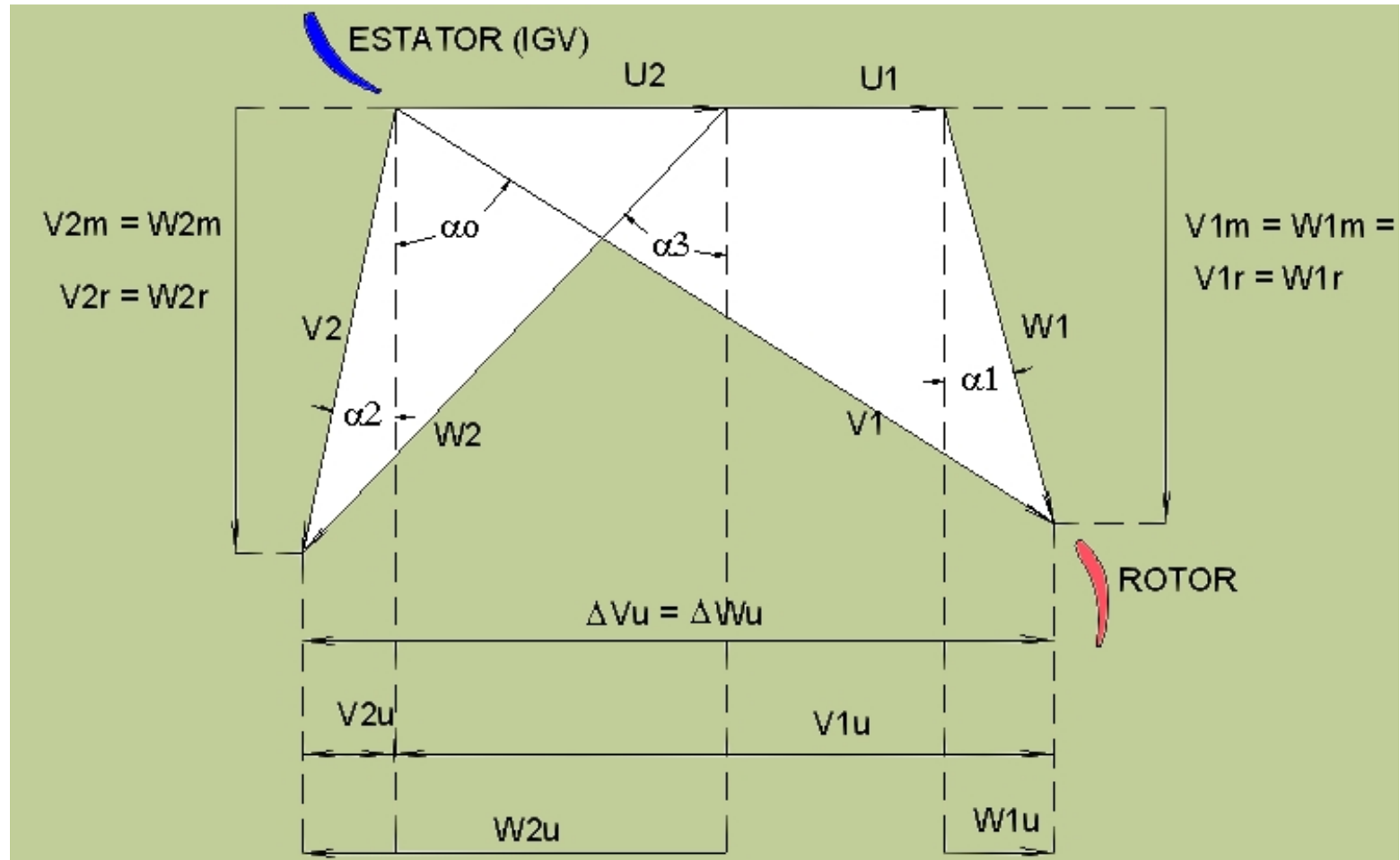


Figura 3-11- Triângulos de velocidades para máquinas motoras radiais

Exemplo de cálculos típicos dos triângulos de velocidades.

Como o nome diz, trata-se de cálculo de triângulos que, dependendo das informações disponíveis, a seqüência dos cálculos é diferente (nem sempre é a adotada abaixo).

Os ângulos são medidos em relação à direção do escoamento predominante:

- direção axial para as máquinas axiais
- direção radial para as máquinas radiais.

O fluido de trabalho deixa o estator de uma turbina axial com a velocidade de 600 m/s e ângulo de  $70^{\circ}$ . A velocidade periférica do rotor é de 450 m/s. As velocidades meridionais à entrada e à saída do rotor são constantes. O escoamento absoluto deixa o rotor na direção axial. Determinar os triângulos dos escoamentos absoluto e relativo.

Neste caso, os dados disponíveis são:

$$V_1 = 600 \text{ m/s}$$

$$U_1 = U_2 = 450 \text{ m/s}$$

$$\alpha_2 = 0^\circ$$

$$\alpha_o = 70^\circ$$

$$V_{1a} = W_{1a} = V_2$$

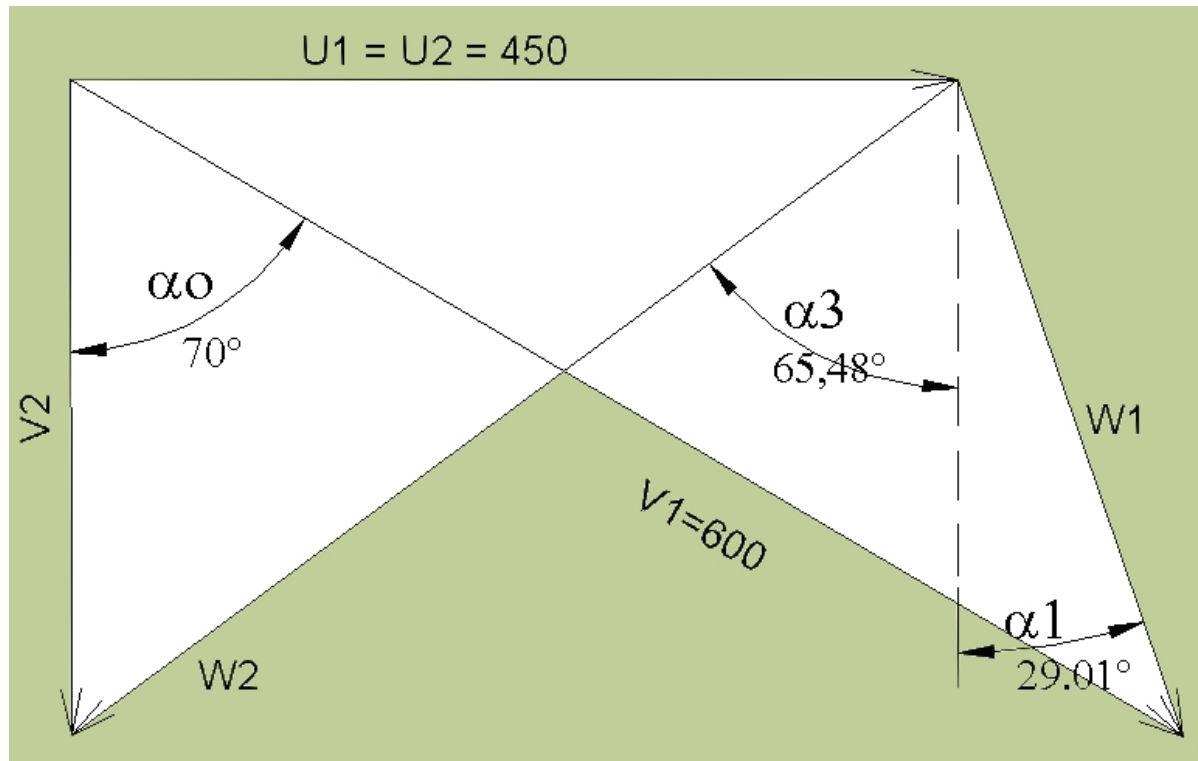


Figura 3-12- Triângulos de velocidades para o caso em estudo

Cálculos à entrada do rotor:

$$V_{1a} = V_1 \cos(\alpha_o) = 600 \cos(70^\circ) = 205,2 \text{ m/s}$$

$$V_{1u} = V_1 \sin(70^\circ) = 600 \sin(70^\circ) = 563,8 \text{ m/s}$$

$$W_{1u} = V_{1u} - U_1 = 563,8 - 450 = 113,8 \text{ m/s}$$

$$W_1 = (W_{1u}^2 + W_{1a}^2)^{1/2} = (113,8^2 + 205,2^2)^{1/2} = (113,8^2 + 205,2^2)^{1/2} = 234,6$$

m/s

$$\alpha_1 = \text{tg}^{-1}(W_{1u} / W_{1a}) = \text{tg}^{-1}(113,8/205,2) = 29,01^\circ$$

Cálculos à saída do rotor:

$$V_{2u} = 0 \text{ m/s}$$

$$V_2 = V_{2a} = V_{1a} = 205,2 \text{ m/s}$$

$$W_{2a} = V_{2a} = 205,2 \text{ m/s}$$

$$W_{2u} = U = 450 \text{ m/s}$$

$$W_2 = \sqrt{W_{2a}^2 + W_{2u}^2} = \sqrt{205,2^2 + 450^2} = 494,58 \text{ m/s}$$

$$\alpha_3 = \text{tg}^{-1}(W_{2u} / W_{2m}) = \text{tg}^{-1}(450/205,2) = 65,48^\circ$$

$$\Delta V_u = \Delta W_u = W_{2u} + W_{1u} = 450 + 113,8 = 563,8 \text{ m/s}$$

### 3.3 OPERAÇÃO FORA DAS CONDIÇÕES DE PROJETO

Parâmetros de **ponto de projeto** → parâmetros fixados para o projeto da máquina.

Parâmetros usuais:

- condições ambientes (pressão e temperatura estáticas),
- parâmetros de funcionamento (rotação, vazão, etc.).

A **seleção do ponto de projeto depende** de diversos fatores, dentre eles

- os **ciclos de carga**
- os associados à **tecnologia de materiais** e de **fabricação** (temperatura máxima, pressão máxima, etc.)
- os **econômicos**.

**Máquina opera fora do ponto de projeto → qualquer das condições ambientes e/ou parâmetros de funcionamento (rotação, vazão, etc.) forem diferentes daqueles de projeto da máquina.**

Assim, em virtude da **variação das condições ambientais** e das **necessidades de carga**, as **máquinas** podem funcionar, durante boa parte do tempo, **fora das condições de projeto**.

As máquinas são **otimizadas para as condições de projeto** → **perdem desempenho quando operam fora daquelas condições**.

As máquinas que trabalham com fluidos compressíveis são as mais sensíveis à **variação das condições ambientais**, em decorrência da **variação da densidade dos fluidos de trabalho**.

Chama-se **condição nominal** de operação da máquina a condição especificada como referência de sua operação.

Em geral, a condição nominal coincide com a condição de projeto, ponto em que o desempenho da máquina é otimizado.

**Entretanto, pode-se escolher uma condição nominal diferente da de projeto.**

A menos que seja explicitado em contrário, as condições nominais e de projeto serão confundidas neste contexto.



## Controle de rotação/potência de uma turbina hidráulica ← controle da vazão.

Para minimização de perdas utilizam-se pás de seções transversais com perfis aerodinâmicos.

Perdas mínimas são conseguidas quando o escoamento está alinhado com as pás.

Critério de escolha da incidência de projeto → incidência de mínimas perdas.

A variação da vazão (aumento ou diminuição) acarreta diferentes incidências (o fluido chega às pás com incidências que não coincidem com a de projeto).

Esse fenômeno é conhecido como **choque de entrada** (observar que o choque de entrada nada tem a ver com **ondas de choque** nos escoamentos compressíveis).

O choque de entrada acarreta aumento de perdas nas grades e, portanto, perda de desempenho da máquina de fluxo.

### 3.3.1 CHOQUE DE ENTRADA DEVIDO A AUMENTO DE VAZÃO

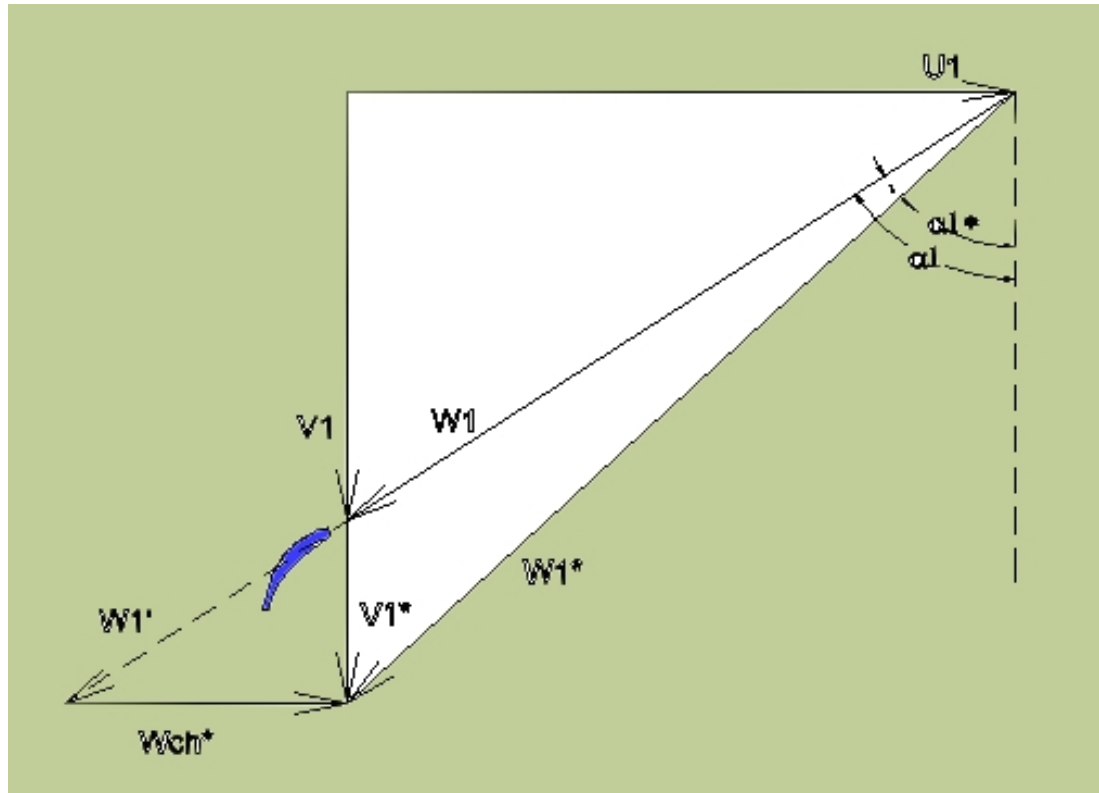
Em toda máquina que gira com **rotação constante**, o **aumento da vazão requer a aumento da velocidade meridional**.

Sejam os triângulos de velocidades, à entrada do rotor, para os casos de vazão nominal  $V_1$  e vazão aumentada  $V_1^*$ , com  $V_1 < V_1^*$ .

Sem perda de generalidade, admite-se que a incidência no ponto de projeto é nula.

O escoamento incidirá sobre a pá com um ângulo  $\alpha_1^*$  e a incidência será

$$i = \beta_1 - \alpha_1^*$$



**Figura 3-13 - Triângulos de velocidades - (choque de entrada - aumento de vazão)**

Para que o escoamento ficar alinhado com a pá, isto é, para que a incidência

seja nula, deve aparecer a componente  $W_{ch}^*$ , responsável pelo aumento da velocidade do escoamento relativo  $W_1'$ .

Tem-se, então:

$$\vec{W}_1^* = \vec{W}_1' + \vec{W}_{ch}^*$$

As perdas são proporcionais ao quadrado dessa componente de choque, isto é:

$$\text{Perdas} = \frac{1}{2} \varphi [W_{ch}^*]^2$$

O coeficiente de perdas de choque  $\varphi$  é determinado a partir de dados experimentais e podem ser obtidos em literatura especializada.

### 3.3.2 CHOQUE DE ENTRADA DEVIDO A DIMINUIÇÃO DE VAZÃO

Analogamente ao exposto em 5.3.1, à diminuição de vazão corresponde decréscimo da velocidade meridional, que passa de  $V_1$  para  $V_1^{**}$ .

O escoamento incidirá sobre a pá com ângulo  $\alpha_1^{**}$ , com incidência  $i = \beta_1 - \alpha_1^{**}$

causando o aparecimento da componente  $W_{ch}^{**}$  e a conseqüente desaceleração do escoamento relativo,  $W_{ch}''$ , visto que a direção da pá é fixa.

Tem-se, também:

$$\vec{W}_1^{**} = \vec{W}_1'' + \vec{W}_{ch}^{**}$$

As perdas são proporcionais ao quadrado dessa componente de choque, isto é:

$$\text{Perdas} = \frac{1}{2} \phi \left[ W_{\text{ch}}^{**} \right]^2$$

O coeficiente de perdas de choque  $\phi$  também é determinado a partir de dados experimentais e podem ser obtidos em literatura especializada.

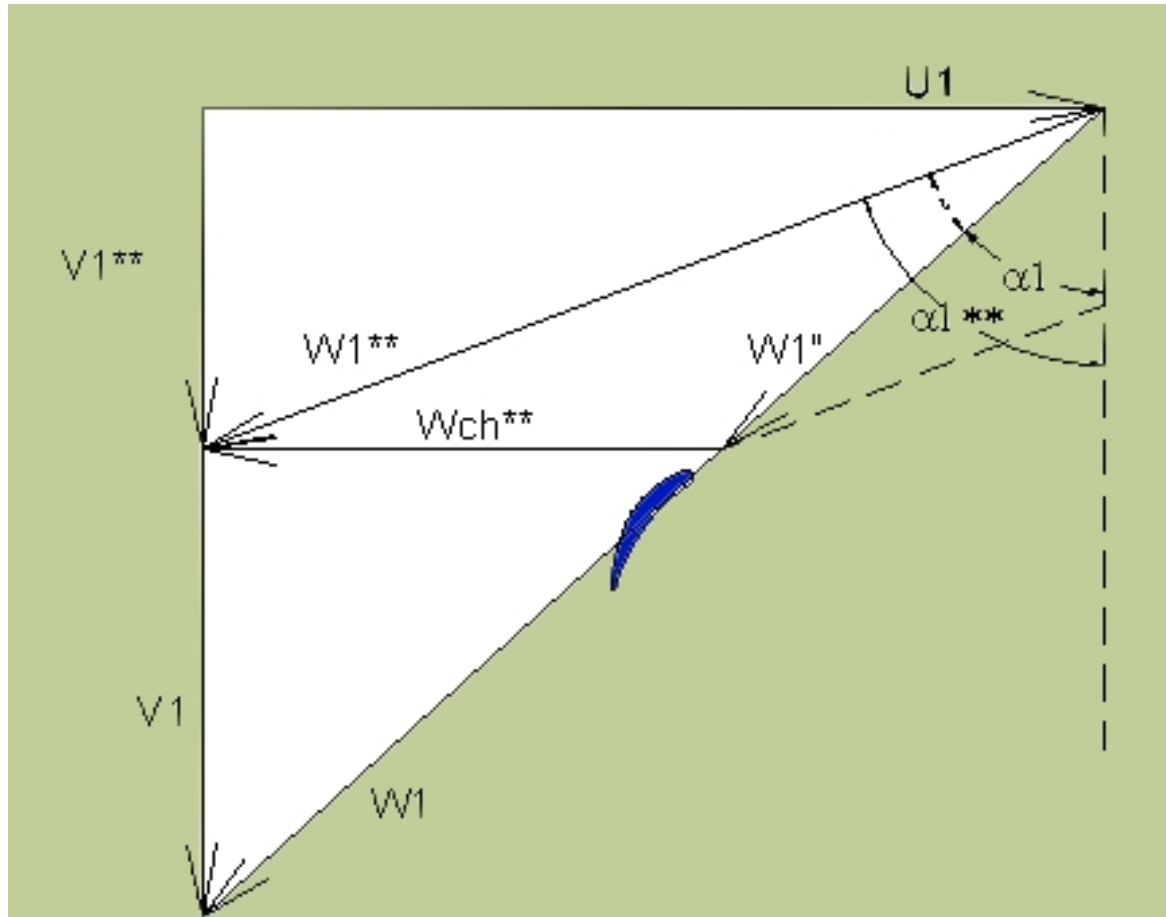


Figura 3-14- Triângulos de velocidades - (choque de entrada - diminuição de vazão)

### 3.3.3 CHOQUE DE ENTRADA DEVIDO A VARIAÇÃO DE ROTAÇÃO

Neste caso, considera-se que o ângulo das pás e a vazão são fixos, mas há aumento da rotação  $N$  e, em consequência, aumento de  $U_1$ .

Para o escoamento tornar à direção da pá,  $\beta_1$ , aparece a componente de choque de entrada  $W_{ch}^{***}$  e a consequente desaceleração do escoamento relativo,  $W_{ch}'''$ .

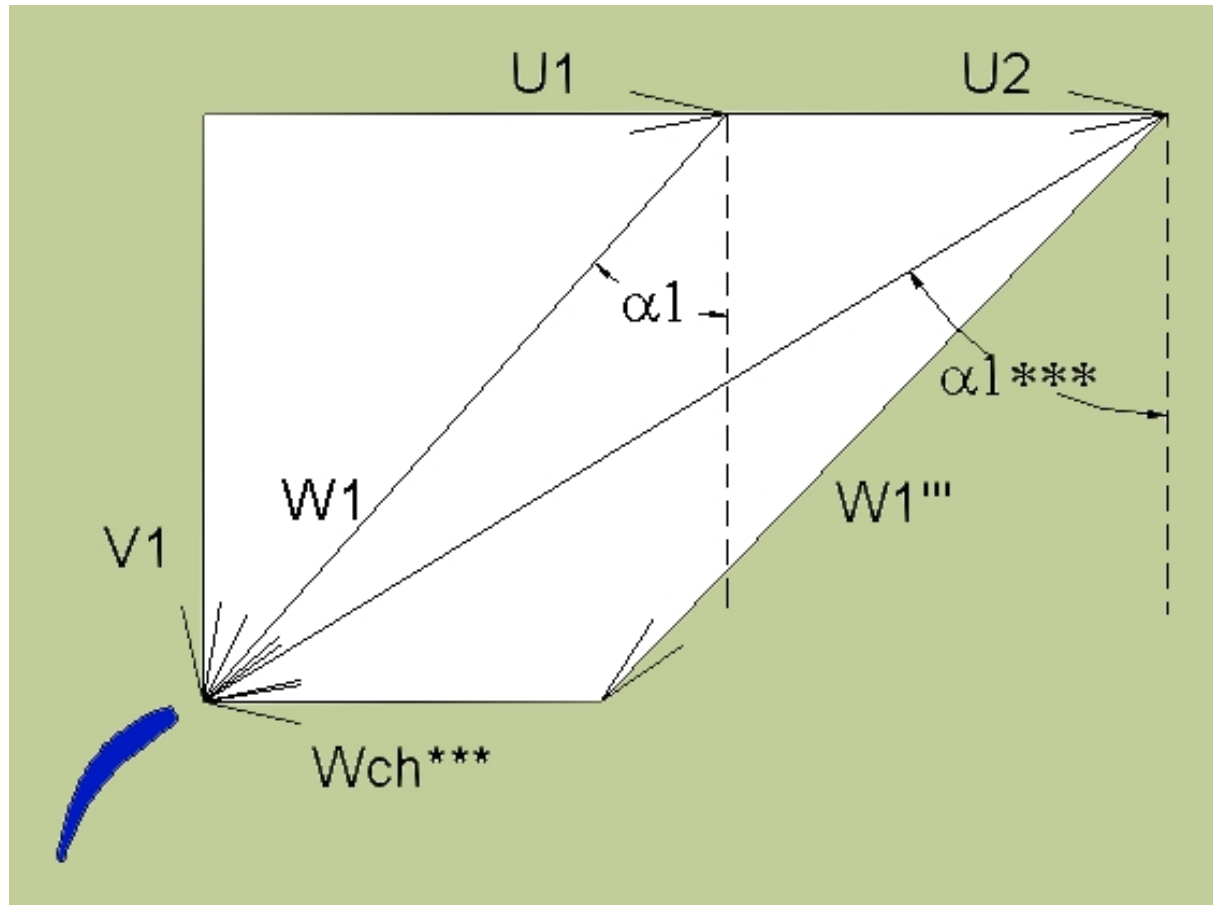
Segue-se que

$$\vec{W}_1^{***} = \vec{W}_1''' + \vec{W}_{ch}^{***}$$

As perdas são proporcionais ao quadrado dessa componente de choque, isto é:

$$\text{Perdas} = \frac{1}{2} \rho \left[ W_{ch}^{***} \right]^2$$



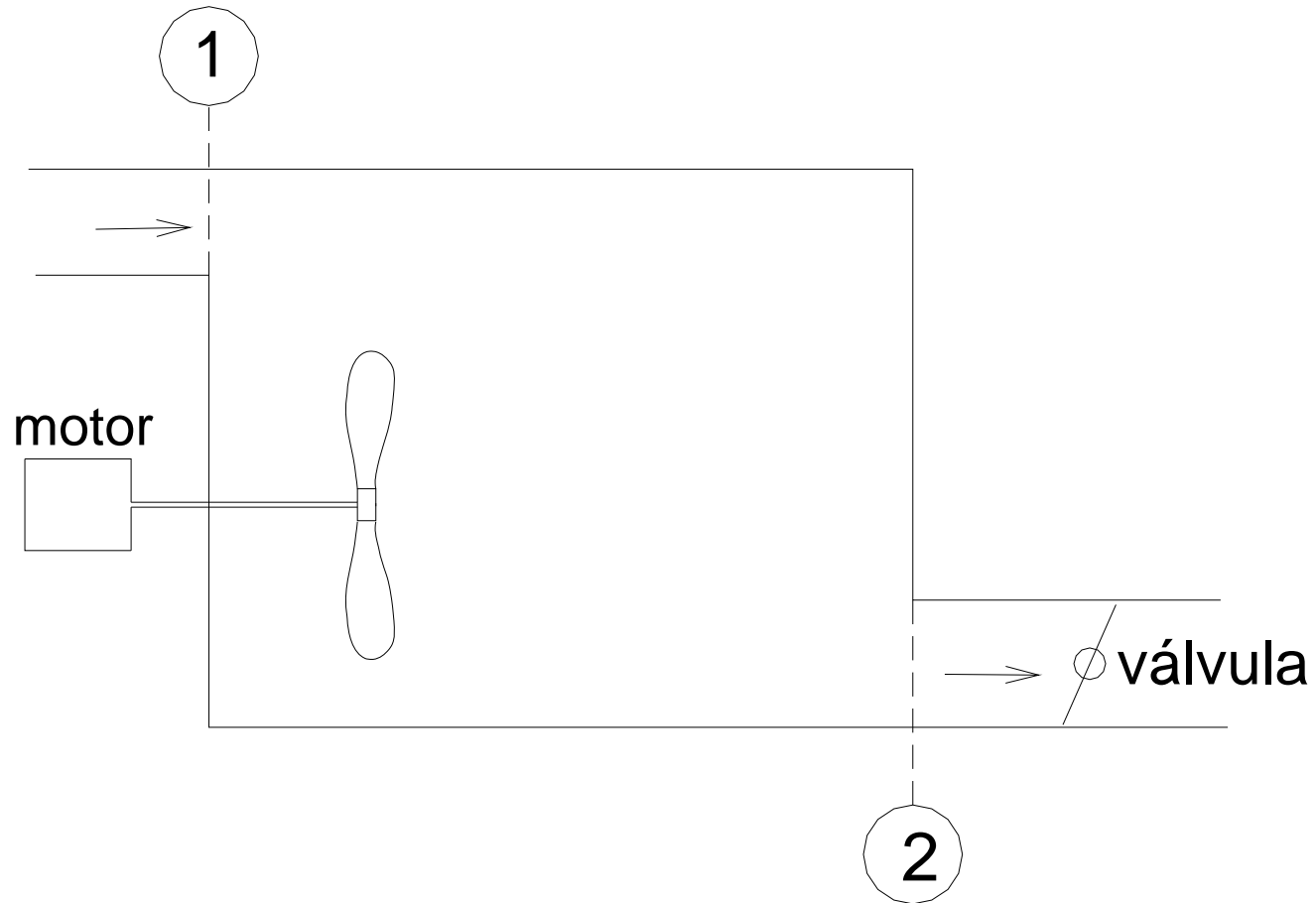


**Figura 3-15 - Triângulos de velocidades - (choque de entrada - variação de rotação)**

### 3.3.4 VARIÁVEIS DE CONTROLE

Considere a máquina de fluxo como a esquematizada na Figura 3-16.

Para facilidade de estudo e sem perda de generalidade, seja essa máquina uma bomba hidráulica.



**Figura 3-16- Máquina de Fluxo - controle de vazão por válvula**

Considerem-se as **características externas** de seu funcionamento:

- rotação ( $N$ )
- vazão em massa ( $\dot{m}$ )
- torque no eixo ( $T$ )
- trabalho específico ( $W$ )
- potência ( $\dot{W}$ )
- eficiência ( $\eta$ )
- propriedades do fluido nas estações (1) e (2)

Nem todas essas variáveis podem ser modificadas a gosto do operador.

**Apenas a rotação  $N$  e a vazão em massa  $\dot{m}$  podem ser modificadas pelo operador e com relativa facilidade.**

- a rotação  $N$  pode ser variada através do controle de rotação do motor da bomba;
- a vazão  $\dot{m}$  pode ser alterada através da abertura e/ou fechamento de uma válvula colocada à saída da bomba.

Essas variáveis ( $N$  e  $\dot{m}$ ) são chamadas de **variáveis de controle**.

Todas as **demais variáveis** são dependentes dessas duas e são chamadas de **variáveis dependentes**.

Para se conhecer o comportamento da máquina em diversas condições de operação é costume construírem-se gráficos como o da Figura 3-17, utilizando as variáveis de controle como variáveis fundamentais.

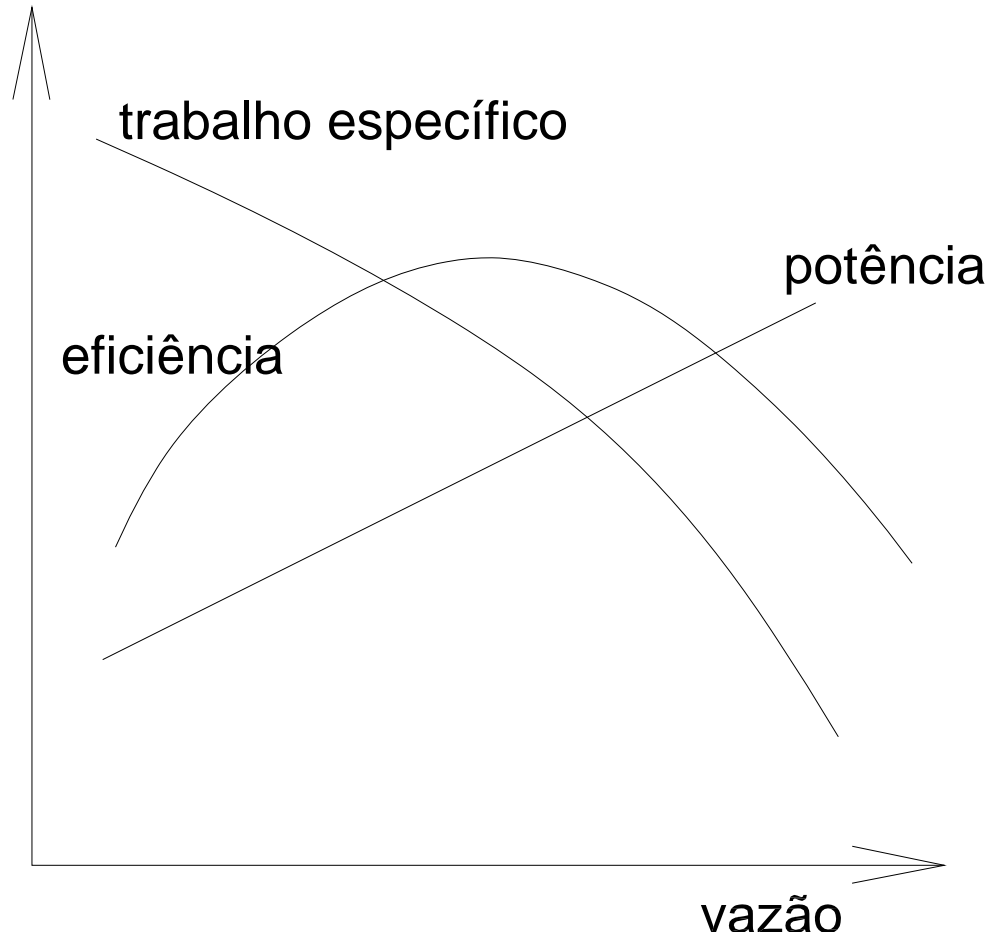
**As demais variáveis são, portanto, conhecidas em função da vazão de massa  $\dot{m}$  (ou da vazão volumétrica  $\dot{Q}$ ), e da rotação  $N$ .**

Na Figura 3-17 a rotação  $N$  foi escolhida como parâmetro (mantida fixada). Várias dessas curvas podem ser traçadas num mesmo gráfico, obtendo-se uma família de curvas de desempenho.

**As informações para o traçado dessas curvas de desempenho são obtidas experimentalmente.**

Atualmente, com a formulação de modelos físicos e matemáticos complexos, há programas computacionais que são capazes de calcular o escoamento com relativa precisão → as curvas de desempenho podem ser calculadas.

Ainda não se chegou ao grau de desenvolvimento que permite abandonar os levantamentos experimentais, uma vez que as "curvas calculadas" se afastam das "curvas medidas", mas informações qualitativas importantes podem ser obtidas dessas curvas teóricas.



**Figura 3-17- Curvas de Desempenho típicas**

A vazão em massa  $\dot{m}$  e a rotação  $N$  foram escolhidas como variáveis de controle para a instalação mostrada na Figura 3-16.

Dependendo do tipo de instalação são escolhidas outras variáveis de controle mais adequadas.

Para turbinas com estatores variáveis, o ângulo do estator é também escolhido como variável de controle. Esse ângulo  $\zeta$  é chamado de **ângulo montagem** do estator.

É comum serem escolhidas como variáveis independentes as seguintes variáveis:

$\dot{m}$ ,  $N$  e  $\zeta$  (vazão em massa, rotação e ângulo de montagem)

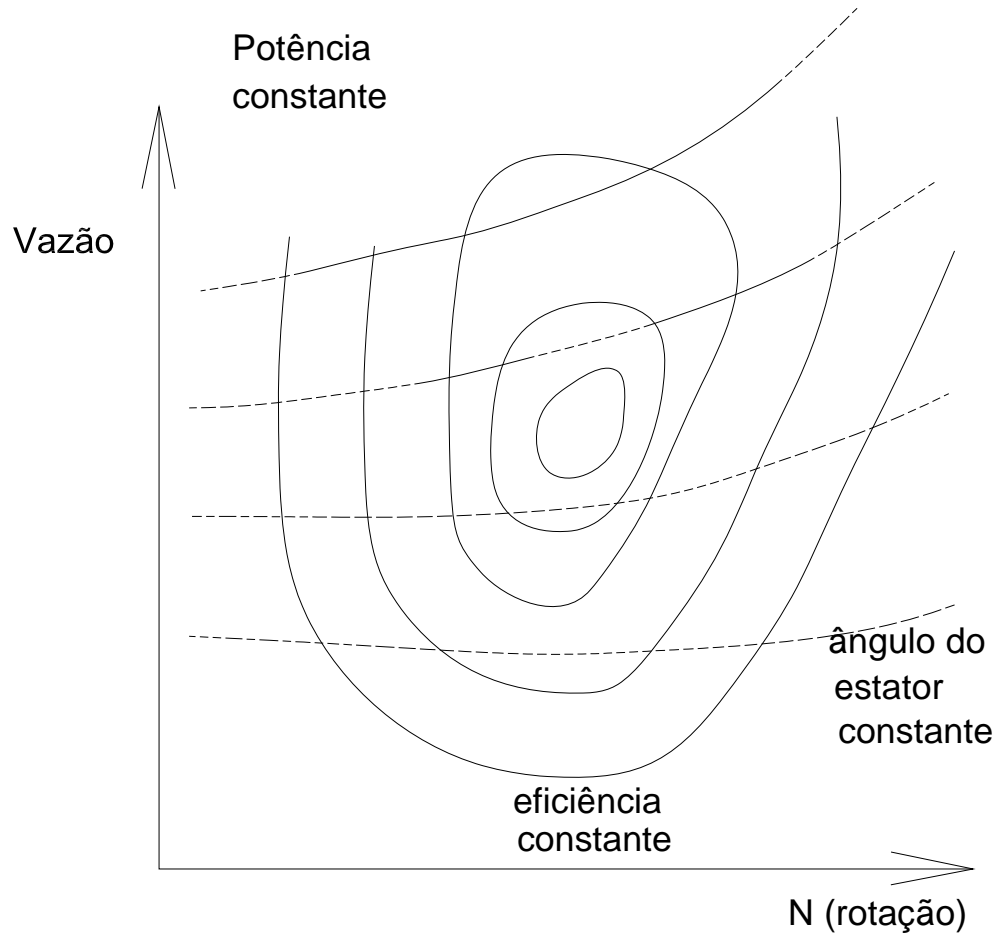
ou

$N$ ,  $\zeta$  e  $\dot{W}$  (rotação, ângulo de montagem e potência)

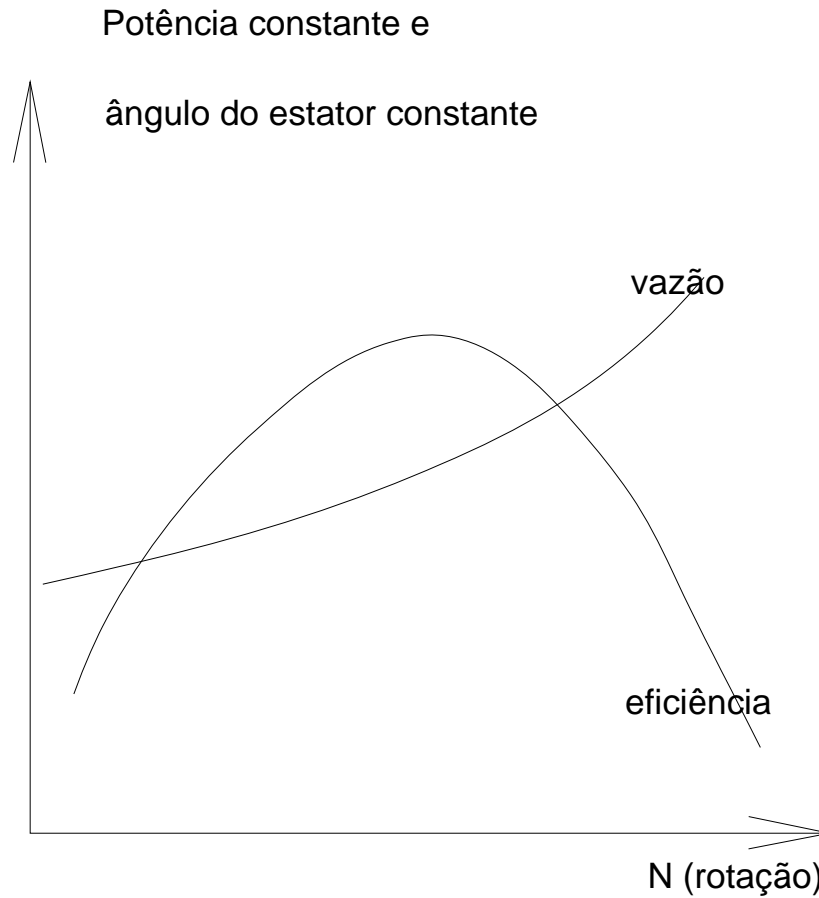
quando a máquina for equipada com estator variável (o ângulo de montagem do estator pode ser alterado pelo operador).



A cada valor do ângulo de montagem  $\zeta$  corresponde uma curva semelhante às indicadas na Figura 5-17, como mostrado na Figura 3-18 e na Figura 3-19.



**Figura 3-18- Curvas de Desempenho típicas (geometria variável)**



**Figura 3-19- Curvas de Desempenho típicas (geometria fixa)**

## 3.4 MODELO UNIDIMENSIONAL (1-D)

### 3.4.1 INTRODUÇÃO

Para se conhecer o escoamento é necessário conhecer, em cada ponto:

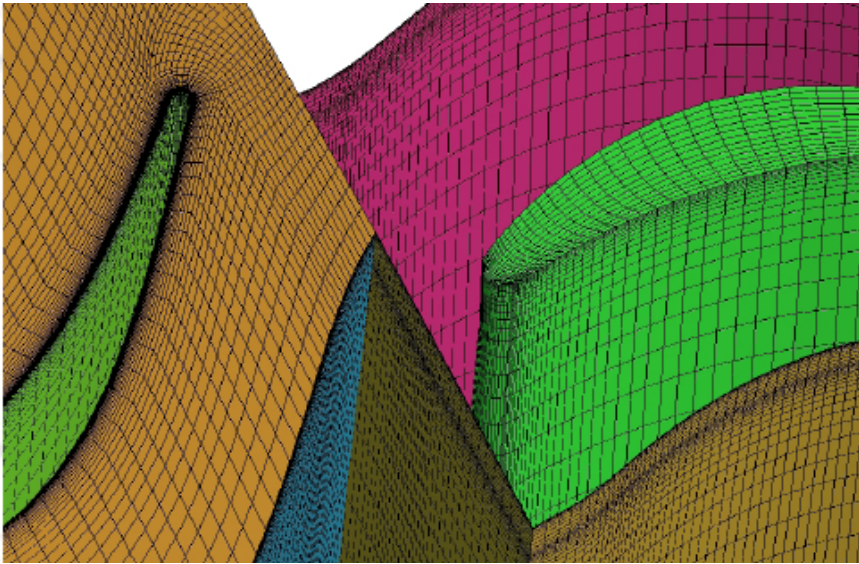
- Pressão estática
- Temperatura estática
- Velocidade

A observação mostra que o escoamento nas máquinas de fluxo é em **regime não permanente**, **tridimensional (3-D)**, **viscoso** e **turbulento**.

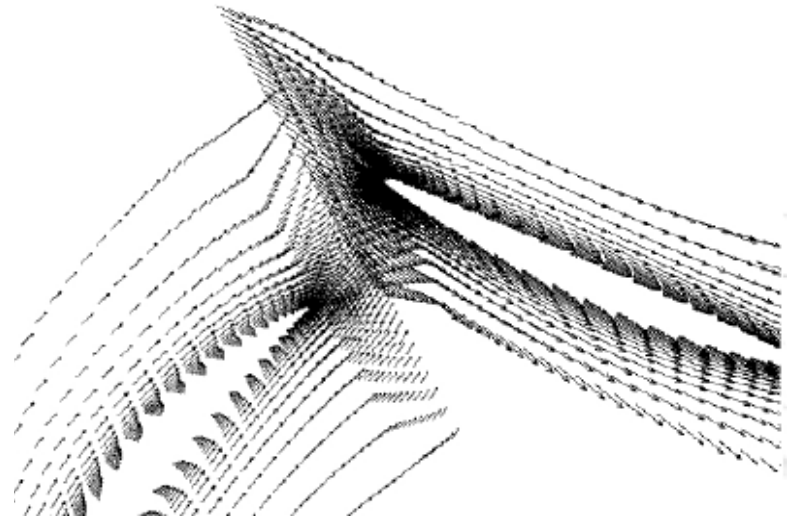
Em cada ponto do escoamento os campos de velocidades, temperaturas e pressões dependem das 3 coordenadas espaciais e do tempo.

O calculo do escoamento requer a solução das equações completas, cujo custo computacional é muito elevado.

Exemplo de cálculo de escoamento tridimensional e turbulento em turbomáquinas

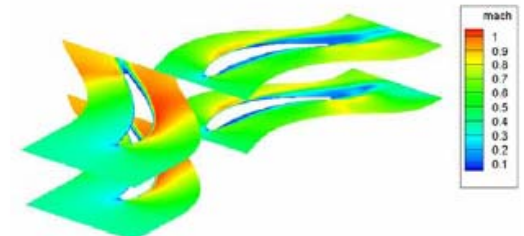
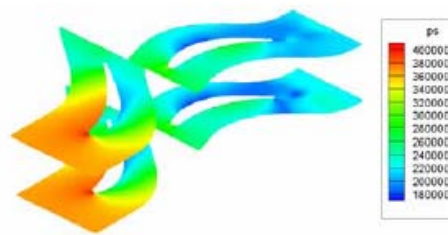
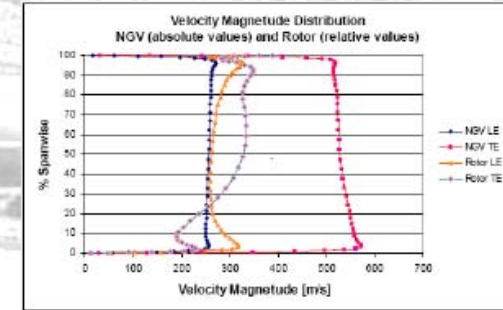
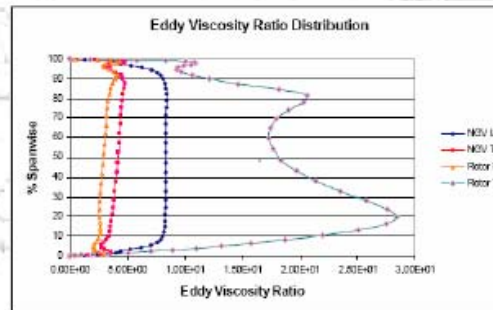
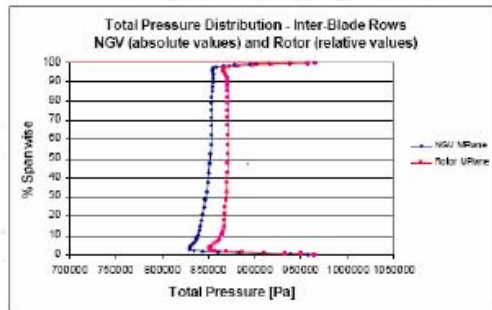
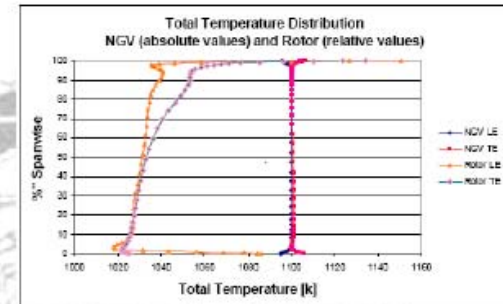
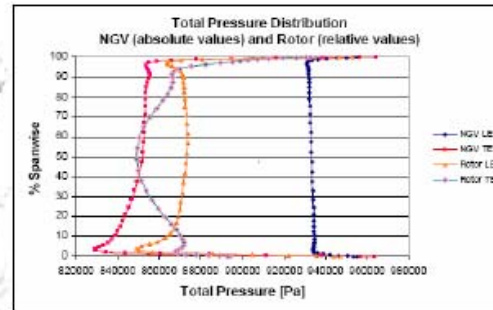
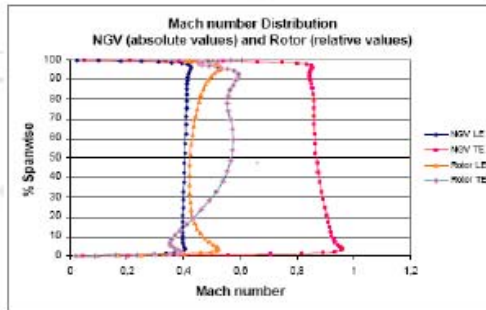


Geração de malha em geometria complexa



Campo de velocidades entre grades

### Exemplo de cálculo de escoamento tridimensional e turbulento em turbomáquinas



A experiência mostra que

- as equações que o modelam podem ser simplificadas para a obtenção de informações aceitáveis em termos de engenharia
- é conveniente utilizar o sistema de coordenadas cilíndricas ( $r$ ,  $\theta$ ,  $z$ ) em virtude da simetria cilíndrica dessas máquinas.
- usualmente faz-se o eixo  $z$  coincidir com o eixo de rotação da máquina.

O escoamento sendo 3-D indica que as propriedades do fluido variam nas direção  $r$ ,  $\theta$  e  $z$ .

Entretanto, a observação do que acontece com o escoamento no interior da passagem entre as pás de uma grade revela que:

- a) Os efeitos viscosos se manifestam numa fina camada próxima das superfícies sólidas, o que permite aproximar o escoamento real por escoamento não-viscoso;
- b) A velocidade do escoamento varia mais significativamente apenas nas proximidades das superfícies sólidas, o que permite considerar que a velocidade na seção de entrada do canal não varia muito, o mesmo acontecendo na seção de saída do canal;
- c) O escoamento nessas passagens acontece em regime permanente  
→ o escoamento pode ser aproximado como sendo 1-D.

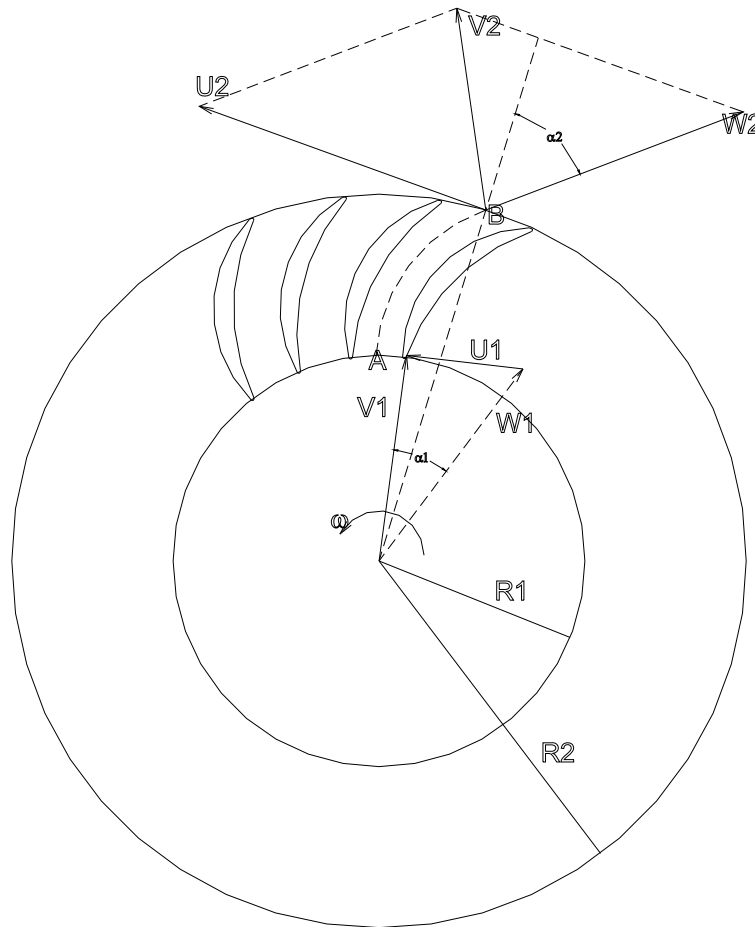


Então:

- Apenas uma linha de corrente serve para representar todo o escoamento.
  - os canais entre as pás têm espessura nula (número infinito de canais),
  - pá tem espessura nula (número infinito de pás)
- A diferença de pressões entre as superfícies de pressão e de sucção da pá deve ser substituída por força que age no fluido
- O vazamento pelas folgas nos topos das pás acarreta perdas
- Os bordos de fuga induzem o aparecimento de esteiras e perdas

Assim, para u'a máquina radial,  $\frac{\partial \vec{W}}{\partial \theta} = \vec{0}$  e, portanto,  $\vec{W} = \vec{W}(r)$

permitindo-se que para um rotor centrífugo o escoamento possa ser representado como na Figura 3-20.



**Figura 3-20- Modelo do Escoamento 1-D em rotor centrífugo**

A Figura 3-20 representa um **rotor com número finito de pás de espessura não nula** e é um esquema da máquina real.

Para compatibilidade com o modelo de número infinito de pás deve-se **considerar que o escoamento segue a linha de esqueleto das pás reais**.

Para os cálculos 1-D é costume utilizar, como referência, o ponto do escoamento localizado na altura média das pás e a meio caminho entre duas pás vizinhas.

**As propriedades do escoamento a serem atribuídas a esse ponto são as propriedades médias.**

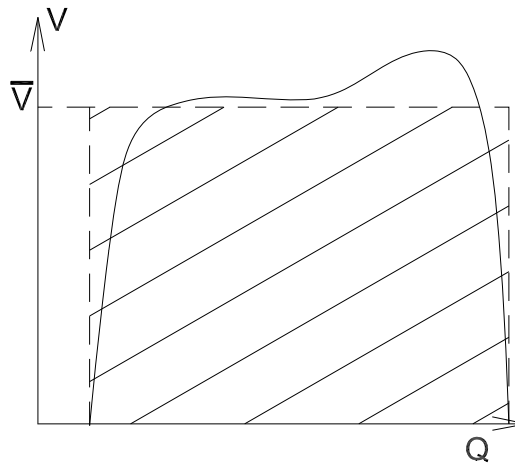
Esses pontos originam uma curva ao longo do canal entre as pás, não necessariamente uma linha de corrente.

**Ao se utilizarem as formas integrais das equações de conservação, o desempenho da máquina é baseado apenas nas variações de propriedades nas estações de entrada e de saída (A e B indicadas na Figura 3-20), não importando como o escoamento se desenvolve entre os pontos A e B, embora seja nesse caminho em que se dá a transferência de energia fluido-rotor.**

**Os triângulos de velocidades na entrada e na saída do canal são calculados utilizando-se as velocidades médias.**

### 3.4.2 PROPRIEDADES HOMOGÊNEAS

O fluido adere às superfícies sólidas devido à viscosidade, acarretando uma variação brusca da velocidade do fluido nas seções transversais do canal. Chama-se de **perfil de velocidades** à curva (ou superfície) que se obtém com o traçado de um gráfico das velocidades, como o indicado na Figura 3-21.



**Figura 3-21- Perfil de velocidade à entrada do rotor e velocidade média**

O valor médio da velocidade é calculado por

$$\bar{V} = \frac{1}{A} \int_A V dA$$

onde  $A$  é a área da seção considerada (entrada ou saída da grade), formada por duas pás consecutivas, pelo cubo e pela carcaça externa e  $V$  é a velocidade do escoamento em cada ponto nessa seção. Similarmente são calculadas as demais propriedades.

No modelo 1-D a velocidade em cada seção da grade é homogênea e equivale ao valor médio da velocidade nessa seção.

### **3.5 APLICAÇÃO ÀS MÁQUINAS DE FLUXO**

A finalidade desta seção é a preparação, de um modo unificado, das equações de conservação para serem aplicadas às máquinas de fluxo, seja para escoamento compressível ou incompressível, como também para rotor ou estator.

As equações serão desenvolvidas para que seja facilitado o cálculo das dimensões principais dessas máquinas, bem como possa ser calculado o seu desempenho no ponto de projeto.

O volume de controle a ser utilizado é o compreendido pelo canal formado por duas pás sucessivas, fechado na base pelo cubo e no topo pela carcaça externa.



### 3.5.1 CONSERVAÇÃO DA MASSA

**(Permite a obtenção das dimensões da máquina)**

A equação da conservação da massa, em regime permanente, aplicada ao volume de controle (canal entre duas pás), é

$$\oint_{SC} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad \# 3-6$$

Não há fluxo de massa através das paredes sólidas. Portanto, a contribuição para o fluxo é apenas das seções de entrada,  $S_e$ , e de descarga,  $S_d$ . Da equação # 3-6 vem

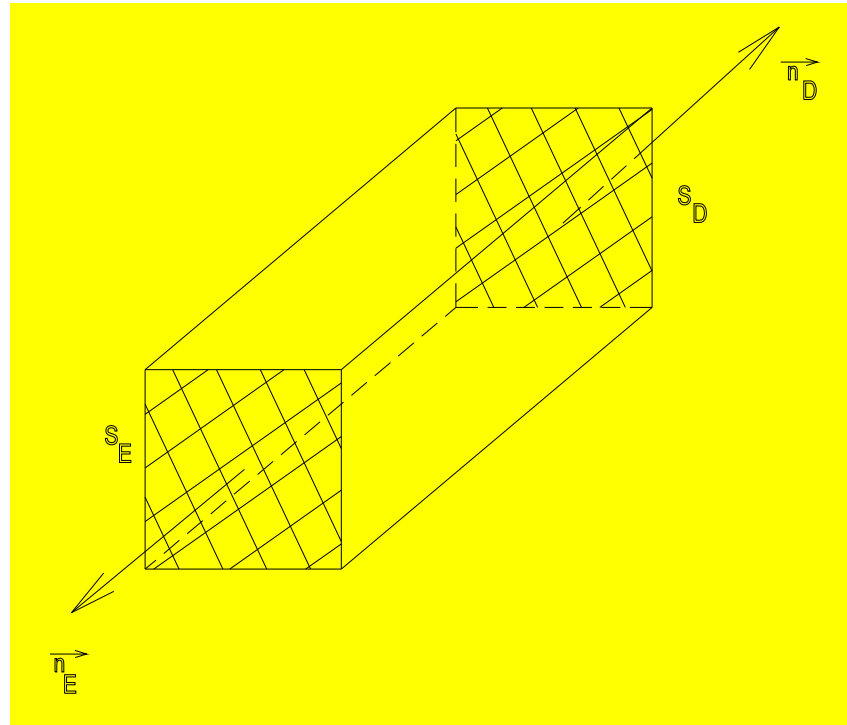
$$0 = \oint_{SC} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_e + S_d} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_e} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_d} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad \# 3-7$$

e, daí,

$$\iint_{S_e} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = - \iint_{S_d} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad \text{e como} \quad \iint_{S_e} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = -\dot{m}_e$$

(o sinal negativo indica que a partícula está entrando no VC)

e como  $\iint_{S_d} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \dot{m}_d$ , vem  $\boxed{\dot{m}_e = \dot{m}_d}$



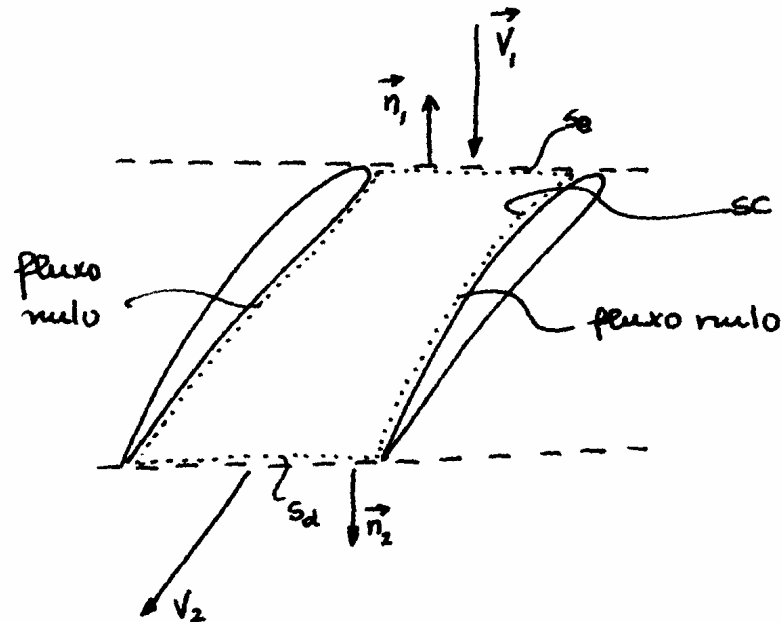
**Figura 3-22- Nomenclatura em elemento de volume**

# MÁQUINAS DE FLUXO

## NOTAS DE AULAS - 2010

3-72/162

isto é, a vazão em massa se conserva :  $\dot{m}_e = \dot{m}_d = \dot{m} = \text{constante}$ .



$$\oint_{S_c} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_{S_e} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \iint_{S_d} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

### 3.5.1.1 MÁQUINA AXIAL

#### a) estator

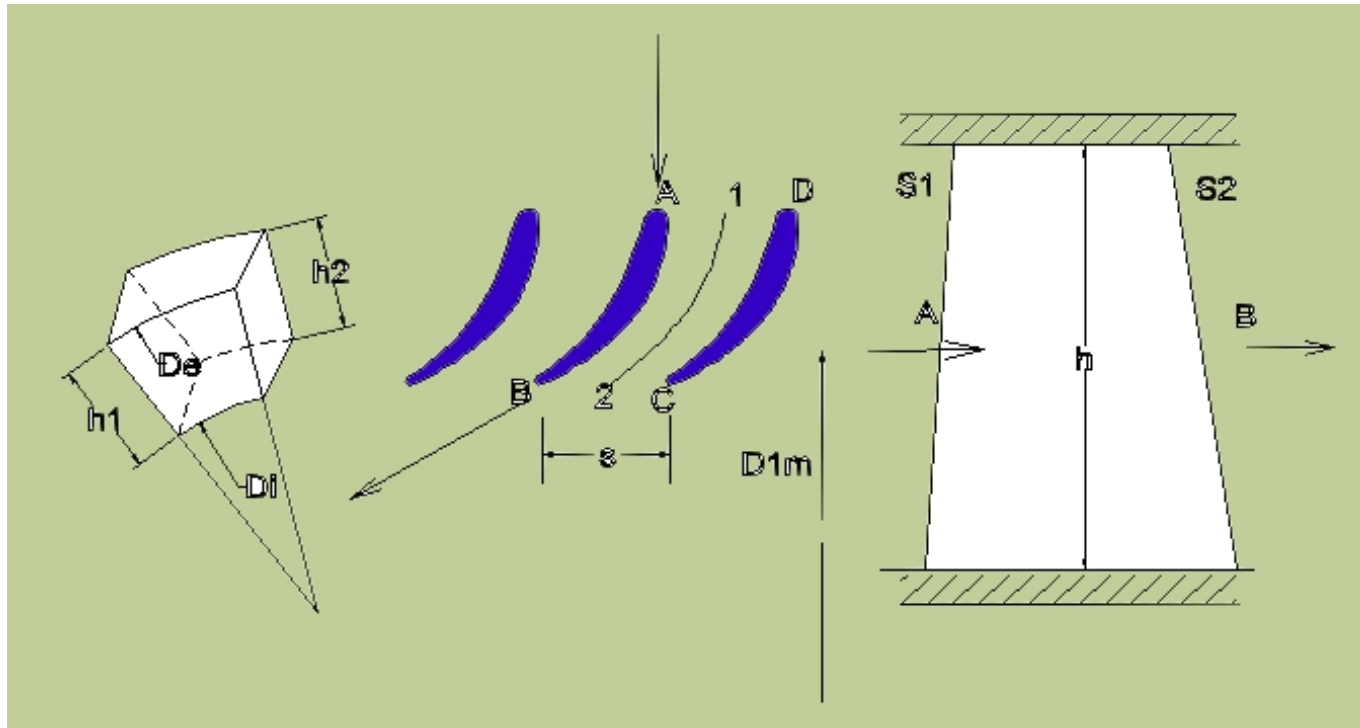


Figura 3-23- Esquemas para estator de máquina axial

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2$$

$$\dot{m}_1 = \iint_{S_1} \rho_1 V_{1m} dS_1 = \rho_1 V_{1m} A_1$$

$$\dot{m}_2 = \iint_{S_2} \rho_2 V_{2m} dS_2 = \rho_2 V_{2m} A_2$$

$$\rho_1 V_{1m} A_1 = \rho_2 V_{2m} A_2$$

Considerando a grade correspondente ao desenvolvimento no raio médio das pás:

$$S = \frac{\pi}{4} (D_e^2 - D_i^2) = \frac{\pi}{4} (D_e + D_i)(D_e - D_i) = \pi \frac{D_e + D_i}{2} \frac{D_e - D_i}{2} = \pi D_m h$$

Segue-se que

$$A_1 = \pi D_{1m} h_1,$$

$$A_2 = \pi D_{2m} h_2$$

e, portanto,

$$\rho_1 V_{1m} D_{1m} h_1 = \rho_2 V_{2m} D_{2m} h_2$$

No caso de a grade possuir  $N_p$  pás (embora a consideração seja de número infinito de pás) e o espaçamento ser  $s$ , vem:

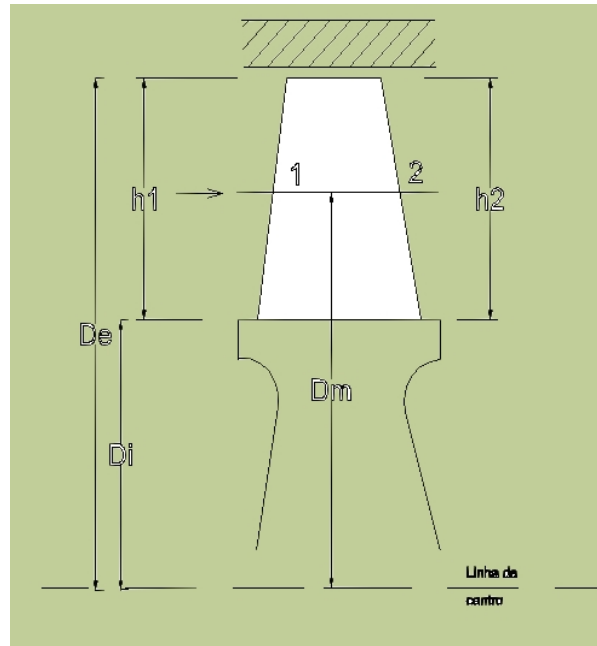
$$\pi D_m = N_p s$$

$$D_m = N_p s / \pi$$

$$\rho_1 V_{1m} s_1 h_1 = \rho_2 V_{2m} s_2 h_2$$

No caso particular de o escoamento ser incompressível e os diâmetros à entrada e à saída da grade serem iguais, isto é, as pás terem o mesmo comprimento, resulta que as velocidades meridionais são iguais:  $V_{1m} = V_{2m}$

b) Rotor



**Figura 3-24 - Esquema para rotor de máquina axial**

Neste caso,

$$V_m = V_a, \quad W_m = W_a \quad \text{e} \quad \dot{m}_1 = \dot{m}_2$$

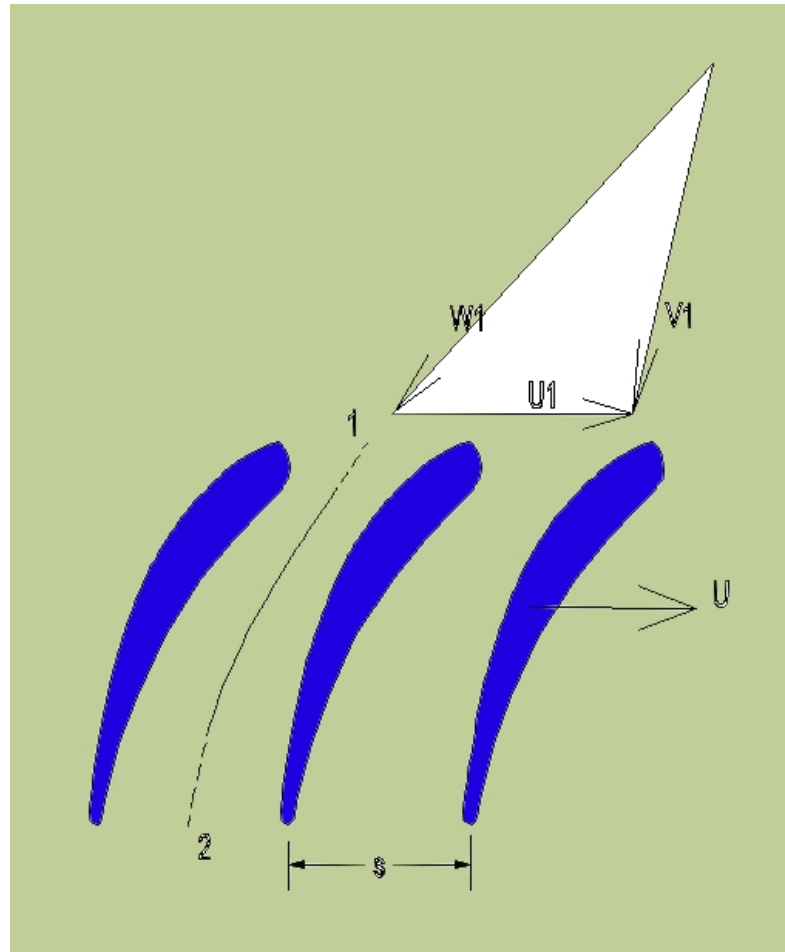
$$\dot{m}_1 = \iint_{S_1} \rho_1 W_{1m} dS_1 = \rho_1 W_{1m} A_1$$

$$\dot{m}_2 = \iint_{S_2} \rho_2 W_{2m} dS_2 = \rho_2 W_{2m} A_2$$

$$\rho_1 W_{1m} A_1 = \rho_2 W_{2m} A_2$$

Considerando a grade correspondente ao desenvolvimento no raio médio das pás:





**Figura 3-25- Grade axial e triângulo de velocidades**

$$S = \frac{\pi}{4} (D_e^2 - D_i^2) = \frac{\pi}{4} (D_e + D_i)(D_e - D_i) = \pi \frac{D_e + D_i}{2} \frac{D_e - D_i}{2} = \pi D_m h$$

Segue-se que

$$A_1 = \pi D_{1m} h_1,$$

$$A_2 = \pi D_{2m} h_2$$

e, portanto,

$$\rho_1 W_{1m} D_{1m} h_1 = \rho_2 W_{2m} D_{2m} h_2$$

No caso de a grade possuir  $N_p$  pás (embora a consideração seja de número finito de pás) e o espaçamento ser  $\underline{s}$ , vem:

$$\pi D_m = N_p s$$

$$D_m = N_p s / \pi$$

$$\rho_1 W_{1m} s_1 h_1 = \rho_2 W_{2m} s_2 h_2$$

No caso particular de o escoamento ser incompressível e os diâmetros à entrada e à saída da grade serem iguais, isto é, as pás terem o mesmo comprimento, resulta que as velocidades meridionais são iguais:

$$W_{1m} = W_{2m},$$

ou seja,

$$V_{1m} = V_{2m} \quad \text{e} \quad V_{1a} = V_{2a}$$

Os triângulos de velocidades, para este caso, ficam:

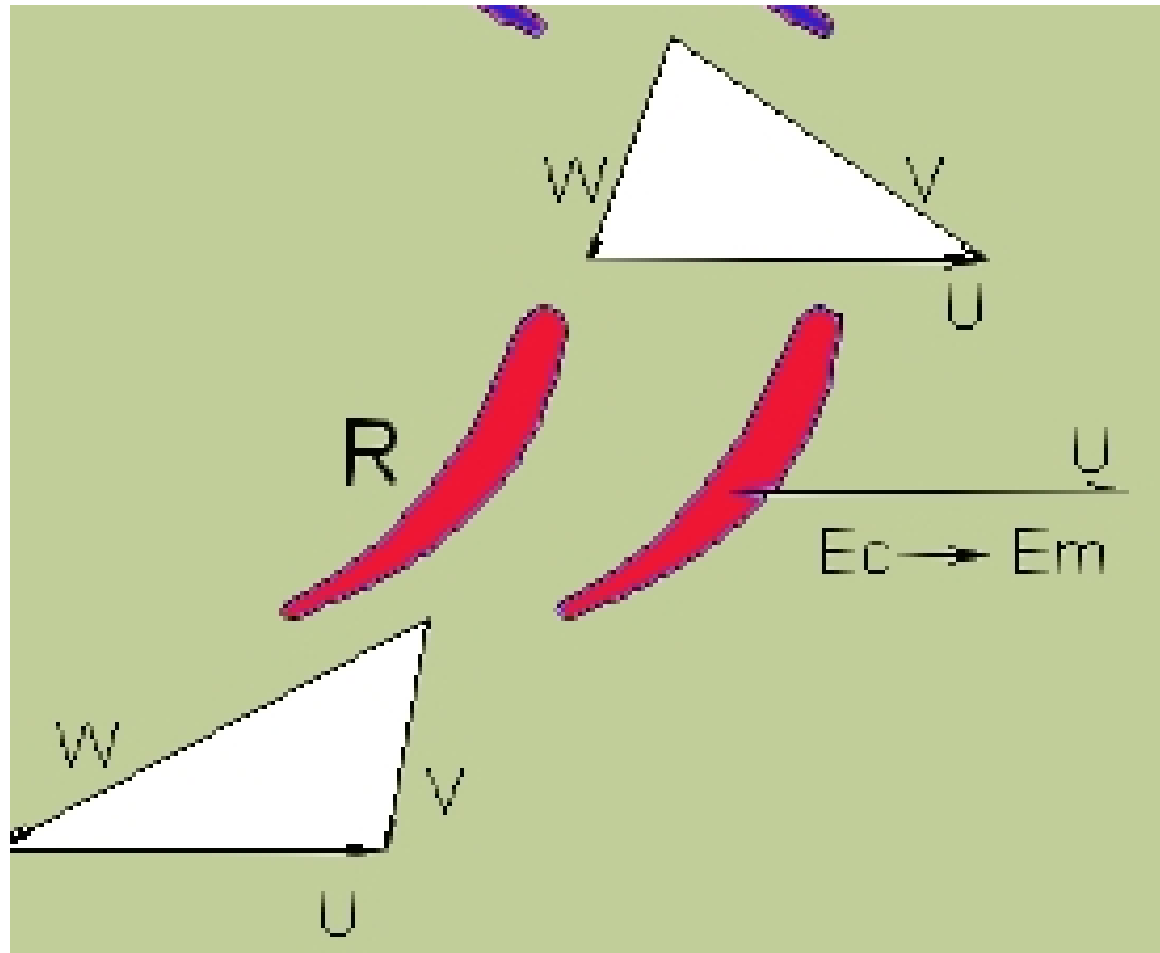


Figura 3-26- Triângulos de velocidades de uma turbina - entrada do rotor

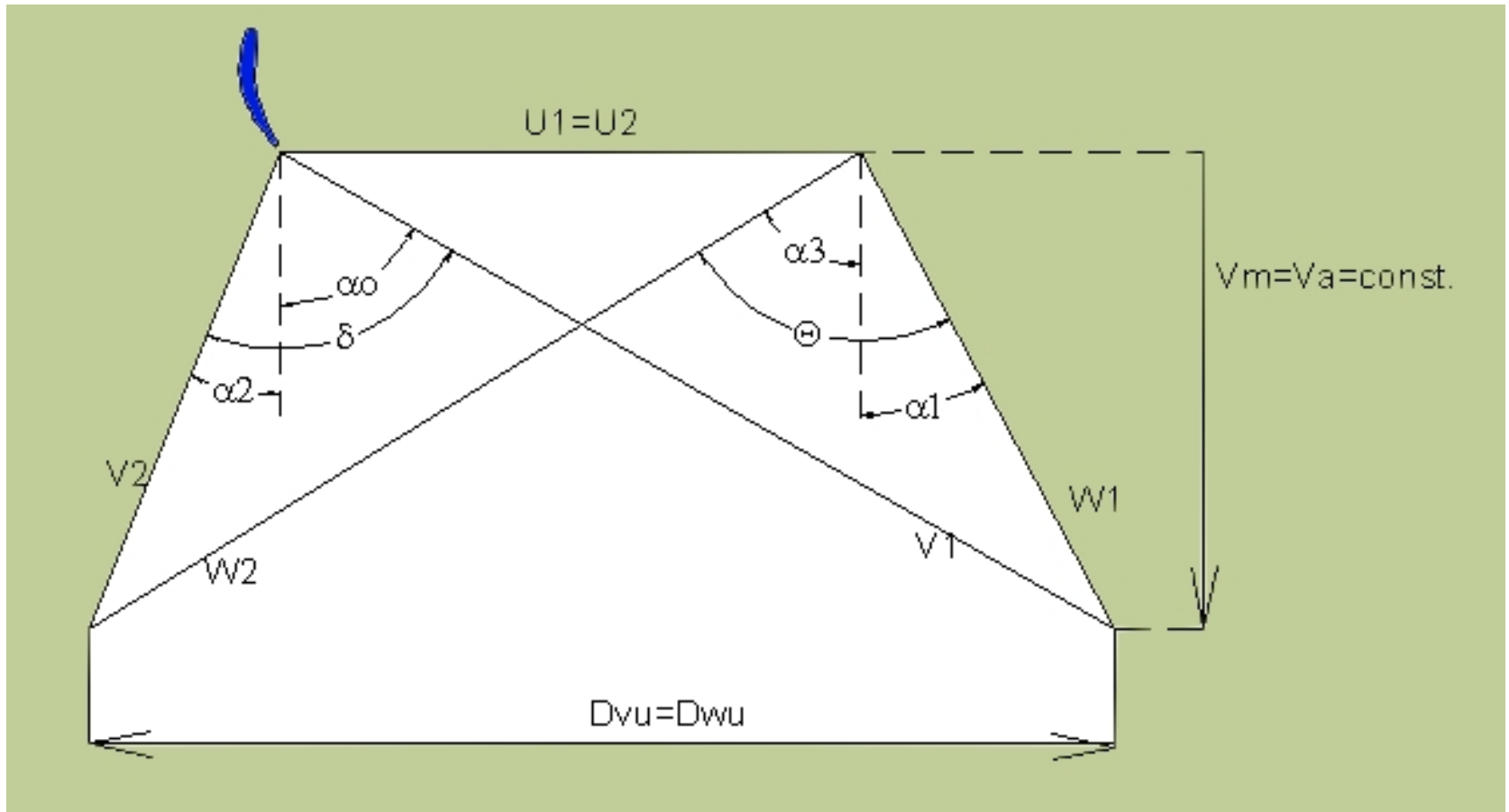


Figura 3-27- Triângulos de velocidades de uma turbina - velocidade meridional constante

### 3.5.1.2 MÁQUINA RADIAL

a) estator

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2$$

$$\dot{m}_1 = \iint_{S_1} \rho_1 V_{1m} dS_1 = \rho_1 V_{1m} A_1 = \rho_1 V_{1r} A_1$$

$$\dot{m}_2 = \iint_{S_2} \rho_2 V_{2m} dS_2 = \rho_2 V_{2m} A_2 = \rho_2 V_{2r} A_2$$

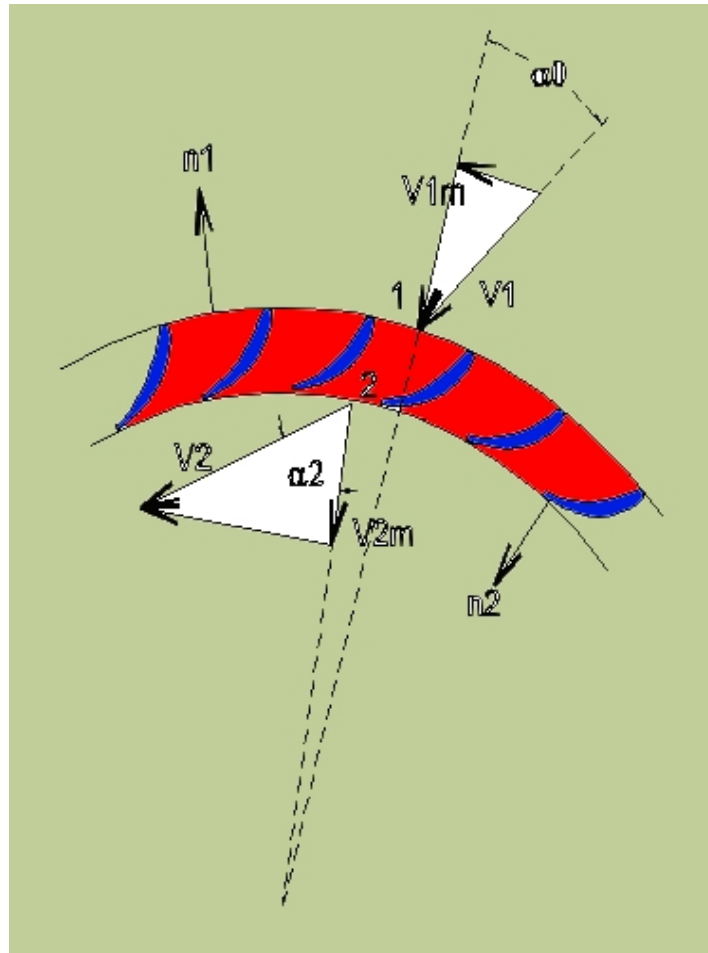


Figura 3-28- Esquema de grade de estator radial (injetor de uma turbina radial)

$$\rho_1 V_{1r} A_1 = \rho_2 V_{2r} A_2$$

Considerando o desenvolvimento da grade correspondente aos raios interno e externo das pás:

$$A_1 = \pi D_1 h_1,$$

$$A_2 = \pi D_2 h_2$$

vem

$$\rho_1 V_{1r} D_1 h_1 = \rho_2 V_{2r} D_2 h_2.$$

No caso particular de o escoamento ser incompressível e as pás terem altura constante, resulta que:  $D_1 V_{1r} = D_2 V_{2r}$   
Como  $D_1 > D_2$ , vem  $V_{1r} < V_{2r}$ , isto é, neste caso o estator acelera o escoamento, funcionando como um injetor.

b) rotor



$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2, \quad \dot{m}_1 = \iint_{S_1} \rho_1 W_{1m} dS_1 = \rho_1 W_{1m} A_1 = \rho_1 W_{1r} A_1$$

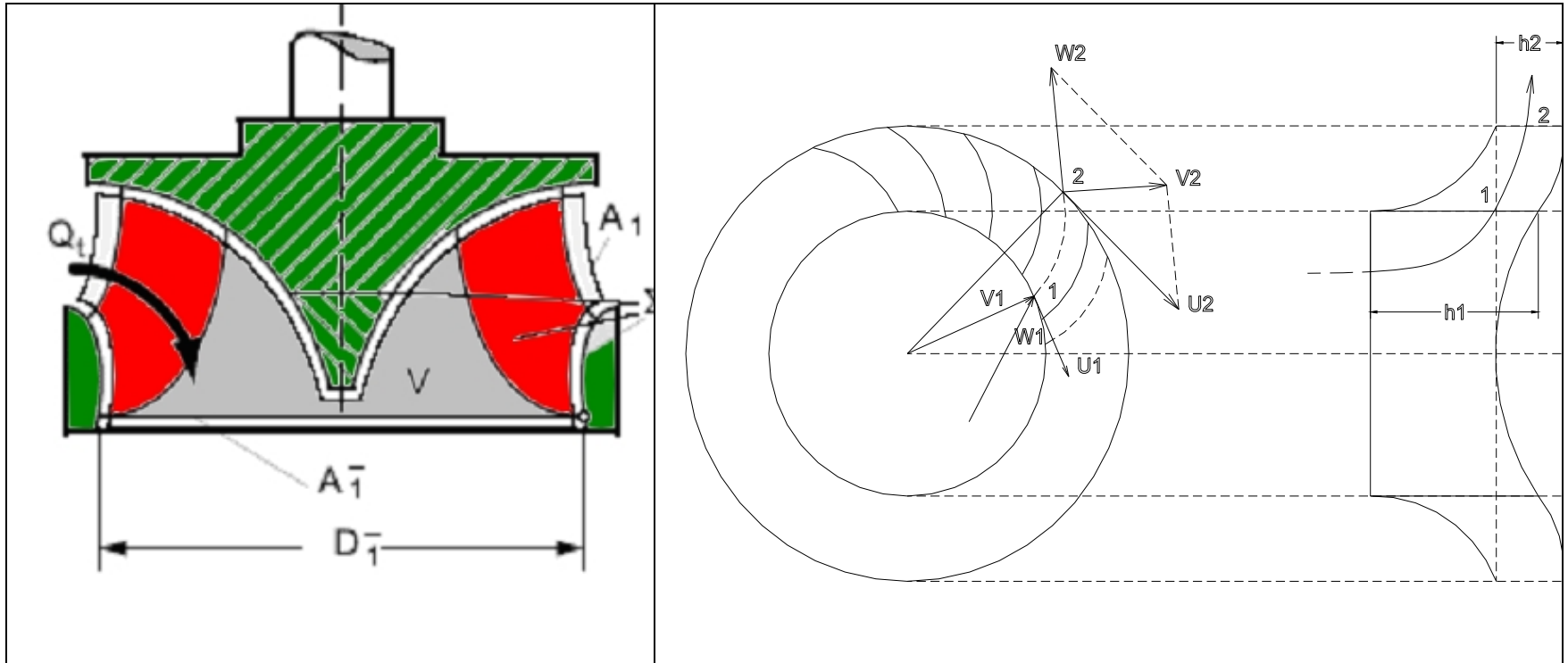


Figura 3-29- Esquema de rotor radial

$$\dot{m}_2 = \iint_{S_2} \rho_2 \mathbf{W}_{2m} dS_2 = \rho_2 \mathbf{W}_{2m} A_2 = \rho_2 \mathbf{W}_{2r} A_2$$

$$\rho_1 \mathbf{W}_{1r} A_1 = \rho_2 \mathbf{W}_{2r} A_2$$

Considerando o desenvolvimento da grade correspondente aos raios interno e externo das pás:

$$A_1 = \pi D_1 h_1 \quad \text{e} \quad A_2 = \pi D_2 h_2,$$

segue-se que

$$\rho_1 V_{1r} D_1 h_1 = \rho_2 V_{2r} D_2 h_2, \quad \text{pois } V_r = W_r$$

É aconselhável que a velocidade meridional não varie, isto é,

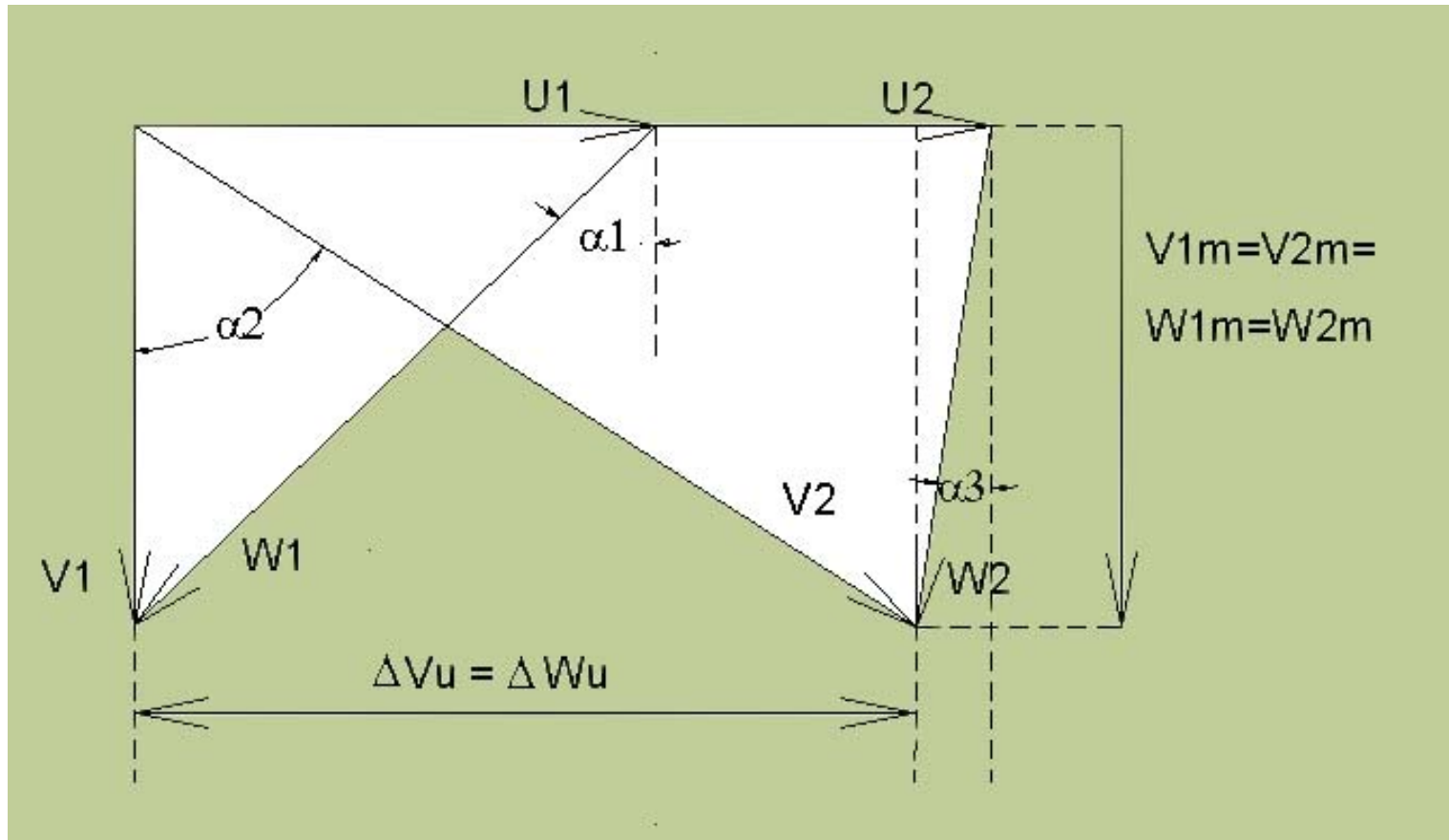
$$V_{1m} = V_{2m},$$

ou

$$V_{1r} = V_{2r}$$

para evitar efeitos da difusão.

Neste caso, os triângulos de velocidades ficam



**Figura 3-30- Triângulos de Velocidades - rotor radial - velocidade meridional constante**

### 3.5.1.3 MÁQUINA DE FLUXO MISTO (DIAGONAL)

À máquina diagonal se aplicam as mesmas equações da máquina radial, desde que se tenha em conta que as propriedades nas seções de entrada e de saída sejam médias, isto é,

$$\overline{W}_m = \frac{1}{A} \iint_A \rho \vec{W} \cdot \vec{n} dA$$

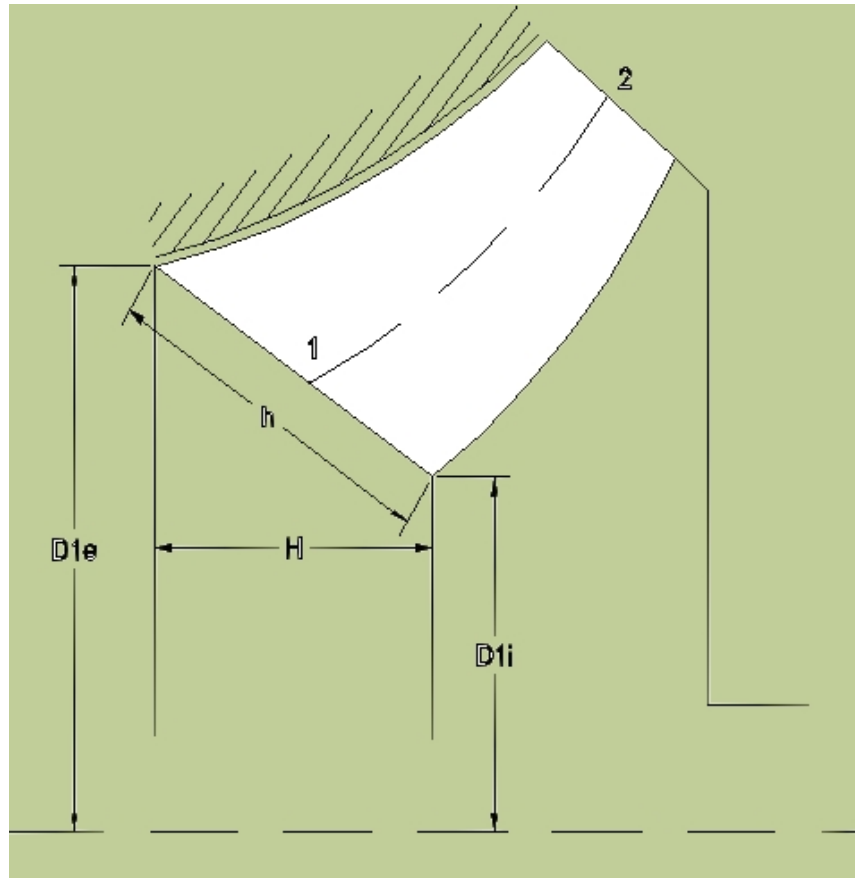
$$\overline{\rho} = \frac{1}{A} \iint_A \rho dA$$

As superfícies das seções (1) e (2) são superfícies de troncos de cones cujas áreas podem ser avaliadas por

$$A = \pi D_m h$$

Com

$$D_m = \frac{1}{2}(D_i + D_e)$$



**Figura 3-31- Esquema de rotor diagonal (misto)**

### 3.5.2 CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO LINEAR

(Relaciona os parâmetros  $\mathbf{P}$ ,  $\vec{v}$  e  $\rho$  do escoamento)

### EQUAÇÕES DE EULER E DE BERNOULLI

A equação 4.16 pode ser rescrita como

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{V}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \vec{V} + p \vec{\mathbf{I}} - \vec{\tau}) - \rho \vec{g} = \vec{0}$$

**Equação de Euler global**

(Obs.: note que o nome Euler é usualmente associado a escoamento não-viscoso. Ver Avellan, F. - Cours de Turbomachines Hydrauliques - Équations des Turbomachines.)

Com  $\vec{\tau}$  definido por,

$$\vec{\tau} = 2\mu \vec{\mathbf{D}} + \lambda(\vec{\nabla} \cdot \vec{V})\vec{\mathbf{I}} \text{ sendo:}$$

$\vec{\mathbf{D}}$  - Diádica de deformação;

$\mu$  - Viscosidade dinâmica do fluido;

$\lambda$  - 2º coeficiente de viscosidade;

Substituindo na equação 4.16, temos,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{V}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \vec{V} + p \vec{I}) - \nabla \cdot (2\mu \vec{D} + \lambda(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \vec{I}) - \rho \vec{g} = 0$$

Como  $\vec{\nabla} \cdot (p \vec{I}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{e}_i \cdot [p \vec{e}_k \vec{e}_l \delta_{kl}] = \frac{\partial p}{\partial x_i} \vec{e}_k \delta_{ik} = \frac{\partial p}{\partial x_i} \vec{e}_i = \vec{\nabla} p$ , e

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \vec{I}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{e}_i \cdot [\vec{V} \vec{e}_k \vec{e}_l \delta_{kl}] = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_i} \vec{e}_k \delta_{ik} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_i} \vec{e}_i = \vec{\nabla} \vec{V}, \text{ vem}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{V}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \vec{V} + p \vec{I}) - \nabla \cdot (2\mu \vec{D} + \lambda(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \vec{I}) - \rho \vec{g} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{V}) + (\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V})) \vec{V} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \rho \vec{V} + \vec{\nabla} p - \rho \vec{g} - \vec{\nabla} \cdot (2\mu \vec{D}) - \vec{\nabla} \cdot [\lambda(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \vec{I}] = \vec{0}$$

# 3-8



Pondo

$$\vec{g} = -g\vec{\nabla}z$$

obté-m-se

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V}) + (\vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}))\vec{V} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\rho\vec{V} + \vec{\nabla}P + \rho g\vec{\nabla}z - \nabla \cdot (2\mu\vec{\vec{D}}) - \vec{\nabla} \cdot [\lambda(\vec{\nabla} \cdot \vec{V})\vec{\vec{I}}] = \vec{0}$$

ou

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \vec{V} + (\vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}))\vec{V} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\rho\vec{V} + \vec{\nabla}P + \rho g\vec{\nabla}z - \nabla \cdot (2\mu\vec{\vec{D}}) - \vec{\nabla} \cdot [\lambda(\vec{\nabla} \cdot \vec{V})\vec{\vec{I}}] = \vec{0}$$

Da equação da continuidade tem-se  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}) = 0$ , o que permite escrever

$$\underbrace{\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho \vec{V} \vec{V} \cdot \vec{V} + \vec{\nabla} P + \rho g \vec{\nabla} z - \vec{\nabla} \cdot (2\mu \vec{\vec{D}}) - \vec{\nabla} \cdot [\lambda (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \vec{\vec{I}}]}_{\rho \frac{D\vec{v}}{Dt}} = \vec{0}$$

Mas

e, então,

$$\vec{\nabla} P + \rho g \vec{\nabla} z + \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot (2\mu \vec{\vec{D}}) + \vec{\nabla} \cdot [\lambda (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \vec{\vec{I}}] \quad \# 3-9$$

Uma expressão mais geral pode ser obtida, notando-se que

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} V_x + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} V_y + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} V_z =$$

$$= \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{V} \bullet \vec{\nabla}) \vec{V}}_{\vec{\nabla} \left( \frac{V^2}{2} \right) - \vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V})}$$

e que, também,

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left( \frac{V^2}{2} \right) - \vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V})$$

onde  $V = |\vec{V}|$

Como numa linha de corrente verifica-se  $\vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \vec{0}$ , a equação 5-6 da conservação da quantidade de movimento pode ser rescrita como

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho \vec{\nabla} \left( \frac{\vec{V}^2}{2} \right) + \vec{\nabla} P + \rho g \vec{\nabla} z = \vec{\nabla} \bullet (2\mu \vec{\vec{D}}) + \vec{\nabla} \bullet \left[ \lambda (\vec{\nabla} \bullet \vec{V}) \vec{\vec{I}} \right]$$

Para escoamento **incompressível**,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$  e  $\rho = \text{const.}$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \left( \frac{\vec{V}^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz \right) = \vec{\nabla} \cdot (2\nu \vec{\vec{D}})$$

onde  $\mu$  é considerado constante e  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$

Numa linha de corrente, tem-se:

$$\vec{\nabla} f \cdot \vec{t} = \frac{df}{ds}$$

onde  $\vec{t}$  é um vetor unitário tangente a linha de corrente.

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \cdot \vec{t} + \vec{V} \left( \frac{\vec{V}^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz \right) \cdot \vec{t} = \vec{\nabla} \cdot (2\nu \vec{\vec{D}}) \cdot \vec{t}$$

ou

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \bullet \vec{t} + \frac{d}{ds} \left( \frac{\vec{V}^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz \right) = \vec{V} \bullet (2\nu \vec{\vec{D}}) \bullet \vec{t}$$

Multiplicando por ds,

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \bullet \vec{t} ds + \frac{dV^2}{2} + \frac{dP}{\rho} + gdz = \vec{V} \bullet (2\nu \vec{\vec{D}}) \bullet \vec{t} ds$$

ou

$$\frac{\partial V}{\partial t} ds + \frac{dV^2}{2} + \frac{dP}{\rho} + gdz = \vec{V} \bullet (2\nu \vec{\vec{D}}) \bullet \vec{t} ds$$

### 3.5.2.1 EQUAÇÃO DE BERNOULLI

A equação de Euler é válida para escoamentos incompressíveis e compressíveis

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} ds + dP + \frac{1}{2} \rho dV^2 + \rho g dz = \vec{\nabla} \bullet (2\mu \vec{D}) \bullet \vec{t} ds + \vec{\nabla} \bullet \left[ \lambda (\vec{\nabla} \bullet \vec{V}) \vec{I} \right] \bullet \vec{t} ds$$

### 3.5.2.1.1 Equação de Bernoulli para escoamento incompressível

Para **escoamento incompressível**, a forma **completa** da **Equação de Bernoulli** é obtida através da integração da equação de Euler entre dois pontos quaisquer sobre uma mesma linha de corrente:

$$\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g(z_2 - z_1) = -\int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t} ds + \int_1^2 \vec{V} \cdot (2v\vec{D}) \cdot \vec{t} ds$$

Se o regime de escoamento for permanente e o fluido não for viscoso, os termos do lado direito da forma completa da equação de Bernoulli são nulos. A nova fórmula obtida é conhecida como a **Equação de Bernoulli**

$$\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante}$$

# 3-10

Deve-se observar que **a equação de Bernoulli se aplica a escoamento permanente, não viscoso (sem perdas), incompressível sobre uma mesma linha de corrente (ou escoamento irrotacional).**

Numa máquina de fluxo, embora o escoamento seja muito mais complexo, é adequado considerá-lo mais simplificado de tal forma que satisfaz estas condições. Desta forma, a equação de Bernoulli é bastante empregada no estudo dessas máquinas.

Deve-se, todavia, observar que o termo  $\frac{1}{2}V^2$  foi derivado do termo de **aceleração absoluta**  $\frac{d\vec{v}}{dt}$  da equação de Euler. **Nos estatores**, essa aceleração coincide com a aceleração relativa (do escoamento dentro do canal), o que permite aplicar **a equação de Bernoulli também para o escoamento relativo.**



Nos rotores, entretanto, é conveniente utilizar informações do escoamento relativo. Desta forma, é preciso alterar as equações de conservação escrevendo a aceleração absoluta  $\frac{d\vec{v}}{dt}$  em termos da aceleração relativa.

### 3.5.2.1.2 Equivalente da equação de Bernoulli para escoamento compressível

Como a equação de Bernoulli é válida apenas para escoamentos incompressíveis, não pode ser aplicada a compressíveis.

Muitos fluidos de interesse em engenharia são compressíveis (ar, produtos da combustão em ar atmosférico, etc.) e se comportam razoavelmente como de gases perfeitos, cuja equação de estado é

$$P = \rho RT$$

Nas máquinas de fluxo com escoamento compressível pode haver variação apreciável da temperatura do fluido devido à variação da pressão ao longo da máquina.

Entretanto, a troca de calor com o ambiente externo é muito pequena face às demais formas de energia do escoamento. Isto permite considerá-las como sendo **máquinas adiabáticas**.

Esses escoamentos idealizados, sem perdas, são isentrópicos. Utilizando-se a equação de Gibbs e fazendo-se a hipótese de propriedades constantes, pode-se obter a **equação isentrópica**

$$P = k\rho^\gamma, \text{ com } k \text{ constante e}$$

$$\gamma = \frac{c_P}{c_V}$$

Para escoamento compressível, a integração do termo  $\frac{dP}{\rho}$  da equação de Euler só pode ser feita se for conhecido como varia a densidade em função da pressão (no caso incompressível, a densidade era constante).

Muitos dos fluidos compressíveis têm densidades pequenas  $\rightarrow$  termo  $g \cdot dz$ , correspondente ao peso da partícula fluida, pode ser desprezado.

Tem-se, então, a equação de Euler reduzida a:

$$\frac{dP}{\rho} + \frac{1}{2} dV^2 = 0$$

Então,

$$dP = k \gamma \rho^{\gamma-1} d\rho$$

$$dP/\rho = k \gamma \rho^{\gamma-2} d\rho$$

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dP}{\rho} = \int_{\rho_1}^{\rho_2} k\gamma\rho^{\gamma-2}d\rho = k\gamma \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} \Big|_{\rho_1}^{\rho_2} = k \frac{\gamma}{\gamma-1} [\rho_2^{\gamma-1} - \rho_1^{\gamma-1}] =$$

$$= \frac{P_1}{\rho_1^\gamma} \frac{\gamma}{\gamma-1} [\rho_2^{\gamma-1} - \rho_1^{\gamma-1}] = \frac{P_1}{\rho_1} \frac{\gamma}{\gamma-1} \left[ \left( \frac{\rho_{2s}}{\rho_1} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] = R \frac{\gamma}{\gamma-1} T_1 \left[ \left( \frac{\rho_{2s}}{\rho_1} \right)^{\gamma-1} - 1 \right]$$

ou

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dP}{\rho} = c_{p1} T_1 \left[ \left( \frac{\rho_{2s}}{\rho_1} \right)^{\gamma-1} - 1 \right]$$

# 3-12

pois  $R \frac{\gamma}{\gamma-1} = c_p$ .

Ainda,  $\frac{P_{2s}}{P_1} = \left( \frac{\rho_{2s}}{\rho_1} \right)^\gamma$  ou  $\frac{\rho_{2s}}{\rho_1} = \left( \frac{P_{2s}}{P_1} \right)^{1/\gamma}$ , de onde vem

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dP}{\rho} = c_{p1} T_1 \left[ \left( \frac{P_{2s}}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]$$

# 3

A equação # 3-10, integrada ao longo de um percurso 1-2s considerando processo isentrópico, dá:

$$c_{p1} T_1 \left[ \left( \frac{P_{2s}}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] + \frac{V_{2s}^2 - V_1^2}{2} = 0 \quad \text{ou}$$

$$\frac{P_{2s}}{P_1} = \left[ 1 - \frac{V_{2s}^2 - V_1^2}{2c_{p1} T_1} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

# 3-14

Também,

## MÁQUINAS DE FLUXO

### NOTAS DE AULAS - 2010

3-108/162

$$\frac{P_{2s} - P_1}{\rho_1} = \left\{ \left[ 1 - \frac{V_{2s}^2 - V_1^2}{2c_{p1} T_1} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right\} \frac{P_1}{\rho_1}$$

ou

$$\frac{P_{2s} - P_1}{\rho_1} = \left\{ \left[ 1 - \frac{V_{2s}^2 - V_1^2}{2c_{p1} T_1} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right\} RT_1$$

Como no estator de u'a máquina movida  $V_{2s} < V_1$ , segue-se que  $P_{2s} > P_1$ , isto é, **no estator a pressão estática aumenta.**

### 3.5.2.1.3 Equação de Bernoulli para Estator

Com as hipóteses de escoamento 1-D incompressível, a equação de Bernoulli aplicada a um estator resulta, desprezando-se o termo  $g(z_2 - z_1)$ :

$$\frac{P_2 - P_1}{\rho} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} = \int_1^2 \vec{\nabla} \cdot (2v\vec{D}) \cdot \vec{t} ds$$

ou

$$\frac{\Delta P}{\rho} = -\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \int_1^2 \vec{\nabla} \cdot (2v\vec{D}) \cdot \vec{t} ds$$

Como, no estator de uma máquina movida,  $V_2 < V_1$ , então  $\Delta p > 0$ , isto é, **no estator a pressão estática aumenta.**

Note-se que, embora sejam considerados estatores as IGVs de máquinas movidas, nessas grades  $V_2 > V_1$  e, portanto, a pressão estática diminui.



#### 3.5.2.1.4 Equação de Bernoulli para Rotor

Para o estudo do escoamento no rotor é mais conveniente utilizar as propriedades do **escoamento relativo** no rotor.

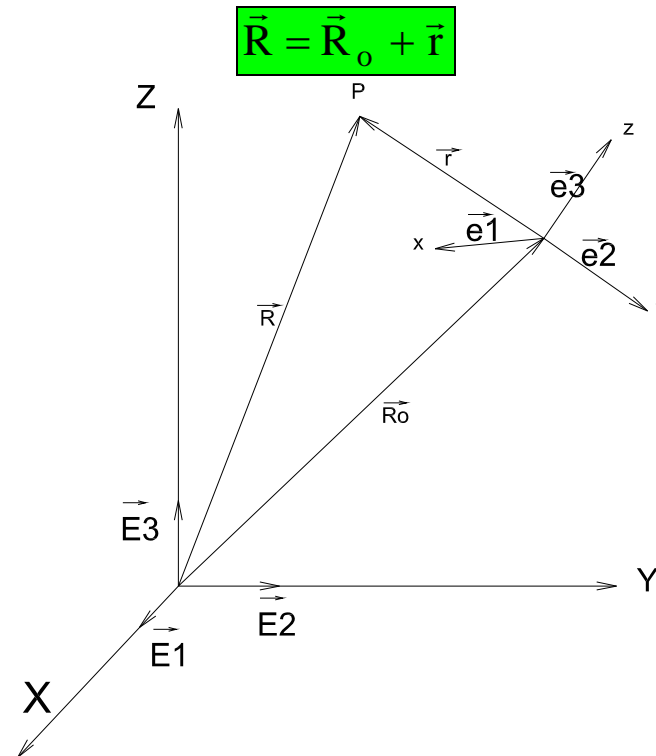
As **equações de conservação empregam propriedades absolutas**.

É necessário que se introduzam as informações relativas ao movimento do rotor na equação de Euler.

O termo da derivada substancial (derivada material ou derivada total) precisa ser expresso em termos das acelerações relativas.

Sejam, portanto, o **sistema inercial**  $(X_1, X_2, X_3)$  e o **sistema não-inercial**  $(x_1, x_2, x_3)$  os sistemas de coordenadas, conforme esquematizado na Figura 3-32.

A equação vetorial ligando os vetores de posição de uma partícula de fluido genérica é



**Figura 3-32- Esquema para determinação da aceleração de uma partícula de fluido**

Podem-se obter diversas formas da equação de conservação de movimento linear, das quais

$$\vec{\nabla}P \cdot d\vec{s} - \rho \vec{g} \cdot d\vec{s} + \rho \vec{v} \cdot d\vec{s} = \vec{\nabla} \cdot (2\mu \vec{\vec{D}}) \cdot d\vec{s} + \vec{\nabla} \cdot \left[ \lambda (\vec{\nabla} \cdot \vec{W}) \vec{\vec{I}} \right] \cdot d\vec{s}$$

# 3-15

é a chamada **Equação de Euler para rotores**.

Notar que, na parte referente às tensões viscosas, deve-se usar a velocidade relativa (o efeito viscoso está associado aos gradientes da velocidade no canal).

Para uma linha de corrente pode-se obter

$$dP + \frac{1}{2} \rho d(W^2 - U^2) + \rho g dz = \vec{\nabla} \cdot (2\mu \vec{\vec{D}}) \cdot d\vec{s} + \vec{\nabla} \cdot \left[ \lambda (\vec{\nabla} \cdot \vec{W}) \vec{\vec{I}} \right] \cdot d\vec{s}$$

# 3-16

que é a **Equação de Euler para uma linha de corrente** (do escoamento relativo), em

regime permanente e para u'a máquina com velocidade angular constante.

Pode-se observar que, no caso de um rotor parado ( $\omega = 0$ ), a velocidade periférica é nula, a velocidade relativa coincide com a velocidade absoluta e as equações **Erro! A origem da referência não foi encontrada.** e 3.10 tornam-se idênticas, como era de se esperar.

De um modo geral, para escoamentos incompressíveis e viscosos, integrando-se a eq. 5-25 entre os pontos 1 e 2:

$$\Delta P = \frac{1}{2} \rho \left[ (U_2^2 - U_1^2) + (W_1^2 - W_2^2) \right] - \rho g z + \int_1^2 \vec{\nabla} \cdot (2\mu \vec{D}) \cdot \vec{t} ds$$

# 3-17b

Para fluidos incompressíveis e não viscosos, a equação pode ser simplificada e passa a ser conhecida como **Equação de Bernoulli para rotores**:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}(W^2 - U^2) + gz = \text{const}$$

# 3-18

Quando o termo de forças de campo é desprezível, esta equação aplicada à entrada e à saída de um rotor dá

$$\frac{\Delta P}{\rho} = \frac{1}{2} \left[ (U_2^2 - U_1^2) + (W_1^2 - W_2^2) \right]$$

# 3-19

### 3.5.2.1.5 Equivalente da Equação de Bernoulli para rotores para escoamento compressível

Para escoamento isentrópico compressível de gás perfeito, analogamente ao feito para obter a equação **Erro! A origem da referência não foi encontrada.**, chega-se a:

$$\frac{P_{2s}}{P_1} = \left[ 1 + \frac{W_1^2 - W_{2s}^2}{2c_p T_1} + \frac{U_2^2 - U_1^2}{2c_p T_1} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

# 3-20

$$\frac{W_1^2 - W_{2s}^2}{2c_p T_1}$$

é a contribuição da variação da energia cinética relativa

$$\frac{U_2^2 - U_1^2}{2c_p T_1}$$

é a contribuição do efeito centrífugo.

]

A equação # 3-20 reduz-se à equação # 3-13 quando o rotor estiver parado, pois a velocidade periférica é nula e a velocidade relativa coincide com a velocidade absoluta.

### 3.5.3 CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO ANGULAR

(Relaciona o trabalho específico e a potência com as velocidades do escoamento)

? torque (momento) transmitido pelo eixo da máquina, resultante das forças que atuam nas pás ?

No sistema de coordenadas ortonormal com o eixo z coincidente com o eixo de rotação da máquina → momento na direção z.

$$M_z = \iiint_{SC} r V_u \, d\Omega$$

Considerando um valor médio para  $rV_u$  nas seções de entrada e de saída da grade,  $rV_u = \text{constante}$



$$M_z = -r_1 V_{1u} \dot{m}_1 + r_2 V_{2u} \dot{m}_2 = \dot{m}(r_2 V_{2u} - r_1 V_{1u}),$$

ou,

$$M_z = \dot{m}(r_2 V_{2u} - r_1 V_{1u})$$

# 3

A potência associada ao torque  $M_z$ , quando a velocidade angular do eixo é  $\omega$ , será:

$$\dot{W} = \omega M_z = \dot{m}\omega(r_2 V_{2u} - r_1 V_{1u}) =$$

$$= \dot{m}(\omega r_2 V_{2u} - \omega r_1 V_{1u})$$

ou

$$\dot{W} = \dot{m}(U_2 V_{2u} - U_1 V_{1u})$$

# 3

de onde resulta que o **trabalho específico** (*potência específica*),

$$W_e = \frac{\dot{W}}{\dot{m}},$$

vale

$$W_e = (U_2 V_{2u} - U_1 V_{1u})$$

# 3-23

Utilizando propriedades dos triângulos (lei dos cossenos):

$$W_e = U_2 V_2 \cos \alpha_2 - U_1 V_1 \cos \alpha_0$$

$$= \frac{1}{2} [U_2^2 + V_2^2 - W_2^2 - (U_1^2 + V_1^2 - W_1^2)]$$

$$= \frac{1}{2} [U_2^2 - U_1^2 + V_2^2 - V_1^2 + W_1^2 - W_2^2]$$

Logo,

$$W_e = (U_2 V_{2u} - U_1 V_{1u})$$

ou

$$W_e = \frac{1}{2} [(U_2^2 - U_1^2) + (V_2^2 - V_1^2) + (W_1^2 - W_2^2)]$$

1º termo → energia para fazer o fluido girar ao redor do eixo

2º termo → aumento da energia cinética no rotor

3º termo → recuperação da energia de pressão pela à redução da velocidade relativa do fluido.

No caso de compressores axiais em que a relação de raios raiz-topo da pá é elevada ( $>0,85$ ), a velocidade periférica (ou velocidade tangencial)  $U_2$  é aproximadamente igual à velocidade tangencial  $U_1$  e, por simplicidade, serão designadas por  $U$ . Assim,

**MÁQUINAS DE FLUXO**  
**NOTAS DE AULAS - 2010**

3-121/162

$$W_e = U(V_{2u} - V_{1u}) = U\Delta V_u = U\Delta W_u$$

# 3

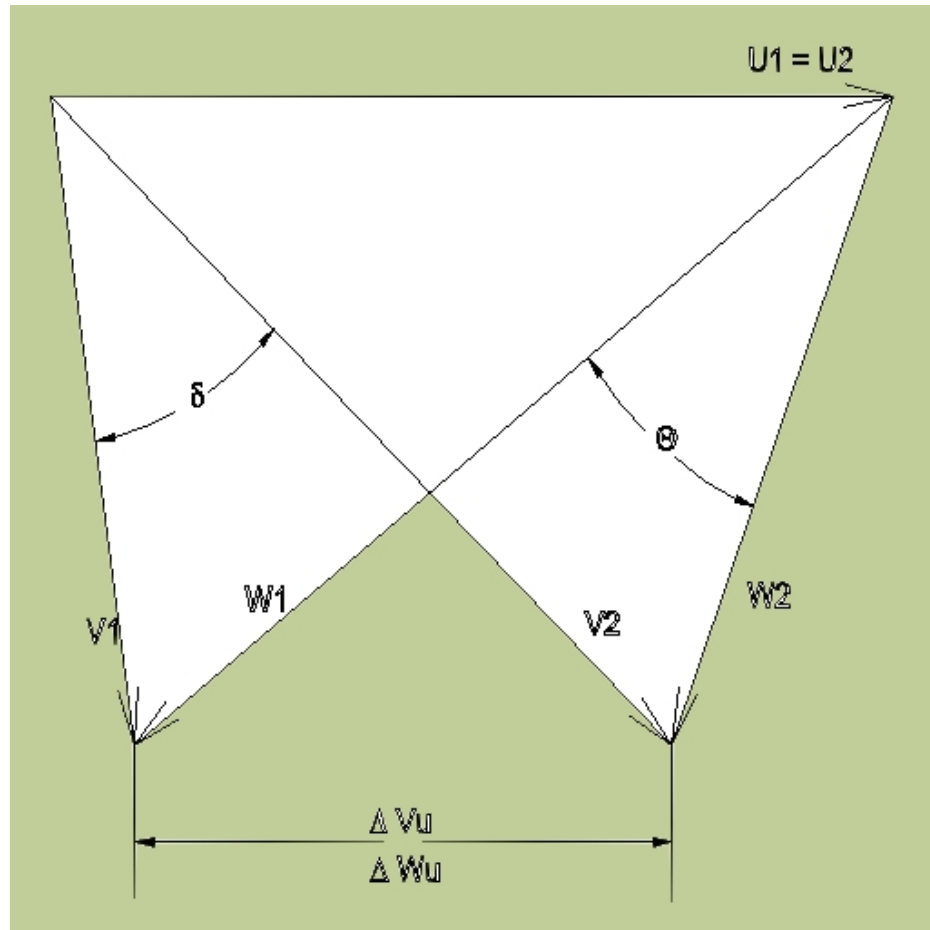
Neste caso, deve-se observar que o trabalho específico  $W_e$  é calculado a partir da velocidade periférica  $U$  e da diferença das velocidades tangenciais  $V_{1u} - V_{2u}$ , (ou  $W_{2u} - W_{1u}$ ).

Levando-se em conta a Eq. 5-27,

$$W_e = \frac{1}{2} \left[ (U_2^2 - U_1^2) + (W_1^2 - W_2^2) \right] + \frac{1}{2} (V_2^2 - V_1^2)$$

$$W_e = \frac{\Delta P}{\rho} + \frac{1}{2} (V_2^2 - V_1^2)$$

$$W_e = \frac{\Delta P_t}{\rho}$$



**Figura 3-33- Triângulos de velocidades - máquina axial - velocidade axial constante**

Observando-se que  $W_e = U\Delta V_u = U\Delta W_u$  e a forma dos triângulos de velocidades pode-se concluir que, fixada a vazão em massa e a potência produzida pela máquina:

- precisa-se de pequena deflexão  $\delta$  do escoamento quando a velocidade  $U$  for elevada, pois  $\Delta V_u$  deve ser pequeno
- a deflexão  $\delta$  do fluido deve ser maior quando a velocidade  $U$  for pequena, pois  $\Delta V_u$  deve ser elevado.

A deflexão  $\Delta$  que as pás devem impor ao fluido é limitada devido às características aerodinâmicas do escoamento → trabalho específico elevado é preciso que a velocidade periférica seja elevada.

O máximo valor de  $U$  é imposto por limitações metalúrgicas. Hoje este limite é de cerca de 450m/s.

As equações 5-29 e 5-30 são aplicáveis a máquinas axiais e radiais indistintamente.

**MÁQUINAS DE FLUXO**  
**NOTAS DE AULAS - 2010**

3-124/162

Trabalho específico é positivo para as máquinas movidas, e negativo para as máquinas motoras (**sinal é apenas convencional**, nas máquinas movidas o eixo está fornecendo energia ao fluido; nas máquinas motoras está retirando energia do mesmo.

### 3.5.4 CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

**(Relaciona o trabalho específico e a potência com parâmetros do escoamento:  
 $h$ ,  $P$ ,  $\rho$  e  $\bar{v}$ )**

Mesmas hipóteses feitas no caso das outras duas equações de conservação (regime permanente, escoamento adiabático, sem geração de energia, não-viscoso e sem trabalho externo) → escoamento incompressível e com as propriedades uniformes nas seções de entrada e de descarga:

$$(e_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{P_2}{\rho_2}) - (e_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{P_1}{\rho_1}) = 0$$

ou, para uma mesma linha de corrente

$$e + \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz = \text{const}$$



No caso de haver trabalho específico de eixo e/ou transferência de calor pela superfície de controle, estas formas de energia devem ser levadas em conta.

$$(e_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{P_2}{\rho_2}) - (e_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{P_1}{\rho_1}) = \pm Q \pm W$$

# 3

Define-se **entalpia específica**  $h$  (ou simplesmente **entalpia**, ou entalpia estática) por

$$h = e + \frac{P}{\rho}$$

# 3

Define-se **entalpia total** ou **entalpia de estagnação** a soma da entalpia específica com a energia cinética específica, isto é,

$$h_t = h + \frac{v^2}{2}$$

# 3-28

Desta forma, a equação da energia pode ser rescrita como

$$\Delta[h_t + gz] = \pm Q \pm W$$

# 3-29

Quando não houver trabalho de eixo, transferência de calor através da superfície do volume de controle e  $gz$  for desprezível (que é o caso dos **estatores**), resulta

$$\Delta h_t = 0$$

isto é,  $h_t$  é constante: a entalpia de estagnação se conserva (estator).

Para os **rotores**:

$$\Delta h_t = W_e$$

### 3.5.5 CÁLCULO DO TORQUE E DA POTÊNCIA NAS MÁQUINAS DE FLUXO

Em geral são utilizadas as informações de potência e de trabalho específico obtidas através das equações de conservação da quantidade de movimento angular e da energia.

A aplicação do princípio de conservação da quantidade de movimento angular resultou na equação # 3-24:

$$\dot{W} = \dot{m}(U_2 V_{2u} - U_1 V_{1u})$$

A aplicação do princípio da conservação de energia resultou na equação # 3-26 e na equação # 3-29, de onde se pode obter:

$$\dot{W} = \dot{m}\Delta[h_t + gz] \quad \# 3-30$$

Nessas duas expressões,  $\dot{w}$  é a potência de eixo. Portanto, pode-se escrever que

$$\dot{m}(U_2 V_{2u} - U_1 V_{1u}) = \dot{m}(\Delta h_t + g\Delta z)$$

ou

$$U_2 V_{2u} - U_1 V_{1u} = h_{t2} - h_{t1} + g(z_2 - z_1)$$

# 3

que é a equação básica para avaliação da potência transmitida ao fluido (ou retirada do fluido) a partir de informações dos triângulos de velocidades.

No caso das máquinas térmicas (turbinas a vapor e turbinas a gás), o termo  $g\Delta z$  é desprezável, podendo a expressão acima ser simplificada para

$$h_{t2} - h_{t1} = U_2 V_{2u} - U_1 V_{1u}$$

# 3

Considerando-se escoamento de gases perfeitos de propriedades constantes, tem-se

$$h = c_p T, \quad h_t = c_p T_t$$

pois

$$h_t = c_p T + \frac{V^2}{2} = c_p \left( T + \frac{V^2}{2c_p} \right) \quad \text{e} \quad T_t = T + \frac{V^2}{2c_p}.$$

Define-se **temperatura total** ou **temperatura de estagnação** por

$$T_t = T + \frac{V^2}{2c_p}$$

# 3

Em consequência, a equação # 3-32 pode ser rescrita na forma

$$c_{p2} T_{t2} - c_{p1} T_{t1} = U_2 V_{2u} - U_1 V_{1u}.$$

Escoamento isentrópico →

$$\frac{P_{2s}}{P_1} = \left( \frac{T_{2s}}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

com s indicando processo isentrópico iniciado em (1) e terminando em (2) (ou vice-versa).

Em correspondência à temperatura total define-se a **pressão total** ou **pressão de estagnação** por

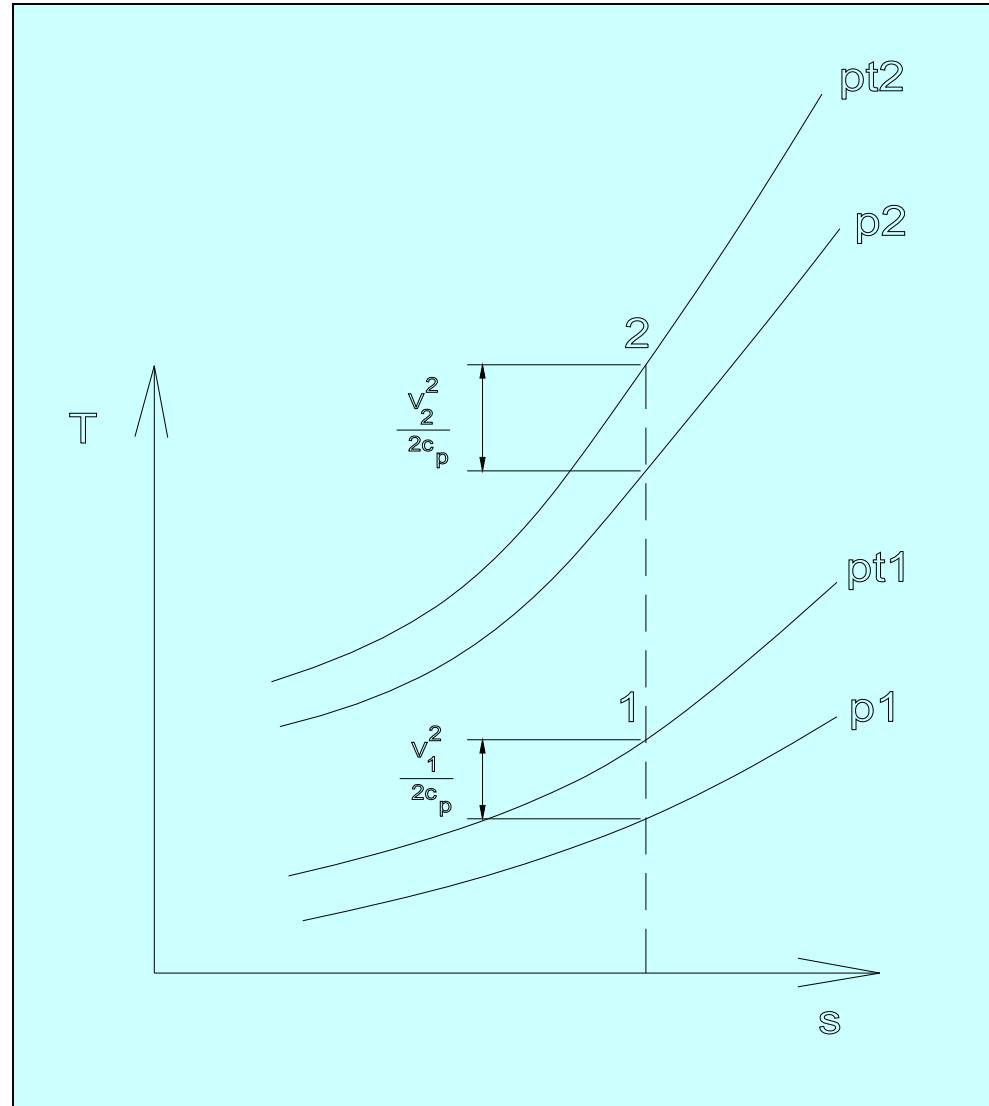
$$\frac{P_t}{P} = \left( \frac{T_t}{T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{P_{t2}}{P_{t1}} = \frac{P_{t2}}{P_2} \frac{P_2}{P_1} \frac{P_1}{P_{t1}} = \left( \frac{T_{t2}}{T_2} \frac{T_2}{T_1} \frac{T_1}{T_{t1}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left( \frac{T_{t2}}{T_{t1}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{P_{t2}}{P_1} = \frac{P_{t2}}{P_2} \frac{P_2}{P_1} = \left( \frac{T_{t2}}{T_2} \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left( \frac{T_{t2}}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Para um compressor de ar, bombeando  $\dot{m}$  kg/s de ar do estado (1) para o estado (2), o trabalho de compressão isentrópica será

$$W_C = c_p (T_{t2} - T_{t1}) = c_p T_{t1} \left( \frac{T_{t2}}{T_{t1}} - 1 \right) = c_p T_{t1} \left[ \left( \frac{P_{t2}}{P_{t1}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] = c_p T_{t1} \left[ r_C^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]$$





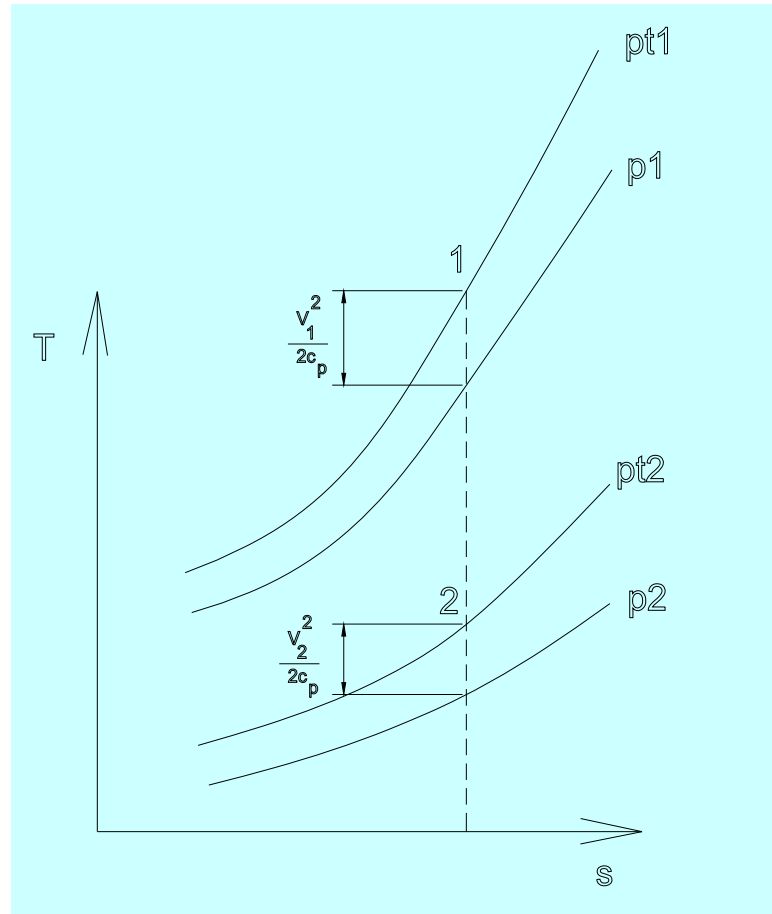
**Figura 3-34- Diagrama T-S com indicação de condições estáticas e totais (compressão)**

onde  $r_C$  é a relação de pressões (ou taxa de compressão), definida por  $r_C = \frac{P_{t2}}{P_{t1}}$ .

Analogamente, para uma turbina expandindo um gás ideal:

$$W_T = c_p (T_{t2} - T_{t1}) = c_p T_{t1} \left( \frac{T_{t2}}{T_{t1}} - 1 \right) = c_p T_{t1} \left[ \frac{1}{\left( \frac{P_{t1}}{P_{t2}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} - 1 \right] = -c_p T_{t1} \left[ 1 - \frac{1}{r_T^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \right]$$

A razão de expansão da turbina,  $r_T$ , é dada por  $r_T = \frac{P_{t1}}{P_{t2}}$ .



**Figura 3-35- Diagrama T-S com indicação de condições estáticas e totais (expansão)**

No caso de **compressão não-isentrópica**,

$$s_2 - s_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dh(T)}{T} - R \ln \frac{P_2}{P_1}$$

Define-se **eficiência isentrópica de compressão** por

$\eta_C = \frac{h'_{t2} - h_{t1}}{h_{t2} - h_{t1}}$ , expressão esta que pode ser rescrita em termos de temperatura caso  $C_p = \text{const}$

$$\eta_C = \frac{T'_{t2} - T_{t1}}{T_{t2} - T_{t1}}$$

Define-se **eficiência isentrópica de expansão** por  $\eta_T = \frac{h_{t1} - h_{t2}}{h_{t1} - h'_{t2}}$

e, também, se  $C_p = \text{const}$ , tem-se

MÁQUINAS DE FLUXO  
NOTAS DE AULAS - 2010

3-137/162

$$\eta_T = \frac{T_{t1} - T_{t2}}{T_{t1} - T_{t2}'}$$

É bastante útil, também, notar que a Lei de Conservação de Massa pode ser escrita na forma:  $\dot{m} = \rho A V = \text{const}$

A Equação dos Gases Perfeitos  $P = \rho R T$  e a definição do Número de Mach

$$M = \frac{V}{\sqrt{\gamma R T}},$$

com  $a = \sqrt{\gamma R T}$  = velocidade do som, permitem escrever  $V =$

$M \sqrt{\gamma R T}$ .

Daí segue-se que

$$\dot{m} = \frac{P}{R T} A M \sqrt{\gamma R T} = \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \frac{P}{\sqrt{T}} A M$$

Pondo

$$T = T_t \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-1}$$

e

$$P = P_t \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \text{ vem:}$$

$$\dot{m} = \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \frac{P_t (1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\sqrt{T_t} (1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2)^{-\frac{1}{2}}} A M$$

Isolando-se os termos que dependem da velocidade do escoamento,

$$\dot{m} = \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \frac{P_t}{\sqrt{T_t}} A \frac{M}{(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}$$

Pondo

$$K = \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

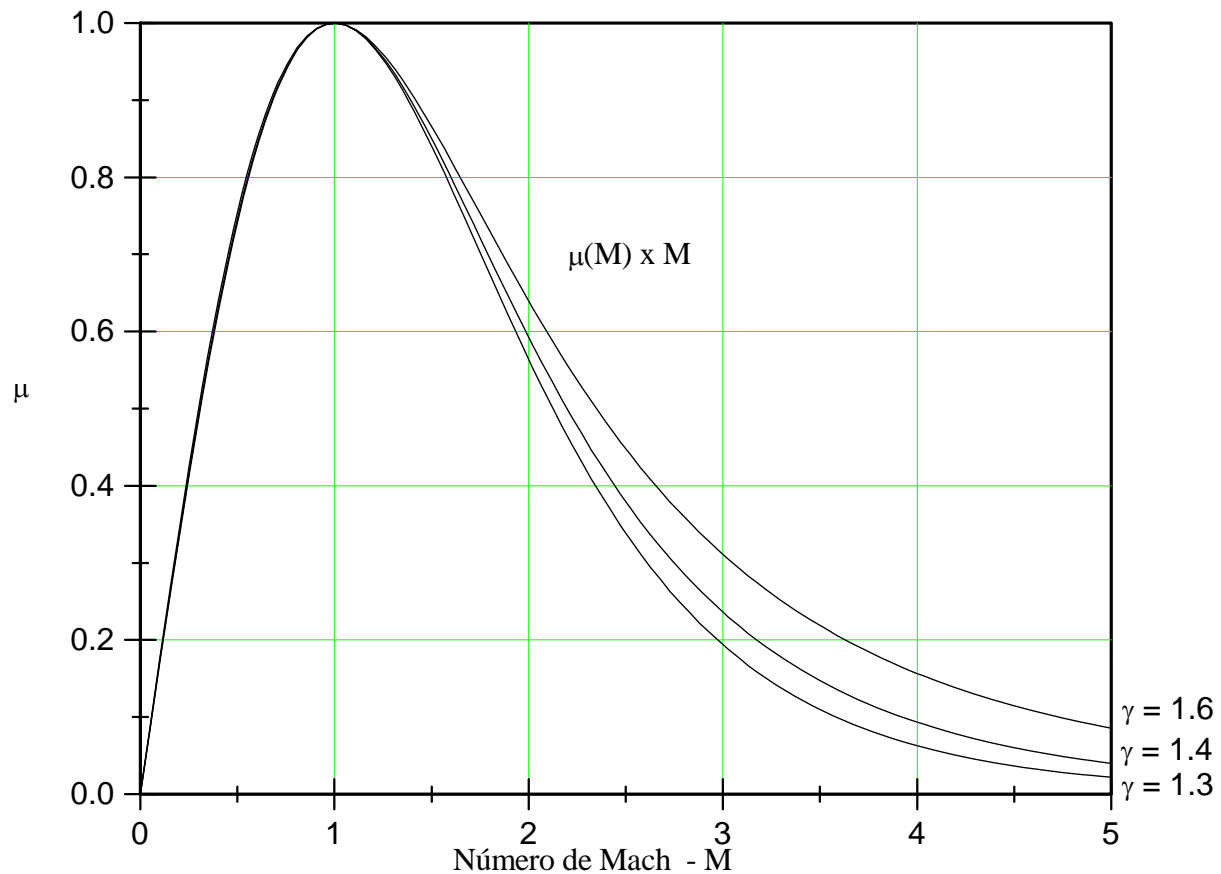
e

$$\mu = M \left( \frac{\frac{\gamma + 1}{2}}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}$$

tem-se:

$$\frac{\dot{m} \sqrt{T_t}}{P_t} = K A \mu = \text{const } \mu.$$

Traçando-se o gráfico da função  $\mu = \mu(M)$ , para  $\gamma = 1,3, 1,4$  e  $1,6$  obtém-se a **figura 5.1**.



**Figura 3-36 - Gráfico da função  $\mu(M)$**

Observa-se que  $\mu(1) = 1$  e que, da equação da continuidade,

$$\frac{P_t}{\sqrt{T_t}} A \mu = \text{const.}$$



## EXERCÍCIO

Considere um estágio padrão de turbina hidráulica axial,

A velocidade axial não varia ao longo do estágio.

O ângulo de injeção é de 48 graus na altura média.

Os diâmetros externo e interno são, respectivamente, 2m e 0,8 m.

A turbina gira a 250 rpm.

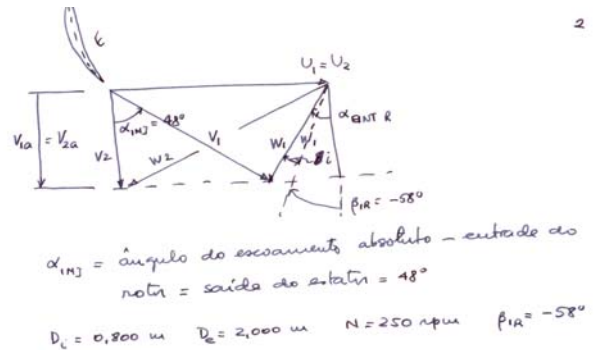
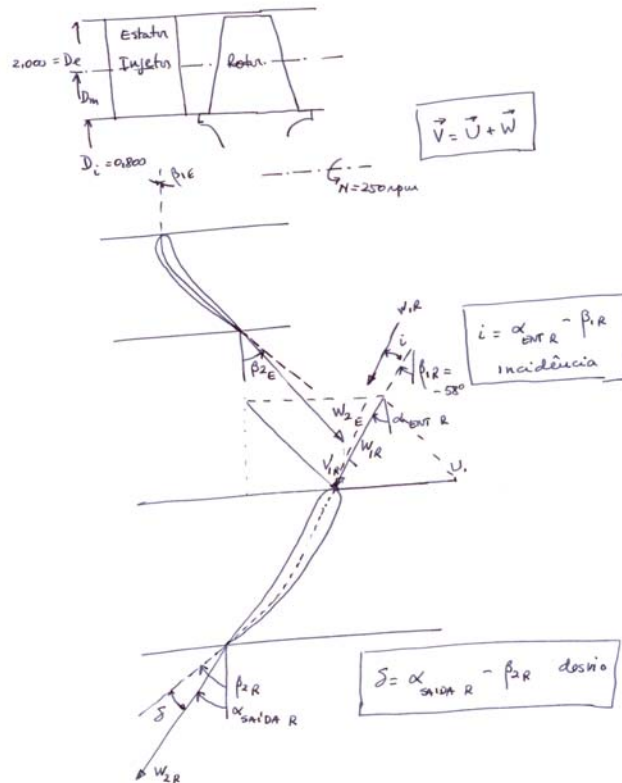
Na altura média, o ângulo da pá na entrada do rotor é -58 graus.

Pedem-se:

- a) Afirmação de que **estudou adequadamente toda a matéria** para a prova.
- b) **esquema** do estágio da turbina, com a nomenclatura usual indicada
- c) **triângulos de velocidades** com toda a nomenclatura usual indicada. Indicar também os valores dados acima.

- d) **vazão em massa** para quando a incidência é nula, o desvio é de 5 graus, e transferência de energia para o fluido (trabalho específico) constante da raiz ao topo
- e) **ângulo de saída da pá do rotor** para que a água deixe a turbina sem rotação (saída axial), quando a incidência é nula, o desvio é de 5 graus, e a transferência de energia para o fluido (trabalho específico) constante da raiz ao topo
- f) **a potência ideal** admitindo-se que a transferência de energia para o fluido (trabalho específico) é constante da raiz ao topo, quando a incidência é nula, o desvio é nulo.
- g) **ângulo da pá na saída do rotor** quando o desvio é de 5 graus, incidência é de 5 graus e a transferência de energia para o fluido (trabalho específico) constante da raiz ao topo

SOLUÇÃO



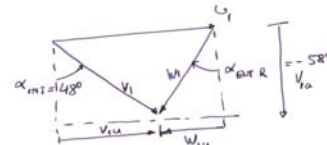
Solução: Na altura média:

$$D_m = \frac{D_i + D_e}{2} = \frac{0,800 + 2,000}{2} = 1,400 \text{ m}$$

$$U_m = \frac{\pi D_m N}{60} = \frac{\pi \times 1,400 \times 250}{60} = 18,33 \text{ m/s}$$

$$W_{2u} = U_2 V_{2u} - U_1 V_{1u} \quad \text{Para saída axial, } V_{2u} = 0$$

$$\therefore W_{2u} = -U_1 V_{1u} \quad V_{1u} = U_1 - W_{1u}$$



$$\alpha_{ENTR} = \beta_{1R} - i = -58^\circ - 0^\circ = -58^\circ$$

$$U_1 = V_{1u} + W_{1u} = V_{1a} \tan \alpha_{1m} - V_{1a} \tan \alpha_{ENTR}$$

$$V_{1a} = \frac{U_1}{\tan \alpha_{1m} - \tan \alpha_{ENTR}} = \frac{18,33}{\tan 48^\circ - \tan (-58^\circ)} = \frac{18,33}{1,110613 + 1,60033} = 6,760 \text{ m/s}$$

# MÁQUINAS DE FLUXO

## NOTAS DE AULAS - 2010

3-145/162

$$W_{1u} = V_{1a} \tan \alpha_{ext R} = 6,760 \times \tan(-58^\circ) = 6,760 \times (-1,60031) = -10,818 \text{ m/s}$$

$$V_{1u} = V_{1a} \tan \alpha_{int} = 6,760 \times \tan 48^\circ = 6,760 \times 1,110613 = 7,508 \text{ m/s}$$

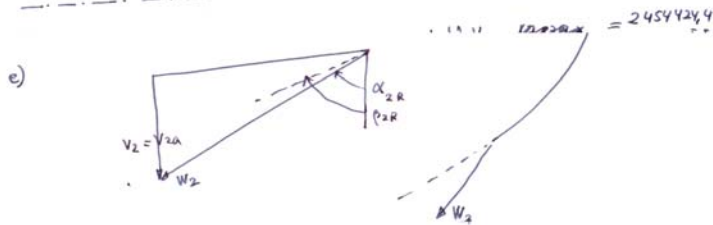
$$W_1 = \sqrt{V_{1a}^2 + W_{1u}^2} = \sqrt{6,760^2 + (-10,818)^2} = 12,757 \text{ m/s}$$

$$V_1 = \sqrt{V_{1a}^2 + V_{1u}^2} = \sqrt{6,760^2 + 7,508^2} = 10,103 \text{ m/s}$$

$$\dot{m} = \rho_1 V_{1a} A_1 = 1000 \times 6,760 \times 2,638938 = 17,839 \text{ kg/s}$$

$$A_1 = \frac{\pi}{4} (D_e^2 - D_i^2) = \frac{\pi}{4} (2,000^2 - 0,800^2) = 2,638938 \text{ m}^2$$

d)  $\dot{Q} = V_{1a} A_1 = \frac{\dot{m}}{\rho_1} = 17,839 \text{ m}^3/\text{s}$



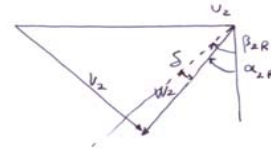
$$\alpha_{2R} = -\tan^{-1} \frac{W_{2u}}{W_{2a}} = -\tan^{-1} \frac{U_2}{V_{1a}} = -\tan^{-1} \frac{U_1}{V_{1a}} = -\tan^{-1} \frac{18,33}{6,760} = -69,75^\circ$$

$$\beta_{20} = \alpha_{20} - \delta = -69,75^\circ - 5^\circ = -74,75^\circ$$

f)  $W_e = -U_1 V_{1u} \Rightarrow \dot{W} = \dot{m} W_e = -\dot{m} U_1 V_{1u} = -17,839 \times 137,59 = -2454424 \text{ W}$

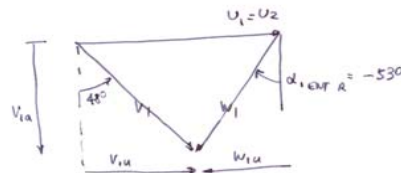
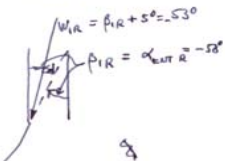
$$W_e = -U_1 V_{1u} = -18,33 \times 7,508 = 137,59 \text{ J/kg}$$

g)



caso 1) mesmo ângulo de injeção  $\Rightarrow$  só altera o ângulo da  $pa'$   $\Rightarrow$  entrada do rotor  $\Rightarrow \beta_{2R} = -74,75^\circ$

caso 2) mesma  $pa'$  (calculado anteriormente)  $\Rightarrow$  ângulo de injeção muda  $\alpha_{inj} =$



$$V_{1a} = \frac{U_1}{\tan 48^\circ - \tan(-53^\circ)} = 7,528 \text{ m/s}$$

$$\alpha_{2R} = -\tan^{-1} \frac{W_{2u}}{W_{2a}} = -\tan^{-1} \frac{U_2}{V_{1a}} = -\tan^{-1} \frac{18,33}{7,528} = -67,70^\circ$$

## GRAU DE REAÇÃO

Considere-se um estágio padrão de uma bomba, constituído de um rotor e de um estator.

No estágio obtém-se a elevação global de pressão do fluido, sendo que parte dessa elevação se dá no rotor e o restante no estator.

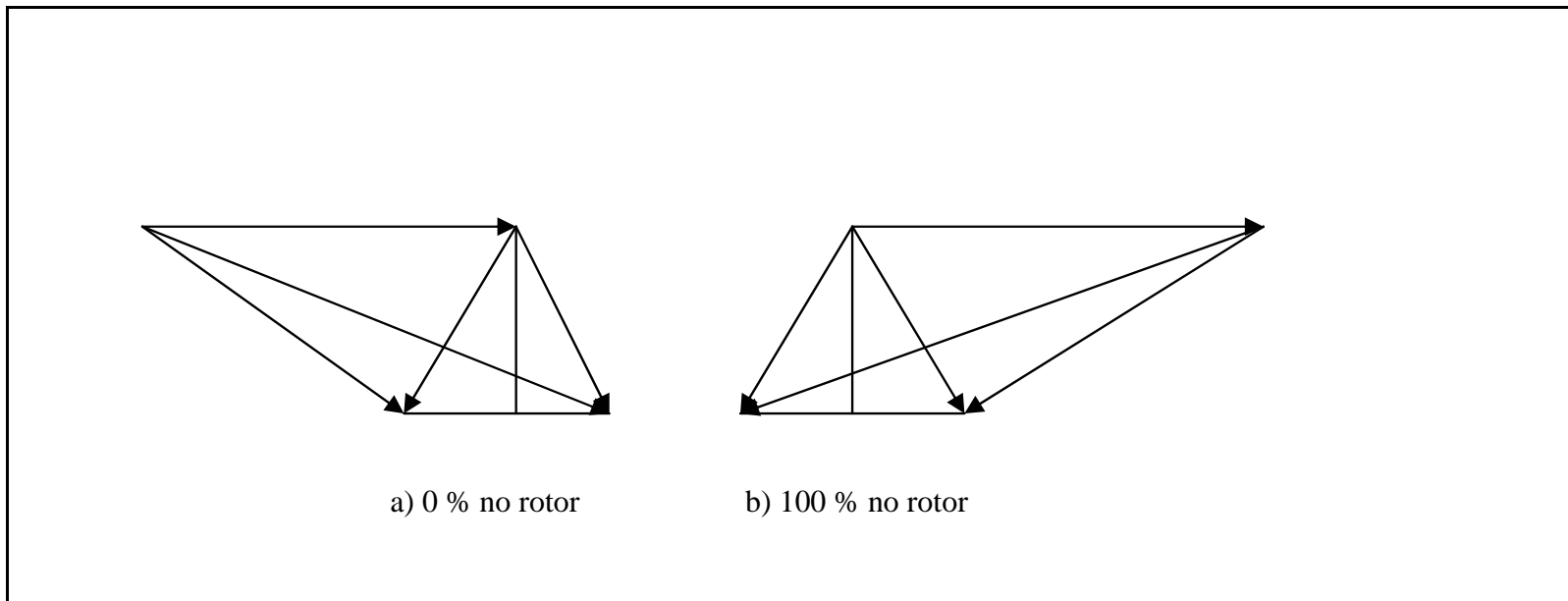
Em princípio, podem-se projetar estágios capazes da mesma elevação de pressão, mas com aumentos de pressão no rotor variando de zero até 100% do aumento de pressão total.

Esses acréscimos de pressão estão relacionados com as velocidades do escoamento nas grades e, estas, com as velocidades e suas direções de entrada e de saída das

**MÁQUINAS DE FLUXO**  
**NOTAS DE AULAS - 2010**  
grades (triângulos de velocidades).

3-147/162

Considerem-se os triângulos de velocidades dados pela Figura 3-37.



**Figura 3-37– Triângulos de velocidades**

**a) 0% de aumento de pressão no rotor**

**b) 100% de aumento de pressão**

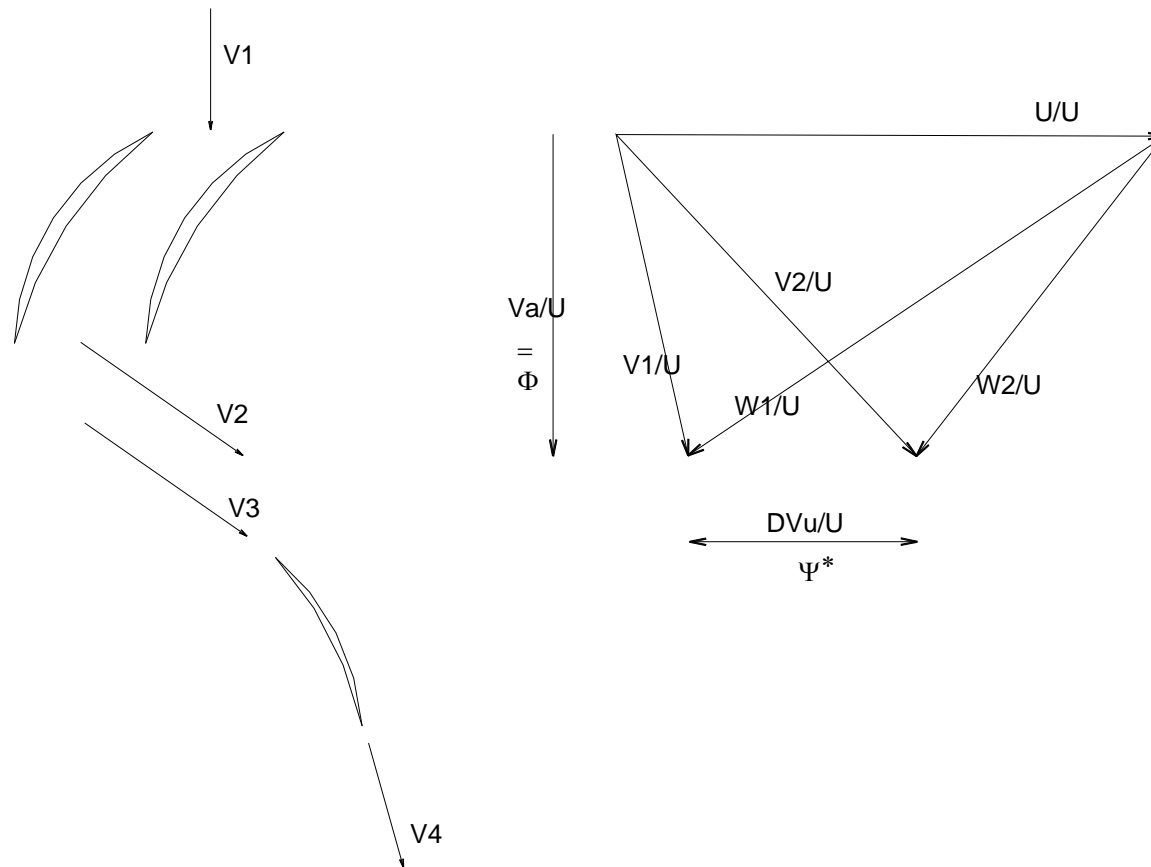
**MÁQUINAS DE FLUXO**  
**NOTAS DE AULAS - 2010**  
**no rotor.**

3-148/162

Essas características dos triângulos de velocidades são estudadas através do grau de reação do estágio.

**Grau de reação** (ou **reação**) de u'a máquina de fluxo é o quociente da variação da entalpia estática no rotor pela variação da entalpia de estagnação no estágio.

$$\Lambda = \frac{\Delta h_R}{\Delta h_{tR} + \Delta h_{tE}}$$



**Figura 3-38- Estágio axial e seus triângulos de velocidades**



Da forma dos triângulos de velocidades têm-se informações sobre o grau de reação do estágio.

Sem perda de generalidade, considera-se escoamento incompressível e um estágio formado por grades com pás de altura constante.

A Figura 3-38 representa um desses estágios e seus triângulos de velocidades.

Para **escoamento incompressível**

$$\left(\frac{\Delta P}{\rho}\right)_R = \Delta h_R = h_2 - h_1 = \frac{P_2 - P_1}{\rho}$$

$$\left(\frac{\Delta P}{\rho}\right)_{tR} = \Delta h_{tR} = h_{t2} - h_{t1} = \frac{P_2 - P_1}{\rho} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2}$$

$$\left(\frac{\Delta P}{\rho}\right)_E = \Delta h_E = h_4 - h_3 = \frac{P_4 - P_3}{\rho}$$

$$\left(\frac{\Delta P}{\rho}\right)_{tE} = \Delta h_{tE} = h_{t4} - h_{t3} = \frac{P_4 - P_3}{\rho} + \frac{V_4^2 - V_3^2}{2}$$

$$\Lambda = \frac{\left(\frac{\Delta P}{\rho}\right)_R}{\left(\frac{\Delta P}{\rho}\right)_{tR} + \left(\frac{\Delta P}{\rho}\right)_{tE}} = \frac{P_2 - P_1}{(P_2 - P_1) + \rho \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + (P_4 - P_3) + \rho \frac{V_4^2 - V_3^2}{2}}$$

Para facilidade de análise, considerem-se as velocidades do triângulo normalizadas pela velocidade tangencial U.

Considere-se, também, que as condições à saída do rotor e à entrada do estator não se alteram (são iguais) e que  $V_1 = V_4$ .

Designando-se por  $\Lambda^*$  o grau de reação desse estágio com características especiais, tem-se

$$\Lambda^* = \frac{P_2 - P_1}{P_4 - P_1}$$

Mas

$$\frac{P_2 - P_1}{\rho} = \frac{1}{2} \left[ (U_2^2 - U_1^2) + (W_1^2 - W_2^2) \right]$$

e

$$\frac{P_4 - P_3}{\rho} = \frac{1}{2} [W_3^2 - W_4^2] = \frac{1}{2} [V_3^2 - V_4^2] = \frac{1}{2} [V_2^2 - V_1^2]$$

Portanto,

$$\Lambda^* = \frac{\frac{1}{2} \left[ (U_2^2 - U_1^2) + (W_1^2 - W_2^2) \right]}{\frac{1}{2} \left[ (U_2^2 - U_1^2) + (W_1^2 - W_2^2) \right] + \frac{1}{2} [V_2^2 - V_1^2]}$$

$$\Lambda^* = \frac{\frac{1}{2}[(U_2^2 - U_1^2) + (W_1^2 - W_2^2)]}{\frac{1}{2}[(U_2^2 - U_1^2) + (W_1^2 - W_2^2) + (V_2^2 - V_1^2)]} = \frac{\frac{1}{2}[(U_2^2 - U_1^2) + (W_1^2 - W_2^2)]}{U_2 V_{2u} - U_1 V_{1u}}$$

Como  $U_2 = U_1 = U$  vem  $\Lambda^* = \frac{W_1^2 - W_2^2}{2U\Delta V_u}$

Como  $W^2 = W_a^2 + W_u^2$  e como velocidade axial é considerada constante, tem-se

$$\Lambda^* = \frac{W_{1u}^2 - W_{2u}^2}{2U\Delta V_u}$$

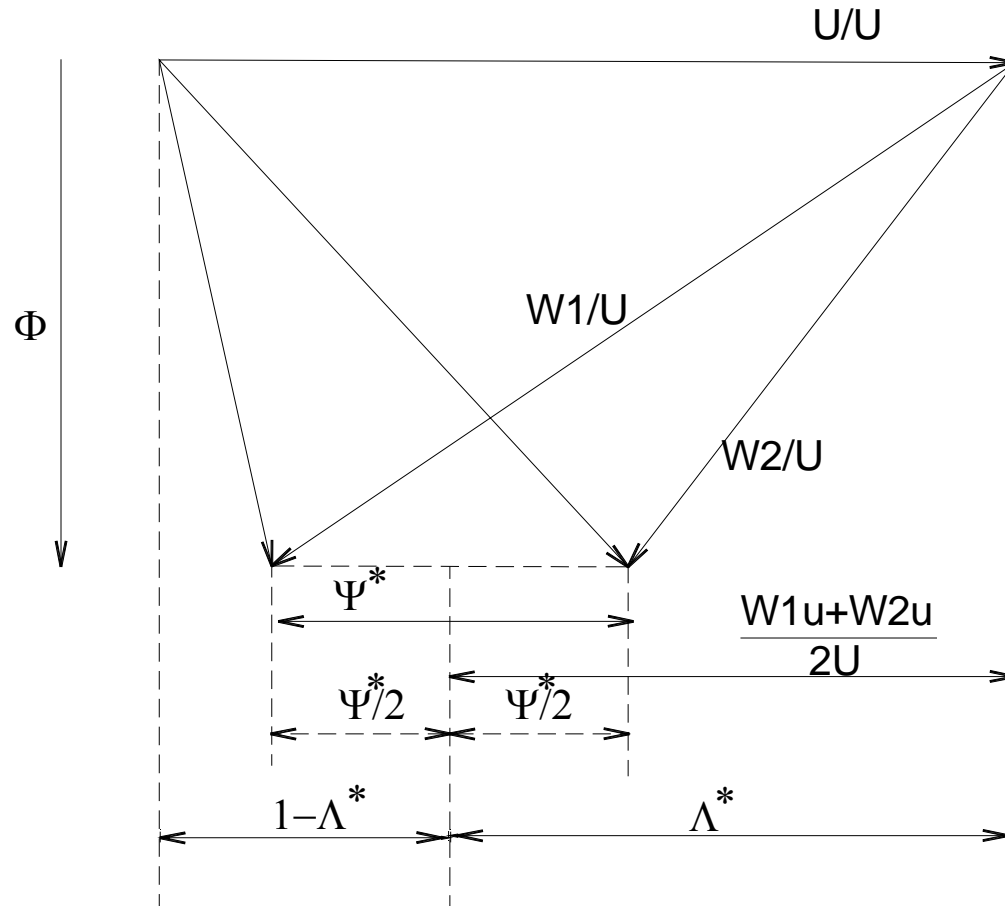
Pelo fato de  $W = U - V_u$  segue-se que

$$W_{1u}^2 - W_{2u}^2 = (W_{1u} + W_{2u})(W_{1u} - W_{2u}) = (W_{1u} + W_{2u})\Delta W_u = (W_{1u} + W_{2u})\Delta V_u$$

de onde resulta

$$\Lambda^* = \frac{W_{1u} + W_{2u}}{2U} \quad \text{ou} \quad \Lambda^* = \left[ \frac{W_{1u} + W_{2u}}{2} \right] \frac{1}{U}$$

Os triângulos de velocidades podem ser redesenhados utilizando-se essas informações. A Figura 3-39 representa esses triângulos de velocidades.



**Figura 3-39-** Triângulos de velocidades para análise do grau de reação

Uma conclusão imediata é que o estágio com 50% de reação possui triângulos de velocidades simétricos.

O grau de **reação está associado à curvatura e à montagem das pás**, isto é, à **forma do rotor**, pois pode ser calculada em função dos triângulos de velocidades.

Está também associado à eficiência de cada grade, visto que as velocidades do escoamento nos canais do rotor e do estator dependem de quão eficientemente se escoa o fluido.

Máquinas de **ação têm grau de reação zero**; **máquinas de reação têm grau de reação maior que zero**.

De um modo geral, bombas, ventiladores e compressores são máquinas de reação porque, no rotor, a pressão estática de descarga é maior do que a de entrada.



A turbina Pelton é um exemplo de turbina de ação visto que a pressão do escoamento permanece constante ao longo do rotor (pressão ambiente).

Pelo fato de as velocidades relativas e absolutas serem mais elevadas nos casos limites do grau de reação (100% e 0% respectivamente) e as perdas serem proporcionais aos quadrados dessas velocidades, as máquinas com  $\Lambda$  por volta de 50% são mais eficientes.

Isto se verifica na prática: a tentativa inicial é de que o grau de reação na altura média da pá seja de 50%.

## 3.6 EXERCÍCIOS

### 3.6.1 Faça esquemas nos planos r-z e z-teta de

a) bomba radial	b) bomba axial	c) bomba radial com entrada axial	d) compressor axial
-----------------	----------------	-----------------------------------	---------------------

### 3.6.2 Desenhe os triângulos de velocidades de máquinas axiais cujos graus de reação sejam:

a) $1 - \Psi/2$	b) $\Psi/2$	c) $1 + \Psi/2$	d) $-\Psi/2$
-----------------	-------------	-----------------	--------------

### 3.6.3 Faça um esquemas de rotores de ventiladores axiais (plano z- que tenham graus de reação

a) 50%	b) <50%	c) e > 50%
--------	---------	------------

**3.6.4 Um ventilador axial tem o diâmetro interno de 1,5 m e o externo de 2,0 m. Gira a 172 rpm. Bombeia 5 m<sup>3</sup>/s de ar e desenvolve uma pressão equivalente a 17 mm H<sub>2</sub>O. Determinar os ângulos de entrada e os de saída, na base e no topo das pás. Considerar que a velocidade do escoamento axial é independente do raio e que a energia transferida, por unidade de comprimento da pá, seja constante. Considerar a densidade do ar igual a 1,2 kg/m<sup>3</sup>.**

**3.6.5 De um compressor axial de um estágio conhecem-se:**

- a) vazão em massa de ar = 8,2 kg/s
- b) Temperatura ambiente = 288 K; pressão ambiente = 101325 Pa
- c)  $R=287,0 \text{ J/(kgK)}$ ,  $\gamma=1,4$  constante.
- d) Relação de raios no bordo de ataque = 0,5
- e) N. de Mach axial constante da raiz ao topo = 0,5 m/s
- f) Ângulo do escoamento absoluto na entrada = 0 grau
- g) Velocidade tangencial no topo = 450 m/s
- h) Taxa de compressão = 1,55
- i) Eficiência isentrópica = 0,88
- j) projetado para: velocidade axial constante, saída axial, diâmetro externo constante

**Pedem-se:**

- 1) esquemas das grades do rotor e do estator (planos r-z e z-teta)
- 2) geometria básica do canal axial de diâmetro externo constante
- 3) potência de acionamento do rotor
- 4) na altura media da pá:

**MÁQUINAS DE FLUXO**  
**NOTAS DE AULAS - 2010**

3-162/162

a) triângulos de velocidades	b) coeficiente de pressão (carregamento)	c) coeficiente de vazão
d) grau de reação	e) velocidade angular (rotação) em rpm	

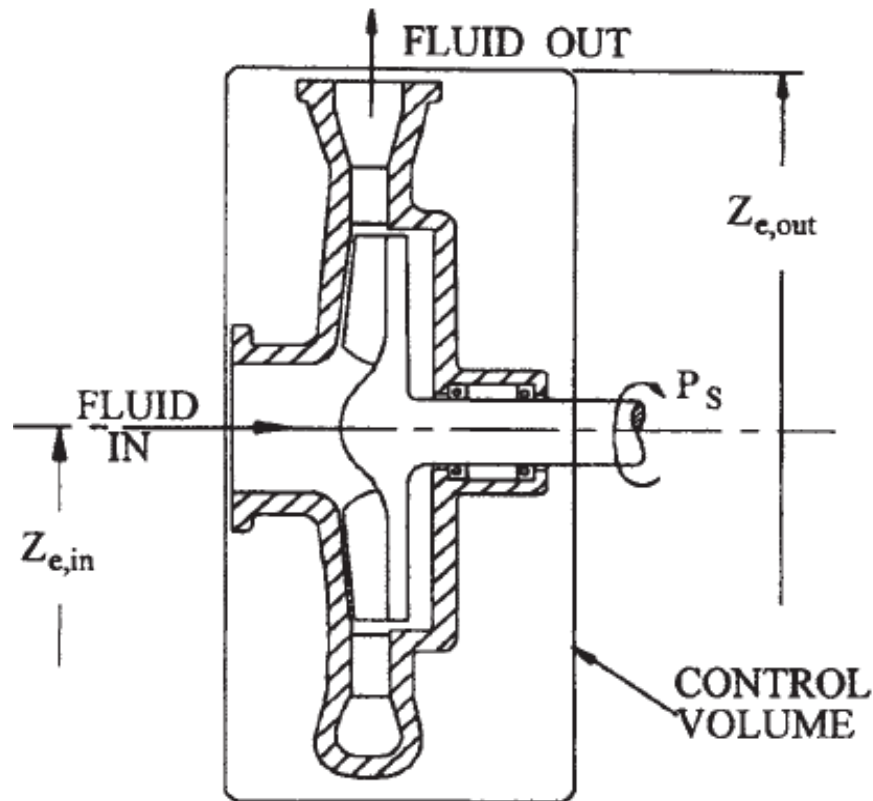
#### 4. - MÁQUINAS DE FLUXO REAIS

As simplificações das equações de conservação foram para obtenção de fórmulas de fácil aplicação, para a avaliação de alguns parâmetros importantes de uma máquina de fluxo, como a potência de eixo, grau de reação etc.

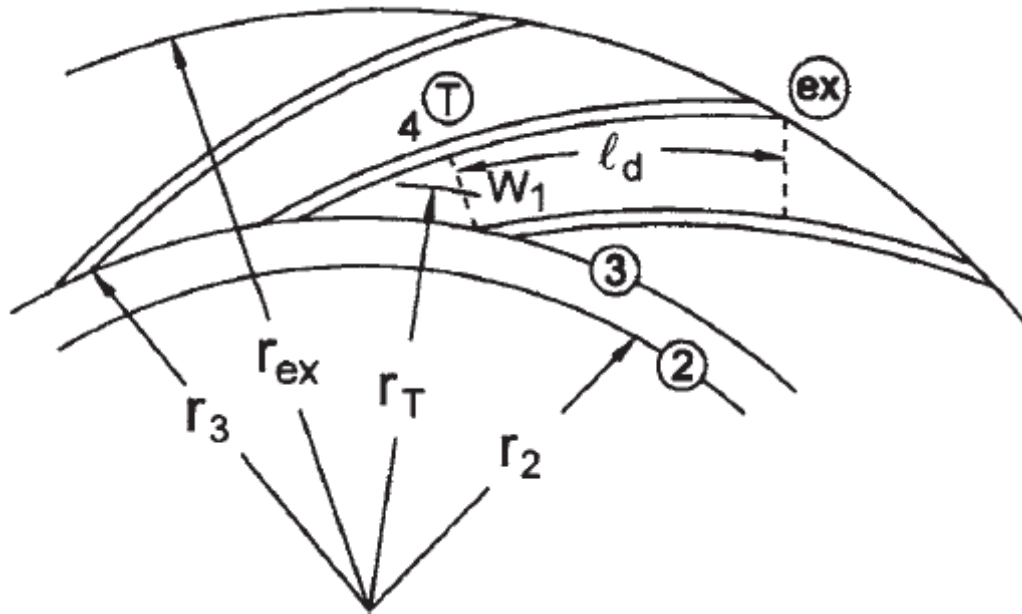
Essas simplificações foram referentes tanto às características do escoamento, quanto à geometria das máquinas.

Forma integral → máquina seja tratada como uma caixa preta no sentido de que todo o seu desempenho pode ser obtido a partir das propriedades do escoamento à entrada e à saída, sem levar em conta o que acontece nos canais da máquina (rotor, estator).

É nesses canais que se dá a transferência de energia (fornecida pelo eixo e transferida para o fluido)



No rotor a energia mecânica do eixo é transferida, pelas pás, ao fluido na forma de energia cinética e aumento de pressão; no estator, a velocidade de escoamento é diminuída e aumentada a pressão.



A forma dos canais influencia o escoamento e, portanto, há um relacionamento da geometria desses canais com a qualidade do desempenho da máquina.

Isto não foi levado em conta nas simplificações adotadas, mas, para as máquinas reais, precisa ser considerado.



**Perda de desempenho** qualquer afastamento de desempenho relacionado ao desempenho da máquina ideal.

As perdas e os processos pelos quais elas afetam o desempenho precisam ser identificados e obtidos modelos para serem calculadas essas perdas.

O modelo desenvolvido no capítulo anterior precisa ser modificado para incluir essas perdas.

A identificação das perdas e o conhecimento de como aparecem permite conhecer melhor o funcionamento da máquina e, portanto, permite avaliá-la melhor.

#### 4.1. SEPARAÇÃO DE PERDAS

Como em todas as máquinas de fluxo há conversão de energia e como em todo processo de conversão de energia há perdas, torna-se necessário o conhecimento detalhado dessas perdas. Quanto menores essas perdas, tanto melhores são as máquinas na conversão de energia.

Define-se a **eficiência global**  $\eta$  da máquina como o quociente da potência por ela produzida pela potência que ela absorve.

Costuma-se identificar por  $\dot{W}_h$  a **potência disponível no fluido** à entrada (ou à saída) da máquina e por  $\dot{W}_e$  a sua **potência de eixo**, incluindo nela a potência gasta com acionamento de acessórios, caixas de redução, etc.. Assim a eficiência global é calculada, para máquinas movida e motora, respectivamente, por:

$$\eta = \frac{\dot{W}_h}{\dot{W}_{eixo}} \quad \text{e} \quad \eta = \frac{\dot{W}_{eixo}}{\dot{W}_h}$$

Portanto, para a determinação da eficiência dessas máquinas deve-se estar interessado na avaliação das perdas totais,  $\dot{W}_P = |\dot{W}_h - \dot{W}_{\text{eixo}}|$ .

As perdas totais ou globais podem ser separadas em **perdas internas**  $\dot{W}_i$  (ou **perdas hidráulicas**) e **perdas externas**,  $\dot{W}_m$

daí  $\dot{W}_P = \dot{W}_i + \dot{W}_m$ .

As perdas internas se manifestam pela alteração da entalpia que poderia ser operada pela máquina, com o correspondente acréscimo de entropia à entropia do fluido à sua entrada.

As perdas externas são aquelas associadas aos processos mecânicos com atrito (mancais, ventilação, etc.); às transferências de calor através da carcaça da máquina, tanto por condução como por convecção e radiação; às vedações, aos labirintos.

Dependendo do tipo de máquina, essas perdas podem ser significativas. Em geral, as transferências de calor pela carcaça são desprezíveis face à energia em trânsito pela máquina.

As perdas internas mais significativas são:

- as de atrito viscoso do fluido com as pás
- as de atrito viscoso do fluido com a carcaça
- as decorrentes de escoamento secundário
- as devidas a ondas de choque
- as devidas às fugas nos topos das pás
- as devidas à velocidade de saída não nula

$$\dot{W}_{av}$$

$$\dot{W}_c$$

$$\dot{W}_{s'}$$

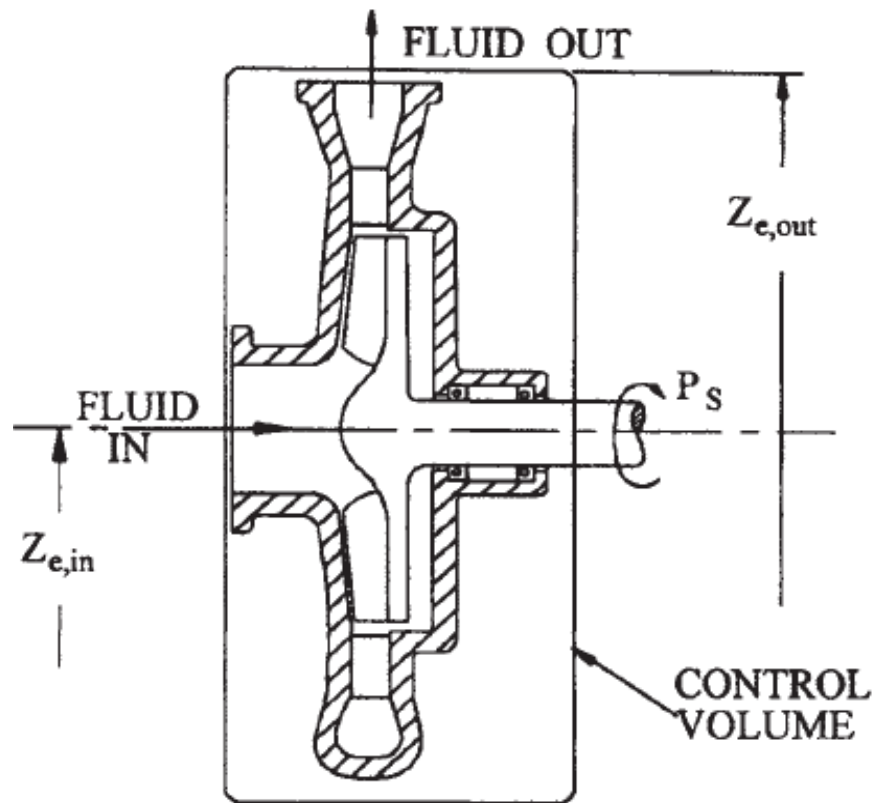
$$\dot{W}_{sh'}$$

$$\dot{W}_{f'}$$

$$\dot{W}_v.$$

É importante conhecer as causas dessas perdas.

É no rotor que se dá a transferência de energia na máquina.



O fluido se escoia em canais formados pelas pás, recebendo energia delas ou transferindo energia para as elas. As fontes principais de perdas no rotor são o atrito viscoso do fluido com as paredes sólidas, onde aparece a camada limite.

As pás obrigam o fluido a mudar de direção, o que resulta, quase sempre, em separação do escoamento e nas perdas que esse descolamento acarreta.

Se o fluido é compressível, podem aparecer ondas de choque, acarretando acréscimo de entropia causado pelas ondas de choque e, conseqüentemente, perdas.

Devido à distribuição de pressão ao longo das pás, aparecem escoamentos secundários significativos, principalmente em pontos de funcionamento afastados do ponto de projeto.

É costume avaliar essas perdas  $\dot{W}_i$  pela expressão

$$\dot{W}_i = \dot{m}_r g h_i$$

onde

$$\dot{m}_r = \dot{m} + \dot{m}_1$$

$\dot{m}_r$  é a vazão total em massa no rotor (kg/s)

$\dot{m}$  é a vazão em massa na máquina (kg/s)

$h_i$  é a altura de perda (de energia) no rotor (m)

$\dot{m}_1$  é a vazão em massa de fuga (kg/s)

Em geral, a vazão em massa não é a mesma em toda a máquina, visto que o fluido pode vazar pelas folgas entre a carcaça e o rotor ou, mesmo, ser sangrado.

Parte do fluido que sai do rotor retorna novamente à sua entrada, o que equivale o rotor bombear mais fluido do que o que atravessa a máquina.

Sendo  $\dot{m}_1$  a vazão em massa que recircula no rotor e  $H_i$  a altura de carga do rotor, a **perda por fuga** pode ser avaliada por

$$\dot{W}_f = \dot{m}_l g H_i .$$

Pela folga entre a carcaça e o rotor há escoamento do fluido de trabalho, originado pelo gradiente de pressão entre as superfícies de pressão e de sucção da pá. As máquinas usualmente possuem dutos de admissão e de descarga. As perdas por atrito e/ou por separação nesses dutos precisam também ser contabilizadas.

Designando-se por  $h_c$  a altura de **perda na carcaça**, elas podem ser avaliadas por

$$\dot{W}_c = \dot{m} g h_c .$$

As **perdas mecânicas** devem-se principalmente aos mancais.



O rotor gira dentro de uma carcaça. Como existe fluido de trabalho nos espaços entre a carcaça e o rotor, surgem perdas por atrito e movimentação desse fluido.

Esse fenômeno é conhecido por **ventilação**.

As **perdas por ventilação**  $\dot{W}_v$  são aquelas que devem ser vencidas ao se girar o rotor à velocidade adequada, sem troca de energia com o fluido que escoar nos canais do rotor.

Segue-se que as perdas internas podem ser calculadas por

$$\dot{W}_i = (\dot{W}_{av} + \dot{W}_c) + \dot{W}_s + \dot{W}_{sh} + \dot{W}_v + \dot{W}_f$$

e, portanto,

$$\dot{W}_{eixo} = \dot{W}_m + \dot{W}_i + \dot{W}_h$$

onde  $\dot{W}_{\text{eixo}}$  é a potência de eixo  
 $\dot{W}_m$  são as perdas mecânicas  
 $\dot{W}_i$  são as perdas internas  
 $\dot{W}_h$  é a potência hidráulica.

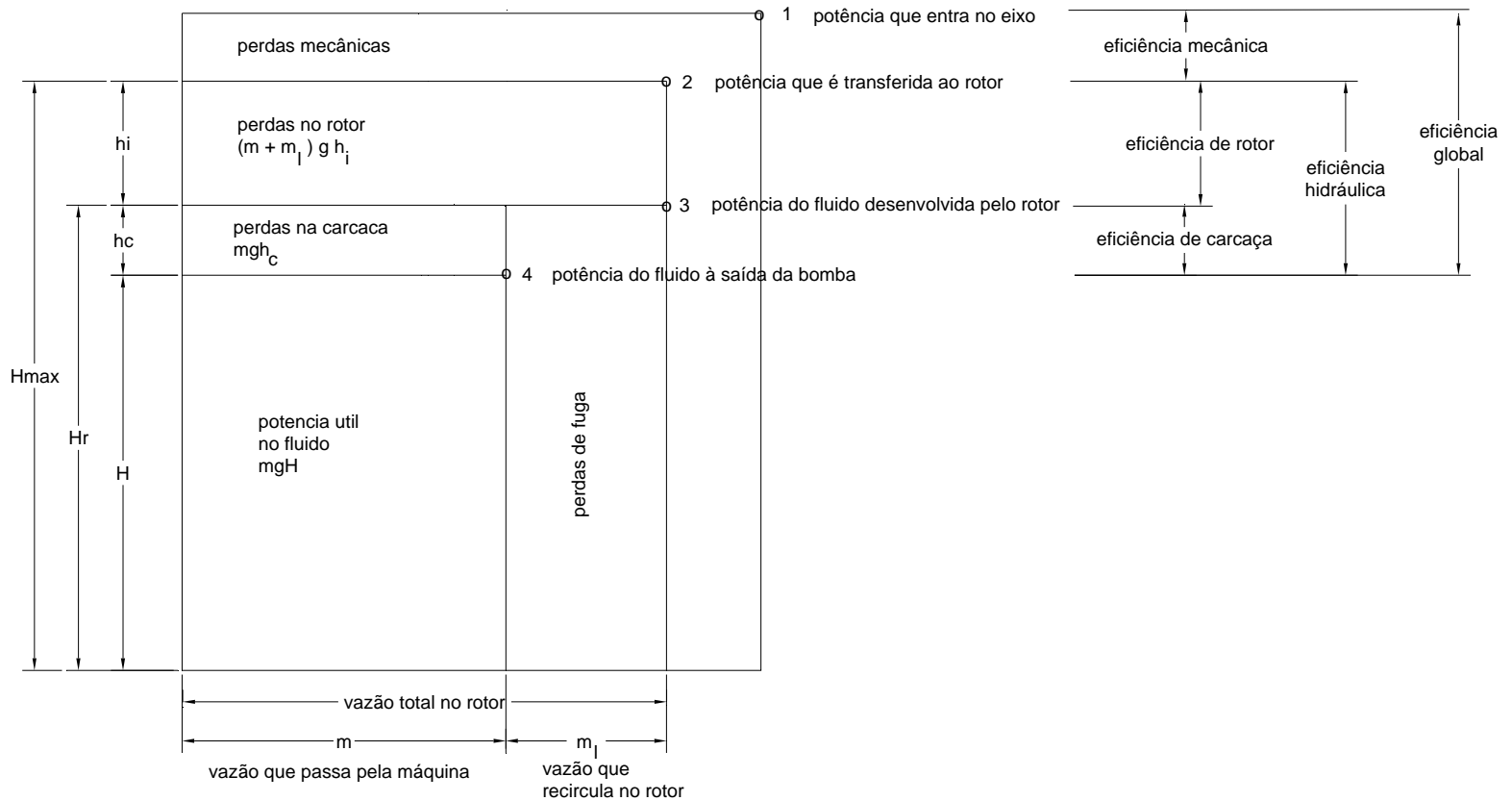
Deve-se notar que na equação 6-1 deve-se levar em conta a direção da transferência de energia rotor/fluido. Assim, para compressores

$$\dot{W}_{\text{eixo}} = \dot{W}_h + \dot{W}_m + \dot{W}_i \quad \# 4-2$$

e, para turbinas,

$$\dot{W}_{\text{eixo}} = \dot{W}_h - \dot{W}_m - \dot{W}_i \quad \# 4-3$$

O balanço de energia numa máquina movida pode ser representado graficamente como na Figura 6-1, onde algumas das perdas foram agrupadas, por simplicidade.



**Figura 4-1 - Balanço de energia numa máquina movida**

À vista da Figura 6.1, podem-se definir as seguintes eficiências da máquina:

**eficiência mecânica**

$$\eta_m = \frac{(\dot{m} + \dot{m}_l)gH_{\max}}{\dot{W}_{\text{eixo}}}$$

**eficiência do rotor**

$$\eta_r = \frac{(\dot{m} + \dot{m}_l)gH_r}{(\dot{m} + \dot{m}_l)gH_{\max}} = \frac{H_r}{H_{\max}}$$

**eficiência da carcaça**

$$\eta_c = \frac{\dot{m}gH}{\dot{m}gH_r} = \frac{H}{H_r}$$

**eficiência volumétrica**

$$\eta_v = \frac{\dot{m}}{\dot{m} + \dot{m}_l}$$

eficiência global

$$\left\{ \begin{aligned} \eta &= \frac{\dot{m}gH}{P} = \frac{(\dot{m} + \dot{m}_l)gH_{\max}}{\dot{W}_{\text{eixo}}} \times \frac{(\dot{m} + \dot{m}_l)gH_r}{(\dot{m} + \dot{m}_l)gH_{\max}} \times \frac{\dot{m}gH}{\dot{m}gH_r} \times \frac{\dot{m}}{\dot{m} + \dot{m}_l} = \\ &= \frac{H_r}{H_{\max}} \times \frac{H}{H_r} \times \frac{\dot{m}}{\dot{m} + \dot{m}_l} = \eta_m \eta_r \eta_c \eta_v \end{aligned} \right.$$

Nas expressões acima,

$H_{\max}$  = altura de energia transferida ao rotor

$H_r$  = altura de energia que o rotor passa ao fluido

$H$  = altura de energia do fluido à saída da máquina.

Assim, a potência de eixo deve ser igual à soma da potência útil com as perdas mecânica, do rotor, de fuga e de carcaça.

$$\dot{W}_{\text{eixo}} = P_{\text{mec}} + P_{\text{rotor}} + P_{\text{fuga}} + P_{\text{carcaça}} + \dot{W}_{\text{útil}}$$

A **eficiência global** é um parâmetro que se refere à máquina inteira e é utilizado como um de seus parâmetros de desempenho.

Deve-se notar que as expressões acima valem para máquinas movidas. Expressões semelhantes podem ser obtidas para máquinas motoras.

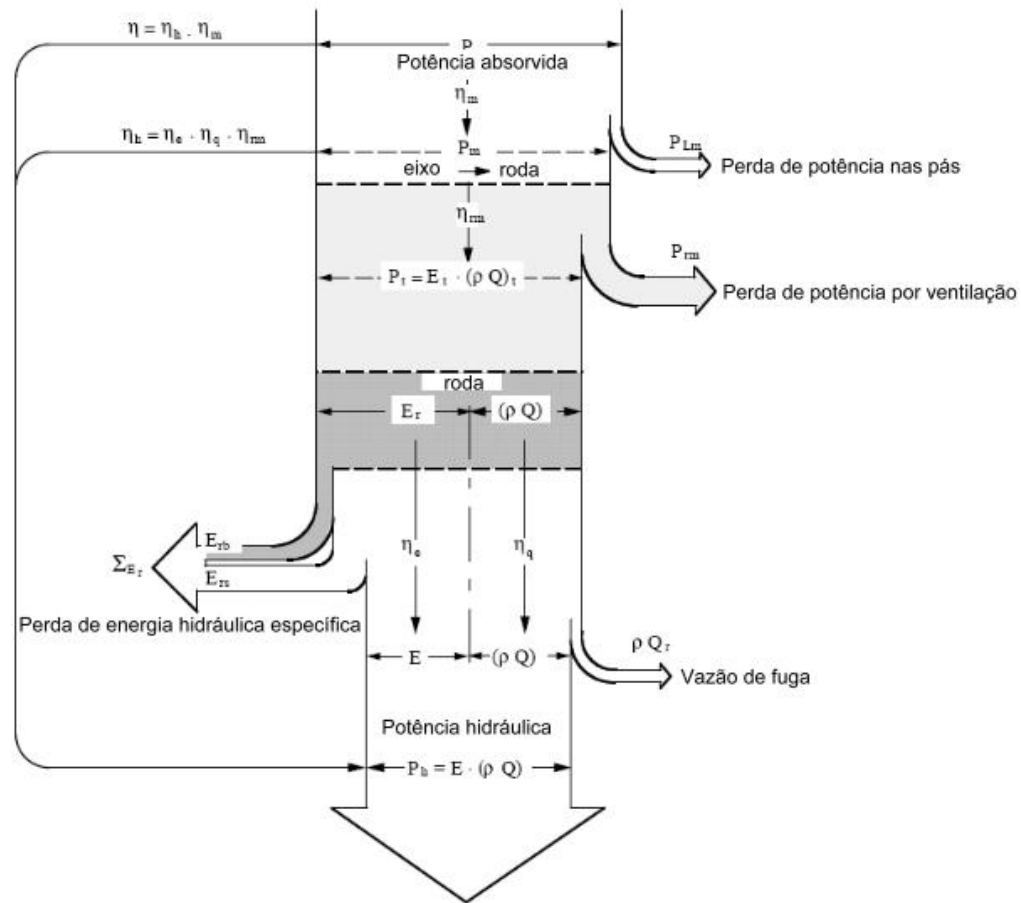
Chamam-se **perdas hidráulicas** as perdas no rotor e na carcaça. Define-se, então, **eficiência hidráulica** por

$$\eta_h^* = \frac{\dot{W}_{\text{real}}}{\dot{W}_{\text{id}}} = \frac{\dot{m}gH}{\dot{m}gH_{\text{máx}}} = \frac{H}{H_{\text{máx}}} = \frac{H}{H_r} \frac{H_r}{H_{\text{máx}}} = \eta_r \eta_c$$

= {potência disponível no fluido (potência real)} / (potência teórica disponível no fluido).

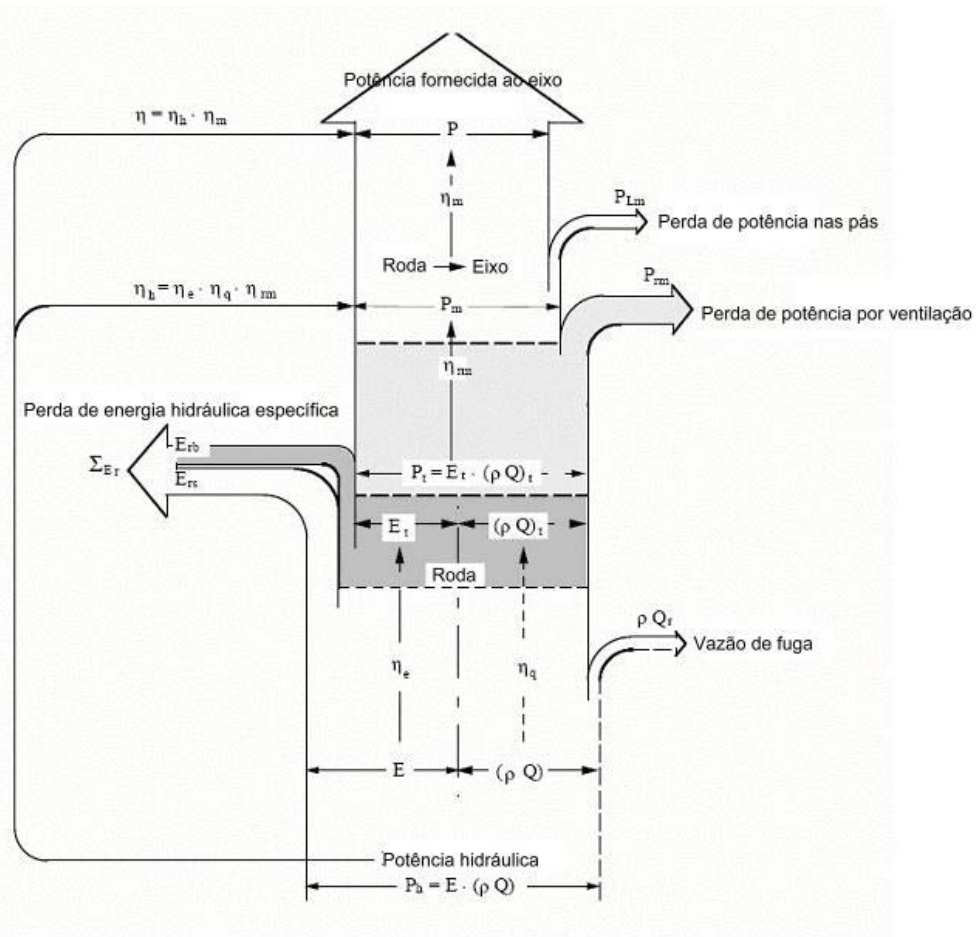
A **potência teórica disponível** é aquela calculada a partir da equação de Euler.

A notação  $\eta_h^*$  é devida ao fato de que, até aqui, não ter sido levada em conta a existência de escorregamento da velocidade de saída do rotor, em parte causado pelo número finito de pás. A definição de eficiência hidráulica será reformulada oportunamente.



Balanço de energia em máquina movida - bomba





Balanço de energia em máquina motora - turbina

## 4.2. PÁS ISOLADAS E GRADES

A teoria desenvolvida considerou pás de **espessura nula** → **número infinito de pás** → escoamento segue a **linha de esqueleto** das pás.

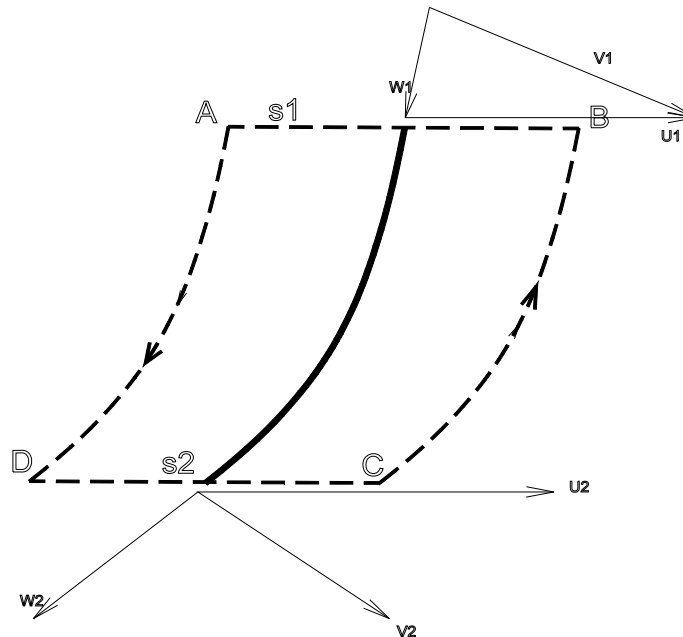
Máquinas reais → número finito de pás → formas e espessuras diferentes → necessária a alteração do modelo adotado.

**Desempenhos** de duas máquinas, uma com poucas pás, e outra com muitas → **diferentes** ← **geometria do canal** formado pelas pás, que dirige o escoamento.

A máquina com mais pás terá canais mais bem definidos → transfere melhor a energia para o fluido ou a retira dele.

Pás muito separadas → o canal formado pelas pás não é bem definido → não consegue guiar adequadamente o escoamento.

Pás muito próximas → escoamento bem guiado, mas a superfície com que o escoamento se atrita é muito grande → perdas elevadas.



A maior ou menor proximidade das pás é avaliada por um parâmetro geométrico  $\sigma = \frac{c}{s}$ , associado com a montagem da grade, chamado de **solidez** (solidity) da grade, sendo **s** o **espaçamento** entre duas pás consecutivas e **c** a **corda** da pá.

Muitas vezes o seu inverso  $\frac{s}{c}$  (razão espaçamento-corda) é utilizado.

Menor valor da solidez é  $\sigma = 0$  (nenhuma pá) e maior  $\sigma = \infty$  (número infinito de pás).

Para as máquinas reais  $\sigma$  é menor que 3.

As máquinas de fluxo de **fluido compressível** geralmente são construídas com  $\frac{s}{c} \in (0,5;1,0)$ . Na fase preliminar de projeto costuma-se adotar um valor médio para a relação espaçamento-corda  **$s/c = 0,85$** .

Em algumas máquinas de fluxo, como bombas axiais, há apenas 3 ou 4 pás, resultando num valor de  $\sigma$  bastante pequeno.

As pás estão muito distantes umas das outras e o canal, portanto, não é muito bem definido, o que leva à necessidade de essas pás serem tratadas como isoladas.

Se as pás forem próximas umas das outras, as passagens entre as elas podem ser consideradas como canais e o escoamento pode ser considerado como determinado pelo canal. Se as pás estão muito afastadas umas das outras, comportam-se como corpos imersos num escoamento externo, com alguma interferência mútua.

#### 4.2.1. Pás Isoladas

Embora as pás estejam muito afastadas umas das outras, existe interferência dos escoamentos ao redor delas, mas, em primeira aproximação, pode ser desconsiderada.

Neste caso, pode-se imaginar que a pá (isolada) se comporta como a asa de um avião. Não muda a direção do escoamento quando observado em pontos bem à frente e bem atrás das pás.

Apenas nas proximidades da pá o escoamento é alterado → distribuição de pressão sobre a superfície  
→ força de sustentação sobre a pá, que é transmitida ao seu eixo (torque).

Atrito do fluido com a superfície da pá → força de arrasto → ineficiências → perdas de desempenho.

A sustentação produzida por um corpo imerso num fluido em movimento depende da circulação do campo de velocidades ao longo de sua superfície, relacionada à distribuição de pressão.

No caso de pás de comprimento infinito, a força de sustentação, por unidade de comprimento, pode ser calculada por:

$$L = \int_0^{2\pi} p \cdot \sin\theta \cdot d\theta = \frac{1}{2} \rho C_L V_\infty^2 A$$

onde

L      força de sustentação do corpo, por unidade de comprimento

$C_L$     coeficiente de sustentação

$V_\infty$    módulo da velocidade do escoamento não perturbado

A      área do corpo projetada na direção do campo de velocidades

$\rho$       é a densidade do fluido do escoamento não perturbado

Também,

$$L' = \rho V_{\infty} \Gamma$$

onde

$L'$  sustentação por unidade de comprimento do corpo

$\Gamma$  circulação do campo de velocidades sobre a curva que define a seção transversal do corpo.

Segue-se que

$$L = \rho V_{\infty} \Gamma l$$

onde

$l$  comprimento do corpo.

Então

$$\rho V_{\infty} \Gamma l = \int_0^{2\pi} p \cdot \sin \theta \cdot d\theta,$$



de onde sai a expressão de Kutta-Jukowski:

$$\Gamma = \frac{1}{2} C_L \frac{V_\infty A}{l}$$

# 4-4

Kutta Jukowski)

Pode-se relacionar a Equação de Euler com circulação pois, com a notação da **Figura 4-4**:

$$\begin{aligned}\Gamma_b &= \oint_{\gamma} \vec{V} \bullet d\vec{l} = \int_{AD} \vec{V} \bullet d\vec{l} + \int_{DC} \vec{V} \bullet d\vec{l} + \int_{CB} \vec{V} \bullet d\vec{l} + \int_{BA} \vec{V} \bullet d\vec{l} = \\ &= \int_{DC} \vec{V} \bullet d\vec{l} + \int_{BA} \vec{V} \bullet d\vec{l}\end{aligned}$$

pois AD é o percurso DB percorrido em sentido inverso, devido à periodicidade da localização das pás.

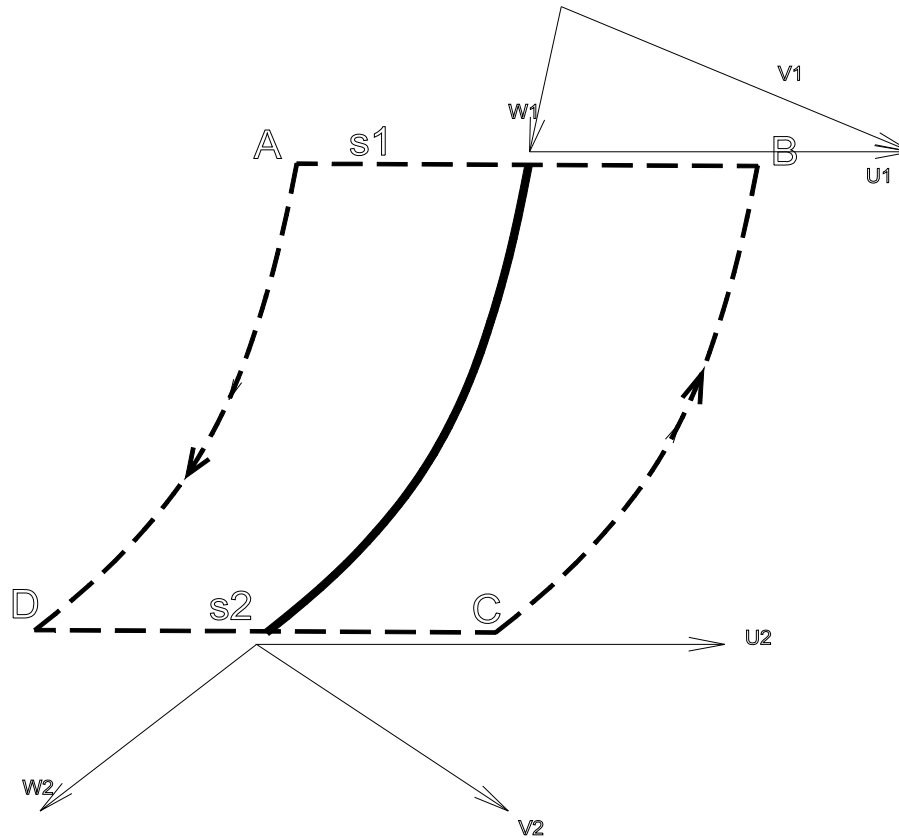


Figura 4-2 - Circulação ao redor de uma pá

Então,

$$\Gamma_b = -V_{1u}s_1 + V_{2u}s_2 = V_{2u}s_2 - V_{1u}s_1$$

Considerando-se 2 pás adjacentes, escolhendo a curva  $\gamma$  como envolvendo separadamente as 2 pás, com raciocínio análogo ao anterior, obtém-se

$$\Gamma = 2\Gamma_b$$

resultado esse que pode ser estendido a um número de pás  $N_P$ :

$$\Gamma = \Gamma_b N_P \quad \Gamma = N_P (V_{2u} s_2 - V_{1u} s_1) = 2\pi (V_{2u} r_2 - V_{1u} r_1)$$

pois  $N_P s = 2\pi r$ .

Segue-se que

$$\Gamma = 2\pi/\omega [U_2 V_{2u} - U_1 V_{1u}]$$

sendo  $\omega$  = velocidade angular do rotor.

Daí,

$$U_2 V_{2u} - U_1 V_{1u} = N_P (\omega/2\pi) \Gamma_b = (\omega/2\pi) \Gamma,$$

isto é,

$$U_2 V_{2u} - U_1 V_{1u} = (\omega/2\pi) \Gamma$$

# 4-5

Comparando a equação # 4-5 e a equação 5-42 tem-se que, para  $W_e$  = trabalho específico,

$$W_e = \frac{\omega}{2\pi} \Gamma$$

# 4-6

As equações .

# 4-4  $\Gamma = \frac{1}{2} C_L \frac{V_\infty A}{l}$  e # 4-6  $W_e = \frac{\omega}{2\pi} \Gamma$ , utilizadas em conjunto, permitem o cálculo do trabalho

específico a partir da circulação.

Ventiladores e bombas axiais com número pequeno de pás tem solidez pequena e suas pás devem ser tratadas como pás isoladas.

Escolhe-se o perfil adequado para a aplicação (ver, por exemplo, Theory of wing sections, [Abbott]) e suas características (distribuição de pressão, velocidade etc.).

A escolha do perfil mais adequado pode ser cuidadosa, uma vez que existe uma grande quantidade de perfis aerodinâmicos.

A experiência, entretanto, consagrou alguns tipos para determinadas aplicações.

Grades de compressores axiais em que o escoamento relativo à entrada da pá não exceda  $M=0,7$  → perfil NACA da série 65.

Se o escoamento for mais rápido, podendo exceder  $M=0,8$  é recomendado perfil DCA.

Escolhido o perfil, todas as suas características aerodinâmicas como  $C_D$  e  $C_L$ , podem ser obtidas.

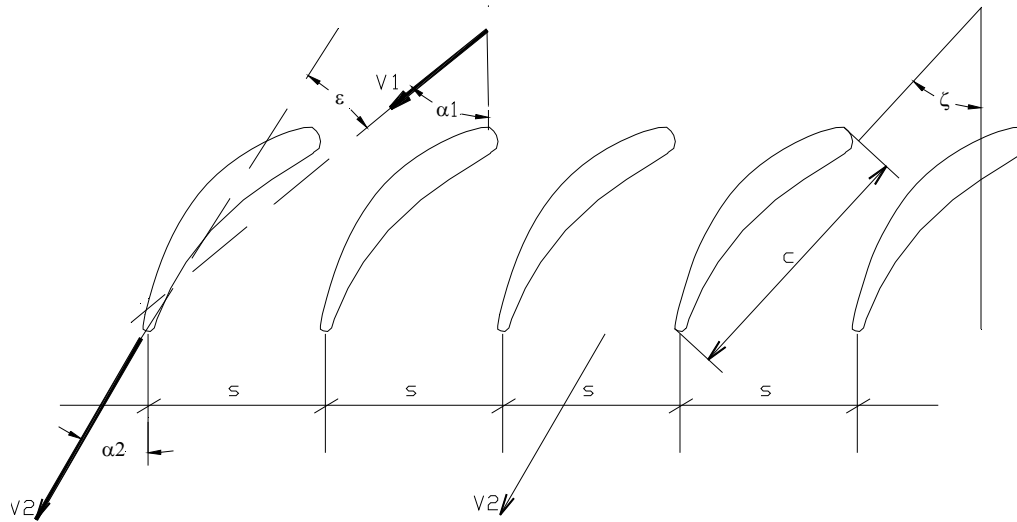
**Um procedimento de cálculo pode ser definido:**

- $V_\infty$ ,  $A$  e  $I$  vêm de consideração do escoamento e da equação da continuidade.
- Escolhe-se o perfil aerodinâmico e obtém-se  $C_L$ .
- Calcula-se a circulação pela fórmula de Kutta-Jukowski. Este processo pode ser iterativo, até que a geometria do canal fique adequadamente definida.
- Calcula-se o trabalho específico ideal requerido e, deste,
- Calcula-se a velocidade de rotação da máquina (alternativamente, escolhe-se a rotação da máquina e obtém-se o trabalho específico do estágio).

### 4.2.2. Grades

Solidez é elevada ( $\sigma \gg 0$ ), isto é, as pás são próximas umas das outras  $\rightarrow$  modelo de pás isoladas não é adequado  $\rightarrow$  modelo adequado é o de uma **grade plana**.

A grade plana é composta por uma série de pás idênticas e igualmente espaçadas.



**Figura 4-3 - Grade plana**

**Grade circular**, em que as pás são distribuídas ao redor de um disco, é tratada similarmente.

**Grades circulares** podem também ser analisadas através da planificação de um corte cilíndrico feito à altura média das pás.

Numa grade circular o espaçamento **s varia** da raiz ao topo da pá, o mesmo acontecendo com a relação espaçamento-corda **s/c**, visto que  $s = 2\pi r / N_p$ , com **r** = raio e  $N_p$  = número de pás.

Diferentemente das pás isoladas, uma **grade deflete o escoamento** que por ela passa, impondo variação da quantidade de movimento (angular) do escoamento.

Para escoamento não viscoso, incompressível e velocidade axial constante através da grade (diminuição do empuxo axial causado pelo escoamento) a equação de Bernoulli aplicada a uma linha de corrente ao longo do canal de uma grade, dá:



$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho (V_2^2 - V_1^2)$$

# 4-7

Portanto, se as velocidades  $V_1$  e  $V_2$  forem iguais, a **variação da quantidade de movimento operada pela grade se dá a pressão constante**.

Grades construídas para acarretarem  $V_2 = V_1$  são chamadas de **grades de impulso** (**reação nula**).

As demais grades são chamadas de **grades de reação**. Nessas grades (fixas) o fluxo ou é acelerado (turbinas) ou desacelerados (compressores).

A **deflexão**  $\varepsilon$  do escoamento causada por uma grade é dada por:

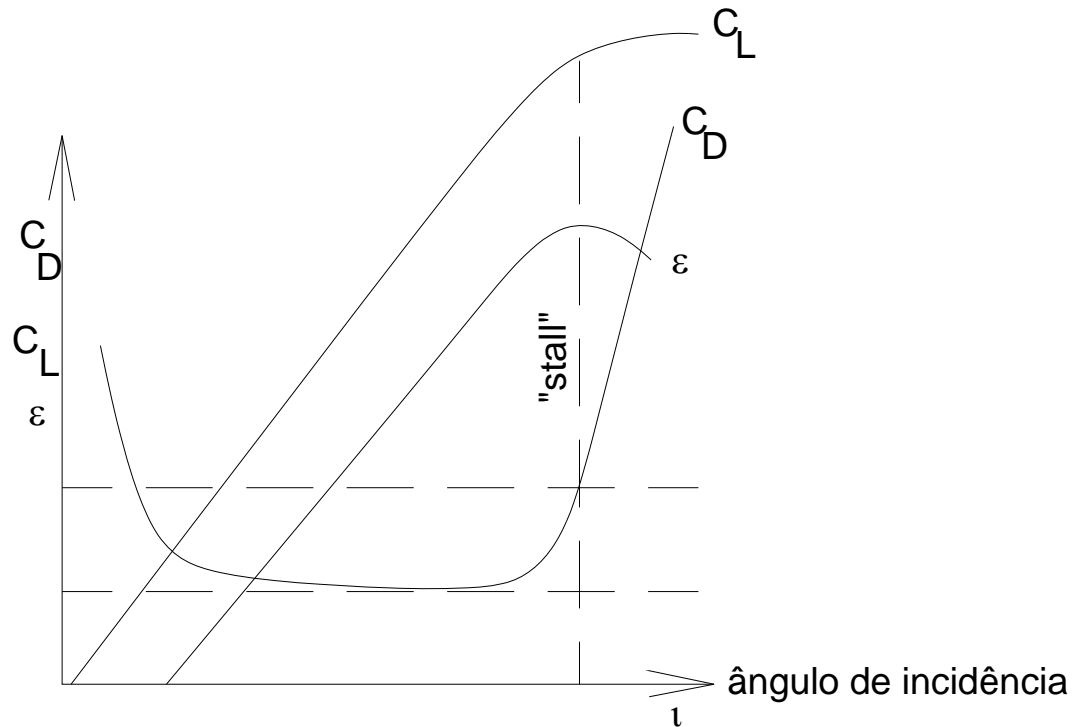
$$\varepsilon = \alpha_1 - \alpha_2$$

# 4-8

**depende do perfil aerodinâmico e de fatores geométricos**

(**s/c** → proximidade das pás; **c** → comprimento do canal)

Os dados de grade são apresentados em forma de tabelas e/ou de gráficos, obtidos para uma configuração da grade e, portanto, para um valor fixo de  $s/c$ .



A mudança de direção do escoamento na grade causa variação da quantidade de movimento do fluido, que gera uma força na grade.

Sem perda de generalidade, escolhe-se para o estudo uma **grade fixa plana, de altura  $h$  e espaçamento  $s$ , escoamento não-viscoso e incompressível.**

Da equação de conservação de massa (continuidade):

$$\begin{aligned}\dot{m} &= \rho_1 V_{1a} s_1 h_1 = \rho_2 V_{2a} s_2 h_2 = \\ &= \rho V_{1a} s h = \rho V_{2a} s h\end{aligned}$$

de onde se segue que  $V_{1a} = V_{2a}$ . Nessa grade a mudança da direção da velocidade é devida apenas à variação da velocidade tangencial  $V_u$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho (V_{2u}^2 - V_{1u}^2)$$

Pondo

$$\bar{V}_u = \frac{1}{2}(V_{1u} + V_{2u})$$

vem

$$P_1 - P_2 = \rho \bar{V}_u (V_{2u} - V_{1u})$$

A força que age em cada pá da grade, na direção perpendicular a ela, vale:

$$F_a = (P_1 - P_2)sh \text{ ou } F_a = \rho \bar{V}_u (V_{2u} - V_{1u})sh. \text{ Como } \Gamma_b = s(V_{2u} - V_{1u}),$$

segue-se que

$$F_a = \rho \bar{V}_u h \Gamma_b$$

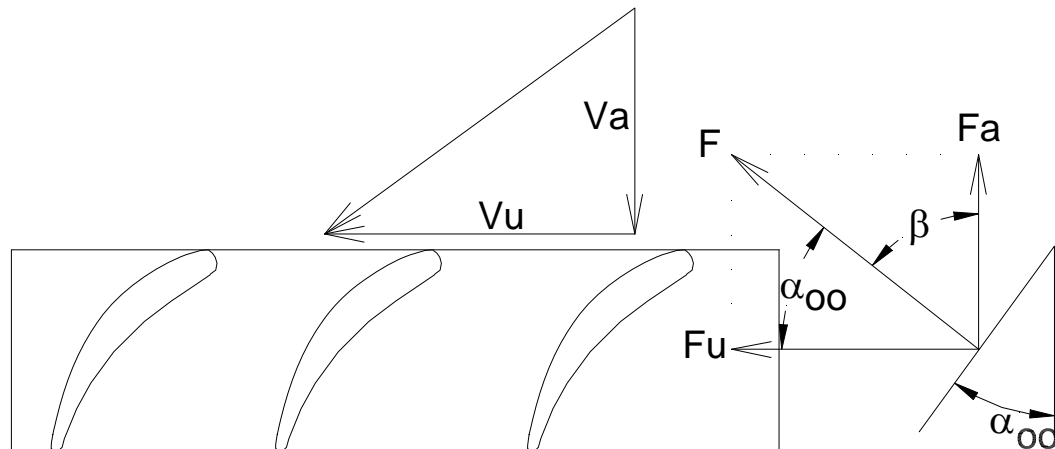
# 4-9

A taxa de variação da quantidade de movimento na grade é devida somente à componente tangencial. Então, a força tangencial que age na grade, **para cada pá**, vale

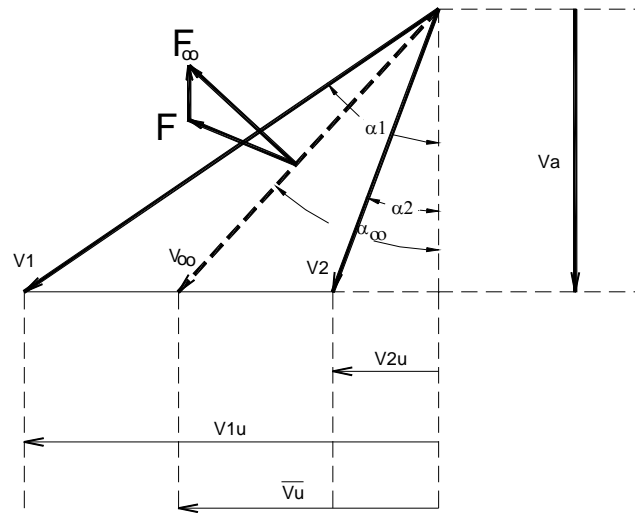
$$F_u = \dot{m}(V_{2u} - V_{1u}) = \rho V_a sh(V_{2u} - V_{1u}) = \rho V_a h \Gamma_b$$

Levando em conta o esquema apresentado na Fig. 6.4, o módulo da força resultante na grade será

$$F = \sqrt{F_a^2 + F_u^2} = \rho h \Gamma_b \sqrt{V_a^2 + \bar{V}_u^2} \text{ e sua direção } \operatorname{tg}(\beta) = \frac{F_u}{F_a} = \frac{V_a}{\bar{V}_u}$$



**Figura 4-4 - Forças numa grade axial**



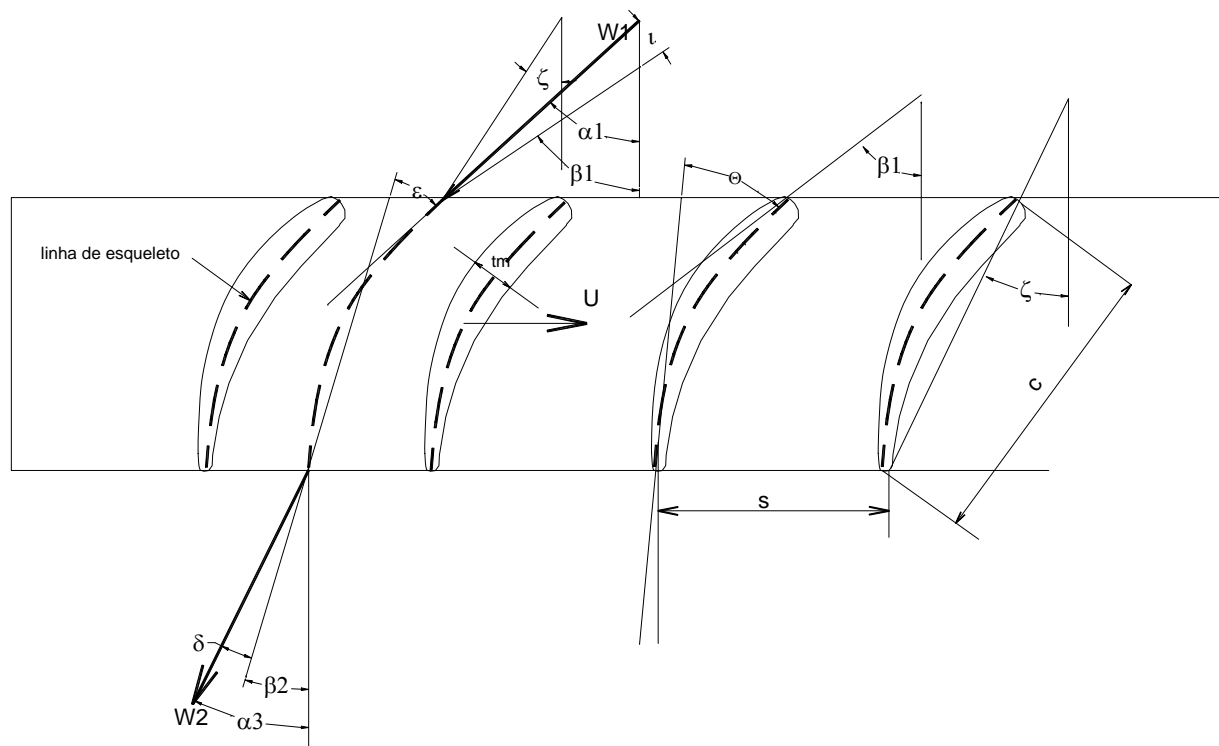
**Figura 4-5 - Convenção de Velocidades à entrada da grade axial**

$$\bar{V}_u = \frac{V_{1u} + V_{2u}}{2} = V_{2u} + \frac{\Delta V_u}{2} \quad V_{1u} = V_a \operatorname{tg} \alpha_1 \quad V_{2u} = V_a \operatorname{tg} \alpha_2$$

Chamando de  $\alpha_\infty$  o ângulo determinado por  $V_a$  e  $\bar{V}_u$ ,  $\bar{V}_u = V_a \operatorname{tg} \alpha_\infty$  e, então,  $\bar{V}_u = \frac{1}{2} (V_a \operatorname{tg} \alpha_1 + V_a \operatorname{tg} \alpha_2)$

$$\operatorname{tg} \alpha_\infty = \frac{1}{2} (\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2)$$

Segue-se que de  $\operatorname{tg} \beta = \frac{V_a}{V_u}$  se tem  $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_\infty} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha_\infty \rightarrow$  a força resultante é perpendicular à direção do escoamento médio. Essa força é denominada **força de sustentação** da pá.

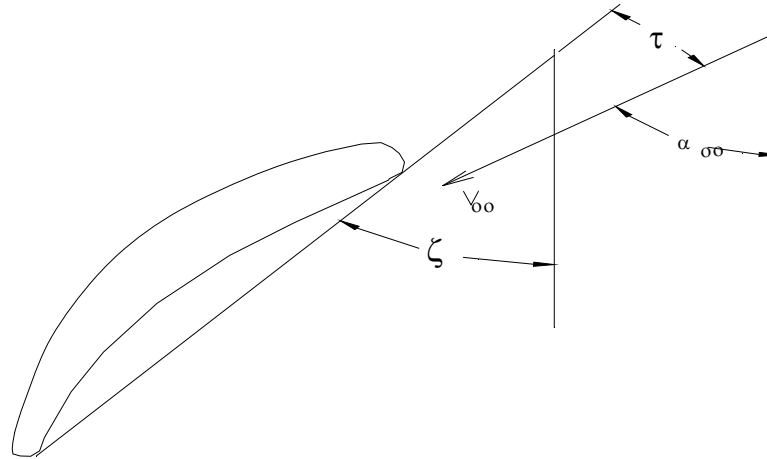


**Figura 4-6 - Grade axial e nomenclatura convencional**

$\zeta = \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)$	ângulo de montagem ( <b>stagger</b> )
s	espaçamento ( <b>pitch</b> )
c	corda ( <b>chord</b> )
$\beta_1$	ângulo do bordo de ataque da pá ( <b>blade inlet angle</b> )
$\beta_2$	ângulo do bordo de fuga da pá ( <b>blade outlet angle</b> )
$t_m$	espessura máxima da pá ( <b>maximum thickness</b> )
$\alpha_1$	ângulo da velocidade de entrada do fluido ( <b>air inlet angle</b> )
$\alpha_2$	ângulo da velocidade de saída do fluido ( <b>air outlet angle</b> )
$\delta = \alpha_2 - \beta_2$	desvio do escoamento ( <b>deviation</b> )
$\theta = \beta_1 - \beta_2$	ângulo da linha de esqueleto ( <b>camber</b> ) - (arqueamento)
$\varepsilon = \alpha_1 - \alpha_2$	deflexão do escoamento ( <b>deflexion</b> )
$i = \alpha_1 - \beta_1$	incidência ( <b>incidence</b> )
$\tau = \alpha_\infty - \zeta$	ângulo de ataque $i$ ( <b>angle of attack</b> )

$$\varepsilon = \theta + i - \delta$$





**Figura 4-7 - Grade axial e velocidade do escoamento não perturbado**

Deve-se observar que os ângulos são considerados positivos se forem medidos no sentido anti-horário. Na literatura encontram-se muitas outras convenções e, portanto, deve-se estar atento à convenção que foi adotada. Diferentes convenções podem gerar expressões diferentes das obtidas nestas notas de aulas.

Neste curso, incidência é definida como o ângulo entre a direção da velocidade relativa à pá e a da sua linha de esqueleto.

A sustentação, em termos de nomenclatura de grade, pode ser determinada a partir de

$$F = \rho h \Gamma_b \sqrt{V_a^2 + \bar{V}_u^2} \text{ e de } V_\infty^2 = V_a^2 + \bar{V}_u^2$$

$$F = \rho h \Gamma_b V_\infty$$

# 4-11

$V_\infty = W_\infty$  é uma **velocidade relativa auxiliar** que poderia existir apenas em algum ponto no interior do canal.

Na equação # 4-11 a velocidade a ser utilizada é a **relativa** à pá. No caso de grade móvel é conveniente que essa equação seja rescrita na forma

$$L = F = \rho h \Gamma_b W_\infty$$

# 4-12

Esta expressão é análoga à da Lei de Kutta-Jukowski e é aplicada igualmente a escoamento ideal (sem perdas).

A equação # 4-12 se refere à força de sustentação  $\vec{L}$  em termos de circulação de  $\vec{W}_\infty$ .

Tem-se, então, que a sustentação pode ser calculada por

$$L = \underbrace{\frac{1}{2} \rho C_L W_\infty^2 A}_{pa'} = \underbrace{\rho h \Gamma_b W_\infty}_{grade}$$

Nesta expressão, **A** é a área projetada na direção da corda.

Analogamente, o arrasto pode ser determinado por

$$D = \frac{1}{2} \rho C_D W_\infty^2 A$$

Como

$$A = ch$$

e

$$\Gamma_b = s(V_{2u} - V_{1u})$$

vem

$$\frac{1}{2} \rho C_L W_\infty^2 c h = \rho h s (V_{2u} - V_{1u}) W_\infty$$

e, daí,

$$\frac{1}{2} C_L W_\infty c = s (V_{2u} - V_{1u})$$

$$V_{1u} = U_1 - W_{1u} = U_1 - W_{1a} \operatorname{tg} \alpha_1$$

$$V_{2u} = U_2 - W_{2u} = U_2 - W_{2a} \operatorname{tg} \alpha_2.$$

Como se fez a consideração  $U = U_1 = U_2$  e  $W_{1a} = W_{2a}$

$$\frac{1}{2} C_L W_\infty c = s [(U_2 - W_{2a} \operatorname{tg} \alpha_2) - (U_1 - W_{1a} \operatorname{tg} \alpha_1)] = s W_{2a} (\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2)$$

ou

$$\frac{1}{2} c C_L \frac{W_\infty}{W_{2a}} = s (\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2)$$

Pondo  $W_{2a} = W_{1a} = V_a$

tem-se

$$\frac{1}{2} c C_L \frac{W_{\infty}}{V_a} = s(\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2)$$

ou

$$C_L = 2 \left( \frac{s}{c} \right) (\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2) \cos \alpha_{\infty}$$

# 4-13

A equação # 4-13 se aplica apenas às grades simplificadas, estudadas neste parágrafo.

As grades são ensaiadas em bancos de ensaios especiais e os resultados de ensaios são apresentados em tabelas ou graficamente, como o ilustrado na Figura 4-8.

Define-se o **coeficiente de perdas**  $\overline{\omega}_P$  por

$$\overline{\omega}_P = \frac{P_{t1} - P_{t2}}{P_{t1} - P_1}$$

# 4-14

relaciona as perdas de pressão de estagnação na grade,  $P_{t1} - P_{t2}$ , com a pressão dinâmica na entrada da grade,  $P_{t1} - P_1$ .

Para escoamentos incompressíveis,  $P_{t1} - P_1 = \frac{1}{2} \rho V_1^2$ . Deve-se observar que essa perda de pressão é referida ao escoamento relativo no interior do canal.

Em grades rotativas

$$\overline{\omega}_P = \left[ \frac{P_{t1} - P_{t2}}{P_{t1} - P_1} \right]_{\text{rel}}$$

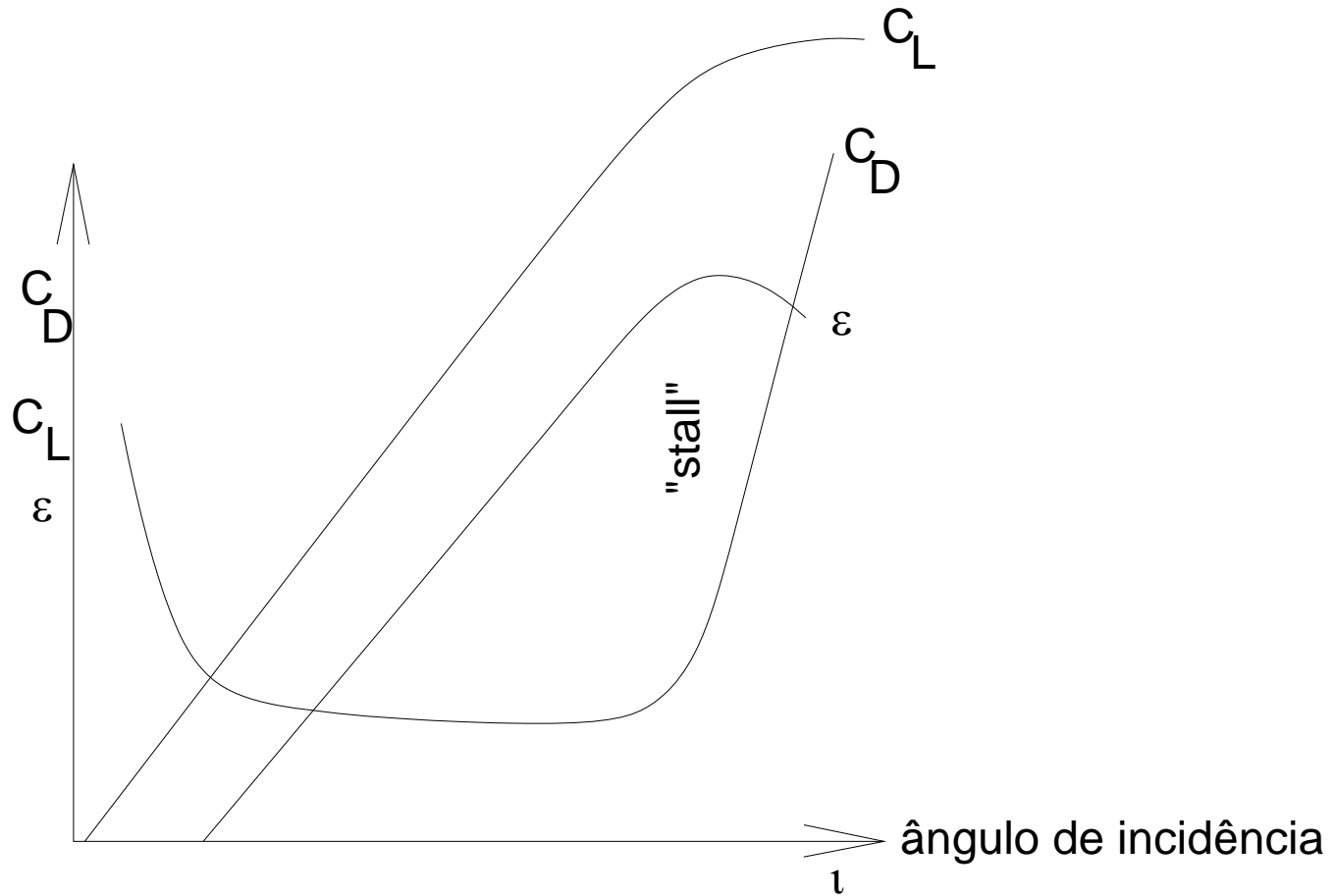
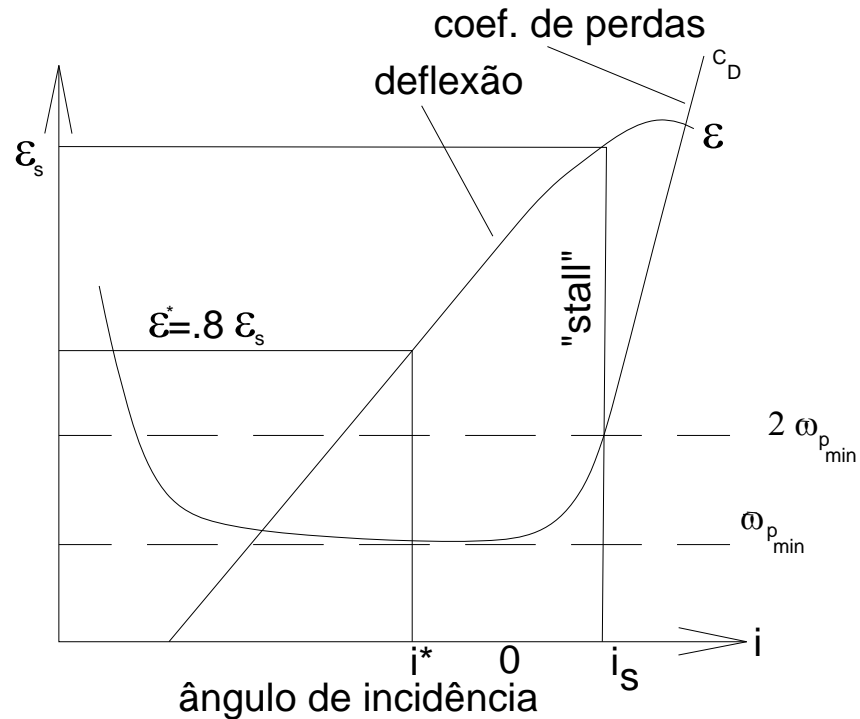


Figura 4-8 - Dados de ensaios de grade típicos

$P_{t1}$ ,  $P_{t2}$ ,  $V_1^2$  devem ser valores médios na seção considerada. Os valores do coeficiente de perdas são representados em gráficos como o da Figura 4-9, para diversas incidências.



**Figura 4-9 - Deflexão e coeficiente de perdas médios para grade fixa**



incidência de projeto  $\rightarrow$  acha-se o coeficiente mínimo de perdas  $\rightarrow$  obtém-se  $i_s$  para o qual o coeficiente de perdas é o dobro do coeficiente de perdas mínimo. (incidência de *stall*)  $\rightarrow$  obtém-se a deflexão de *stall* correspondente  $\rightarrow$  deflexão de projeto = 0,80 (oitenta por cento) da deflexão de *stall*.

A Figura 4-9 indica que as perdas não variam muito em uma faixa larga de incidência negativa, mas aumenta rapidamente quando a incidência se torna positiva, em decorrência do choque de entrada e separação do escoamento no extradorso das pás.

A deflexão varia linearmente numa faixa de incidências, atingindo o valor máximo na região de incidência positiva.

Curvas como as da Figura 4-9 são características de uma grade fixa e determinado valor da velocidade de entrada. São feitos ensaios para cada configuração da grade e para cada valor do número de Mach de entrada, obtendo-se curvas semelhantes. É costume apresentar os resultados para cada configuração da grade, com curvas para cada número de Mach.

Para projeto da grade adota-se como **incidência de projeto** aquela correspondente à **deflexão nominal**, dada por

$$\varepsilon^* = 0,80\varepsilon_S$$

A transferência de energia que ocorre na grade móvel pode ser calculada pelo trabalho realizado, por unidade de tempo, por um elemento de fluido, na direção de seu movimento. No caso de um rotor, esse movimento é na direção da velocidade tangencial (ou velocidade periférica) e, para cada pá vale:

$$\dot{W}_e = L \cos \alpha_\infty U = L \sin \beta U$$

Para um elemento de fluido de espessura  $\delta r$ ,

$$L = \frac{1}{2} \rho C_L W_\infty^2 A = \frac{1}{2} \rho C_L W_\infty^2 c \delta r$$

e, daí,

$$\dot{W}_e = \frac{1}{2} \rho C_L W_\infty^2 c \delta r U \cos \alpha_\infty$$

A vazão em massa por esse elemento de espessura  $\delta r$  vale

$$\delta \dot{m} = \rho s \delta r V_a$$

$$\begin{aligned} \frac{\dot{W}_e}{\delta \dot{m}} &= \frac{\frac{1}{2} \rho C_L W_\infty^2 U c \cos \alpha_\infty \delta r}{\rho s V_a \delta r} = \frac{1}{2} C_L W_\infty^2 \frac{U}{V_a} \frac{c}{s} \cos \alpha_\infty = \\ &= \frac{1}{2} C_L \frac{W_\infty}{V_a} W_\infty U \sigma \cos \alpha_\infty = \frac{1}{2} C_L \frac{1}{\cos \alpha_\infty} W_\infty U \sigma \cos \alpha_\infty = \\ &= \frac{1}{2} C_L W_\infty U \sigma \end{aligned}$$

Então,

$$W_e = \frac{\dot{W}_e}{\dot{m}} = \frac{1}{2} C_L \sigma W_\infty U$$

# 4-15

A equação # 4-15 permite calcular a energia específica teórica em termos do coeficiente de sustentação e da solidez da grade.

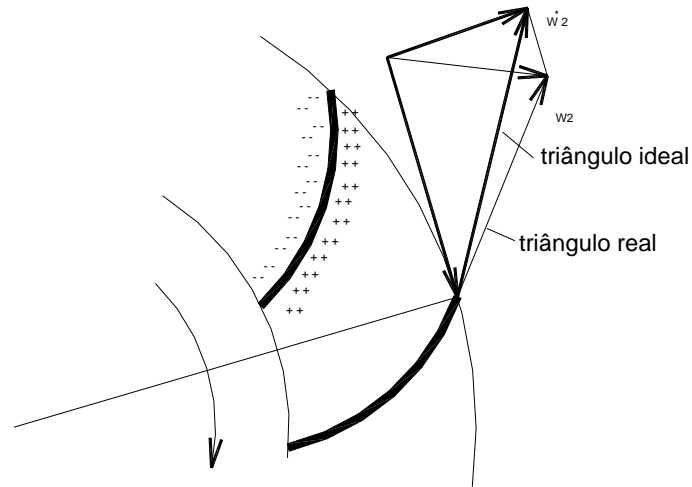
Como  $C_L$  depende do ângulo de montagem da grade ( $\zeta$ ) e este ângulo afeta  $W_\infty$ , a equação # 4-15 deve ser utilizada em conjunto com a equação de Euler para se obterem dados de projeto.

### 4.3. AFASTAMENTO DAS CONDIÇÕES IDEAIS. PERDAS

As duas causas de a energia transferida nas máquinas hidráulicas ser menor do que a calculada pela equação de Euler (ideal), são:

- Não uniformidade das velocidades nas seções de entrada e de saída das grades (em consequência, nos canais das pás), causando diminuição do valor da componente tangencial. **Note-se que esse efeito não é causado por atrito mas, sim, porque o escoamento é 3-D.** Não representa perdas mas decorre da idealização do escoamento;
- Atrito do fluido com as partes sólidas, separação do escoamento, esteira decorrente da camada limite.

Com relação à primeira causa, para a obtenção de expressões para avaliar essas perdas, seja, **por exemplo, um rotor centrífugo** como o esquematizado na Figura 4-10.



**Figura 4-10 - Efeito da distribuição de velocidade nos triângulos**

Na superfície de pressão das pás a pressão é maior do que na de sucção, em decorrência de a velocidade nesta ser maior do que naquela. Assim, na parte de trás da pá e à saída da grade a velocidade é maior do que na parte da frente → circulação  $\Gamma_b$  não nula → **força de sustentação**.

Essa não-uniformidade da velocidade faz com que a direção do escoamento, ao sair da pá, seja  $\alpha'_2$  diferente de  $\alpha_2$ , acarretando diminuição do valor da componente tangencial.

$$\alpha'_2 = \alpha_2 + \delta',$$

onde  $\delta' = \text{ângulo de escorregamento}$ .

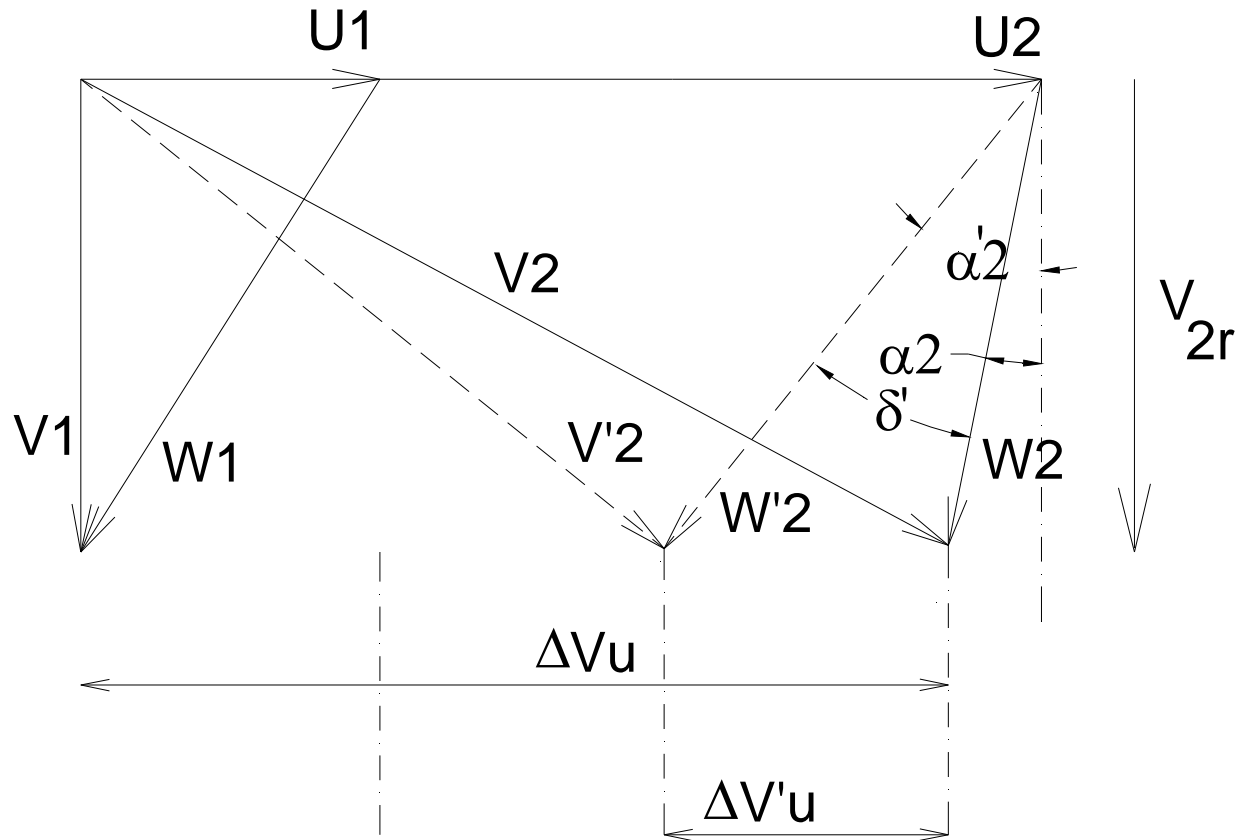


Figura 4-11 - Triângulos de velocidades indicando escorregamento



Define-se fator de escorregamento  $s_F$  por

$$s_F = \frac{V'_{2u}}{V_{2u}} \quad \text{ou} \quad s_F = \frac{U_2 - V_{2r} \operatorname{tg} \alpha_3}{U_2 - V_{2r} \operatorname{tg} \beta_2}$$

Também

$$s_F = \frac{V'_{2u}}{V_{2u}} = \frac{V_{2u} - \Delta V'_u}{V_{2u}} = 1 - \frac{\Delta V'_u}{V_{2u}}$$

Métodos para estimar  $s_F$  têm sido desenvolvidos por diversos pesquisadores. Dos mais utilizados estão os métodos de:

**Stodola** (1927), dado por uma fórmula que foi obtida a partir da hipótese da existência de turbilhões (“*eddies*”) entre as pás:

$$s_F = 1 - \frac{U_2 \pi \cos \beta_2}{N_p (U_2 - V_{2r} \operatorname{tg} \beta_2)} = 1 - \frac{\pi \cos \beta_2}{N_p (1 - \Phi \operatorname{tg} \beta_2)}$$

# 4-16

onde  $\Phi = V_{2r}/U_2$  (coeficiente de vazão de descarga da bomba).

**Buseman**, considerando que o escoamento é resultante da superposição do escoamento sobre uma grade fixa com um deslocamento devido à rotação da pá , define

$$s_F = (A - B \Phi \operatorname{tg} \beta_2)(1 - \Phi \operatorname{tg} \beta_2)$$

# 4-17

com A e B constantes que dependem de  $R_2/R_1$ ,  $b_2$  e  $N_p$ .

**Stanitz** utilizou a teoria “pá-a-pá” para mostrar que se  $0^\circ < \beta_2 < 45^\circ$ ,  $\Delta V'_u$  independe de  $\beta_2$  e que  $s_F$  não é afetado pela compressibilidade:

$$s_F = 1 - \frac{0,63\pi}{N_P(1 - \Phi \tan \beta_2)}$$

# 4-18

Em geral, para bombas os melhores resultados são obtidos quando:

se  $60^\circ < \beta_2 < 70^\circ$ , usar  $s_F$  calculado pela equação # 4-16 (Stodola)

se  $10^\circ < \beta_2 < 60^\circ$ , usar  $s_F$  calculado pela equação # 4-17 (Busemann)

se  $0^\circ < \beta_2 < 10^\circ$ , usar  $s_F$  calculado pela equação # 4-19 (Stanitz)

**Pfleiderer** sugere a utilização das seguintes fórmulas:

Para **bombas radiais**:

$$s_F = \frac{1}{1 + \frac{2\Psi}{N_p \left( 1 - \left( \frac{r_i}{r_e} \right)^2 \right)}}$$

# 4-19

onde

$$\Psi = 0,6k(1 + \sin\beta_2)$$

com

$k = 1$  se existir estator de pás após o rotor

$k = 1$  a  $1,3$  se o estator for uma voluta e  $r_i/r_e < 0,5$  e  $\beta_2 < 90^\circ$

$k = (1 \text{ a } 1,2) (r_i/r_e)$  para  $(r_i/r_e) > 0,5$  e  $\beta_2 > 90^\circ$

Para **bombas axiais**:

$$s_F = \frac{1}{1 + \frac{r_m \Psi}{N_p c_a}} \quad \# 4-20$$

Onde

$$\Psi = k(1 + \sin \beta_2) \text{ com } k = 1 \text{ a } 1,2$$

$r_m$  = raio à altura média da pá

$c_a$  = corda axial

Para **compressores centrífugos** recomenda-se

$$s_F = \left[ 1 - \frac{2}{N_{pá}} \sqrt{\cos(\beta_2)} \right] \left[ 1 + \frac{W_{2r}}{U_2} \operatorname{tg}(\beta_2) \right]$$

(nesta expressão, o ângulo de saída da pá do rotor é negativo se a pá for inclinada para trás).

Para **compressores axiais** o leitor deve utilizar a **correlação de Carter**:

$$\delta^* = m_C \sigma^{-a} \theta$$

onde

$$m_C = 0.216 + 8.8333 \times 10^{-4} \zeta + 2.6111 \times 10^{-5} \zeta^2$$

$\zeta$  = ângulo de montagem da grade

$$\sigma = \frac{c}{s}$$

$$\theta = \beta_2 - \beta_1$$

Com relação à segunda causa, os efeitos das perdas de atrito, separação, esteira, etc., se manifestam através da perda de pressão ao longo da grade e esta pode ser medida pela eficiência da grade,  $\eta_g$ .

Para o cálculo dessa eficiência da grade, considerem-se duas grades axiais: uma ideal e a outra real, ambas com a mesma velocidade de entrada. A pressão na saída da grade ideal é maior do que a da grade real, isto é:

$$P_2' = P_2 + \Delta P,$$

Da equação 6-7 vem, para uma bomba:

$$P_2 - P_1 = P_2' - \Delta P = \frac{1}{2} \rho (V_1^2 - V_2^1) - \Delta P$$

onde

$P_2'$     pressão que idealmente se obtém após a grade

$P_2$     pressão realmente atingida após a grade

$\Delta P$     perda de pressão na grade

A força real que age perpendicularmente à grade vale, então,

$$F_a = s h (P_2 - P_1) = s h (P_2' - P_1 - \Delta p) = s h (P_2' - P_1) - s h \Delta p$$

e a teórica

$$F_a' = s h (P_2' - P_1)$$

Portanto,

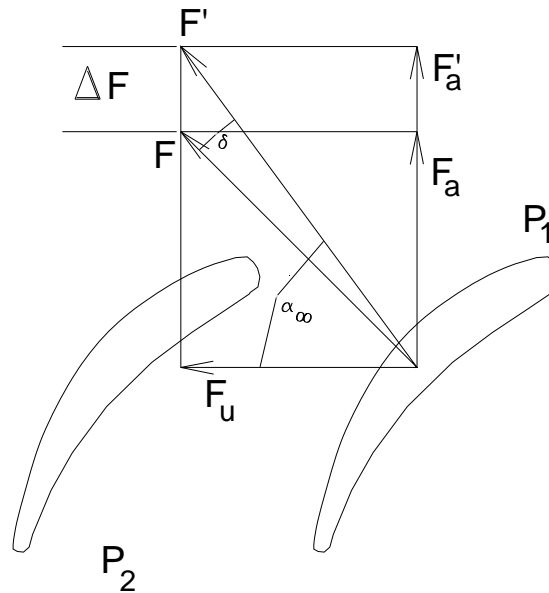
$$F_a = F_a' - s h \Delta P$$

e, então,

$$F_a < F_a'$$

A força  $F$  não é mais igual à força de sustentação e também não é mais perpendicular a  $V_\infty$ , formando um ângulo  $\alpha_\infty - \delta$  com a direção axial.





**Figura 4-12 - Forças em grade axial (ideal e com atrito )**

Define-se **eficiência da grade** por

$$\eta_g = \frac{p_2 - p_1}{p'_2 - p_1} = \frac{p'_2 - p_1 - \Delta p}{p'_2 - p_1} = \frac{F_a}{F'_a}$$

Pondo  $U^* = U - \frac{1}{2} V_{2u}$  e  $\operatorname{tg} \delta = \varepsilon$ , tem-se  $\operatorname{tg} \alpha_{\infty} = \frac{U^*}{V_a} = \frac{1}{\Phi^*}$

e, daí,

$$\eta_g = \frac{1 - \frac{\varepsilon}{\Phi^*}}{1 + \frac{\varepsilon}{\Phi^*}} \cong 1 - \frac{\varepsilon}{\Phi^*} \text{ isto é, } \boxed{\eta_g = 1 - \frac{\varepsilon}{\Phi^*}}$$

# 4-21

Projetando-se  $F$  na direção média, tem-se

$$\boxed{L = F \cos(\delta)}$$

$$\boxed{D = F \sin(\delta)}$$

de onde fica aparente que as perdas na grade estão relacionadas com o arrasto  $D$ .

## EXEMPLO

O rotor de uma **bomba centrífuga** de 16 pás tem diâmetro de 0,1m e a sua rotação é de 750 rpm. A pá, na saída do rotor, tem de 0,015m de altura. As pás são inclinadas de  $65^\circ$  para trás (*backward swept*), na saída (em relação à direção radial). A vazão de água pelo rotor é de  $8,5 \text{ m}^3/\text{h}$ . Calcular a altura de carga (altura de energia) desenvolvida pela bomba para os casos:

- a) sem escorregamento)
- b) com escorregamento.

Solução:

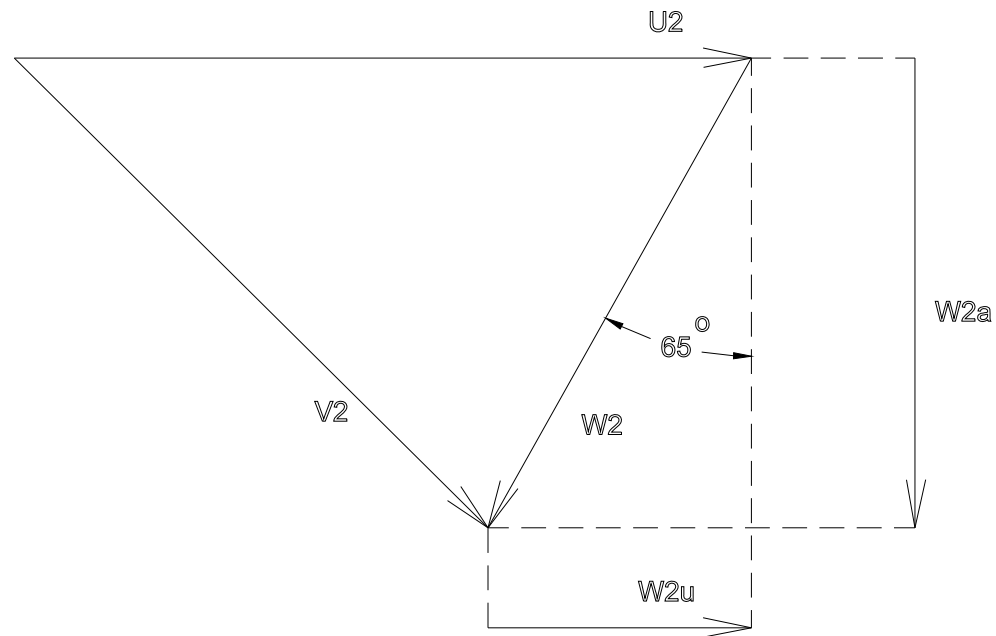
### a) sem escorregamento

área na saída:  $\pi D_2 h = \pi (0,1)(0,015) = 0,471(10^{-2}) \text{ m}^2$

velocidade radial na saída:  $\frac{\dot{m}}{A_2 \rho} = \frac{\dot{Q}}{A_2} = \frac{8,5 \times 10^3}{(3600)(0,471)(10^{-2})} = 0,501 \text{ m/s}$

velocidade periférica da pá:  $U_2 = \pi DN/60 = \pi(0,1)(750)/60 = 3,97 \text{ m/s}$

Triângulo de velocidades na saída:



**Figura 4-13 - Triângulo de velocidades (saída da grade)**

$$W_{2u} = (0,501)(\operatorname{tg}65^\circ) = (0,501)(2,1445) = 1,074 \text{ m/s}$$

$$V_{2u} = U_2 - W_{2u} = 3,97 - 1,074 = 2,896 \text{ m/s}$$

$$W = U_2 V_{2u} = (3,09)(2,896) = 11,495 \text{ J/kg}$$

$$H_{\text{máx}} = W/g = 11,495/9,81 = 1,17 \text{ m H}_2\text{O}$$

#### b) com escorregamento

Como há escorregamento e  $\beta_2 = 65^\circ$ , pela fórmula de Stodola,

$$s_F = 1 - \frac{\pi \cos 65^\circ}{16(1 - \frac{0,501}{3,97} \operatorname{tg}65^\circ)} = 1 - 0,114 = 0,886$$

$$\text{Portanto } H = s_F H_{\text{máx}} = (0,886)(1,17) = 1,037 \text{ m H}_2\text{O}$$

#### 4.4. ESCOAMENTO COMPRESSÍVEL EM MÁQUINA DE FLUXO

Número de Mach  $M$  é menor que 0,3 ( $M < 0,3$ ) → escoamento pode ser tratado como incompressível.

Em ventiladores  $M < 0,3$  → pode ser considerado como incompressível

Número de Mach  $M > 0,3$  → precisa ser considerado como escoamento compressível.

Em compressores  $M > 0,5$  → precisa ser considerado compressível.

Em regime permanente, a equação da energia, para um volume de controle VC, pode ser escrita como:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \dot{m}[(h_2 - h_1) + \frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2) + g(z_2 - z_1)]$$

onde

$\dot{Q}$  taxa de transferência de calor para o VC

$\dot{W}$  trabalho de eixo retirado do VC

$\dot{m}$  vazão em massa.

A contribuição do termo  $g(z_2 - z_1)$  é geralmente muito pequena e pode ser desprezada.

Como  $h_t = h + \frac{1}{2} V^2$ , tem-se:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \dot{m}(h_{t2} - h_{t1})$$

# 4-22

Adotando-se um valor médio para o calor específico, por exemplo  $\bar{c}_p = c_p \left( \frac{T_{t1} + T_{t2}}{2} \right)$ , com

$T_t = T + V^2/(2c_p)$  vem

$$\dot{Q} - \dot{W} = \dot{m} \bar{c}_p (T_{t2} - T_{t1})$$

As máquinas de fluxo podem ser consideradas adiabáticas porque o calor trocado com o exterior é muito pequeno em relação às demais formas de energia do escoamento, mesmo as turbinas a gás operando a temperaturas muito elevadas.

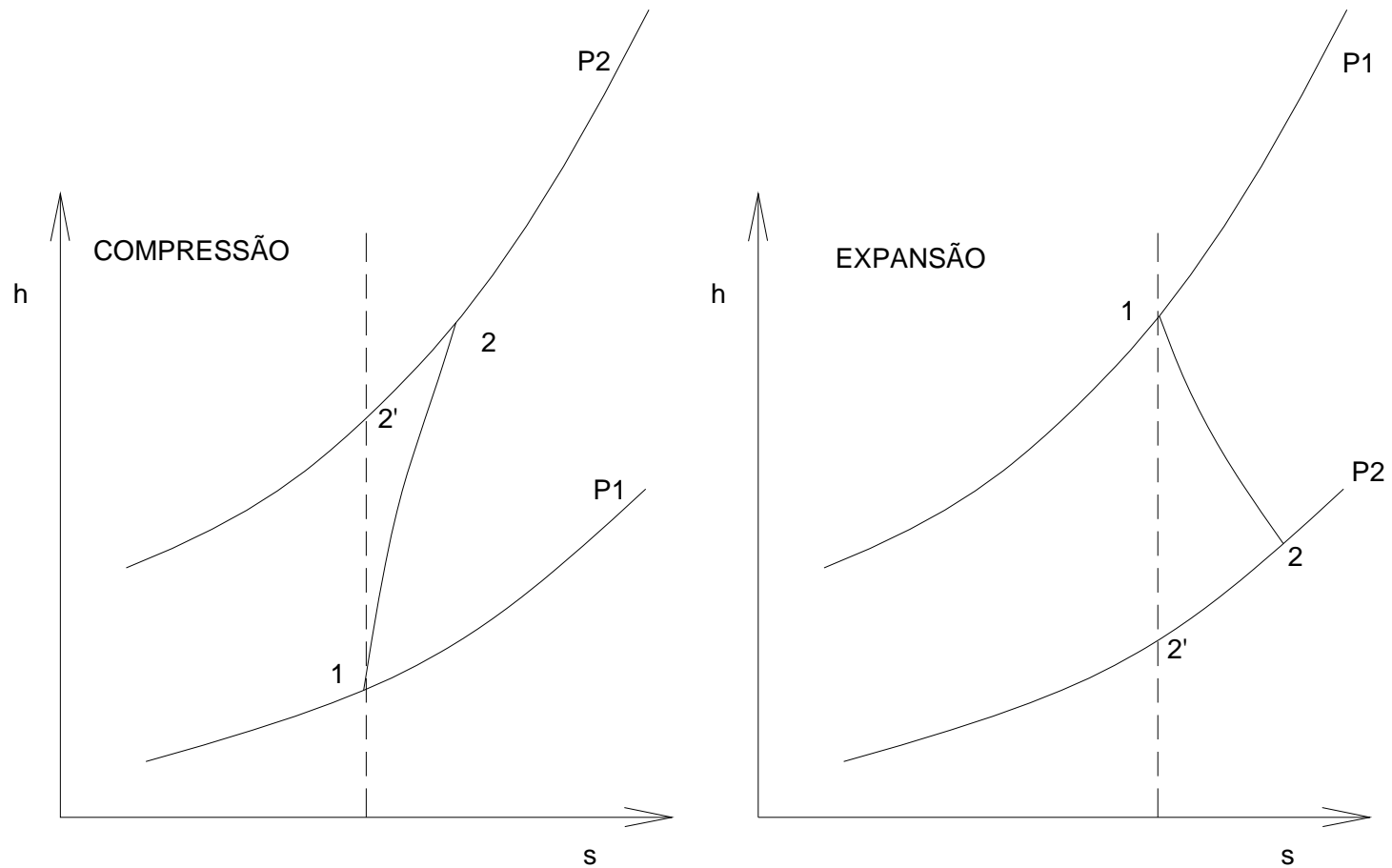
Assim a equação # 4-23 pode ser rescrita nas formas abaixo, para compressores e para turbinas, respectivamente:

$$\dot{W}_C = \dot{m}c_p (T_{t2} - T_{t1}) \quad \# 4-23$$

$$\dot{W}_T = \dot{m}c_p (T_{t1} - T_{t2}) \quad \# 4-24$$

A utilização de diagramas h-s ou T-s para representar os processos de compressão e de expansão, bem como os estados à entrada e à saída das máquinas de fluxo, facilita a obtenção das diversas fórmulas para a realização dos cálculos.





**Figura 4-14 - Diagramas  $h$ - $s$  (compressão e expansão)**

Define-se **eficiência isentrópica** do compressor e da turbina respectivamente por

$$\eta_C = \frac{W_{is}}{W_{id}} = \frac{h'_{t2} - h_{t1}}{h_{t2} - h_{t1}} = \frac{T'_{t2} - T_{t1}}{T_{t2} - T_{t1}} \quad \# 4-25$$

$$\eta_T = \frac{W_{id}}{W_{is}} = \frac{h_{t2} - h_{t1}}{h'_{t2} - h_{t1}} = \frac{T_{t2} - T_{t1}}{T'_{t2} - T_{t1}} \quad \# 4-26$$

As expressões acima, que envolvem temperaturas, levaram em conta que o valor de  $c_p$  é constante.

Utilizando-se as equações 5.42 e 6.23 pode-se obter:

Para compressor:  $h_{t2} - h_{t1} = U_2 V_{2u} - U_1 V_{1u}$

Para turbinas:  $h_{t1} - h_{t2} = U_1 V_{1u} - U_2 V_{2u}$

Deve-se observar que:

- a) Nessas equações, não são levadas em conta as perdas.
- b) As expressões foram escritas para que os trabalhos específicos sejam positivos.

O estudo do escoamento ao longo dos canais entre as pás não é objeto deste curso.

#### 4.5. COEFICIENTES DE PRESSÃO E DE VAZÃO EM TERMOS DO GRAU DE REAÇÃO

Definindo-se o coeficiente de pressão por

$$\Psi = \frac{W_{e,real}}{U_2^2}$$

e a eficiência hidráulica por

$$\eta_{th} = \frac{W_{e,real}}{W_{e,ideal}}$$

sendo

$$W_{e,ideal} = s_F U_2 V_{2u} - U_1 V_{1u}$$

tem-se

$$\Psi = \frac{\eta_h s_F U_2 V_{2u} - U_1 V_{1u}}{U_2^2}$$

Para escoamento de entrada axial ou radial  $V_{1u} = 0$  e, daí,

$$\Psi = \frac{\eta_h s_F (U_2 V_{2u})}{U_2^2} = \eta_h s_F \frac{V_{2u}}{U_2}$$

Entretanto,  $V_{2u} = U_2 - W_{2u} = U_2 - V_{2r} \operatorname{tg} \beta_2 = U_2 \left( 1 - \frac{V_{2r}}{U_2} \operatorname{tg} \beta_2 \right)$

Também, o grau de reação, dado por  $\Lambda = 1 - \frac{V_{2u}}{2U_2} = \dots = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{V_{2r}}{U_2} \operatorname{tg} \beta_2 \right)$

o que permite escrever

$$\Psi = 2\eta_h s_F (1 - \Lambda)$$

# 4-27

Esta expressão é importante porque relaciona uma condição de operação da máquina ( $\Psi$ ) com uma característica que decorre da geometria do rotor ( $\Lambda$ ).

Definindo o **coeficiente de entrada** como

$$\varepsilon = \frac{V_1}{\sqrt{2W_{e,real}}}, \text{ com } \underbrace{0,1}_{\text{líquidos}} < \varepsilon < \underbrace{0,3}_{\text{gases}}, \text{ tem-se}$$

$$\varepsilon = \frac{V_1}{\sqrt{2\eta_h s_F U_2 V_{2u}}} = \dots = \frac{V_1}{U_2} \frac{1}{\sqrt{2\eta_h s_F \frac{V_{2u}}{U_2}}} = \frac{V_1}{U_2} \frac{1}{\sqrt{2\Psi}}$$

ou

$$\frac{V_1}{U_2} = \varepsilon \sqrt{2\Psi}$$

de onde vem

$$\sqrt{\Psi} = \frac{V_1}{U_2} \frac{1}{2\varepsilon}$$

Também,

$$\frac{V_{2r}}{U_2} = \frac{V_{2r}}{V_1} \frac{V_1}{U_2} = \frac{V_{2r}}{V_1} \varepsilon \sqrt{2\Psi}$$

de onde resulta, da definição de  $\Lambda$ ,

$$\Lambda = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{V_{2r}}{V_1} \varepsilon \sqrt{2\Psi} \operatorname{tg} \beta_2 \right)$$

ou

$$\sqrt{\Psi} = \frac{2\Lambda - 1}{\frac{V_{2r}}{V_1} \varepsilon \sqrt{2} \operatorname{tg} \beta_2}$$

Esta expressão relaciona  $\Psi$ ,  $\varepsilon$  e  $\Lambda$ , englobando condições operacionais da máquina ( $\Psi$ ), características geométricas do rotor ( $\Lambda$ ) e a natureza do fluido de trabalho ( $\varepsilon$ ).

## 4.6. OUTRAS INFORMAÇÕES PARA PROJETO

### 4.6.1. Golpe de Ariete

Chama-se **golpe de ariete** o fenômeno provocado pela alteração brusca do escoamento permanente devida à variação de sua velocidade. Ocorre em todas as tubulações que conduzem líquido e suas causas principais são originadas no fechamento ou na abertura de válvulas ou ações equivalentes, como, por exemplo, as seguintes:

- Desligamento de motor de bombas
- Cisalhamento do eixo de bomba
- Alterações da pressão do reservatório de descarga
- Mudança do ângulo de montagem de pás (controle de vazão)
- Vibrações de pás
- Operação da máquina em regime instável



O “**fechamento de válvula**” acarreta a interrupção do escoamento e sua energia cinética deve ser dissipada, transformando-se em energia de pressão e de deformação das paredes da tubulação.

As equações de conservação, na forma como foram apresentadas anteriormente, não permitem o estudo dos golpes de ariete , pois não envolveram o atrito do fluido com as paredes da tubulação, o que pode exercer papel importante na manifestação do fenômeno.

Para levar em conta os efeitos da viscosidade na equação 5-10, deve-se acrescentar o termo

$$2\frac{f}{D}V^2$$

referente à perda de carga em tubulações (avaliada pela expressão usual

$$4f\frac{L}{D}\rho\frac{V^2}{2} = (\rho g \Delta H)$$

referente à perda de energia devida ao atrito. Nesta expressão,  $f$  é o coeficiente de atrito,  $L$  é o comprimento e  $D$  o diâmetro da tubulação).

Assim, tem-se

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{V^2}{2} \right) + g \frac{\partial z}{\partial s} + 2 \frac{f}{D} V^2 = 0$$

# 4-28

Esta equação pode ser integrada entre dois pontos sobre uma mesma linha de corrente.

Pode-se concluir desta expressão que a variação da pressão está relacionada com a rapidez com que a "válvula se fecha" (ou se abre), representada pela parcela  $\frac{\partial V}{\partial t}$ .

Com algumas hipóteses simplificadoras adicionais pode-se calcular a variação de pressão nesses dutos.

**primeira simplificação** ==> **variação linear da velocidade do escoamento** (causada, por exemplo, por atuação de uma válvula):

$$\frac{\partial V}{\partial t} \cong \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_{2F} - V_2}{\Delta t}$$

onde

$V_{2F}$  é a velocidade do escoamento no instante em que a válvula acabou de movimentar-se

$V_2$  é a velocidade do escoamento permanente antes de a válvula movimentar-se

$\rho$  = constante (escoamento incompressível)

$V_1 = 0$  (a água está se escoando a partir de um reservatório de volume muito grande e a estação 1 está num ponto em que a velocidade local é desprezível (por exemplo, a velocidade da superfície livre de uma grande caixa d'água ou de uma represa)

$V_{2F} = 0$  (a válvula se fecha completamente).

Para este caso,

$$\int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t} ds + \int_1^2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial s} ds + \int_1^2 \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{V^2}{2} \right) ds + \int_1^2 g \frac{\partial z}{\partial s} ds + \int_1^2 2 \frac{f}{D} V^2 ds = 0$$

$$\frac{V_{2F} - V_2}{\Delta t} L + \frac{1}{\rho} (P_2 - P_1) + \frac{1}{2} (V_2^2 - V_1^2) - g \Delta z + 2 \frac{fL}{D} V_2^2 = 0$$

ou, isolando-se  $P_2$ :

$$P_2 = P_1 + \rho \left\{ \frac{V_2 L}{\Delta t} - \frac{V_2^2}{2} + g \Delta z - \frac{2fL}{D} V_2^2 \right\}$$

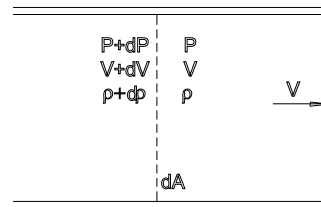
# 4-29

$P_2$  pode ser muito elevado, causando dilatação das paredes da tubulação ou, até, o seu rompimento, em casos mais graves.

O fechamento brusco de uma válvula acarreta o aparecimento de ondas de pressão no fluido.

A fim de quantificar esse fenômeno, considere-se um fluido real. A variável pressão em qualquer ponto está associada à variação da densidade do fluido, isto é, as suas partículas mudam de posição, aproximando-se ou afastando-se umas das outras com o aumento ou diminuição da pressão. Desta forma, como as partículas se movimentam para o ponto de maior pressão e maior densidade, o efeito de mudança de posição se propaga muito rapidamente no fluido. Como o fluido possui elasticidade, o ajuste de posições gasta um certo tempo, de tal forma que a velocidade de propagação da pressão (e da densidade) é finita, embora muito rápida. Os efeitos dessa propagação podem ser muito significativos.

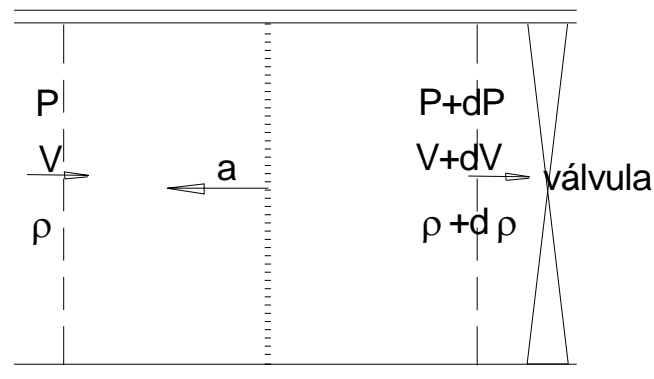
Analise-se a propagação de uma variação infinitesimal de pressão numa tubulação como a da Figura 4-15.



**Figura 4-15 – Esquema para análise de propagação de perturbação de pressão**

Suponha-se que a onda de pressão se movimenta da esquerda para direita, com velocidade absoluta  $a$ . À direita da onda, o fluido não chegou a ser perturbado, mas à esquerda tem-se a perturbação em  $P$ ,  $\rho$  e  $V$ .

Um observador colocado sobre a onda vê o escoamento em regime permanente. Isto significa adotar-se o escoamento como sendo permanente, mas com velocidade  $(V-a)$ , analisada por um observador estacionário, conforme Figura 4-16.



**Figura 4-16 – Perturbação de pressão**

Da **continuidade**, aplicada antes e depois da superfície de descontinuidade, permite escrever:

$$(\rho + \partial\rho)[(V + \partial V) - a]\partial A = \rho(V - a)\partial A$$

Reagrupando-se os termos convenientemente, chega-se a

$$(a - V)\partial\rho = (\rho + \partial\rho)\partial V \quad \# 4-30$$

Do **balanço de forças** através da seção dá

$$\partial P \partial A = [\rho(V - a)\partial A][V - (V + \partial V)]$$

ou

$$\partial P = \rho(V - a)(-\partial V)$$

de onde resulta

$$a - V = \sqrt{\frac{\partial P}{\partial \rho}}$$

# 4-31

O primeiro membro da equação # 4-31,  $a-V$ , é a velocidade de frente de onda relativa ao fluido, de tal forma que a velocidade de propagação da perturbação fraca é

$$a - V = \sqrt{\frac{\partial P}{\partial \rho}}$$

Levando-se em conta que, nos líquidos,  $V \ll a$ , pode-se aproximar

$$a \cong \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

# 4-32

A equação #4.32 se aplica a qualquer material, seja sólido, líquido ou gasoso.

A velocidade de propagação é muito importante em fluidos porque a velocidade do escoamento pode ser  $<$ ,  $=$  ou  $>$  que a velocidade de propagação das ondas de pressão (velocidade sônica), o que acarreta que as características do escoamento ao redor de um corpo sólido sejam diferentes se  $V < a$ ,  $V = a$  ou  $V > a$ .



$$\frac{dP}{\rho} = -(a + V)dV - (dV)^2$$

# 4-33

A equação # 4-33 pode ser resolvida quando se souber como varia o termo  $(dV)^2$  em função da movimentação da válvula. A título de ilustração, considerem-se os casos de fechamento brusco e pequena movimentação da válvula.

### Fechamento brusco: $dV = -V$

Neste caso, substituindo-se  $dV$  por  $-V$  na equação # 4-33 resulta

$$\frac{dP}{\rho} = -(a + V)(-V) - V = aV + V^2 - V^2 = aV$$

ou

$$dP = \rho a V$$

# 4-34

Fechamento lento:  $(dV)^2=0$ .

Com essa simplificação, tem-se  $dP = -\rho a dV(1 + V/a)$

Como o escoamento de líquidos em tubulações é muito lento comparado à velocidade do som,  $V/a \ll 1$ , de onde vem

$$dP = -\rho a dV$$

# 4-35

Sempre que a válvula for movimentada aparece uma variação de pressão, que se propaga com a velocidade  $(a-V)$ . A variação de pressão deforma o material da tubulação, acarretando variação das dimensões da tubulação. A tubulação é deformada elasticamente quando a variação de pressão é pequena, mas pode sofrer deformações plásticas ou mesmo se romper, quando a variação de pressão for muito alta. Todos os equipamentos que estiverem em contato com o fluido serão afetados: válvulas, turbinas, etc. Casos de quebra de válvulas e rompimento de tubulações foram observados.

#### 4.6.2. Alteração da viscosidade

A alteração da viscosidade afeta as perdas que ocorrem na máquina. Não há um método simplificado para avaliar a mudança de desempenho causada pela mudança de fluido ou alteração de sua viscosidade. Deve-se recorrer a ensaio da máquina com o novo fluido, sempre que possível. O fabricante da máquina geralmente fornece fórmulas e gráficos para o cálculo dessas correções pois geralmente ensaia suas máquinas com esses novos fluidos.

Algumas receitas para levar em conta a variação do fluido e/ou da viscosidade também podem ser encontradas em diversos manuais, como o [DeLaval Engineering Handbook](#), terceira edição, 1970, páginas 6-14 a 6-16, que publica uma das tabelas de padrões do Hydraulic Institute (EUA), para rotores radiais.

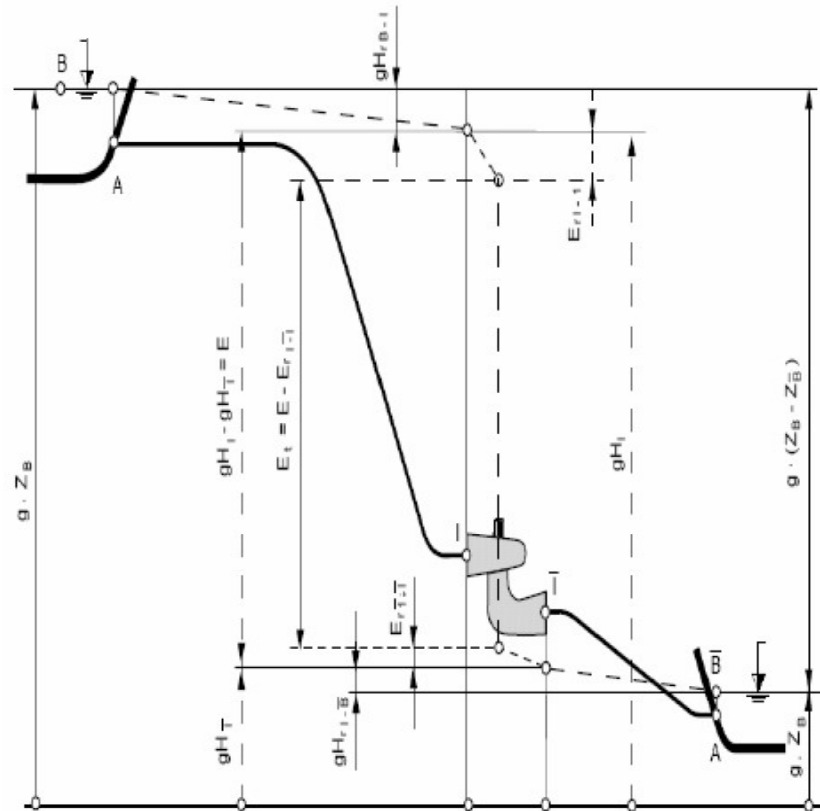


Fig. 6.20<sup>a</sup> - Esquema de uma instalação de turbina hidráulica

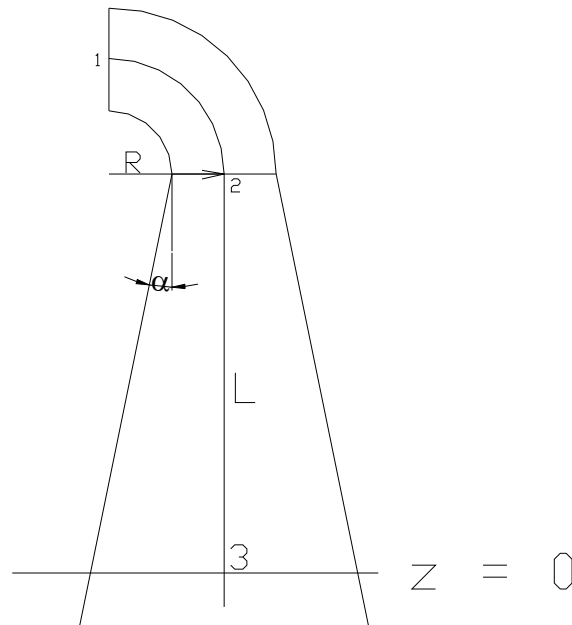


Fig. 6.20b : duto de sucção (vertical) de uma turbina hidráulica.

Em (1) as propriedades do fluido são as mesmas à saída da turbina.

Qual a pressão de descarga da turbina instalada à frente desse duto,  $P_1$ , quando a vazão for  $\dot{Q}$ ?

Conhece-se a geometria do duto de sucção e, daí:

$$A_1 = A_2 = \frac{\pi D_1^2}{4}, \quad A_3 = \frac{\pi D_3^2}{4}, \quad L = \frac{D_3 - D_2}{2 \operatorname{tg} \alpha} \quad \Delta H = L + R$$

Tem-se:  $V_2 = \frac{4\dot{Q}}{\pi D_2^2} \quad V_3 = \frac{4\dot{Q}}{\pi D_3^2}$

Em (1):  $E_1 = \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} V_1^2 + g z_1$

Em (2):  $E_2 = \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} V_2^2 + g z_2$

Em (3):  $E_3 = \frac{P_3}{\rho_3} + \frac{1}{2} V_3^2 + g z_3$

Sem levar em contas as perdas, de

$$E_1 = E_2 \text{ resulta } \frac{P_1 - P_2}{\rho} - g(z_1 - z_2) = 0$$

$$E_2 = E_3 \text{ resulta } \frac{P_2 - P_3}{\rho} + \frac{V_2^3 - V_3^2}{2} + g(z_2 - z_3) = 0.$$

Então,

$$\left. \begin{array}{l} P_1 = P_2 - \rho g(z_1 - z_2) \\ P_2 = P_3 - \rho \frac{V_2^3 - V_3^2}{2} - \rho g(z_2 - z_3) \end{array} \right\} \Rightarrow P_1 = \left[ P_3 - \rho \left\{ \frac{V_2^2 - V_3^2}{2} \right\} + g(z_2 - z_3) \right] - \rho g(z_1 - z_2)$$

e

$$P_1 = P_3 - \rho \left\{ \frac{V_2^2 - V_3^2}{2} \right\} - g(z_3 - z_1) = P_3 - \rho \left\{ \frac{V_2^2 - V_3^2}{2} \right\} - \rho g \Delta H$$

Portanto,

$$P_1 = P_3 - \rho \frac{V_2^2 - V_3^2}{2} - \rho g \Delta H$$

isto é, a **pressão na descarga da turbina é menor que a ambiente** e, em consequência, **maior diferencial de pressão aparecerá entre a entrada e a saída da turbina**. Isto **equivale a aumentar sua capacidade de produção de trabalho** ou, equivalentemente, ao **aproveitamento da energia cinética à saída do rotor**.

**Exemplo:**

Na Fig. 1:  $D_2=0,300$  m;  $D_3=0,600$  m;  $\alpha = 6^\circ$ ;  $R = 0,5$  m. Para  $\dot{Q}=0,150$  m<sup>3</sup>/s. Calcular  $P_1$ .

**Solução:**

Tem-se

$$L = \frac{D_3 - D_2}{2 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{0,600 - 0,300}{2 \operatorname{tg} 6^\circ} = 1,427 \text{ m}$$

$$\Delta H = L + R = 1,427 + 0,500 = 1,927 \text{ m}$$

$$V_2 = \frac{4\dot{Q}}{\pi D_2^2} = \frac{4 \times 0,150}{\pi \times 0,3^2} = 2,122 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$V_3 = \frac{4\dot{Q}}{\pi D_3^2} = \frac{4 \times 0,150}{\pi \times 0,6^2} = 0,530 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$P_1 = P_3 - \rho \frac{V_2^2 - V_3^2}{2} - \rho g \Delta H =$$

$$= 101325 - 1000 \frac{2,122^2 - 0,530^2}{2} - 1000 \times 9,81 \times 1,927 = 101325 - 2111 - 18903,9 = 80310 \text{ Pa.}$$



Note:

1) A pressão à saída da turbina é bem inferior à pressão ambiente. Isto acarreta maior trabalho específico produzido pela máquina relativamente à descarga direta para a atmosfera. Esse ganho de trabalho específico deveu-se à recuperação da energia cinética que havia saído do rotor.

2) O duto de sucção de bombas pode também ser analisado do mesmo modo. Neste caso, entretanto, a pressão à entrada da bomba é menor do que a ambiente e o trabalho específico da bomba deverá ser maior do que aquele necessário para elevar a pressão ao valor  $P_2$  se a entrada a bomba estivesse nas condições ambientes:

$$P_1 = P_A - \rho \frac{V_2^2 - V_A^2}{2} - \rho g \Delta H$$

onde o índice A se refere à posição do ponto no duto de sucção, no nível do reservatório; 1 e 2 à entrada e à descarga da bomba, respectivamente.

#### 4.8. BOMBEAMENTO DE COMPRESSOR

Existe um fenômeno denominado **bombeamento** (ou surge, ou stall) do compressor que é comum ocorrer quando a vazão através é reduzida.

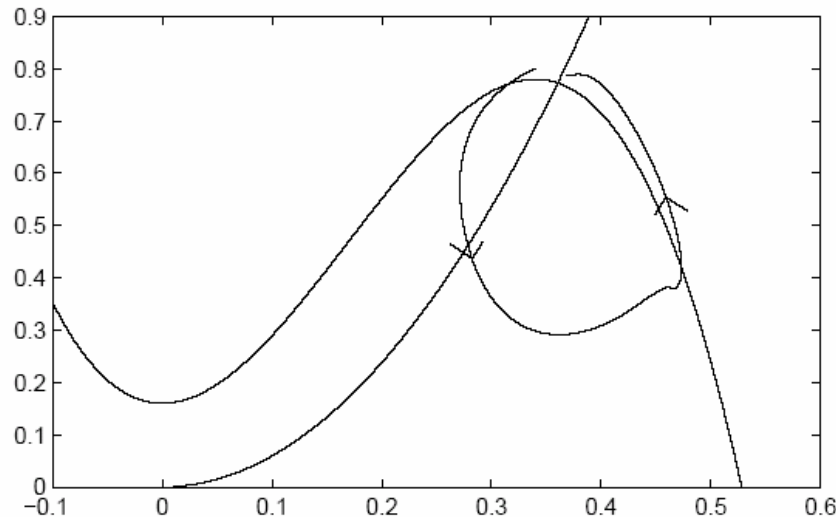
O aumento da pressão de descarga com a redução da vazão é característica dos compressores.

Esse aumento de pressão passa por um máximo e qualquer redução de vazão acarreta instabilidade do compressor causada por mudança abrupta nas características do escoamento no compressor.

Reduzindo-se a vazão além desse ponto de máxima pressão, acentua-se o fenômeno de descolamento do escoamento nas pás (stall), culminando com o **bombeamento** (surge).

O bombeamento ocorre em todas as rotações do compressor.

As curvas de desempenho de compressores compreendem pressão e eficiência em função da vazão, para cada rotação. Os pontos que indicam bombeamento são unidos por uma curva suave, chamada de **curva de bombeamento**. Não é objeto deste curso o estudo do bombeamento, embora todos devam estar alertados para os efeitos danosos ao próprio compressor ou às instalações em que esteja acoplado.



**Fig. 6.21 - esquema utilizado para explicar o bombeamento de compressor (pressão x vazão)**

## 4.9 EXERCÍCIOS

### Exercício 4.9.1

Um ventilador centrífugo bombeia ar com densidade de  $1,2 \text{ kg/m}^3$  à razão de  $2 \text{ m}^3/\text{s}$ , a 960 rpm. Os diâmetros do rotor são de 0,7 m e de 0,48 m (externo e interno). A altura da pá à entrada do rotor é de 0,16 m e está projetada para  $V_r = \text{constante}$ , da raiz ao topo da pá. As pás são inclinadas para trás, com ângulos de  $67,5^\circ$  e  $40^\circ$  respectivamente com a direção radial à entrada e à saída da pá. Desenhar os triângulos de velocidades em escala e calcular a altura de carga. (91,1 m de ar)

### Exercício 4.9.2

Uma bomba centrífuga bombeia  $0,3 \text{ m}^3/\text{s}$  de água a 1400 rpm. A altura total de carga é de 20 m. O rotor mede 0,30 m de diâmetro e 0,032 m de altura na saída. É projetado para velocidade meridional constante. Os diâmetros dos dutos de admissão e de descarga são idênticos. Calcular os seguintes ângulos das pás:

- a) para as pás do rotor, na saída
- b) para as pás do estator ao redor do rotor.

(  $52,74^\circ$  ,  $41,9^\circ$  )

**Exercício 4.9.3**

Um ventilador centrífugo bombeia  $4,5 \text{ m}^3/\text{s}$  de ar a  $100 \text{ mm H}_2\text{O}$ . Seu diâmetro externo é de  $0,5 \text{ m}$  e a altura da pá na saída é de  $0,18 \text{ m}$ . As pás são inclinadas para trás e de espessura desprezível. Se a sua velocidade de rotação é de  $1800 \text{ rpm}$  e considerando que a conversão da energia cinética de entrada em energia de pressão na voluta é contrabalançada pelas perdas de atrito nela e no rotor, determinar o ângulo da pá na saída do rotor. Considere entrada radial e a densidade do ar de  $1,23 \text{ kg/m}^3$ .

( $62,2^\circ$ )

#### Exercício 4.9.4

Para um ventilador centrífugo, mostrar que, se  $V_{1u} = 0$  então a relação entre  $H_{máx}$ , vazão volumétrica à saída ( $Q$ ) e o ângulo da pá na saída,  $\beta_2$ , é

$$H_{máx} = A - B Q \operatorname{tg} \beta_2,$$

com  $A$  e  $B$  constantes que dependem da velocidade angular, do diâmetro e da altura da pá à saída do rotor. Sugestão: partir da equação de Euler para a altura de energia desenvolvida pelo ventilador centrífugo..

Um ventilador centrífugo com 0,76 m de diâmetro de rotor e rodando a 960 rpm, bombeia  $155 \text{ m}^3/\text{min}$  a 75 mm  $\text{H}_2\text{O}$ . Se o ar entra no impelidor radialmente e a altura da pá na descarga é de 12 cm, calcular o ângulo da pá na saída.

Admitida 45% da altura de energia dissipada no rotor e na carcaça e  $1,25 \text{ kg/m}^3$  a densidade do ar.

(  $48,5^\circ$  )

#### Exercício 4.9.5

Um rotor axial cujo raio médio é 0,3 m, quando operando no ponto de maior eficiência, tem as pás defletindo o escoamento de  $15^\circ$  quando o escoamento se aproxima com ângulo de  $60^\circ$  (o ângulo de saída é, portanto, de  $45^\circ$ ). Considerando que a água entra axialmente no rotor e que sua velocidade axial permanece constante, desenhar os triângulos de velocidades em escala. Calcular para  $N = 600 \text{ rpm}$ , a altura de energia gerada pelo rotor.

(15,25 m)

**Exercício 4.9.6**

Uma bomba axial opera a 500 rpm. O diâmetro externo do rotor é de 0,75 m e o diâmetro interno de 0,40 m. No raio médio, o ângulo de entrada da pá é de  $78^{\circ}$  e o de saída de  $75^{\circ}$ . Esquematizar os triângulos de velocidades correspondentes à entrada e à saída e estimar, deles:

- a) altura de energia gerada pela bomba
- b) vazão em massa
- c) potência de eixo consumida pela bomba.

Considere a eficiência hidráulica de 87% e global de 70%.

(4,12 m; 1,01 m<sup>3</sup>/s e 58,1 kW).

Exercício 4.9.7

Mostrar que, para escoamento de vórtice livre, através de rotor axial, a circulação ao redor da pá não varia com o raio.

Um ventilador axial bombeia  $20 \text{ m}^3/\text{s}$  de ar e seus parâmetros principais são: rotação  $N = 720 \text{ rpm}$ ;  $D_2 = 1,00 \text{ m}$ ;  $D_1 = 0,45 \text{ m}$ ;  $N_p = 10$ . As pás são de perfis aerodinâmicos que, para ângulo de ataque ótimo  $\tau = 5^\circ$  tem coeficiente de sustentação  $C_L = 0,80$  e a corda na base da pá,  $c_b = 0,07 \text{ m}$ . Usando teoria de pá isolada e escoamento de vórtice livre e velocidade axial constante, determinar o aumento da altura de carga através do rotor, o ângulo da pá, a corda no topo da mesma e o ângulo de retorcimento da pá, do seu pé ao topo.

(12,38 m;  $41,3^\circ$  ; 0,051 m e  $11,7^\circ$ )

Exercício 4.9.8

Um ventilador axial de 0,9 m de diâmetro externo e 0,45 m de diâmetro interno, rodando a 720 rpm, bombeia  $4,7 \text{ m}^3/\text{s}$  de ar. No diâmetro médio,  $s/c = 1,4$ . Nessa seção a corda faz um ângulo de  $68^\circ$  com a direção axial e o ângulo de ataque é de  $4^\circ$ . Determinar a altura de carga (altura de energia) desenvolvida se, nessa condição, o perfil da pá tem coeficiente de sustentação de 0,9 e de arrasto de 0,015. Usar  $1,2 \text{ kg/m}^3$  para a densidade do ar.

(33,4 mm H<sub>2</sub>O)



Exercício 4.9.9

Uma bomba axial com DGV (downstream guide vane) de 0,6 m de diâmetro, rodando a 950 rpm, deve bombear  $0,75 \text{ m}^3/\text{s}$  a 16 m de altura de energia. Se a relação de raios interno-externo vale 0,6 e  $c/s = 1$  na base de  $c/s = 0,55$  no topo, determinar os ângulos da pá na raiz e no topo, bem como os ângulos na entrada da DGV. Usar os seguintes dados do aerofólio:

ângulo de ataque (grau)	1,0	4,0	7,0	10,0	11,0
coeficiente de sustentação	0,46	0,87	1,16	1,39	stall

(77,4°, 63,3°, 24,8°)

**Exercício 4.9.10**

Uma bomba de água axial tem os seguintes dados:

diâmetro externo do rotor = 1,800 m

diâmetro interno do rotor = 0,750 m

ângulo de saída da pá no diâmetro médio =  $60^\circ$

ângulo de entrada da pá fixa no diâmetro médio =  $50^\circ$

Para um rotor com velocidade de 250 rpm, sendo dado que a projeção da velocidade absoluta a montante, na direção tangencial, é nula, da raiz ao topo da pá, calcular:

a) a velocidade axial para a qual o ângulo de ataque para as pás do estator é zero, para desvio nulo à saída do rotor;

b) o torque no rotor, se a velocidade axial tiver o valor calculado em a) em todos os raios, e a mudança de velocidade na direção de U for também independente do raio;

c) os ângulos da pá à entrada do rotor, para ângulos de ataque nulo na raiz e no topo.

(5,72 m/s;  $52,3 \times 10^3$  Nm; )

**Exercício 4.9.11**

O impelidor de uma bomba centrífuga gira a 1450 rpm. Tem 0,250 m de diâmetro e altura de 0,020 m na saída. A inclinação das pás na saída é de  $60^\circ$  e o fator de escorregamento é de 0,77. Se a vazão volumétrica for de  $0,028 \text{ m}^3/\text{s}$  e desprezando choques de entrada e pré-rotação à entrada, calcular a altura de energia teórica desenvolvida pelo rotor. Usando a relação de Stodola, calcular o número de pás no impelidor.

(23,7 m; 8 pás)

**Exercício 4.9.12**

Os diâmetros de entrada e de saída de um ventilador radial girando a 1450 rpm são 0,475 m e 0,700 m respectivamente. As alturas das pás são, respectivamente, 0,190 m e 0,145 m. O desempenho do ventilador é controlado por uma série de pás estatoras (IGV = “inlet guide vanes”) à entrada do rotor, que estão montadas para produzir pré-rotação na direção da rotação, tal que a velocidade relativa do ar à entrada seja de  $31 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , fazendo ângulo de  $75^\circ$  e causando perdas de choque de entrada de  $\frac{1}{2}0,6v_1^2$ , onde  $v_1$  é a velocidade absoluta à entrada. As pás do rotor estão inclinadas para trás, com ângulos de  $78^\circ$  e  $52^\circ$  respectivamente à entrada e à saída. Considerando que, devido ao escorregamento, a componente tangencial da velocidade é 80% da velocidade teórica e que as perdas do impelidor são 40% da pressão dinâmica à saída do rotor, calcular a altura total de energia desenvolvida pelo rotor e a vazão de ar pelo ventilador.

**Solução:**

[illegible]

Exercício 4.9.13

Mostrar que, para uma bomba centrífuga, desprezando-se perdas, a condição para máxima eficiência é

$U_2 = \frac{1}{2} V_2 \tan \beta_2$ , onde  $U$  é a velocidade periférica,  $V_2$  a velocidade absoluta do escoamento à saída do rotor e  $\beta$  o

ângulo da pá (o índice 2 se refere à saída do rotor).

Uma bomba centrífuga com rotor de 0,100 m de diâmetro e distancia axial de 0,015 m tem pás inclinadas  $65^\circ$  para trás. Se a rotação do rotor é 12,4 rps, calcular a vazão quando a bomba opera à máxima eficiência. Considere que a pré-rotação do escoamento é nula.

$(0,0043 \frac{\text{m}^3}{\text{s}})$

Exercício 4.9.14

Um compressor centrífugo estacionário bombeia 2 kg/s de ar a uma taxa de compressão de 4:1, de um ambiente a 288 K e 101.325 Pa. O ar é admitido axialmente à entrada do rotor e é dele descarregado (escoamento relativo) na direção que faz um ângulo de  $10^\circ$  com a direção radial. Sendo conhecidos:

$M_1$                     número de Mach do escoamento relativo à entrada do rotor = 0,4

$U_2$                     450 m/s

$R_{1i}/R_{1e}$             0,50 (relação de raios à entrada do rotor)

$R_{1e}/R_2$             0,60                     $V_{1a} = V_{2r}$                      $R_{ar}$                     287 J/(kgK)     $c_p$                     1005 J/(kgK).

Desprezando-se perdas à entrada do rotor, pede-se:

- a) Temperatura e Pressão estáticas e Velocidade absoluta à entrada do rotor
  - b) Área da seção de entrada do rotor; Raios interno e externo à entrada do rotor
  - c) triângulo de velocidades para a saída do rotor
  - d) Raio externo do rotor; velocidades periféricas na raiz, no meio e no topo da pá à entrada do rotor
  - e) Trabalho específico, Potência e eficiência do compressor
  - f) Rotação
  - g) triângulos de velocidades à entrada do rotor, para a raiz, meio e topo das pás (traçados em escala).
-

## 5. DESEMPENHO DAS MÁQUINAS DE FLUXO

### 5.1 INTRODUÇÃO

Capítulos anteriores → equações de conservação 1-D adaptadas → estudo das máquinas de fluxo.

Aplicações → máquinas motoras (turbinas) e máquinas movidas (bombas, compressores, ventiladores).

Simplificações profundas → obtenção de equações simples → estudo qualitativo.

Formulação → tendências de comportamento (desempenho) → pré-dimensionamento → dimensões principais da máquina.

Modelo unidimensional não é suficiente para simular a máquina com exatidão, mas é adequado para ser empregado durante a fase inicial de projeto da máquina.



Complementação com informações empíricas → melhor qualidade de projeto.

Fases mais adiantadas do projeto ← modelos multidimensionais sofisticados e dispendiosos.

Informações empíricas → coeficientes adimensionais ← observação dos fenômenos no interior das máquinas e medições em bancos de ensaios.

Resultados de ensaios → tratados e analisados → **curvas de desempenho**.

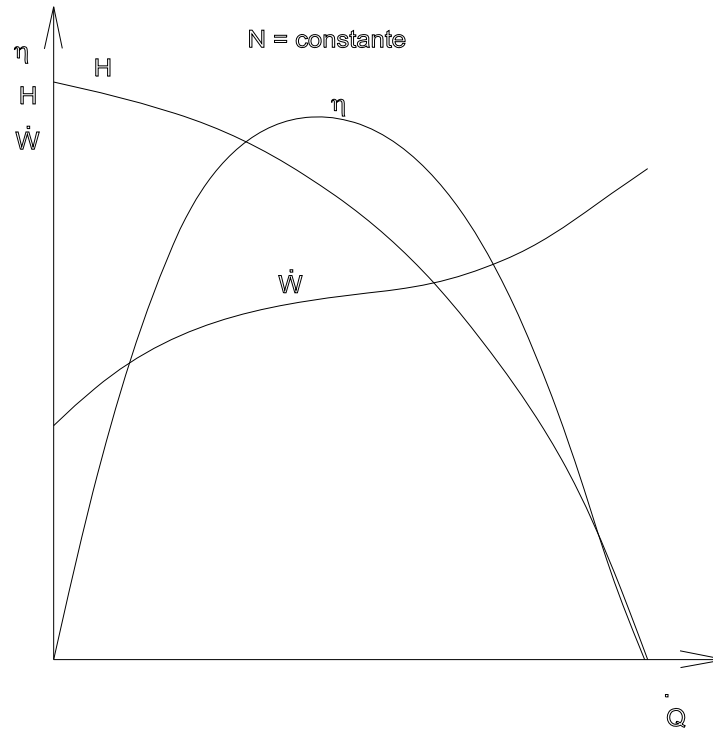
Curvas de desempenho → gráficos das relações funcionais de parâmetros de interesse do usuário e do pesquisador.

Parâmetros utilizados para o estudo do desempenho:

- altura de energia (H) (ou aumento de pressão  $\Delta P_t$ )
- eficiência ( $\eta$ )
- vazão em massa  $\dot{m}$  (ou vazão volumétrica  $\dot{Q}$ )
- potência ( $\dot{W}$ )
- velocidade angular  $\omega$  (ou rotação N)
- tamanho (D)

Gráficos e Tabelas de desempenho limitam o número de parâmetros estudados simultaneamente → escolher apenas os a que se dará ênfase → fixar os demais.

Bombas hidráulicas → altura de energia e eficiência em função da vazão, para cada rotação fixada → Fig. 5-1.

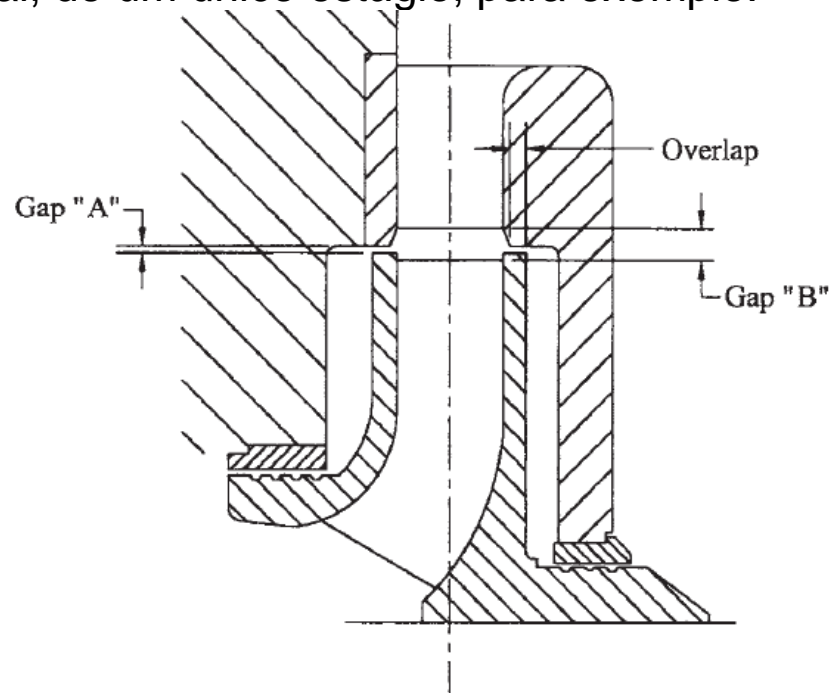


**Figura 5-1 - Curvas de desempenho (típicas) de uma bomba**

**Turbinas hidráulicas** → **potência** e **eficiência** em função da **rotação**, para cada altura de energia.

**Forma geral das curvas de desempenho das máquinas de fluxo.**

Bomba hidráulica radial, de um único estágio, para exemplo.



Fluido entra no rotor na direção radial (ou axial)  $\Rightarrow V_{1u} = 0$  (velocidade tangencial à entrada do rotor é nula).

$$\dot{W} = \dot{m} U_2 V_{2u} = \dot{m} U_2 (U_2 - W_{2m} \operatorname{tg} \alpha_3)$$

Admitindo provisoriamente que o escorregamento é nulo,  $\alpha_3 = \beta_2$  e, portanto,

$$\frac{\dot{W}}{\dot{m} g} = \frac{U_2}{g} (U_2 - W_{2m} \operatorname{tg} \beta_2) \equiv H$$

Da equação da continuidade,  $W_{2m} = \frac{\dot{m}}{\rho_2 A_2}$

$\Rightarrow$

$$H = \frac{U_2}{g} \left( U_2 - \frac{\dot{m}}{\rho_2 A_2} \operatorname{tg} \beta_2 \right) = \frac{U_2}{g} \left( U_2 - \frac{\dot{Q}_2}{A_2} \operatorname{tg} \beta_2 \right) = \frac{U_2^2}{g} - \frac{U_2}{g A_2} \dot{Q} \operatorname{tg} \beta_2 \quad \text{Eq. 5-1}$$

Pondo  $K_1 = \frac{U_2^2}{g}$  e  $K_2 = \frac{U_2}{gA_2}$ , vem

$$H = K_1 - K_2 \dot{Q} \operatorname{tg} \beta_2$$

Eq. 5-2

Para uma determinada velocidade  $N$  e para um rotor de dimensões conhecidas,  $K_1$  e  $K_2$  são constantes.

Essas constantes são características de cada bomba.

Equação 5.2 → relação funcional linear entre a altura de carga (ou pressão de descarga) e a vazão através da máquina.



- Altura de energia produzida pela bomba depende da quantidade de fluido que está bombeando
- Altura de energia é diferente para cada bomba, pois  $K_1$ ,  $K_2$  e  $\beta_2$  são, geralmente, diferentes.
- ângulo de saída da pá do rotor influencia as características da bomba: quanto maior for  $\beta_2$  menor será a altura de energia produzida.

Para as máquinas reais as perdas e os efeitos das pás precisam ser levados em conta.

Seja  $H_{\text{máx,id}}$  a altura de energia produzida por uma bomba ideal (Euler).

Subtraindo-se as perdas dessa altura de energia máxima obtém-se a altura de energia real da máquina.

Considerando apenas as perdas mais importantes:

- Por **escorregamento**:

$$H_{\text{máx}} = S_F H_{\text{máx,id}}$$

A perda de desempenho correspondente será

$$\Delta H_{SF} = H_{\text{máx}} (1 - S_F)$$



O coeficiente  $S_F$  depende de diversos fatores, dentre os quais a vazão

- As **perdas hidráulicas** no rotor e na carcaça, causadas pelo atrito → proporcionais ao quadrado da velocidade do escoamento médio → da vazão

- 

$$\Delta H_h = k_h \dot{m}^2$$

- As perdas por **choque de entrada** ← incidência desfavorável do escoamento nas pás → nulas na condição de projeto ← escoamento alinhado às pás → variam com  $V^2$  → com  $\dot{Q}^2$ . Dependem da variação da vazão em relação à vazão nominal (de projeto)  $\dot{m}_p$ . No ponto de projeto a perda por choque de entrada é nula.

$$\Delta H_{ch} = k_{ch} (\dot{m} - \dot{m}_p)^2$$

Então

**MÁQUINAS DE FLUXO**  
**NOTAS DE AULAS - 2010**

5-11/80

$$H_{\text{real}} = H_{\text{máx,id}} - \Delta H_{\text{SF}} - \Delta H_{\text{h}} - \Delta H_{\text{ch}}$$

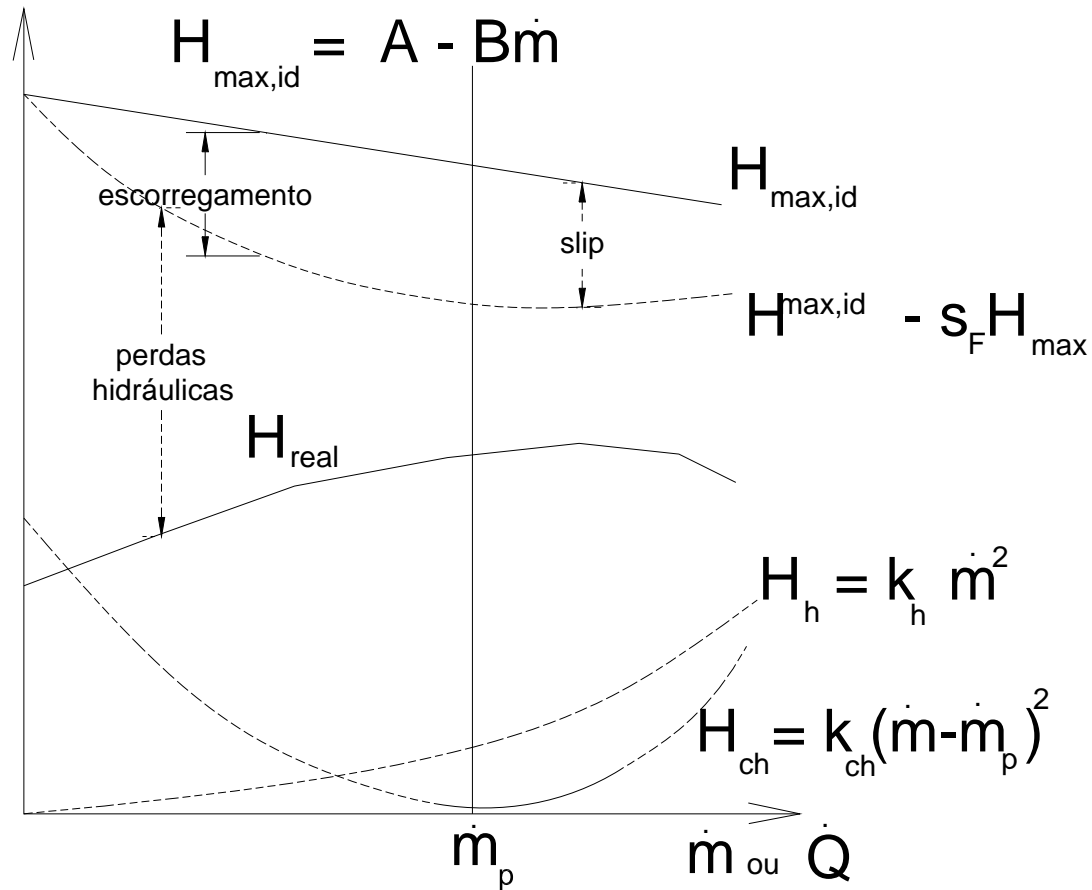
OU

$$H_{\text{real}} = H_{\text{máx}} - (1 - S_{\text{F}})H_{\text{máx}} - k_{\text{h}}\dot{m}^2 - k_{\text{ch}}(\dot{m} - \dot{m}_{\text{p}})^2$$

$$H_{\text{real}} = S_{\text{F}}H_{\text{máx,id}} - k_{\text{h}}\dot{m}^2 - k_{\text{ch}}(\dot{m} - \dot{m}_{\text{p}})^2$$

**Eq. 5-3**

Com as informações da Eq. 5-3 pode-se obter a forma geral da curva de  $H_{\text{real}}$



**Figura 5-2 - Característica de uma bomba centrífuga, com indicação de perdas**

As perdas mecânicas só influenciam na potência de eixo.  
A equação Eq. 5-3 pode ser rescrita, levando-se em conta a equação Eq. 5-1:

$$H_{\text{real}} = S_F \frac{U_2}{g} \left( U_2 - \frac{\dot{Q}}{A_2} \operatorname{tg} \beta_2 \right) - k_1 \dot{Q}^2 - k_2 (\dot{Q} - \dot{Q}_p)^2 \quad \text{Eq. 5-4}$$

Dividindo membro a membro a equação Eq. 5-4 por  $\frac{U_2^2}{g}$  vem

$$\frac{H_{\text{real}}}{\frac{U_2^2}{g}} = S_F \left( 1 - \frac{\dot{Q}}{U_2 A_2} \operatorname{tg} \beta_2 \right) - g k_1 A_2^2 \left( \frac{\dot{Q}}{U_2 A_2} \right)^2 - g k_2 A_2^2 \left( \frac{\dot{Q}}{U_2 A_2} - \frac{\dot{Q}_p}{U_2 A_2} \right)^2 \quad \text{Eq. 5-5}$$

Rearranjando adequadamente os termos e introduzindo os coeficientes de pressão e de vazão

$$\Psi = \frac{H_{\text{real}}}{\frac{U_2^2}{g}}$$

coeficiente de pressão

$$\Phi = \frac{\dot{Q}}{U_2 A_2}$$

coeficiente de vazão

vem

$$\Psi = s_F (1 - \Phi \tan \beta_2) - g k_1 A_2^2 \Phi^2 - g k_2 A_2^2 (\Phi - \Phi_p)^2$$

Isolando-se  $\Phi$

$$\Psi = -(k_1 + k_2) g A_2^2 \Phi^2 + [2k_2 g A_2^2 \Phi_p - S_F \tan \beta_2] \Phi + [S_F - k_2 g A_2^2 \Phi_p^2]$$

Eq. 5-6

obtém-se a equação

$$\Psi = A\Phi^2 + B\Phi + C$$

**Eq. 5-7**

em que os coeficientes da parábola são dados por

$$\begin{aligned} A &= -(k_1 + k_2)gA_2^2 \\ B &= \left[ 2k_2gA_2^2\Phi_p - S_F \operatorname{tg}\beta_2 \right] \\ C &= \left[ S_F - k_2gA_2^2\Phi_p^2 \right] \end{aligned}$$

**Eq. 5-8**

As equações 5-8 formam um sistema de equações que envolve dados geométricos e dados de funcionamento da máquina.

Quando se deseja conhecer dados de projeto de uma bomba (uma bomba a cu-  
jos dados de projeto não se tem acesso) → usar equações 5-8.

Isto é muito útil conhecer detalhes de projeto de uma bomba.

**Um procedimento sugerido para isto é o seguinte:**

1. Obter a curva  $H_xQ$  da bomba (o fabricante geralmente fornece essa informa-  
ção) ou, levantá-las numa instalação de ensaios.
2. Construir, a partir da curva  $H_xQ$ , a curva  $\Psi \times \Phi$  dos parâmetros adimensionais  
 $\Psi$  e  $\Phi$
3. Obter a equação de uma parábola que melhor se ajuste a essa curva, isto é,  
obter os coeficientes A, B e C da equação 5-7.

4. Determinar a vazão de projeto da bomba. Este valor é escolhido entre os valores da vazão em que se tem  $H_{\text{máx}}$  e da vazão em que se tem eficiência máxima.
5. Calcular, tentativamente, um valor de  $s_F$  de que resultem valores compatíveis dos outros parâmetros  $K_1$ ,  $K_2$  e  $\Phi_P$ . Sua determinação pode ser obtida levando-se em conta alguns conhecimentos técnicos a respeito das bombas, dentre eles:
  - Experiência prévia de projeto
  - O valor do coeficiente de vazão de projeto é aproximadamente o valor do coeficiente de vazão correspondente à eficiência máxima na rotação de projeto (admitindo-se que a bomba está otimizada para o ponto de projeto, essas vazões coincidem; caso contrário, a vazão de projeto fica entre a vazão de eficiência máxima e vazão de altura de carga máxima)



- a terceira equação do sistema Eq. 5-8 exige que  $S_F > C$ , uma vez que, se a vazão for nula, o coeficiente de pressão é positivo
- valores arbitrados para  $\Phi_p$  devem estar dentro da faixa de variação de vazão da bomba.
- 

### Exemplo

Considere a bomba MEM\_2003C, cujo rotor tem 0,391 m de diâmetro externo e a pá na seção de descarga tem 0,0235 m de altura. Rodando a 1800 rpm, as características determinadas em laboratório são as seguintes:

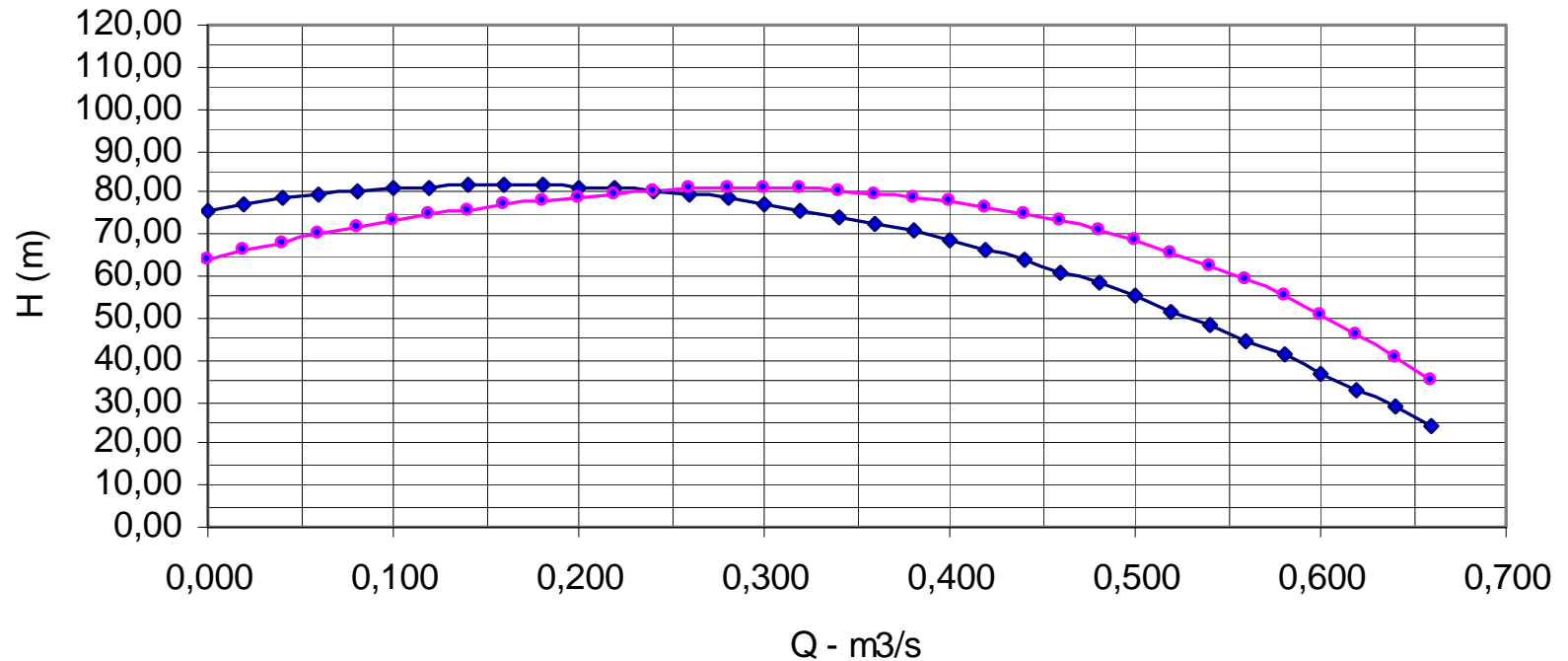
Q (m <sup>3</sup> /s)	H (m)	$\eta$ (%)
0,000	80,9	73,2
0,100	80,9	73,2
0,200	81,4	79,0
0,300	77,2	80,9

**MÁQUINAS DE FLUXO**  
**NOTAS DE AULAS - 2010**

5-19/80

0,400	68,4	77,8
0,500	55,0	68,4
0,600	37,0	50,7
0,700	14,3	21,9

Fig. 7.3 mostra as características para 1800 rpm. Alguns pontos importantes de operação, como o de máxima eficiência, podem ser obtidos. Bomba otimizada para o ponto de projeto.



**Figura 5-3 - Bomba IEM\_2003C**

As curvas  $H=H(Q)$  e  $\eta=\eta(Q)$  são parábolas obtidas por ajuste de curvas:

$$H(Q) = 75,79520408 + 74,13409926\dot{Q} - 231,3701923\dot{Q}^2$$

**MÁQUINAS DE FLUXO**  
**NOTAS DE AULAS - 2010**

5-21/80

$$\eta(Q) = 55,92529682 + 190,322837\dot{Q} - 337,5016403\dot{Q}^2$$

As curvas  $\Psi = \Psi(\Phi)$  e  $\eta = \eta(Q)$  são parábolas ajustadas (Tabela abaixo)

$\Phi$	$\Psi$	$\eta$ <u>(%)</u>
0,000	0,642	64,2
0,110	0,686	73,2
0,220	0,690	79,0
0,331	0,654	80,9
0,441	0,580	77,8
0,551	0,466	68,4
0,661	0,313	50,7
0,772	0,121	21,9

$$\Psi = 0,6423317686 + 0,5699051762 \Phi - 1,613462607 \Phi^2$$

$$\eta(Q) = 55,92529682 + 190,322837\dot{Q} - 337,5016403\dot{Q}^2$$

A Eq. 5-8 dá

$$A = -(k_1 + k_2)gA_2^2$$
$$B = \left[ 2k_2gA_2^2\Phi_p - S_F \operatorname{tg}\beta_2 \right],$$
$$C = \left[ S_F - k_2gA_2^2\Phi_p^2 \right]$$

onde

A	-1,613462607
B	0,5699051762
C	0,6423317686

Arbitrando o coeficiente de deslizamento ou a vazão no ponto de projeto obtém-se a solução do sistema, a partir de que foi construída a Fig. 7.4.

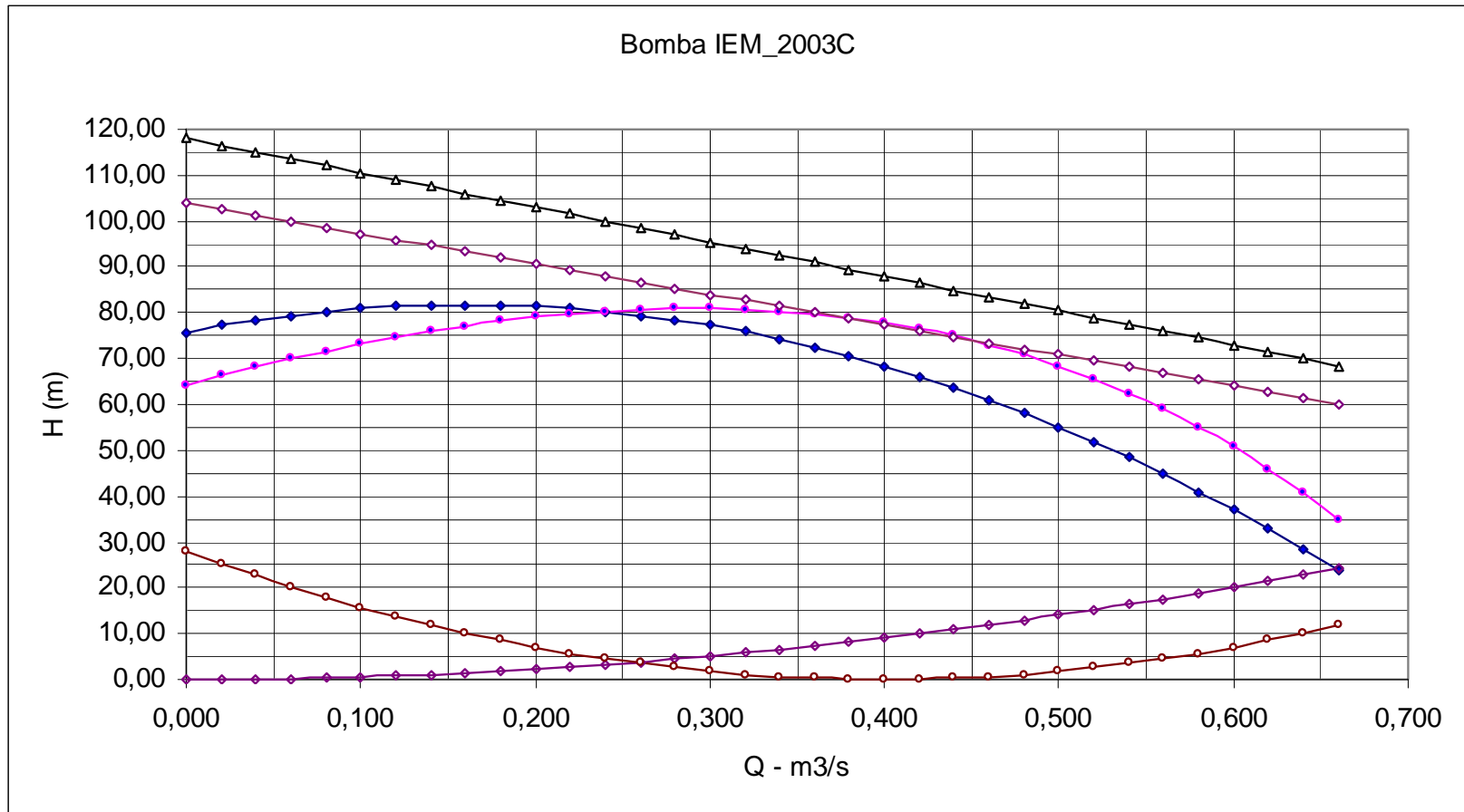


Figura 5-4 - Características da bomba MEM-2003C

O estudo de máquinas que operam com fluidos compressíveis requer o uso de parâmetros adimensionais que levam em conta efeitos de compressibilidade.

No lugar de vazão em massa usa-se vazão em massa corrigida; no lugar de rotação usa-se rotação corrigida.

**Para o estudo de compressores** as curvas de desempenho mais comuns são: **razão de compressão** e **eficiência** em função da **vazão corrigida** (ou **vazão** e **eficiência** em função da **taxa de compressão**), para cada **rotação corrigida**.

## 5.2 COEFICIENTES ADIMENSIONAIS E SIMILARIDADE

As curvas como as da Figura 5-2 são de utilidade prática restrita, visto que são de caráter universal, idealizadas a partir da consideração de que apenas alguns fenômenos influenciam as perdas → servem para mostrar tendências.

→ procurar informações de desempenho que estejam baseadas em grupos de variáveis → teoria dos números adimensionais apresenta uma solução possível.

Grupos adimensionais → obtenção de informações de desempenho de uma família de máquinas similares.

**Utilidade importante → obter dados de projeto de uma máquina a partir de resultados de ensaios de modelos em escala reduzida.**

Os ensaios de modelos requerem o projeto rigoroso do modelo e das condições em que deve ser ensaiado, além do uso de instrumentação adequada.



Usualmente envolvem aplicação de análise dimensional e o uso de grupos (ou números) adimensionais como o número de Reynolds, de Mach etc.

Utiliza-se o ensaio de modelos em praticamente todas as áreas ligadas à mecânica dos fluidos: túneis de vento (subsônicos, transônicos, supersônicos e hipersônicos), aviões, mísseis, carros, prédios, etc.

Os resultados desses ensaios de modelos, para serem utilizáveis, requerem que as leis de similaridade geométrica, dinâmica e cinemática sejam obedecidas.

- **Similaridade geométrica:** as máquinas hidráulicas são geometricamente semelhantes se todas dimensões correspondentes mantêm uma escala linear constante. O modelo deve ser uma réplica (em escala) perfeita do protótipo. Quando existe distorção no emprego de escala, é preciso fazer algumas alterações no modelo (no caso de ondas, é preciso manter uma relação entre a altura da onda e a profundidade do rio, por exemplo)
- **Similaridade cinemática:** as máquinas hidráulicas são cinematicamente semelhantes se pontos correspondentes das máquinas geometricamente semelhantes percorrem certas distâncias em certos tempos mantendo uma escala de tempos constante. Os triângulos de velocidades devem ser semelhantes. A similaridade cinemática é obtida a partir da similaridade geométrica para o mesmo coeficiente de vazão.

- **Similaridade dinâmica:** as máquinas hidráulicas são dinamicamente semelhantes se em pontos correspondentes das máquinas semelhantes geométrica e cinematicamente existirem forças tais que seja estabelecida uma escala de forças constantes. Deve vir da imposição de que todas as forças que agem no protótipo devem agir no modelo na mesma proporção das áreas do escoamento modelado. Se essa condição for satisfeita → **as características do escoamento serão as mesmas no modelo e no protótipo.**

A necessidade de se utilizarem coeficientes adimensionais torna-se clara quando se nota que as características de desempenho das máquinas são obtidas experimentalmente e máquinas diferentes têm características diferentes.

Mesmo as máquinas pertencentes a uma mesma família (mesmas considerações de projeto, mas de dimensões diferentes), geometricamente semelhantes, podem rodar em diferentes rotações. Combinando as diversas rotações e tamanhos, um número muito grande de ensaios deveria ser realizado.

As variáveis a serem consideradas são selecionadas dentre aquelas que têm grande influência no desempenho da máquina, a saber:

1. de controle

$\dot{m}$  ou  $\dot{Q}$

vazão em massa ou vazão volumétrica

N

velocidade de rotação do rotor (impelidor, no caso de bombas radiais)

2. da máquina

D

dimensão (geralmente diâmetro do rotor)

$\varepsilon$

rugosidade específica das passagens internas

$\eta$

eficiência

3. do fluido

$\rho$	densidade
$\nu$	viscosidade absoluta
$K$	módulo de elasticidade
$\dot{W}_e$	potência transferida entre fluido e rotor (e vice-versa)
$H, P_2$ ou $r_C$	altura de energia, pressão de descarga, razão de compressão ou energia específica
$T$	temperatura absoluta
$c_p$	calor específico a pressão constante
$c_v$	calor específico a volume constante
$k$	condutividade térmica

É costume utilizar como variáveis dependentes a altura de energia ou trabalho específico e eficiência.

A título de exemplo, uma bomba hidráulica servirá como base.

Admite-se que o trabalho específico e eficiência são relações funcionais do tipo

$$W_e = W_e(\dot{m}, N, D, \varepsilon, \rho, \mu, K, \dot{W}_e, T, c_p, c_v, k)$$

e

$$\eta = \eta(\dot{m}, N, D, \varepsilon, \rho, \mu, K, \dot{W}_e, T, c_p, c_v, k),$$

As dimensões fundamentais do Sistema Internacional de Unidades são  $m$ ,  $s$ ,  $kg$ ,  $K$ . Admite-se que as variáveis dependentes  $W_e$  e  $\eta$  podem ser desenvolvidas em potências das variáveis independentes, isto é,

$$W_e = D^a \varepsilon^b \rho^c \mu^d K^e T^f c_p^g c_v^h k^i \dot{W}_e^j N^l \dot{m}^n$$

onde  **$a$** ,  **$b$** , ...  **$n$**  são constantes reais.

Como as dimensões fundamentais são  $M$ ,  $L$ ,  $T$  e  $\Theta$ , então:

**MÁQUINAS DE FLUXO**  
**NOTAS DE AULAS - 2010**

5-32/80

$$\begin{aligned}[\dot{W}_e] &= \text{J/kg} = \text{Nm/kg} = \text{kg(m/s}^2\text{)}(\text{m/kg}) = \text{m}^2/\text{s}^2 = \text{L}^2\text{T}^{-2} \\[D] &= \text{L} \\[\varepsilon] &= \text{L} \\[\rho] &= \text{kg/m}^3 = \text{ML}^{-3} \\[\mu] &= \text{kg/ms} = \text{ML}^{-1}\text{T}^{-1} \\[K] &= \text{kg/ms}^2 = \text{ML}^{-1}\text{T}^{-1} \\[T] &= \Theta \\[c_p] &= \text{J/kgK} = \text{M}^2\text{T}^{-2}\Theta^{-1} \\[c_v] &= \text{J/kgK} = \text{M}^2\text{T}^{-2}\Theta^{-1} \\[k] &= \text{W/m}^2\text{K} = \text{MT}^{-3}\Theta^{-1} \\[N] &= 1/\text{s} = \text{T}^{-1} \\[\dot{m}] &= \text{kg/s} = \text{MT}^{-1} \\[\dot{W}_e] &= \text{W} = \text{ML}^2\text{T}^{-3}\end{aligned}$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} L^2 T^{-2} &= \\ &= L^a L^b (M L^{-3})^c (M L^{-1} T^{-1})^d (M L^{-1} T^{-2})^e \Theta^f (M^2 T^{-2} \Theta^{-1})^g (M^2 T^{-2} \Theta^{-1})^h \\ &\quad (M T^{-3} \Theta^{-1})^i (M L^2 T^{-3})^j (T^{-1})^l (M T^{-1})^m \end{aligned}$$

Da condição de identidade de polinômios, igualando-se os expoentes, resulta o seguinte sistema de equações algébricas:

$$\begin{aligned} [L]: \quad & 2 = a + b - 3c - d - e + 2j \\ [M]: \quad & 0 = c + d + e + 2g + 2h + i + j + m \\ [T]: \quad & -2 = -d - 2e - 2g - 2h - 3i - 3j - l - m \\ [\theta]: \quad & 0 = f - g - h - i \end{aligned}$$

O sistema de equações, por envolver apenas 4 equações e 12 incógnitas, é indeterminado. Sua solução é possível desde que sejam arbitrados valores a  $12 - 4 = 8$  dessas incógnitas.



A fixação desses 8 parâmetros não pode ser feita arbitrariamente, pois estão associados aos diversos fatores que influenciam o desempenho da máquina.

Deve-se fazer uma análise rigorosa dos fenômenos que ocorrem durante o funcionamento da máquina para avaliar corretamente quais os parâmetros que podem ser fixados.

Trata-se de uma ciência à parte a capacidade de escolher corretamente os parâmetros a serem fixados.

**A escolha das variáveis independentes deve ser baseada na análise dos parâmetros da máquina, do fluido e de controle para a aplicação determinada.**

No caso das máquinas hidráulicas é comum a escolha dos parâmetros que **não variam** durante a operação da máquina, tais como  $D$ ,  $\rho$ ,  $N$  e  $c_p$ .

Dependendo dos valores arbitrados obtêm-se soluções diferentes e, em consequência, grupos adimensionais diferentes.

Admitindo-se que  $D$ ,  $\rho$ ,  $N$  e  $c_p$  sejam as variáveis independentes adequadas, isolando-se os expoentes respectivos  $a$ ,  $c$ ,  $l$  e  $g$  no sistema de equações algébricas acima obtido, tem-se:

$$\text{De } \Theta: \quad g = f - h - i$$

$$\text{De } M: \quad c = -d - e - 2(f - h - i) - 2h - i - j - m$$

$$\text{De } L: \quad a = 2 - b + 3(-d - e - 2f + 2h + i - 2h - i - j - m) + d + e - 2j$$

$$\text{De } T: \quad l = 2 - d - 2e - 2(f - h - i) - 2h - 3i - 3j - m$$

Deve-se levar em conta alguns aspectos próprios a cada tipo de máquina. Por exemplo, em máquina hidráulica de fluxo não são importantes as variações de  $T$ ,  $c_p$ ,  $c_v$ ,  $k$ , isto é, pode-se eliminar esses parâmetros da formulação fazendo-se

$$f = g = h = i = 0.$$

Resulta, então, que

$$c = -d - e - j - m$$

$$a = 2 - b - 2d - 2e - 3m - 5j$$

$$l = 2 - d - 2e - 3j - m$$

e, daí,

$$W_e = D^{2-b-2d-2e-3m-5j} \varepsilon^b \rho^{-d-e-j-m} \mu^d K^e \dot{W}_e^j N^{2-d-2e-3j-m} \dot{m}^m$$

Agrupando-se os termos de mesmo expoente,

$$W_e = N^2 D^2 (D^{-1} \varepsilon)^b (\mu D^{-2} \rho^{-1} N^{-1})^d (D^{-2} \rho^{-1} K N^{-2})^e (\dot{m} D^{-3} \rho^{-1} N^{-1})^m (\dot{W}_e D^{-5} \rho^{-1} N^{-3})^j$$

Dividindo-se, membro a membro, esta equação por  $N^2 D^2$ , obtém-se

$$\frac{W_e}{N^2 D^2} = \text{função} \left[ \left( \frac{\varepsilon}{D} \right), \left( \frac{\mu}{\rho N D^2} \right), \left( \frac{K}{\rho N^2 D^2} \right), \left( \frac{\dot{m}}{\rho N D^3} \right), \left( \frac{\dot{W}_e}{\rho N^3 D^5} \right) \right]$$

➔ trabalho específico (normalizado) pode ser expresso por uma relação envolvendo 5 parâmetros adimensionais.

Tais parâmetros têm significações próprias importantes.

São utilizados largamente não só no estudo das máquinas de fluxo como em outras aplicações envolvendo escoamento de fluidos.

Costuma-se chamar

$$K_H = \frac{W_e}{N^2 D^2}$$

**coeficiente de energia** (ou de carga)

$$K_{\dot{m}} = \frac{\dot{m}}{\rho N D^3}$$

**coeficiente de vazão em massa**

ou

$$K_{\dot{Q}} = \frac{\dot{Q}}{N D^3}$$

**coeficiente de vazão volumétrica**

e

$$K_{\dot{W}_e} = \frac{\dot{W}_e}{\rho N^3 D^5}$$

**coeficiente de potência**

Observar que o coeficiente de potência é igual ao produto dos coeficientes de vazão de massa pelo coeficiente de energia pois

$$K_{\dot{W}_e} = \frac{\dot{W}_e}{\rho N^3 D^5} =$$
$$= \frac{\dot{W}_e}{K_{\dot{m}} \dot{m} N^2 D^2} = \frac{1}{K_{\dot{m}}} \frac{\dot{W}_e / \dot{m}}{N^2 D^2} = K_{\dot{m}} K_H$$

Daí

$$K_H = \text{função} \left[ \left( \frac{\varepsilon}{D} \right), K_{\dot{m}}, \left( \frac{\mu}{\rho N D^2} \right), \left( \frac{K}{\rho N^2 D^2} \right) \right]$$

Uma análise mais detalhada desses coeficientes adimensionais indica que

$$\frac{\mu}{\rho N D^2} = \frac{\mu}{\rho D \frac{60U}{\pi}} \propto \frac{\mu}{\rho D U} = \frac{1}{Re_U}$$

e

$$\frac{K}{\rho N^2 D^2} = \frac{K}{\rho U^2} \propto \frac{c^2}{U^2} = \frac{1}{M_U^2},$$

onde  $c$  = velocidade do som no fluido.

Portanto,

$$K_H = \text{função} \left[ \left( \frac{\varepsilon}{D} \right), K_m, Re_U, M_U \right]$$

Eq. 5-9

isto é, o coeficiente de energia depende dos coeficientes de rugosidade específica, de vazão e dos números de Reynolds e de Mach.

Tomando-se a potência de eixo como variável dependente, chega-se analogamente à relação

$$\frac{\dot{W}_e}{\rho N^3 D^5} = \text{função} \left[ \left( \frac{\varepsilon}{D} \right), \left( \frac{\mu}{\rho N D^2} \right), \left( \frac{K}{\rho N^2 D^2} \right), \left( \frac{\dot{m}}{\rho N D^3} \right), \left( \frac{W_e}{N^2 D^2} \right) \right]$$

ou

$$K_{\dot{W}_e} = \text{função} \left[ \left( \frac{\varepsilon}{D} \right), K_{\dot{m}}, Re_U, M_U \right]$$

Eq. 5-10

Da mesma forma, o coeficiente de potência depende dos mesmos fatores que o coeficiente de energia.

Para fluidos incompressíveis, no lugar de vazão em massa pode-se usar, indistintamente, vazão volumétrica.



Se as influências dos números de Mach e de Reynolds, bem como da rugosidade específica, não são muito significativas e, assim, podem ser desprezadas, isto é,

$$Re_U, M_U \text{ e } \frac{\varepsilon}{D}$$

não influenciam significativamente o desempenho da máquina.

As relações funcionais entre esses coeficientes tornam-se, então,

$$K_H = K_H(K_{\dot{m}})$$

e

$$K_{\dot{w}_e} = K_{\dot{w}_e}(K_{\dot{m}})$$

Essas relações funcionais (curvas)

- São levantadas experimentalmente.
- Recursos computacionais atuais permitem obtê-las numericamente, de forma aproximada.
- Têm formas semelhantes às das curvas de  $H$  e  $\dot{W}$  em função da vazão volumétrica (ou de massa).
- Representam todas as máquinas semelhantes.

→ para todas as máquinas semelhantes operando em condições dinâmicas semelhantes, os coeficientes adimensionais respectivos têm que ser idênticos.

→ todas as máquinas de uma mesma família, operando em condições dinâmicas semelhantes, são representadas por um único ponto sobre a curva característica.

Segue-se que

$$K_{\dot{m}} = \text{const} = \frac{\dot{m}}{\rho N D^3}$$

e

$$\dot{m} \propto \rho N D^3$$

$$K_H = \text{const} = \frac{W_e}{N^2 D^2} \quad \text{e} \quad W_e \propto N^2 D^2$$

Eq. 5-11

$$K_{\dot{W}_e} = \text{const} = \frac{\dot{W}_e}{\rho N^3 D^5}$$

e

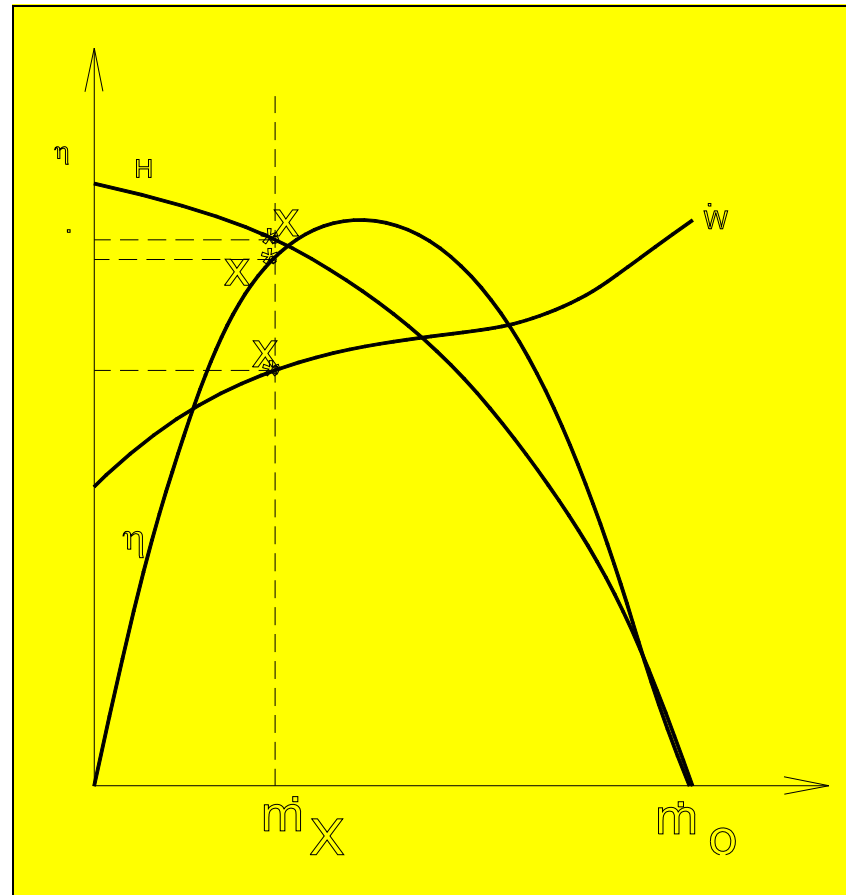
$$\dot{W}_e \propto \rho N^3 D^5$$

(desde que a rugosidade específica, o número de Reynolds e o número de Mach sejam os mesmos em todas as máquinas ou desde que a influência desses parâmetros possam ser desprezadas).

**As leis de similaridade podem ser utilizadas para o cálculo do desempenho de uma mesma máquina, rodando a diversas velocidades, a partir de curvas de desempenho correspondentes a uma determinada rotação.**

**Por exemplo**, sejam as curvas da Figura 5-5 as curvas de desempenho de uma bomba à rotação  $N_1$ . Quer-se estimar o desempenho dessa bomba rodando à velocidade  $N_2$  maior do que a velocidade  $N_1$ .

Para a mesma bomba,  $D_2 = D_1$ .



**Figura 5-5 - Extrapolação de curvas características de uma bomba**

À rotação  $N_1$  a vazão em massa é  $\dot{m}_x$ .

Os pontos de funcionamento estão indicados por X sobre as curvas: de potência, de altura de energia e de **eficiência** versus **vazão em massa**.

À rotação  $N_2$  os pontos estão indicados por X'.

Como

$$K_{\dot{m}_1} = K_{\dot{m}_2}$$
$$\frac{\dot{m}_x}{\rho N_1 D_1^3} = \frac{\dot{m}_{x'}}{\rho N_2 D_1^3}$$

vem

$$\dot{m}_{x'} = \left( \frac{N_2}{N_1} \right) \dot{m}_x$$

Analogamente,

$$K_{H_1} = K_{H_2}$$
$$\frac{W_{ex}}{N_1^2 D_1^2} = \frac{W_{ex'}}{N_2^2 D_2^2}$$

daí,

$$H_{x'} = \left( \frac{N_2}{N_1} \right)^2 H_x$$

Também,

$$\dot{W}_{x'} = \left( \frac{N_2}{N_1} \right)^3 \dot{W}_x$$

e como

$$\eta_{\text{global}} = \frac{\dot{W}_{\text{fluido}}}{\dot{W}_{\text{eixo}}} = \frac{\dot{m}gH}{\dot{W}_{\text{eixo}}}$$

então

$$\eta_x = \frac{\dot{m}_x g H_x}{\dot{W}_{e_x}}$$

e

$$\eta_{x'} = \frac{\dot{m}_{x'} g H_{x'}}{\dot{W}_{e_{x'}}}$$

e

$$\frac{\eta_x}{\eta_{x'}} = \frac{\dot{m}_x}{\dot{m}_{x'}} \frac{H_x}{H_{x'}} \frac{\dot{W}_{e_{x'}}}{\dot{W}_{e_x}} = \left( \frac{N_1}{N_2} \right) \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^{-3} = 1$$

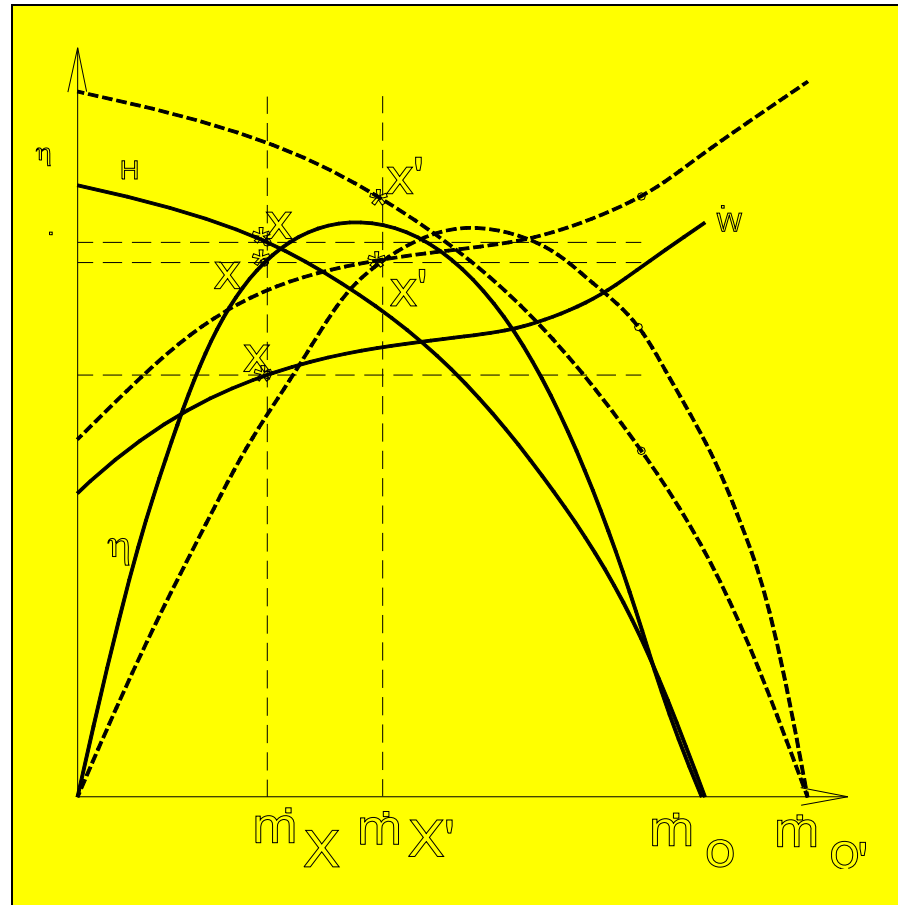
de onde resulta que as eficiências nos pontos X e X' são iguais:

A correção para a eficiência será, portanto



$$\eta_X = \eta_{X'}$$

Deve-se notar que as eficiências, nos dois pontos de operação considerados, são idênticas, isto é,  $\eta_X = \eta_{X'}$ , mas as vazões correspondentes são diferentes (mudou de  $\dot{m}_X$  para  $\dot{m}_{X'}$ ), conforme ilustra a Figura 5-6 a curva eficiência x vazão em massa foi redesenhada.



**Figura 5-6 - Extrapolação de curvas características de uma bomba**

→ construir novo conjunto de curvas para a rotação  $N_2$ , unindo os diversos pontos  $X'$  obtidos em função dos diferentes valores de vazão selecionados.

É assim que se procede na prática: uma bomba é ensaiada a uma determinada rotação e o desempenho em outras rotações é calculado baseando-se nas leis de similaridade.

Deve-se ter em mente que o desempenho calculado será realista se as condições de operação estimadas não forem afastadas em demasia das condições de ensaio.

A regra para o cálculo do desempenho em outras condições de operação baseia-se nas seguintes equações (para a mesma rotação e mesmo fluido):

$$\dot{m}_{x''} = \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^3 \dot{m}_x$$

$$H_{x''} = \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^2 H_x$$

$$\dot{W}_{x''} = \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^5 \dot{W}_x$$

$$\eta_{x''} = \eta_x$$

Eq. 5-12

**A título de ilustração**, considere-se a bomba cujo rotor tem  $D_2 = 0,5$  m e gira à rotação de  $N = 750$  rpm, produzindo as seguintes características em banco de ensaio:

Vazão (kg/s)	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
H (m)	40,0	40,6	40,4	39,3	38,0	33,6	25,6	14,5	0,0
$\eta$ (%)	0	41	60	74	83	83	74	51	0

Uma bomba geometricamente similar, com rotor de 0,35 m de diâmetro e girando a 1500 rpm terá as seguintes características:

$$\dot{m}_2 = \left( \frac{N_2}{N_1} \right) \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^3 \dot{m}_1 = \left( \frac{1500}{750} \right) \left( \frac{0,35}{0,50} \right)^3 \dot{m}_1 = 0,686 \dot{m}_1$$

**MÁQUINAS DE FLUXO**  
**NOTAS DE AULAS - 2010**

5-55/80

$$H_2 = \left( \frac{N_2}{N_1} \right)^2 \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^2 H_1 = \left( \frac{1500}{750} \right)^2 \left( \frac{0,35}{0,50} \right)^2 H_1 = 1,96 H_1$$

$$\eta_2 = \eta_1$$



<b>Vazão (kg/s)</b>	0	0,0686	0,1372	0,2058	0,2744	0,343	0,4116	0,4802	0,549
<b>H (m)</b>	78,4	79,576	79,184	71,148	74,48	65,86	50,176	28,42	0
<b>η (%)</b>	0	41	60	74	83	83	74	51	0

### 5.3 EFEITOS DE ESCALA

A comparação de 2 máquinas similares deve levar em conta:

- Similaridade geométrica
- Similaridade dinâmica
- Similaridade cinemática

A **similaridade geométrica** implica em que o parâmetro adimensional **rugosidade específica**,  $\varepsilon/D$ , deva ser mantido constante, além das dimensões do rotor. Manter  $\varepsilon/D$  constante, geralmente não é muito difícil.

A **similaridade dinâmica** implica manter os números de Reynolds e de Mach constantes e nem sempre é conseguida.

Para máquinas operando com água ou ar, o número de Reynolds do escoamento nos rotores e estatores é geralmente elevado, ficando na faixa de escoamentos turbulentos. Assim, o número de Reynolds pode ter influência pequena.

Em certos casos, como o de turbinas a gás aeronáuticas que funcionam em altitudes elevadas (pressão e temperatura baixas), o número de Reynolds do escoamento no compressor pode ser bastante baixo e a influência do número de Reynolds pode ser significativa.

O número de Reynolds pode cair a valores tão baixos que sua influência no desempenho do compressor precisa ser considerada, pois o aumento das perdas de atrito causa perda de desempenho do compressor.

A alteração do número de Mach pode causar efeitos devidos à compressibilidade. Sua influência precisa ser analisada. Números de Mach  $M > 0,3$  são comuns em compressores; nesses casos os efeitos da compressibilidade não podem ser desprezados.



Na prática, a **similaridade geométrica nem sempre é inteiramente obtida** porque:

- a) dimensões não estão em escala devido ao uso de chapas pré-fabricadas para a confecção das pás;
- b) rugosidades específicas não estão em escala devido ao uso de chapas pré-fabricadas (nas máquinas maiores esse efeito torna-se desprezível);
- c) folgas não estão em escala devido a problemas de montagem mecânica;

Todos esses efeitos precisam ser levados em conta. São, geralmente, conhecidos como **efeitos de escala** no desempenho das máquinas de fluxo.

## 5.4 VELOCIDADE ESPECÍFICA ou NÚMERO CARACTERÍSTICO

O desempenho de máquinas geometricamente similares (que pertencem a uma mesma família) é governado pelas leis de similaridade → o comportamento das máquinas de uma mesma família → uma única curva característica (adimensional).

O comportamento de duas famílias distintas pode ser comparado facilmente a partir de suas curvas adimensionais.

**Questão prática que o engenheiro quase sempre precisa resolver é o da escolha do tipo de máquina que melhor se adapta a uma determinada aplicação.**

**A escolha do tipo de máquina mais apropriado deve ser baseada no estudo de suas características de desempenho, independentemente das duas dimensões.**

As máquinas de fluxo geralmente são otimizadas no **ponto de projeto**, portanto a máxima eficiência é obtida a uma vazão bem determinada, à qual corresponde uma altura de energia (pressão).

Os indicadores mais utilizados do desempenho no ponto de projeto são

- **vazão em massa**
- **potência**
- **eficiência**

ou os respectivos coeficientes de vazão em massa e de potência (ou de altura de energia).

A comparação dos coeficientes de pressão (ou de potência) e de vazão em massa fornece indicações para a seleção da melhor máquina para uma aplicação desejada. Entretanto, esses coeficientes analisados isoladamente não dão informações sobre o melhor tipo de máquina (axial ou radial), pois envolvem o diâmetro da máquina, e este depende do tipo da máquina.

Um meio de se obter uma relação dos parâmetros adimensionais de vazão e de pressão, sem envolver o diâmetro e obter um novo coeficiente adimensional a partir de  $K_m$  por  $K_H$ , é combiná-los de tal modo que o diâmetro não mais apareça na expressão resultante.

A simples divisão da relação  $K_m$  por  $K_H$ , que dá

$$\frac{K_{\dot{m}}}{K_H} = \frac{\left( \frac{\dot{m}}{\rho N D^3} \right)}{\left( \frac{W_e}{N^2 D^2} \right)} = \frac{N}{D} \frac{\dot{m}}{W_e} = \frac{N}{D} \frac{\dot{Q}}{W_e}$$

não é adequada para uma comparação de bombas de tipos diferentes porque ainda envolve o diâmetro e, portanto, depende do tamanho da máquina e não apenas das características de desempenho a serem especificadas.

Uma combinação adequada desses coeficientes é dada por

$$n_s = \frac{(K_{\dot{m}})^{1/2}}{(K_H)^{3/4}}$$

Eq. 5-13

Esse coeficiente adimensional é chamado de **velocidade específica** ou **rotação específica**. É independente do diâmetro da máquina.

Substituindo-se as respectivas expressões dos coeficientes na equação Eq. 5-13, tem-se

$$n_s = \frac{\left( \frac{\dot{m}/\rho}{ND^3} \right)^{1/2}}{\left( \frac{W_e}{N^2 D^2} \right)^{3/4}} = N \frac{\left( \dot{m}/\rho \right)^{1/2}}{W_e^{3/4}} \quad (\text{adimensional})$$

ou, equivalentemente, utilizando-se vazão volumétrica ao invés de vazão em massa:

$$n_{sQ} = N \frac{\dot{Q}^{1/2}}{(gH)^{3/4}}$$

Eq. 5-14

Nessas expressões, as dimensões dos diversos parâmetros envolvidos são:

<b>N</b>	rotação por segundo	1/s
<b>Q</b>	vazão volumétrica	m <sup>3</sup> /s
<b>H</b>	altura de energia	m
<b>We</b>	trabalho específico	J/kg
<b>m</b>	vazão em massa	kg/s
<b>ns</b>	velocidade específica	-

Notar que  $n_s = n_{sQ}$  pois os dois coeficientes não consideram quantidades diferentes.

A notação  $n_{sQ}$  é a mais usada uma vez que é comum fazer-se referência à vazão volumétrica e não à vazão em massa quando se trata dessas máquinas.

A velocidade específica  $n_s$  pode ser calculada sobre qualquer ponto das curvas de desempenho da máquina.

Vale zero para vazão nula e tende a infinito quando a vazão é máxima pois, nesse caso, o trabalho específico é nulo.

Só interessam os valores no ponto de projeto, pois são eles que são utilizados na seleção, especificação e comparação das máquinas.



Para turbinas, uma definição diferente de  $n_s$  baseia-se na potência desenvolvida:

$$n_s = \frac{(K_{\dot{W}_e})^{1/2}}{(K_H)^{3/4}} = \frac{\left(\frac{\dot{W}_e}{\rho N^3 D^5}\right)^{1/2}}{\left(\frac{W_e}{N^2 D^2}\right)^{3/4}} = N \frac{(\dot{W}_e)^{1/2}}{\rho^{1/2} W_e^{5/4}}$$

Para turbinas hidráulicas, levando-se em conta que

$$K_{\dot{W}_e} = \eta_T \dot{m} g H$$

tem-se

$$n_{sQ} = \eta_T^{1/2} N \frac{\dot{Q}^{1/2}}{(gH)^{3/4}}$$

Eq. 5-15

**Deve-se observar que o valor numérico de  $n_s$  depende do sistema de unidades utilizado.**

Na prática utiliza-se **rps** ao invés de **rad/s** visto que as velocidades de rotação de motores e geradores são especificadas em rotações por segundo ou rotações por minuto. Para enfatizar o uso de **rps** no lugar de **rad/s** utiliza-se um novo coeficiente  $N_s$  dado por

$$N_s = 2\pi n_s$$

**Eq. 5-16**

**A velocidade específica  $n_s$  representa a rotação (rps) da máquina de fluxo que é atravessada por uma vazão unitária (kg/s) de um fluido que troca com ela trabalho específico unitário (J/kg).**

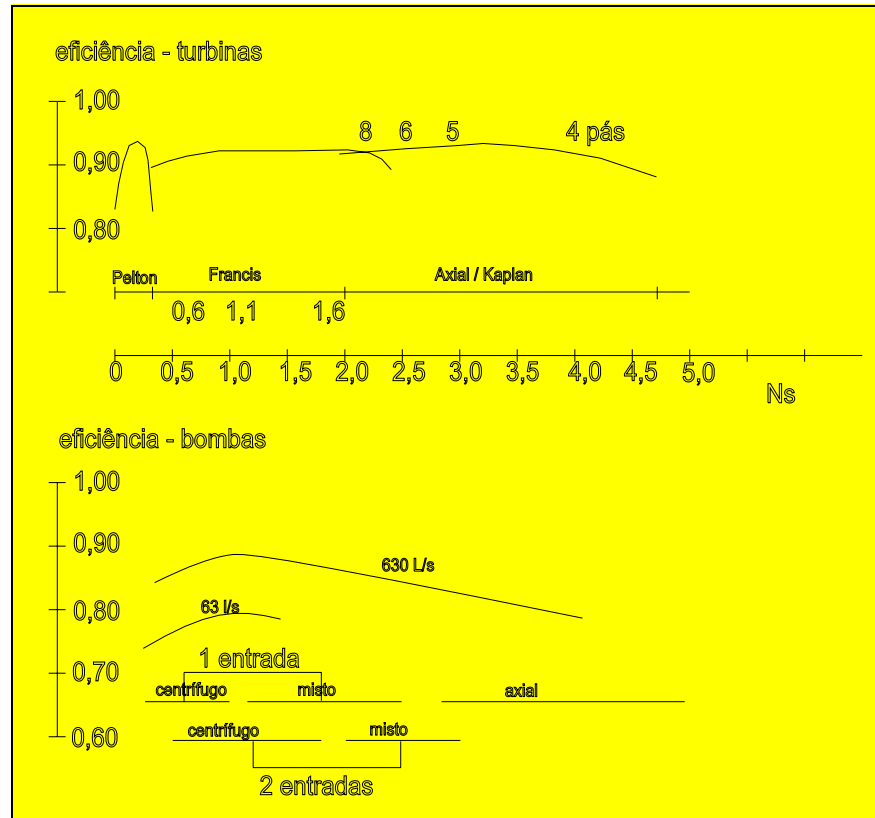
O conceito de velocidade específica é aplicado a projeto, análise e especificação de máquinas hidráulicas e de ventiladores. Não é usual o uso desse conceito para compressores e turbinas a gás.

## MÁQUINAS DE FLUXO

### NOTAS DE AULAS - 2010

5-68/80

A Figura 5-7 e a Figura 5-8 indicam os diversos tipos de máquinas e as faixas de velocidades específicas apropriadas



**Figura 5-7- Faixas de variação de velocidades específicas em Máquinas de Fluxo**

**Atenção com as escalas da velocidade específica!**

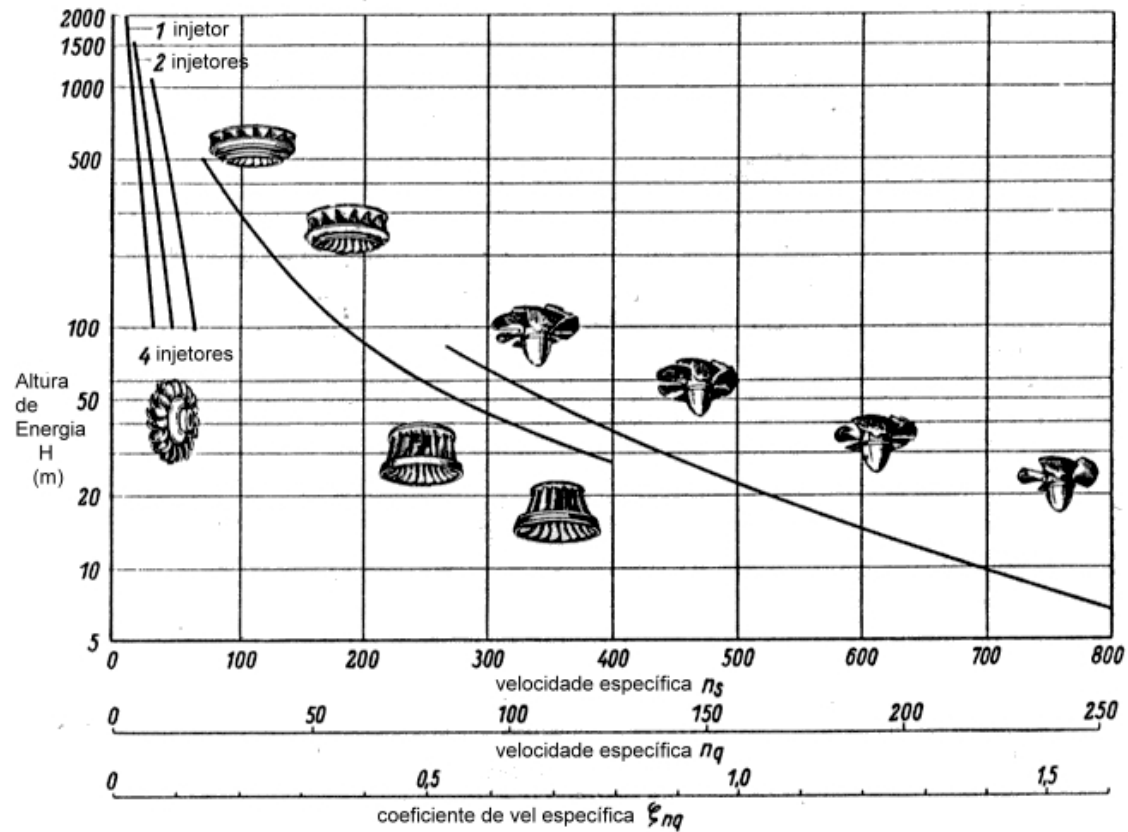
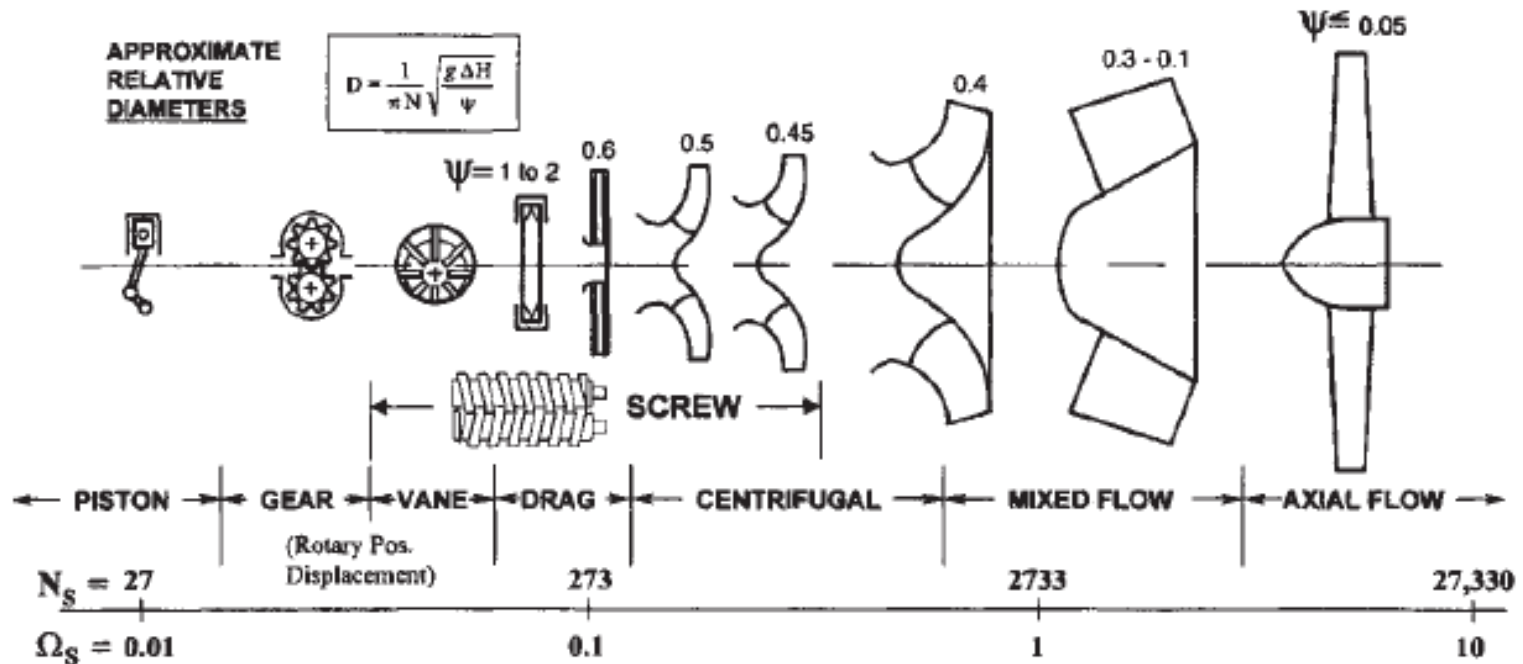


Figura 5-8 - Faixas de variação de velocidades específicas em Máquinas de Fluxo

# MÁQUINAS DE FLUXO

## NOTAS DE AULAS - 2010

5-71/80



Specific Speed,  $\Omega_s = \frac{\Omega \sqrt{Q}}{(g \Delta H)^{3/4}}$

(Approximate Domains of Rotor types shown)

NOTE:  $\left\{ N_{S,(U.S.)} = \frac{N(\text{rpm}) \times \sqrt{Q(\text{gpm})}}{[\Delta H(\text{ft.})]^{3/4}} = \Omega_s \times 2733 \right\}$

Num problema prático, deseja-se escolher o tipo de máquina adequado a uma determinada aplicação. Conhecem-se, portanto, a vazão e a altura de energia requeridas da máquina.

Para se relacionar o valor numérico da velocidade específica com o tipo de máquina, pode-se lançar mão do seguinte raciocínio:

A máquina deve desenvolver o trabalho específico  $W_e = U_2 V_{2u} - U_1 V_{1u}$ .

Sem perda de generalidade, admite-se que a entrada do escoamento no rotor se dá sem pré-rotação e o escoamento deixa o rotor na direção perpendicular à velocidade tangencial (axial ou radialmente).

Então  $W_e = U_2 V_{2u} = U_2^2$ . Segue-se que  $U_2 = \sqrt{W_e}$ .

Assim, para uma máquina que deve processar a mesma operação de energia,  $U_2$  está fixado.

Tem-se, portanto, uma relação bem definida entre a rotação e o diâmetro  $D_2$  da máquina.

Para o mesmo trabalho específico, se a rotação é baixa, tem-se  $D_2$  elevado, e vice-versa.

Para uma mesma vazão, o diâmetro de entrada,  $D_1$ , está fixado.

Assim, à medida que a rotação  $N$  cresce, o diâmetro  $D_2$  deve diminuir, no limite igualando-se a  $D_1$ , isto é, uma máquina radial passaria paulatinamente para uma máquina axial.

Uma ilustração disso pode ser vista na Fig. 5-9.



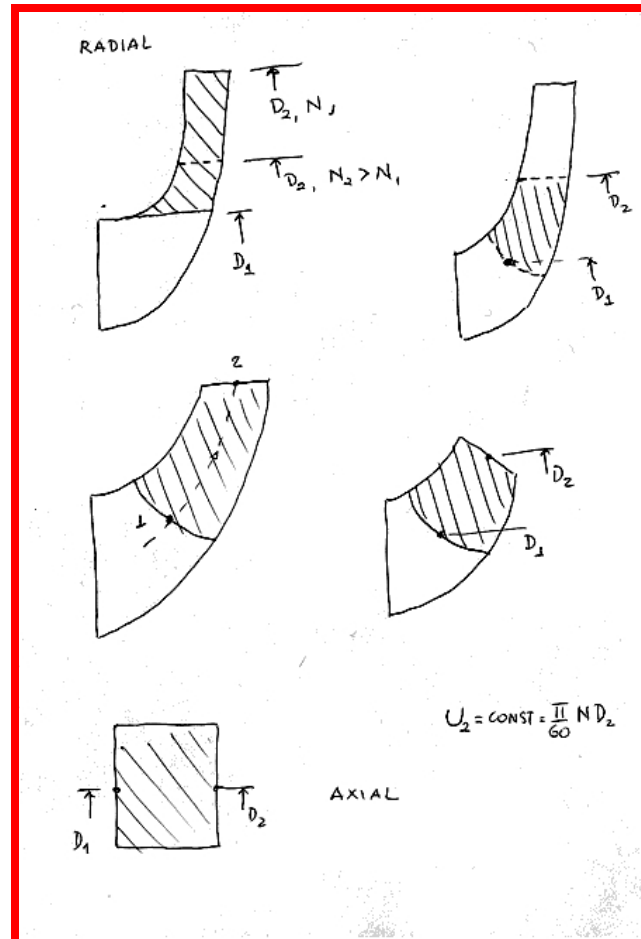
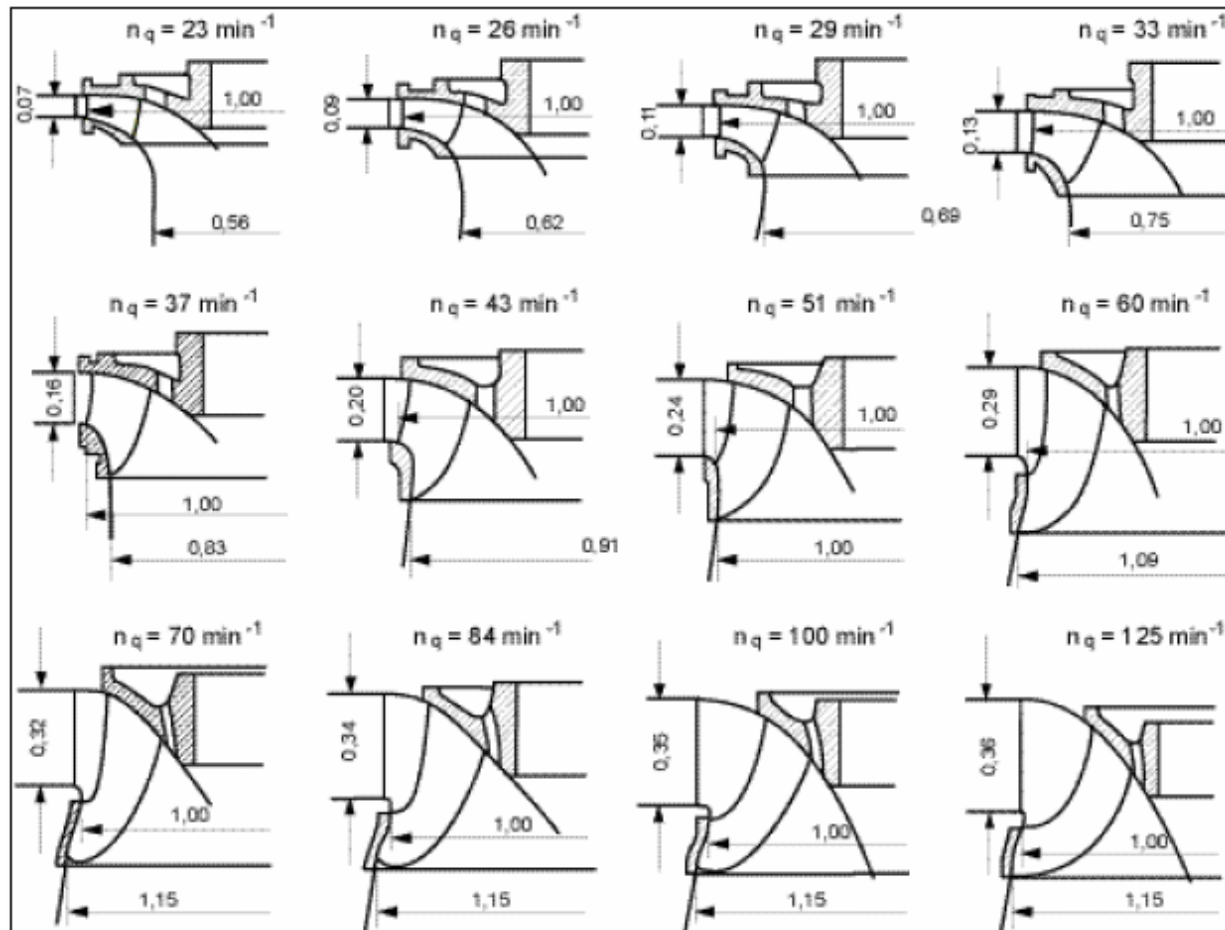


Figura 5-9 – Influência da velocidade específica na forma da máquina



**Turbinas Francis - forma do canal em função da velocidade específica**

## EXERCÍCIOS

### EXERCÍCIO 1

O  $\Delta P$  gerado por uma bomba de uma certa geometria depende do diâmetro  $D$  do rotor, de sua rotação  $N$ , da densidade  $\rho$  do fluido, da viscosidade  $\mu$  e da vazão  $\dot{Q}$ . Mostre que a relação entre essas variáveis pode ser expressa por

$$\frac{\Delta P}{\rho N^2 D^2} = f\left(\frac{\dot{Q}}{ND^3}, \frac{\rho ND^2}{\mu}\right)$$

e dê um sistema de unidades consistentes para as variáveis que aparecem nessa equação. Uma bomba gira a 1000 rpm, gerando uma pressão de 12,2 m H<sub>2</sub>O ao bombear água à vazão de 0,0151 m<sup>3</sup>/s. Calcular a pressão gerada por uma bomba similar cujo rotor é o dobro em diâmetro, quando operando em condições dinâmicas similares e bombeando 0,0453 m<sup>3</sup>/s. Considere que os efeitos da viscosidade podem ser des-

prezados. Determine, também, a rpm da bomba maior.

[6,86 m; 375 rpm]

## **EXERCÍCIO 2**

Um ventilador de 0,4 m de diâmetro, rodando a 970 rpm, é testado com ar a 10°C e pressão barométrica de 772 mm Hg. Registram-se os seguintes dados:  $\dot{Q}=0,7 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $P_t$  na saída do ventilador = 25 mm H<sub>2</sub>O; potência de eixo = 250 W. Calcule a vazão correspondente, a pressão total de descarga e a potência de eixo de um ventilador geometricamente similar, de 1 m de diâmetro, rodando a 500 rpm, bombeando ar a 16°C e pressão barométrica de 760 mm Hg. Considere que a eficiência do ventilador não muda.

[5,65 m<sup>3</sup>/s; 40 mm H<sub>2</sub>O; 3,22 kW]

### EXERCÍCIO 3

Uma bomba centrífuga deve operar a 300 rpm, bombeando  $6 \text{ m}^3/\text{s}$  e altura de carga de 100 m. Dispõe-se de um laboratório para: vazão máxima =  $0,28 \text{ m}^3/\text{s}$ , potência máxima 225 kW. Usando água e admitindo-se que as eficiências da bomba e do modelo são iguais, ache a rpm do modelo e a escala. Calcule a velocidade específica.

[1196 rpm; 4,4; 0,439]

### EXERCÍCIO 4

Uma bomba centrífuga deve ser projetada para bombear óleo de rícino de densidade  $944 \text{ kg/m}^3$  e viscosidade  $0,144 \text{ Ns/m}^2$ . Deve ser testada através de um modelo de escala 1:4 rodando com ar à densidade de  $1,23 \text{ kg/m}^3$  e viscosidade  $1,82 \times 10^{-5} \text{ Ns/m}^2$ . É importante que os efeitos viscosos sejam representados com precisão. Se a bomba de óleo deve rodar a  $105 \text{ rad/s}$ , qual a velocidade do modelo? Determine a razão das

potências de acionamento das 2 máquinas.

[163 rad/s;  $210 \times 10^3$ ]

## EXERCÍCIO 5

Uma bomba centrífuga gira a 2950 rpm e produz, à eficiência máxima:

$H_{\text{efetiva}} = 75 \text{ m H}_2\text{O}$

$\dot{Q} = 0,05 \text{ m}^3/\text{s}$

$\eta_{\text{global}} = 0,76.$

1. Calcular a velocidade específica;

Uma bomba similar deve operar no mesmo ponto na curva característica quando bombear  $0,45 \text{ m}^3/\text{s}$  de água, contra uma altura de carga de 117 m.

Pedem-se

1. A rpm em que a bomba deve rodar para atender essa condição
2. A relação dos diâmetros do rotor da bomba e do modelo, especificando as hipóteses usadas

3. A potência consumida pela bomba

[0,077; 1375 rpm; 2,68; 679 kW]

## **6. - CARACTERÍSTICAS DE ALGUMAS MÁQUINAS DE FLUXO**

Descrição sucinta das características principais das máquinas de fluxo mais comuns:

- a) **para fluidos incompressíveis**: bombas e ventiladores; turbinas Pelton, Francis e Kaplan
- b) **para fluidos compressíveis**: compressores.

### **6.1. MÁQUINAS MOVIDAS**

#### **6.1.1.BOMBAS E VENTILADORES CENTRÍFUGOS**

Essas máquinas são compostas por um rotor centrífugo que gira dentro de uma carcaça espiral (voluta). O fluido geralmente entra no rotor na direção axial. A Figura 6-1 representa uma dessas máquinas.



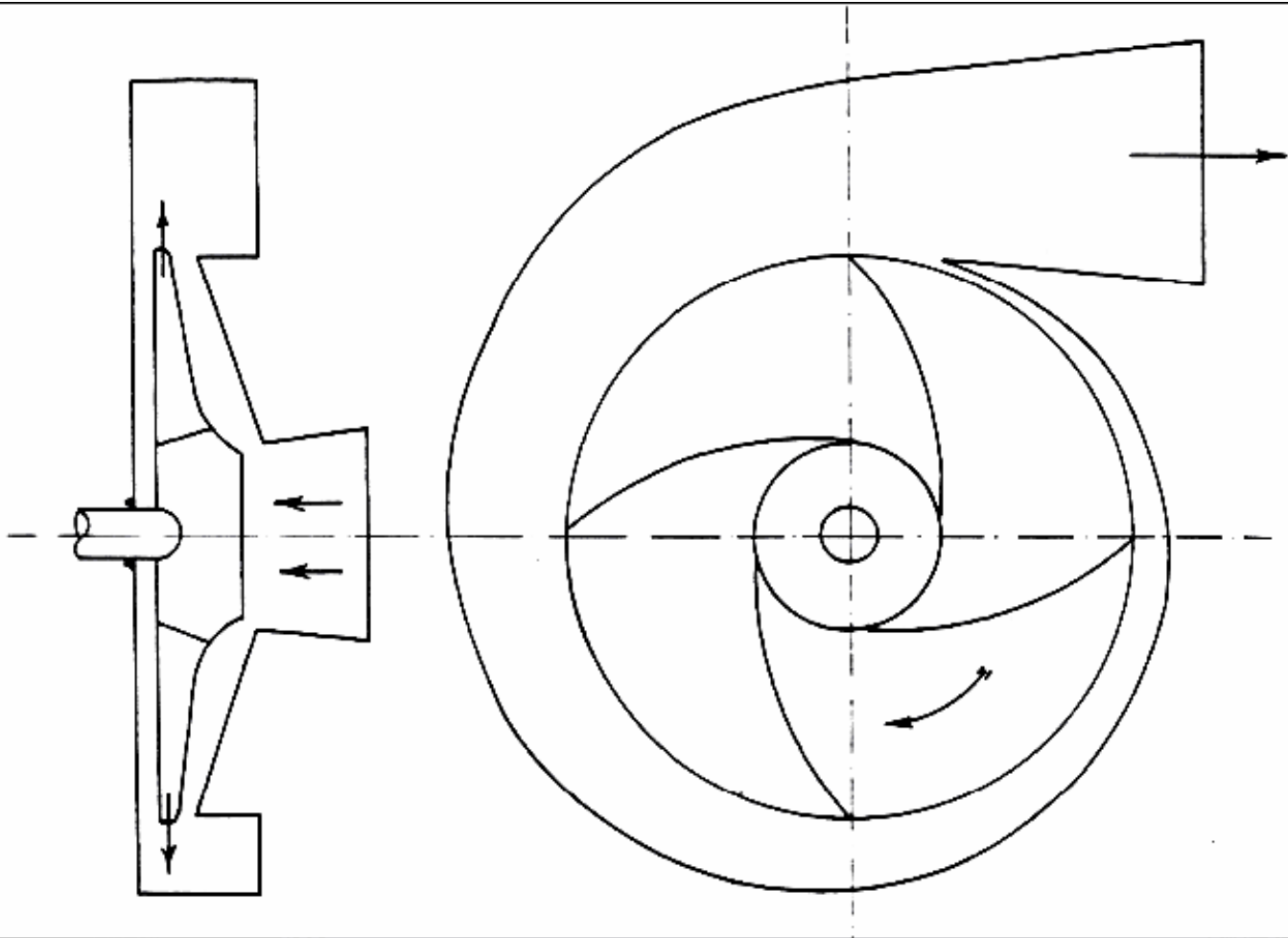
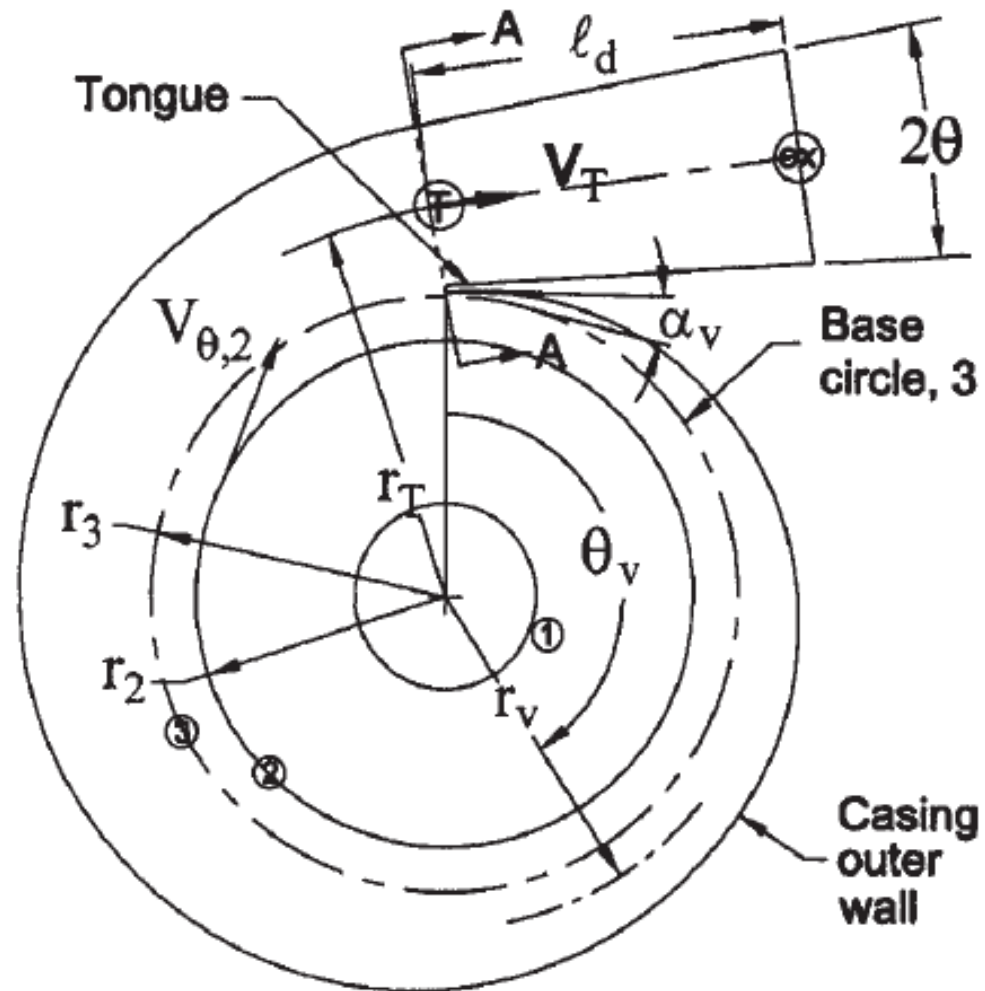
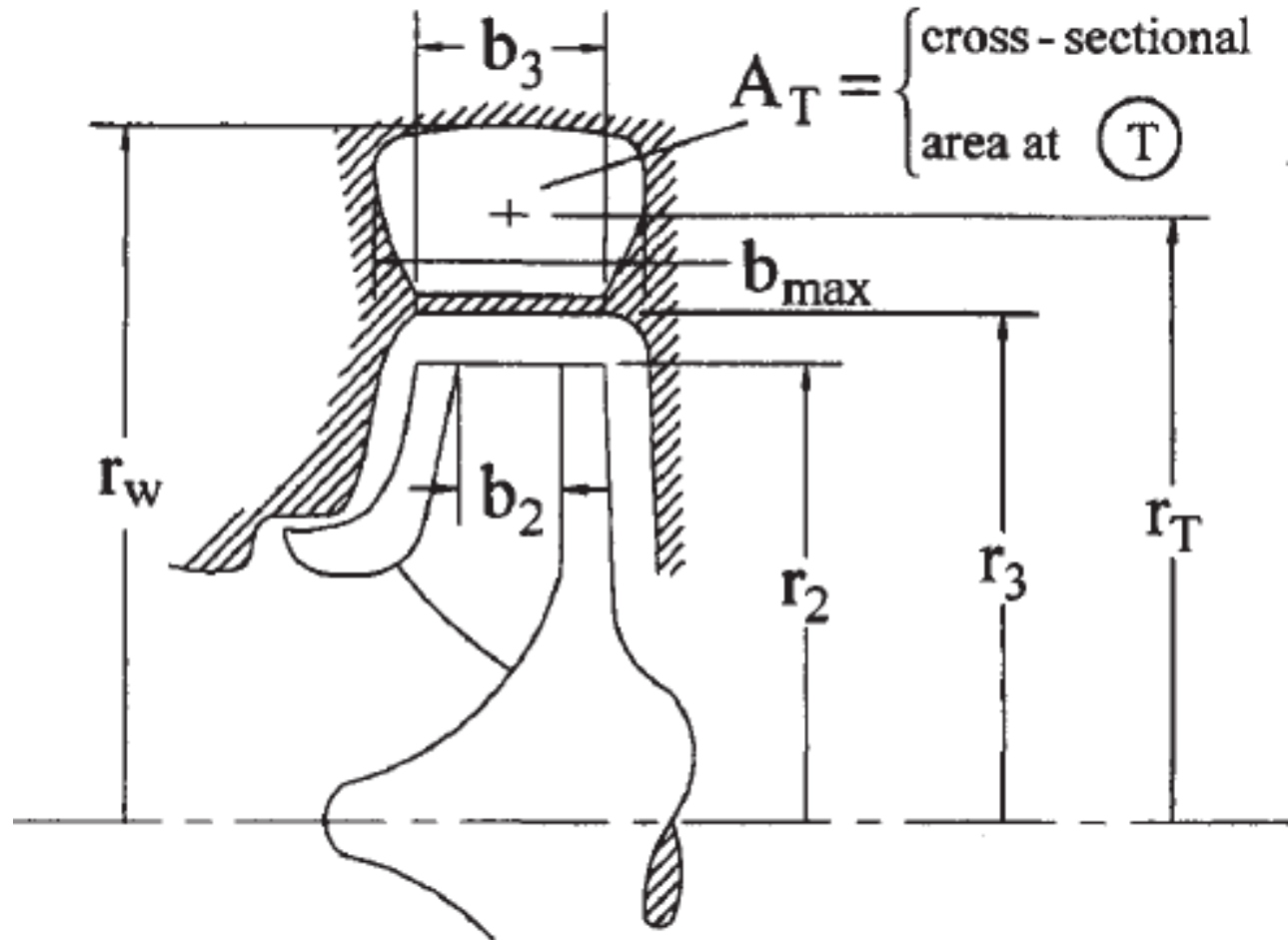


Figura 6-1 - Esquema de bomba e ventilador centrífugos



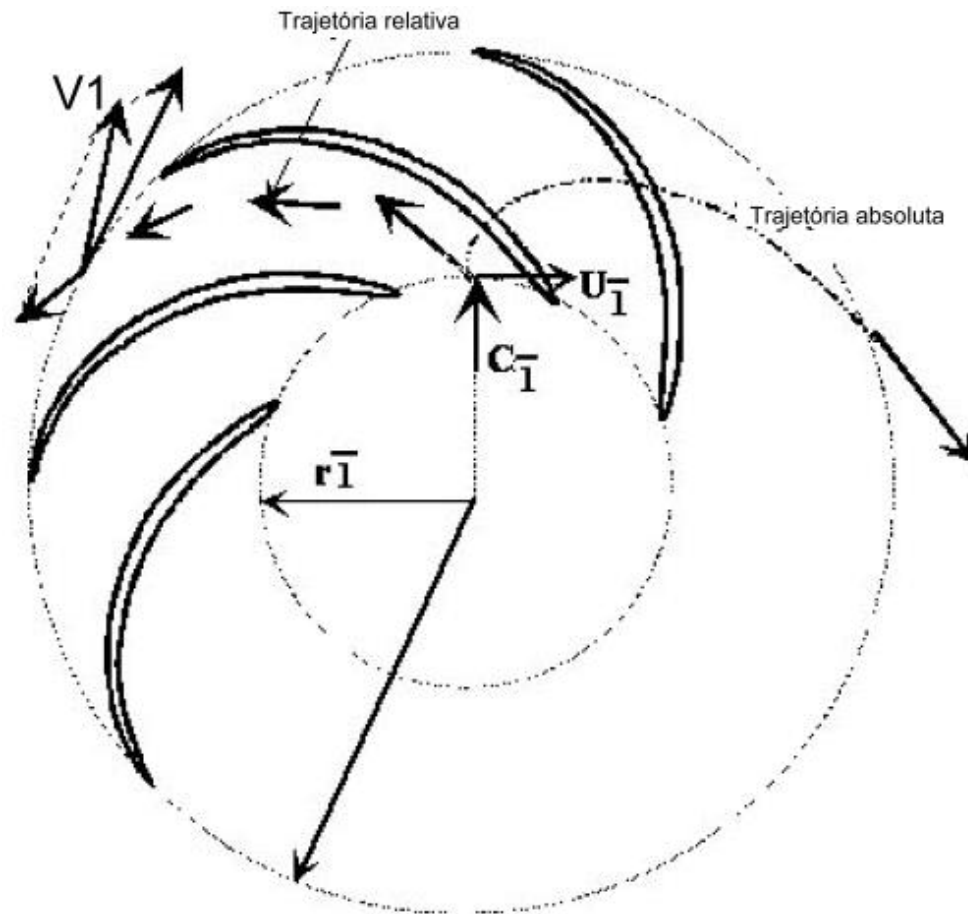


O fluido de trabalho entra na máquina através de um curto canal axial, passa pelo rotor e é descarregado na voluta. Algumas dessas máquinas possuem uma grade estacionária (estator) adicional, localizada à saída do rotor, antes da voluta. A entrada do fluido pode ser feita de um ou de ambos os lados do rotor (**rotor de dupla admissão** ou **rotor duplo**). Neste caso o rotor é formado pela montagem de 2 rotores, com as entradas pelos lados opostos. Usam-se rotores duplos para duplicar a vazão de fluido, sem alterar a pressão de descarga.

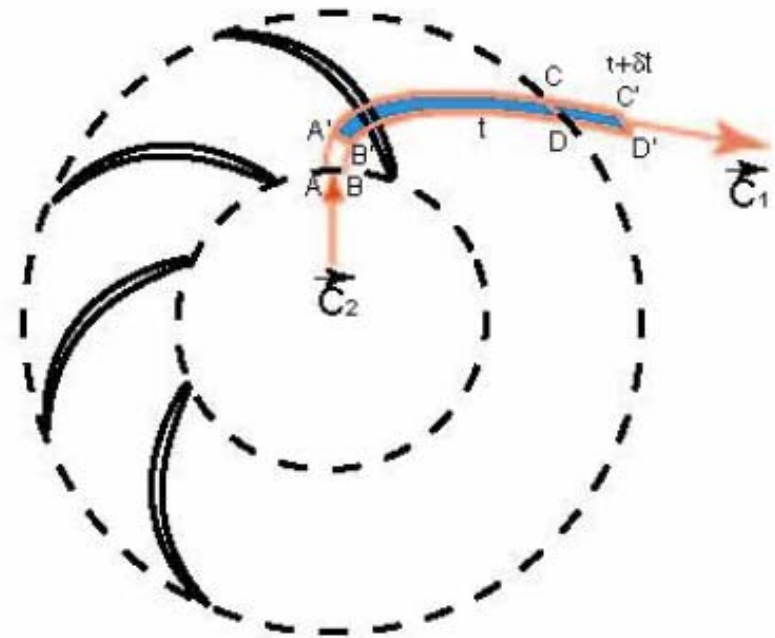
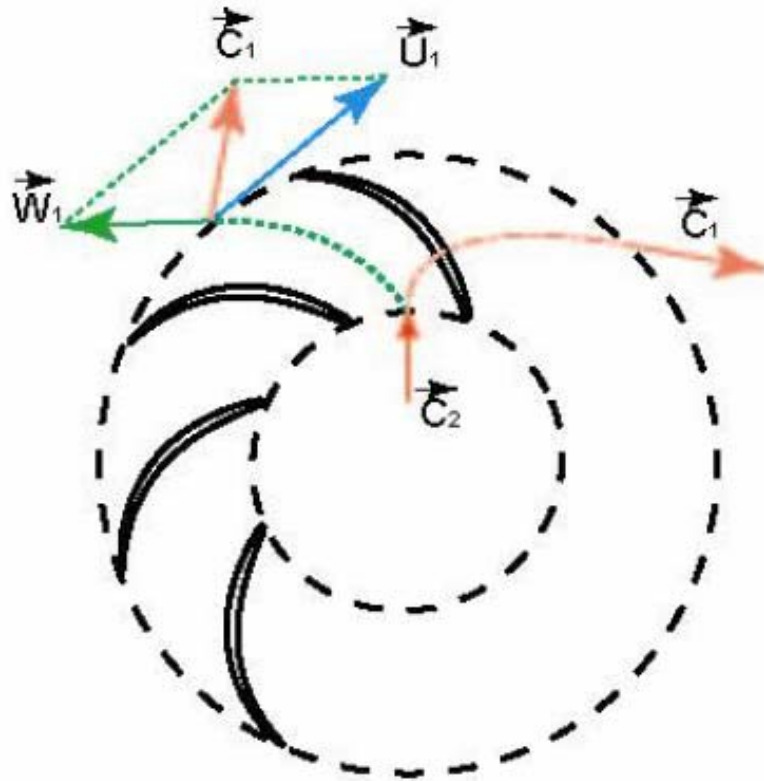
Pressões elevadas de descarga podem ser obtidas com duas ou mais máquinas em série. Geralmente os rotores são montados sobre um mesmo eixo. Com essa configuração pode-se obter aumento de pressão sem aumento de vazão.

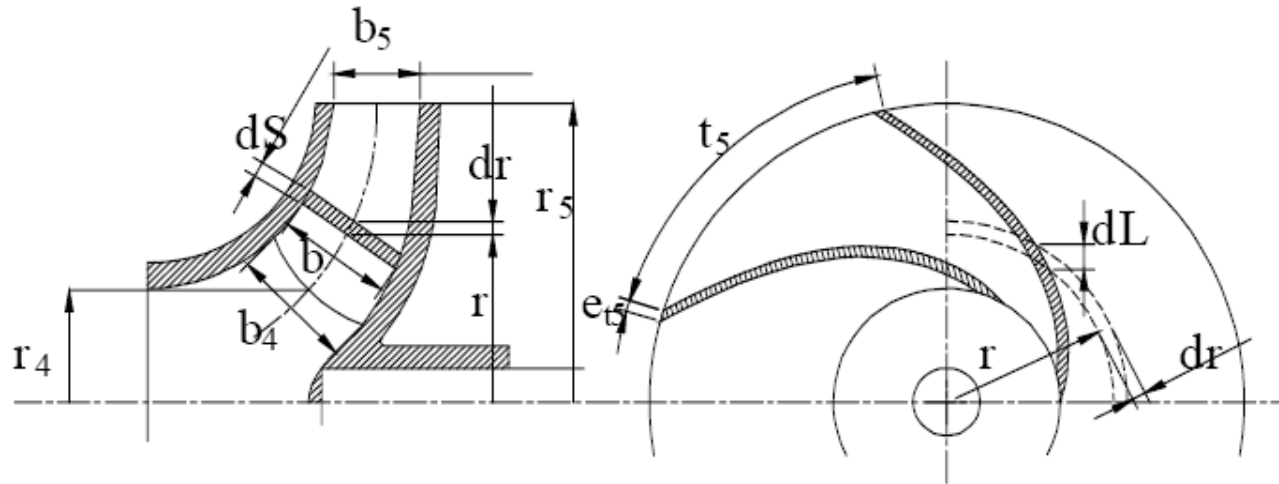
A forma das pás do rotor depende das exigências de projeto. O ângulo de entrada da pá,  $\beta_1$ , é determinado a partir da condição de ausência de choque de entrada.

Para escoamento à entrada da máquina sem pré-rotação, isto é, com  $V_{1u} = 0$ , o ângulo da pá,  $\beta_1$ , fica dependente apenas da velocidade tangencial,  $U$ , e da vazão. Isto acarreta que a capacidade de bombeamento (ou trabalho específico) não depende de  $\beta_1$ .



Trajetórias relativa e absoluta de uma partícula num rotor centrífugo





O trabalho específico desenvolvido por uma bomba centrífuga é calculado pela equação de Euler, e é dado por

$$W_e = U_2 V_{2u} - U_1 V_{1u}$$

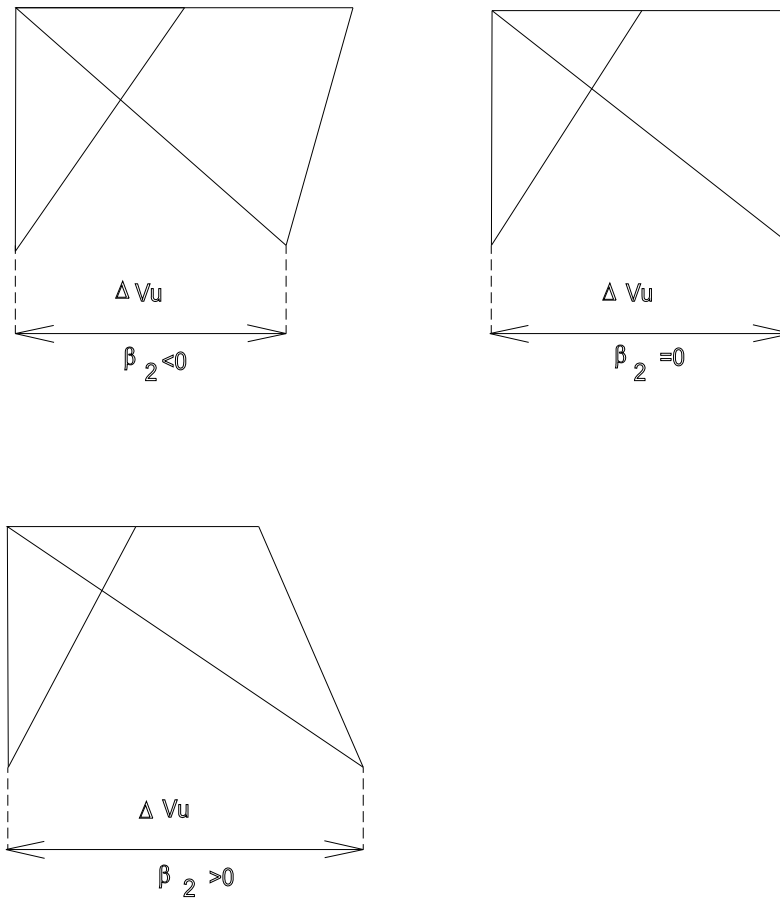
ou

$$W_e = U_2 V_{2u}$$

no caso de ausência de pré-rotação ( $V_{1u} = 0$ ).

Logo, para uma rotação fixada da máquina, o trabalho específico só depende da componente  $V_{2u}$ , isto é, apenas depende do ângulo de saída da pá,  $\beta_2$ . O ângulo de saída  $\beta_2$  pode ser ou menor que zero, ou igual a zero ou maior que zero. Os triângulos de velocidades correspondentes têm as seguintes formas:





**Figura 6-2 - Formas de triângulos de velocidades**

Como  $W_e$  depende de  $V_{2u}$ , quando o ângulo de saída da pá for  $\beta_2 > 0$  ter-se-á maior trabalho específico. Um rotor assim construído seria capaz da maior transferência de energia do rotor ao fluido, para uma rotação fixada. Entretanto, a energia cinética que é gerada no rotor é mais elevada. A conversão dessa energia cinética em energia de pressão não é muito eficiente, dadas as perdas maiores associadas com velocidades elevadas.

As curvas de desempenho dessas bombas têm as formas indicadas na figura abaixo.

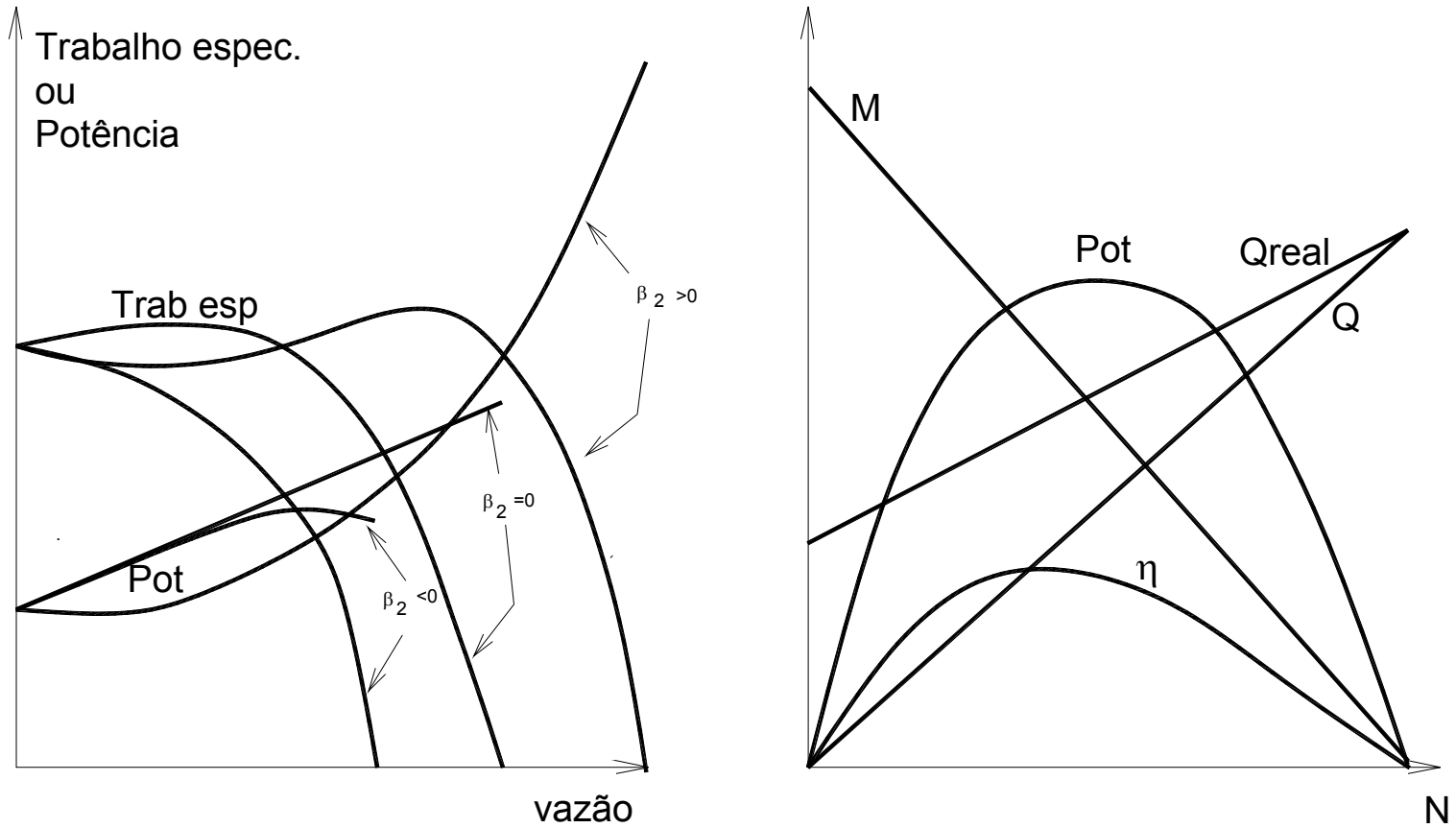


Figura 6-3 - Formas de curvas de desempenho de bombas

As curvas para bombas com ângulo  $\beta_2$  de saída do rotor negativo tem o pico de potência a uma vazão próxima à vazão de máxima eficiência. Portanto, aumentando-se a vazão acima da vazão de máxima potência, a potência de acionamento diminui. Esta é uma característica desejável em termos de controle e proteção do motor, visto que, em caso de aumento de vazão acima da nominal o motor estará protegido de sobrecarga devida à vazão elevada.

Para bombas com pás **inclinadas para trás**, os valores comuns de  $\beta_2$  estão entre  $0^\circ$  e  $75^\circ$ . Para ventiladores o ângulo de descarga pode ser negativo, com  $\beta_2$  chegando a valores como  $-50^\circ$  como nos ventiladores tipo **siroco**. Essas máquinas têm, portanto, as pás **inclinadas para frente**.

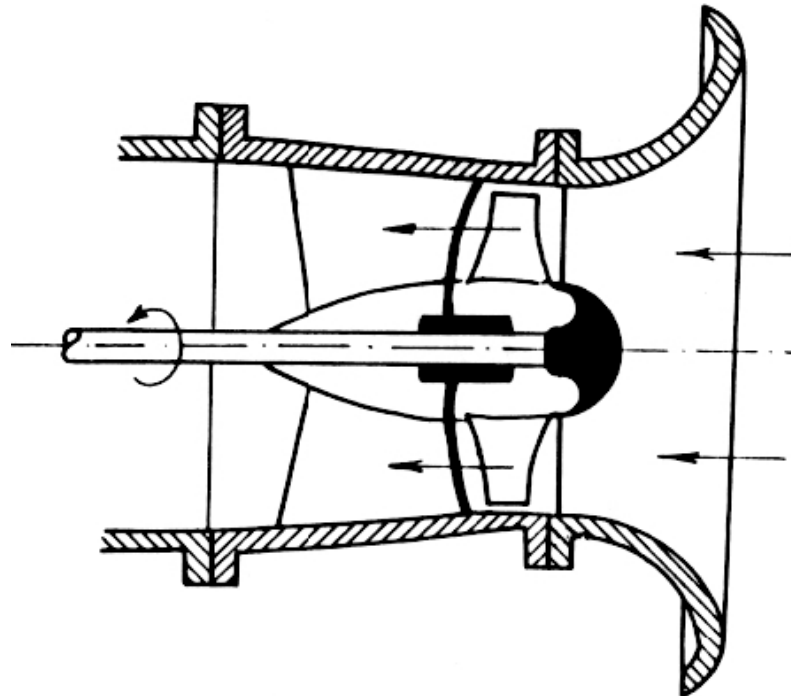
As características de potência x vazão dessas máquinas são bem distintas. Aquelas com  $\beta_2 < 0$  tem um ponto máximo de potência próximo ao ponto de máxima eficiência; aquelas com  $\beta_2$  nulo ou positivo tem esse ponto de máximo a vazão bem maior. Assim, o motor que aciona as primeiras está protegido de sobrecargas se a vazão aumentar, enquanto que, nestas, a potência estará aumentando com a vazão.

Valores de rotação específica  $N_s$  para essas máquinas vão até 1,8. Em geral, quanto mais estreito o canal em relação ao diâmetro do rotor, menor  $N_s$ .

Para  $0,8 < N_s < 1,8$  pode-se obter eficiência de até 0,90 para as bombas centrífugas e de até 85% para compressores.

### 6.1.2.BOMBAS E VENTILADORES AXIAIS

São formados de um rotor seguido de um estator. O rotor é constituído por discos ou tambores na periferia dos quais as pás, de perfis aerodinâmicos, são fixadas. O estator é constituído também de pás com perfis aerodinâmicos presas a uma carcaça externa fixa.



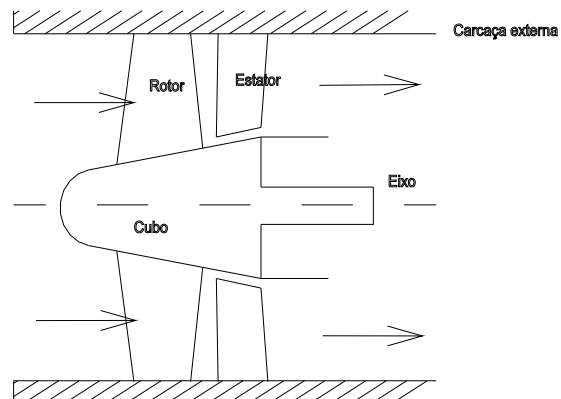
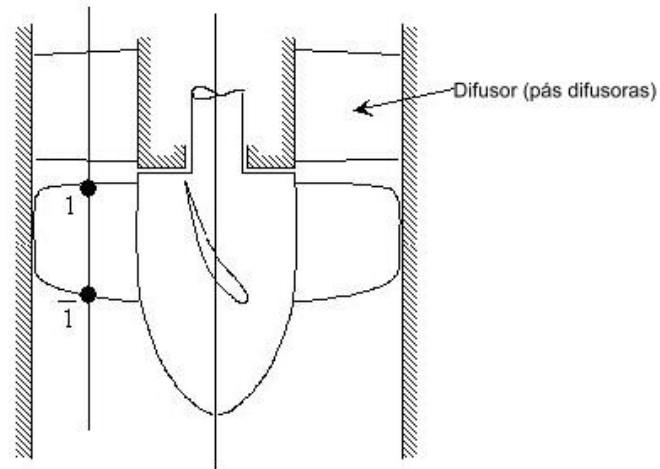


Figura 6-4 - Esquema de uma bomba axial

A direção do escoamento é predominantemente axial, o que resulta em menor diâmetro externo.

Em algumas aplicações ha necessidade de direcionar o escoamento de entrada para diminuir a velocidade relativa do fluido no bordo de ataque da pá. Nesses casos são colocadas pás diretoras (IGV = “*inlet guide vanes*” , NGV = “*nozzle guide vanes*”) à frente do rotor.

O estator serve também para diminuir ou reduzir a rotação do escoamento à saída da máquina.

Valores de  $N_s$  para essas máquinas vão de 2,8 a 4,8 (bombas) ou de 1,4 a 4,8 (ventiladores).

Hélices também se encaixam nesta classificação. Caracterizam-se por não terem carcaça externa (rotores não carenados). Para elas  $N_s$  vai de 3,5 a 5. Para hélices contra-rotativas,  $N_s$  vai de 1,2 a 2,6.

O projeto de compressores de alto desempenho não segue de perto essas limitações. Há necessidade de um estudo pormenorizado do escoamento porque há influência marcante do efeito de compressibilidade.

As equações 5-26 e 5-27, quando aplicadas às máquinas axiais, não contêm o termo devido ao efeito centrífugo porque a variação radial das propriedades do escoamento é desprezada devido ao fato de o escoamento ser preponderantemente axial. Não se pode contar, portanto, com o efeito centrífugo para a transferência de energia, o que dá às máquinas axiais uma característica de desenvolvimento de energia específica por estágio, quando comparada às radiais.

As curvas de desempenho dessas máquinas são mais inclinadas do que as das máquinas radiais, o que requer operação em pontos mais próximos possível do ponto de projeto, para que a eficiência não caia demasiadamente.

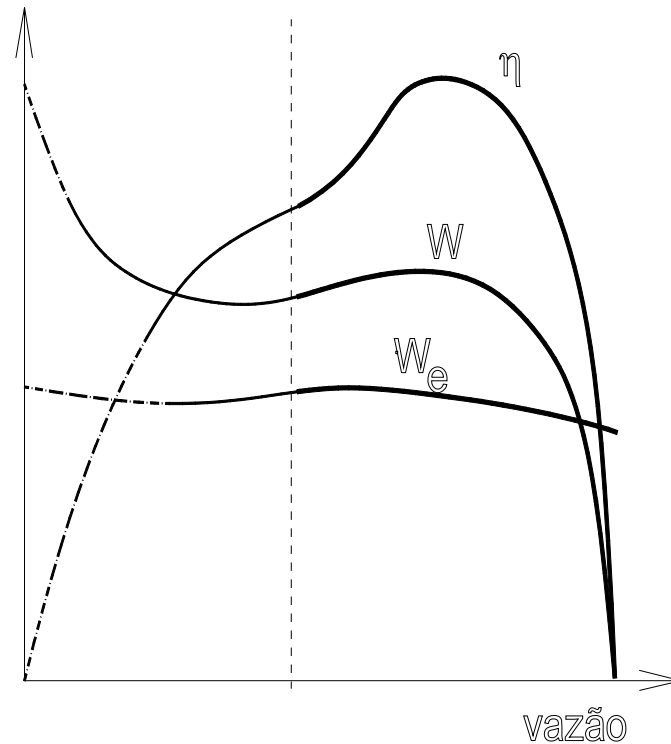


Figura 6-5 - Curvas típicas de uma bomba radial



A curva de pressão x vazão apresenta região de instabilidade a baixas vazões. Essas máquinas axiais são mais suscetíveis de cavitação, pois têm capacidade de sucção limitada, restringindo-lhes bastante a aplicação.

Um parâmetro importante na análise de desempenho dessas máquinas é a relação de diâmetros,  $r_D$ , dada por

$$r_D = D_1/D_2 = R_1/R_2$$

onde

$D_1$  é o diâmetro correspondente à raiz da pá

$D_2$  é o diâmetro correspondente ao topo da pá

$R_1$  é o raio correspondente à raiz da pá

$R_2$  é o raio correspondente ao topo da pá

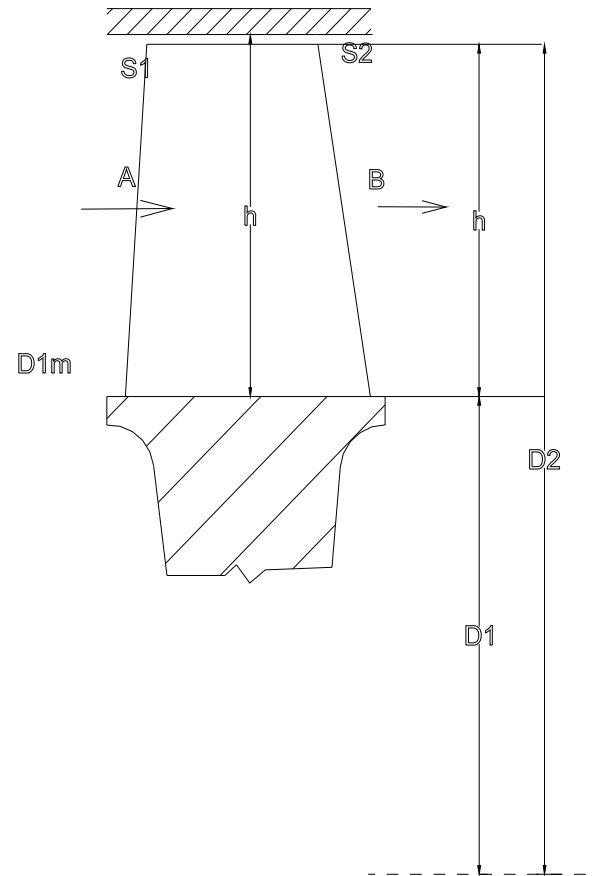


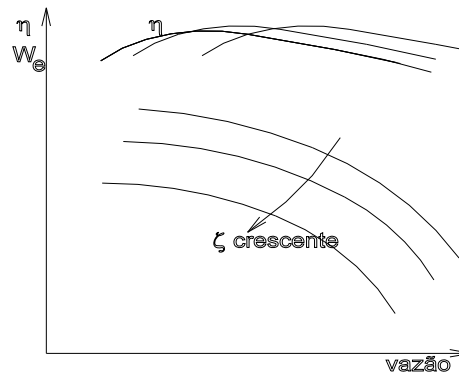
Figura 6-6 - Esquema de um rotor axial

Para bombas  $0,3 < r_D < 0,6$

Para ventiladores  $0,45 < r_D < 0,90$

O número de pás varia de 2 a 8 para bombas e de 2 a 16, ou mais, para ventiladores e um número maior para compressores.

O ângulo de montagem  $\zeta$  das pás influencia as características da máquina. Menor  $\zeta$  significa maior vazão e maior pressão. Assim, as curvas de trabalho específico ( $W_e$ ) são deslocadas para baixo com  $\zeta$  crescente, o mesmo se dando com a eficiência.



**Figura 6-7 - Variação da vazão em função do ângulo de montagem da grade**

### 6.1.3.BOMBAS E VENTILADORES DE FLUXO MISTO

São as máquinas em que o escoamento sai na diagonal. O rotor possui um cubo cônico ao qual se fixam as pás. A figura 6.8 mostra um esquema de um rotor diagonal.

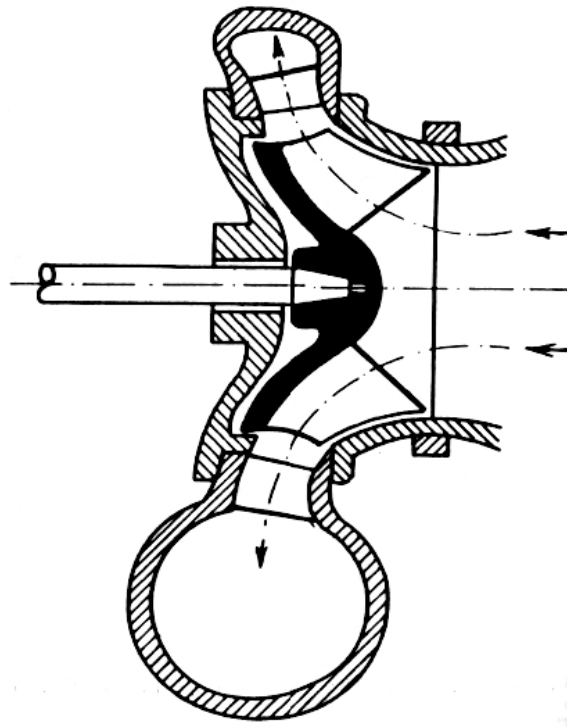


Figura 6-8 - Esquema de uma bomba de fluxo misto

## 6.2. MÁQUINAS MOTORAS

### 6.1.4. TURBINAS HIDRÁULICAS

Assim como no caso das bombas hidráulicas, para cada aplicação existe um tipo de turbina mais apropriado. Utiliza-se o coeficiente de velocidade (velocidade específica) para selecionar o tipo de máquina (axial, radial) mais apropriado.

As turbinas são classificadas em

- **turbinas de impulso** (ou **turbinas de ação**) - toda a energia disponível à entrada da máquina é transformada em energia cinética pelo estator
- **turbinas de reação** - parte da energia disponível é transformada em energia cinética no estator (injetor, NGV) e parte no rotor.

Define-se **grau de reação**  $\Lambda$  o quociente dos valores da queda da energia de pressão estática e da energia total transferida ao rotor.

Da equação de Bernoulli,

$$\frac{P_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + W_e$$

ou

$$W_e = \frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{V_1^2}{2} - \frac{V_2^2}{2} + gz_1 - gz_2 =$$

$$= \underbrace{\frac{P_1 - P_2}{\rho}}_{\substack{\text{queda} \\ \text{de} \\ \text{pressão} \\ \text{estática}}} + \underbrace{\frac{V_1^2 - V_2^2}{2}}_{\substack{\text{queda} \\ \text{de} \\ \text{pressão} \\ \text{dinâmica}}} + \underbrace{g(z_1 - z_2)}_{\approx 0}$$

Para rotores em que  $P_1 = P_2$ , toda a energia transferida é devida à variação de energia cinética (impulso, grau de reação nulo,  $\Lambda = 0$ ).

Para rotores em que  $V_1 = V_2$ , toda energia transferida é devida à variação de pressão (grau de reação = 1,  $\Lambda = 1$ ).

Considerando um rotor em que a velocidade  $V_{2u}$  seja nula, isto é, rotores em que a velocidade absoluta na saída é radial ou axial, tem-se para o trabalho específico:

$$W_e = U_1 V_{1u}$$

$$\Lambda = \frac{P_1 - P_2}{W_e} = \frac{W_e - \frac{V_1^2 - V_2^2}{2}}{W_e} = 1 - \frac{V_1^2 - V_2^2}{2W_e} = 1 - \frac{V_1^2 - V_2^2}{2U_1 V_{1u}}$$

$$\Lambda = 1 - \frac{V_1^2 - V_2^2}{2U_1 V_{1u}}$$

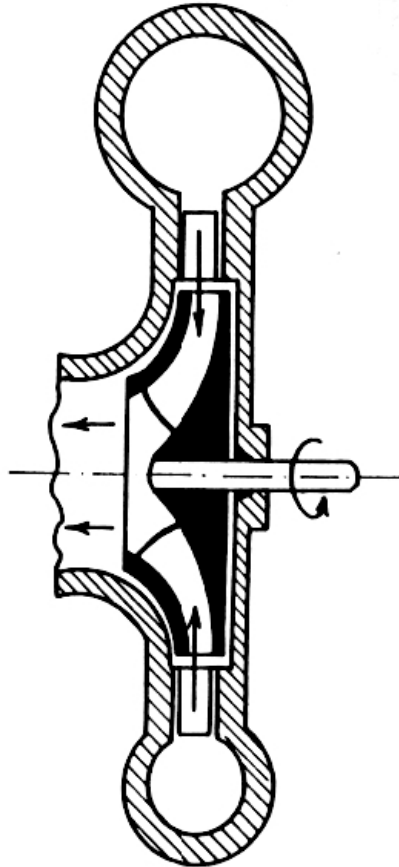
# 6-1

As aplicações mais importantes das turbinas hidráulicas são em usinas hidrelétricas para mover geradores de eletricidade.

As turbinas hidráulicas são usualmente conhecidas pelos nomes abaixo:

- **Pelton** (tangencial, de impulso),
- **Francis** (radial)
- **Kaplan** (axial) (e suas variantes, como a turbina bulbo)

Turbinas Francis e Kaplan são turbinas de reação.



Turbina Francis lenta.



## MÁQUINAS DE FLUXO

### NOTAS DE AULAS - 2010

6-26/120

As faixas de aplicação desses 3 tipos de turbinas são:

	<b>Pelton</b>	<b>Francis</b>	<b>Kaplan</b>
<b>N<sub>s</sub></b>	0,05 a 0,4	0,4 a 2,2	1,8 a 4,6
<b>H (m)</b>	100 a 1700	80 a 500	até 400
<b>Potência (MW)</b>	55	40	30
<b><math>\eta_{\text{máx}}</math> %</b>	93	94	94
<b>regulação</b>	agulha e defletor	IGV	$\zeta$

A tabela seguinte relaciona algumas das usinas hidrelétricas brasileiras (valores aproximados)

<b>Usina</b>	<b>Tipo de Turbina</b>	<b>Altura m</b>	<b>Vazão m<sup>3</sup>/s</b>	<b>Rotação rpm</b>	<b>Potência MW</b>
Itaipú - Rio Paraná	Francis	120	660	94,2	724,4
Paulo Afonso IV - Rio São Francisco	Francis	135	385	120	430,7
Itumbiara - Rio Paranaíba	Francis	80	522	94,7	358,7
Foz de Areia - Rio Iguaçu	Francis	29,8	302	128,6	340,8
Tucuruí - Rio Tocantins	Francis	60,8	576	85	320,6
São Simão - Rio Paranaíba	Francis	71,3	420	94,7	275,9
Água Vermelha - Rio Grande	Francis	139,9	500	95	233,2

# MÁQUINAS DE FLUXO

## NOTAS DE AULAS - 2010

6-27/120

Usina	Tipo de Turbina	Altura	Vazão	Rotação	Potência
		m	m3/s	rpm	MW
Porto Primavera - Rio Paraná	Kaplan	19,2	751	67	132,0
Moxotó - Rio São Francisco	Kaplan	21	550	80	111,9
Passo Fundo - Rio Passo Fundo	Francis	253	48	300	111,9
Xavantes - Rio Paranapanema	Francis	73,7	141,5	129	107,4
Volta Grande - Rio Grande	Kaplan(5pás)	26,2	430	85,7	104,4
Jupia - Rio Paraná	Kaplan	25,4	400	98	104,4
Promissão - Rio Tiête	Kaplan	25	380	90	89,5

Usina	Tipo de Turbina	Altura	Vazão	Rotação	Potência
		m	m3/s	rpm	MW
Porto Colômbia - Rio Grande	Francis	19,3	464	86	82,8
Jupia - rio Paraná	Kaplan	23	462	78,4	79,8
Cubatão 1- Henry Borden	Pelton	719,5	12	360	68,8
Bernardo Mascarenhas (Três Marias) -	Kaplan	57,2	150	164	67,1
Cubatão 2 - Fonte, (primitiva)	Pelton	684	12,7	150	66,5
Parigot de Souza - Rio Capivari	Pelton	714,3	10	514	65,0
Barra Bonita - Rio Tiête	Kaplan	24	148	129	35,3
Fontes antigas - Rio Piraí	Pelton	310	1,53	1094	14,4

# MÁQUINAS DE FLUXO

## NOTAS DE AULAS - 2010

6-28/120

Tipos	N. jatos	Ns	Altura
		rpm	m
Pelton	1	18	800
Pelton	1	18-25	800-400
Pelton	1	26-35	400-100
Pelton	2	26-35	800-400
Pelton	2	36-50	400-100
Pelton	4	40-50	400-100
Pelton	4	51-71	500-200
Pelton	6	72-90	400-100

Tipos	rapidez	Ns	Altura
		rpm	m
Francis	muito lenta	55-70	600-200
Francis	lenta	71-120	200-100
Francis	normal	121-200	100-70
Francis	rápida	201-300	70-25
Francis	muito rápida	301-450	25-15

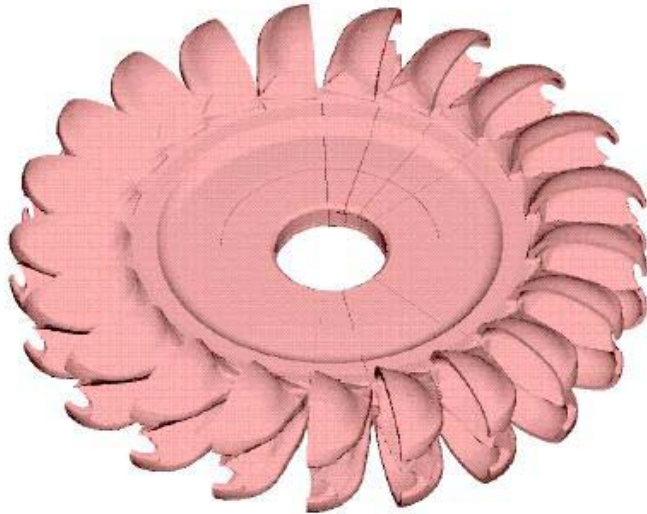
**MÁQUINAS DE FLUXO**  
**NOTAS DE AULAS - 2010**

6-29/120

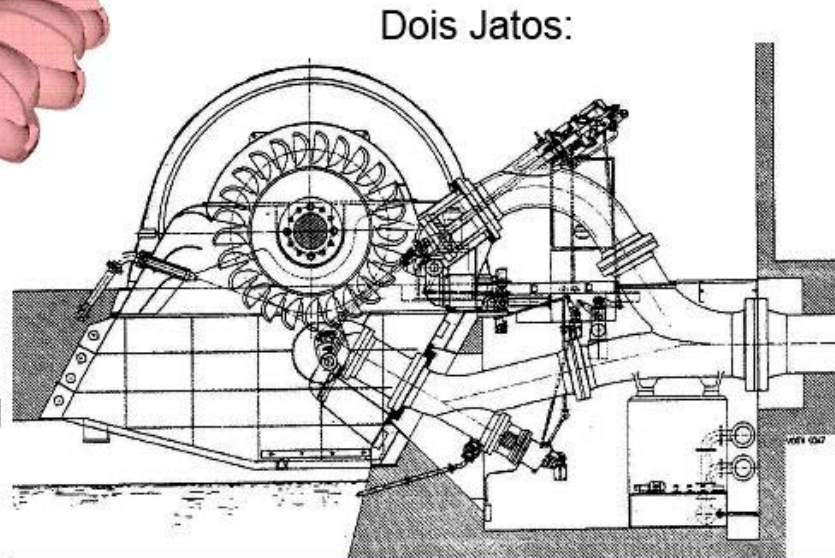
Tipos	N. Pás	Ns	Altura
		rpm	m
Hélice	8 pás	250-320	70-50
Kaplan	7 pás	321-430	50-40
Bulbo	6 pás	431-530	40-30
Tubular	5 pás	534-620	30-20
Straflo	4 pás	> 620	30

#### **6.1.4.1. TURBINAS PELTON**

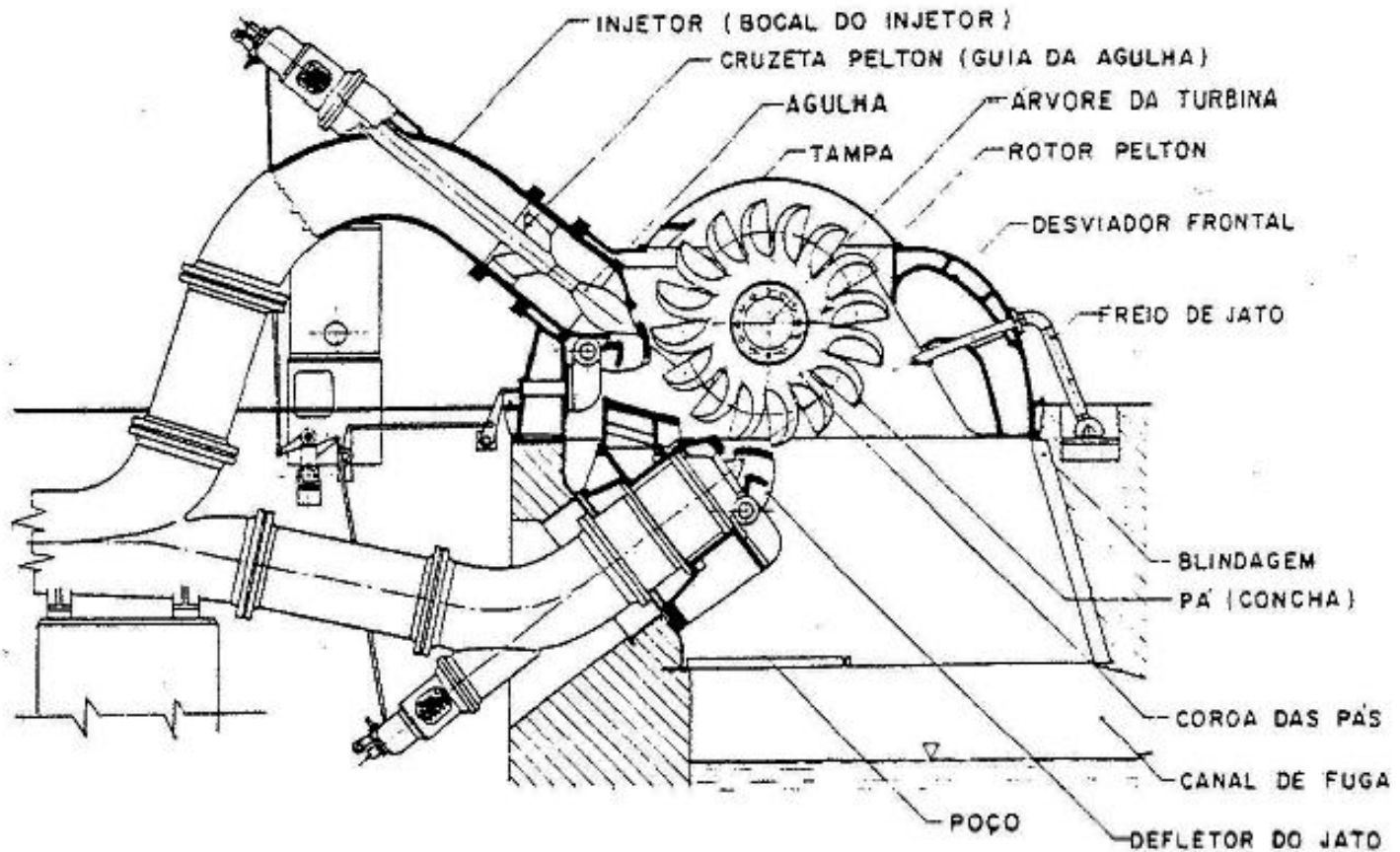
As turbinas Pelton são adequadas a aplicações em que a velocidade específica é baixa, o que é decorrente de baixas vazões e grandes alturas de queda d'água.

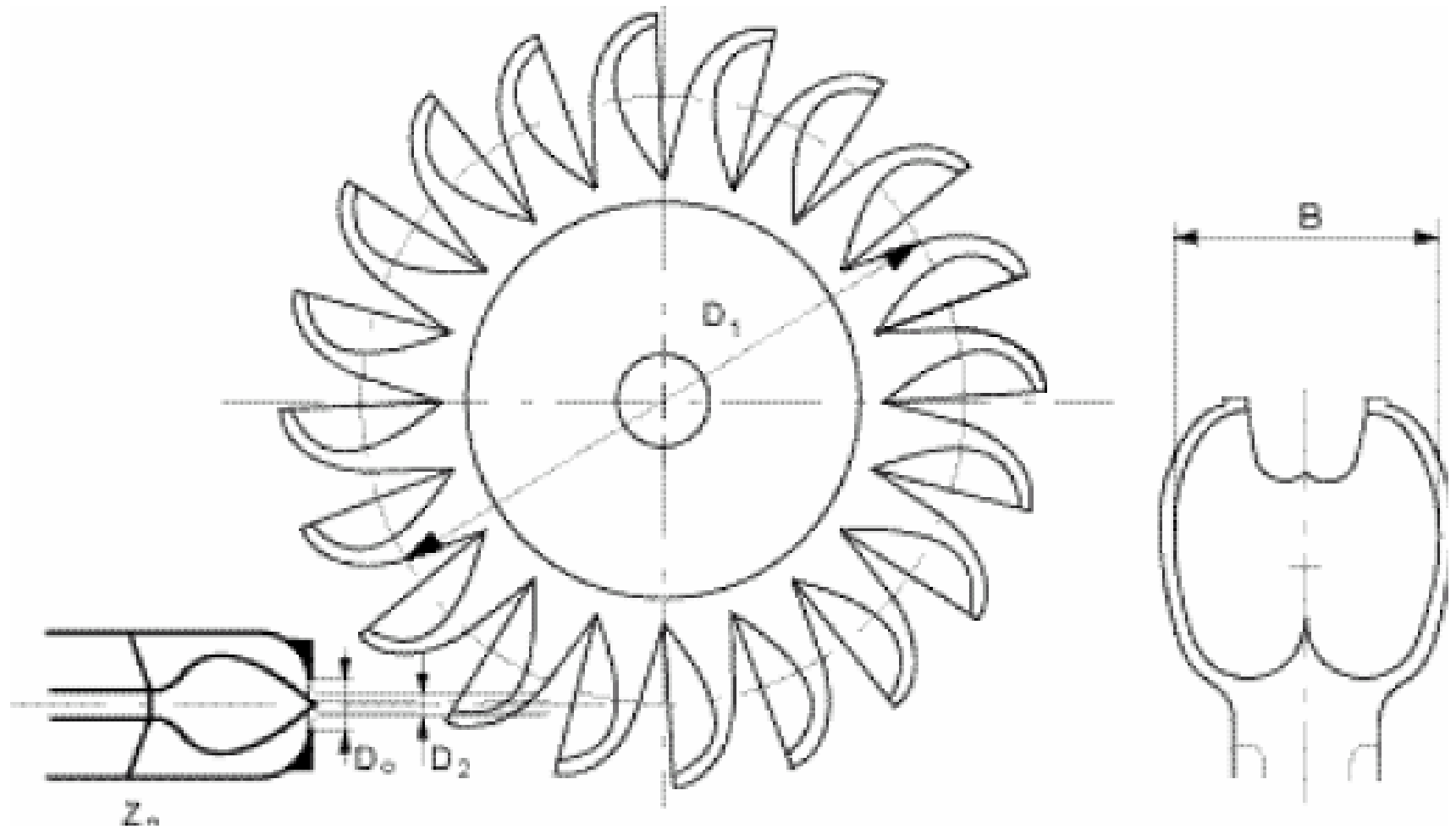


**Pelton**  
(Quedas elevadas, para as  
quais a descarga aproveitável  
normalmente é reduzida)



1880 patente por Lesler Allen *Pelton*





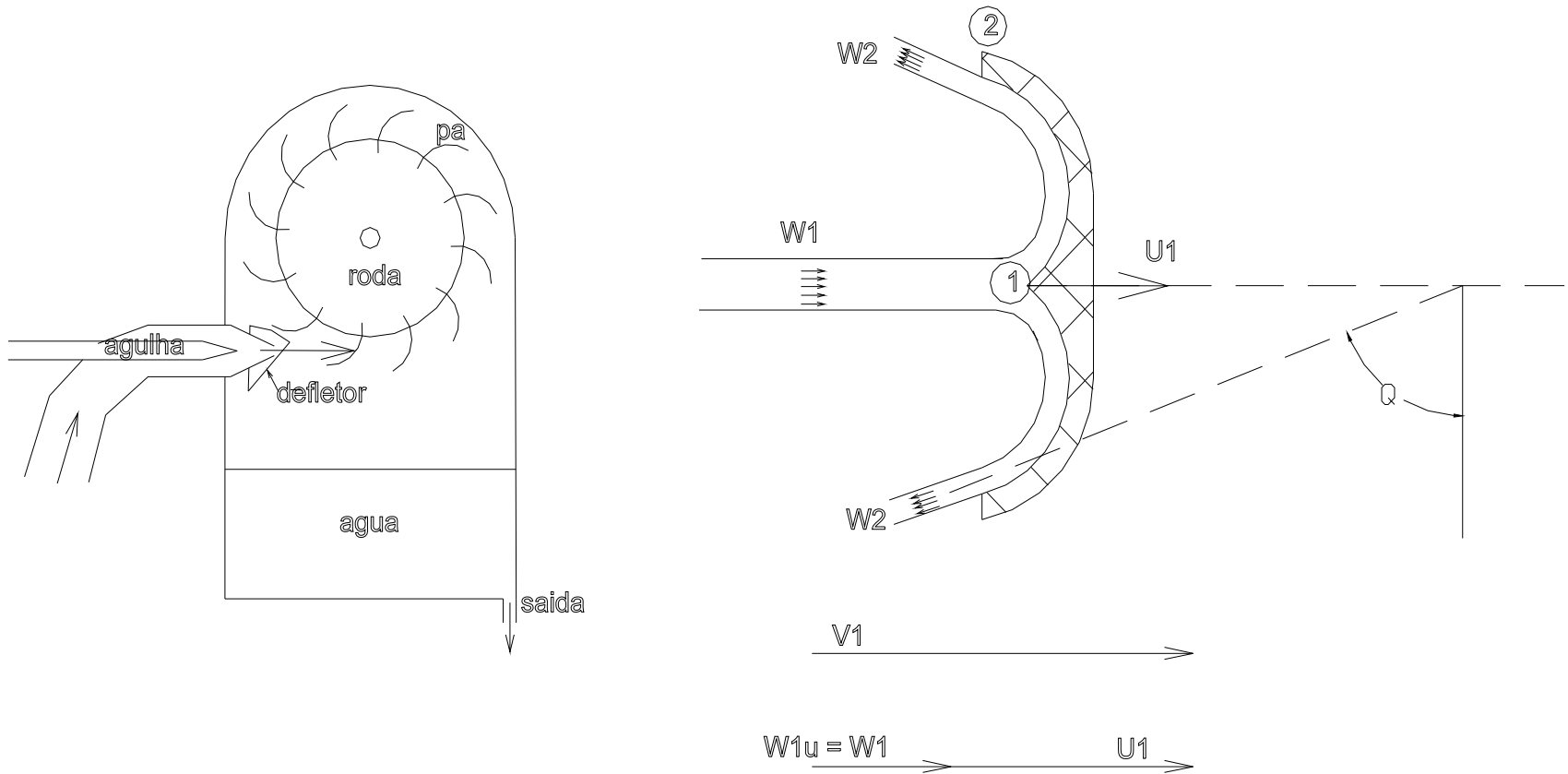
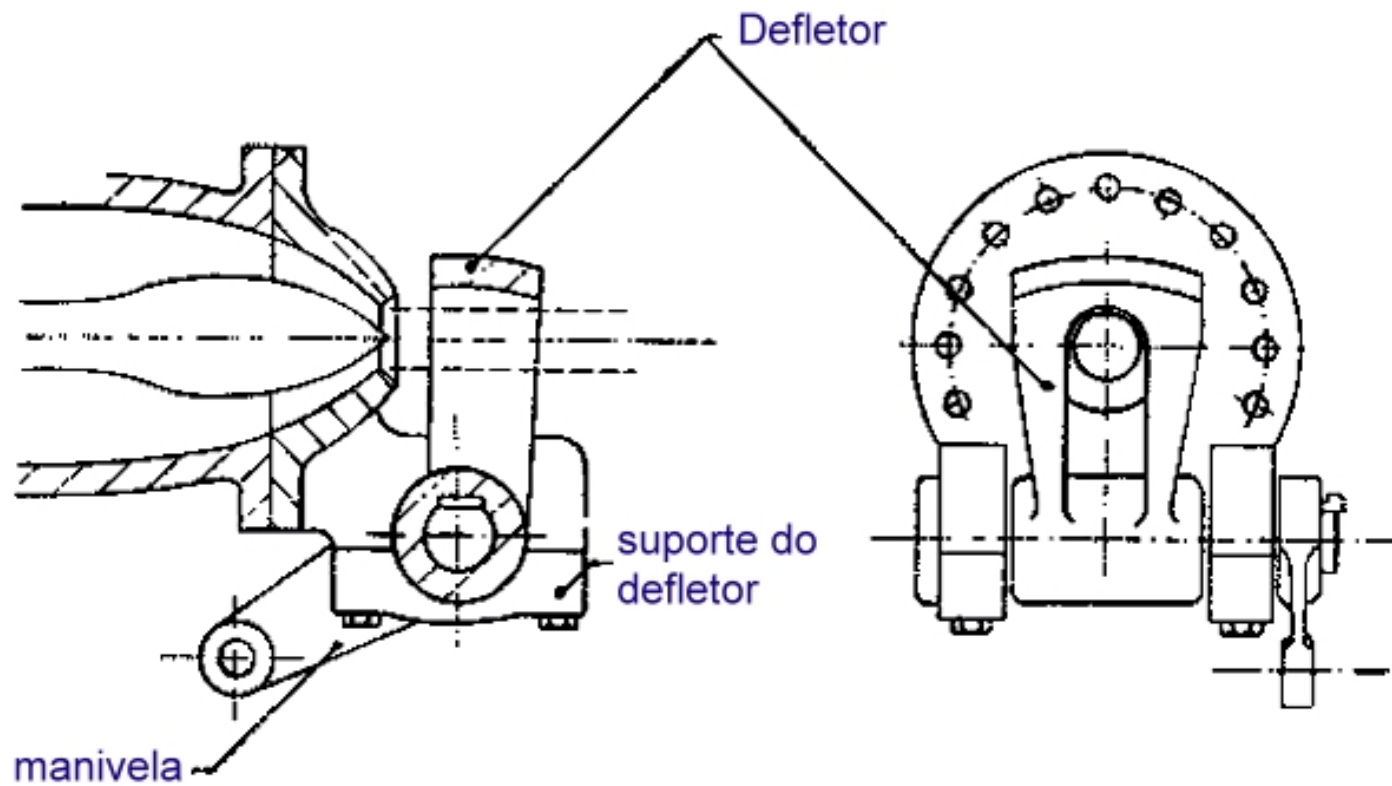
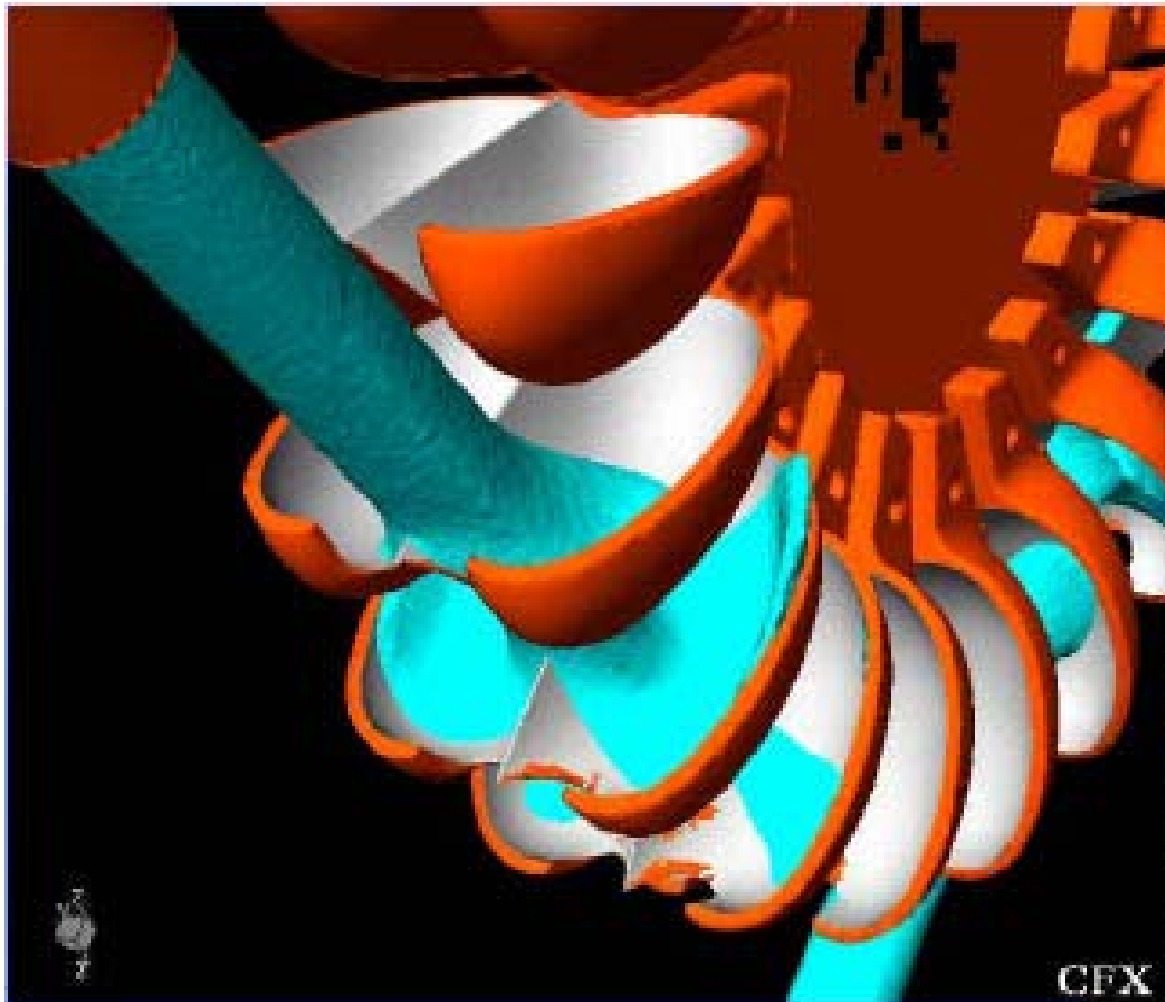
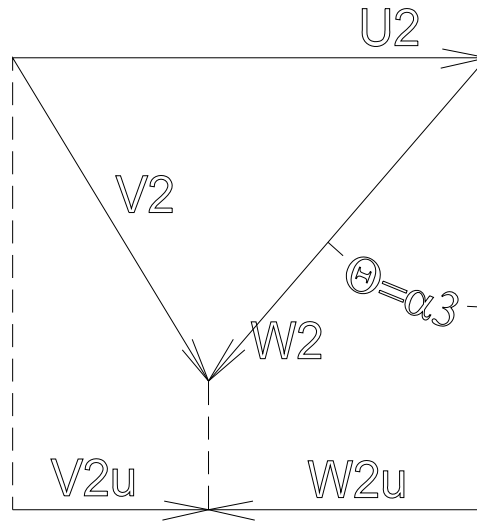


Figura 6-9 - Esquema de uma turbina Pelton e seus "triângulos" de velocidades









**Figura 6-10 - Triângulo de velocidades à saída de uma turbina Pelton**

O trabalho específico ideal pode ser calculado por

$$W_e = U_1 V_{1u} - U_2 V_{2u} =$$

$$= U(V_{1u} - V_{2u}) =$$

$$= U(V_1 - V_{2u}) =$$

$$= U(V_1 - (U - W_{2u})) =$$

$$= U(V_1 - U + W_2 \sin \alpha_3)$$

Pondo  $W_2 = k W_1$ , com  $k$  = coeficiente de redução de velocidade devido ao atrito, tem-se

$$W_{e,real} = U(V_1 - U + k(V_1 - U) \sin \alpha_3) = U(V_1(1 + k \sin \alpha_3) - U(1 + k \sin \alpha_3))$$

ou

$$W_{e,real} = U(V_1 - U)(1 + k \sin \alpha_3)$$

# 6-2

Tem-se que  $W_{e,real} = 0$  ou se  $U = 0$  ou se  $U = V_1$ . Então, não haverá transferência de energia nos casos em que a roda estiver parada e em que a velocidade da roda for igual à do jato.

Como a energia que chega ao rotor é  $\frac{1}{2} V_1^2$ , então a eficiência da turbina Pelton será

$$\eta = \frac{W_{e,real}}{W_{jato}} = \frac{U(V_1 - U)(1 + k \sin \alpha_3)}{\frac{1}{2} V_1^2}$$

ou

$$\eta = \frac{2U}{V_1^2} (V_1 - U)(1 + k \sin \alpha_3)$$

# 6-3

ou

$$\eta = 2 \frac{U}{V_1} \left( 1 - \frac{U}{V_1} \right) (1 + k \sin \alpha_3) = 2(1 + k \sin \alpha_3) \left[ \frac{U}{V_1} - \left( \frac{U}{V_1} \right)^2 \right]$$

A máxima transferência de energia do fluido para o rotor de u'a determinada máquina - máxima eficiência - pode ser calculada a partir da derivada, em relação à velocidade periférica U, da expressão relativa ao trabalho específico.

Observe-se que na Eq. # 6-3 apenas se pode variar U.

$$\frac{\partial W_e}{\partial U} = (1 + k \sin \alpha_3)(V_1 - U) - U(1 + k \sin \alpha_3) = (1 + k \sin \alpha_3)(V_1 - 2U) = 0$$

de onde vem

$$U = \frac{1}{2} V_1, \text{ isto é, } \frac{U}{V_1} = \frac{1}{2}$$

e, portanto,

$$W_{e,m\acute{a}x} = (1 + k \sin \alpha_3) \frac{V_1}{2} \left( V_1 - \frac{V_1}{2} \right) = (1 + k \sin \alpha_3) \frac{V_1^2}{4}$$

A eficiência máxima da turbina será a correspondente à energia cinética do jato  $\frac{1}{2} V_1^2$ :

$$\eta_{m\acute{a}x} = \frac{(1 + k \sin \alpha_3) \frac{V_1^2}{4}}{\frac{V_1^2}{2}} = \frac{1}{2} (1 + k \sin \alpha_3)$$

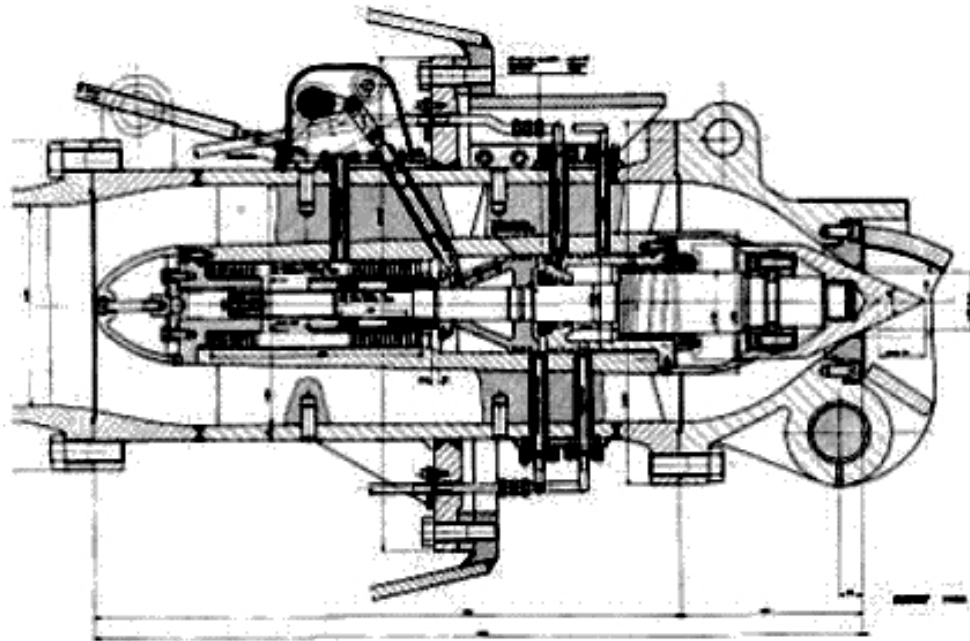
Valores de  $k$  estão entre 0,8 e 0,85 e do ângulo de saída até  $75^\circ$  (para evitar interferência dos jatos de entrada e de saída). Para tais valores, a eficiência máxima será:

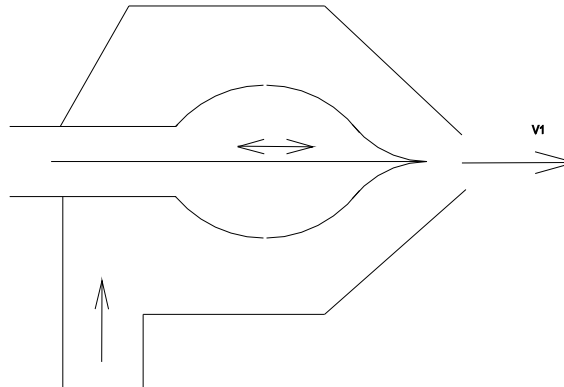
$$\eta_{m\acute{a}x} = (0,5)(1 + 0,85 \sin 75^\circ) = 0,91.$$

Na prática, a eficiência máxima é atingida quando  $U/V_1 \sim 0,46$  e, não, 0,50 como predito teoricamente.

A operação dessas turbinas em cargas parciais exige que a relação  $U/V$  seja mantida aproximadamente constante, para garantir eficiência elevada. Nas usinas hidrelétricas,  $U$  é constante e, portanto,  $V$  deve ser constante. Um modo de manter  $V$  constante é utilizar válvula reguladora de vazão em que a vazão é controlada pela variação de área, utilizando-se um dispositivo chamado de agulha. Neste caso,

$$V_1 = C\sqrt{2g\Delta H}$$





**Figura 6-11 - Esquema de um injetor (controle de vazão) de uma turbina Pelton**

Da equação da continuidade,

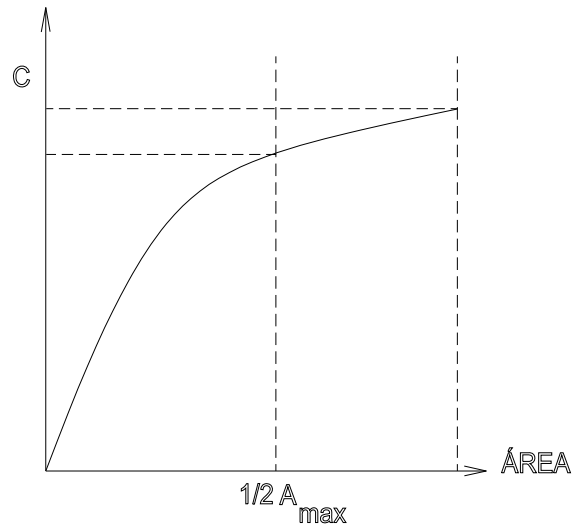
$$\dot{m} = \rho A V_1 = \rho A C \sqrt{2g\Delta H}$$

ou

$$\dot{m} = A C \sqrt{2\rho\Delta p}$$

Embora **C** varie com a variação de **A**, essa variação pode ser minimizada (por projeto adequado do injetor), numa faixa bastante ampla de variação de **A**.





**Figura 6-12 - Forma geral de variação do coeficiente de vazão do injetor**

Remoção súbita de carga tende a disparar a turbina, o que é impedido pelo corte brusco da vazão nos injetores, através dos defletores dos jatos. Para evitar golpes de ariete devidos ao corte brusco da vazão, a linha de alimentação deve estar provida de dispositivos anti golpe de ariete, que evitam o aumento excessivo da pressão do fluido na tubulação a montante da turbina.

**Exemplo 1:** Uma turbina Pelton desenvolve 4 MW a uma rotação de 500 rpm. A queda d'água é de 200 m e a eficiência do sistema de transmissão (dutos e injetor) é de 90%. O diâmetro da roda é 1,5 m. O coeficiente de perdas  $k$  vale 0,90. O jato é defletido  $75^\circ$ . Desprezando-se perdas de ventilação, **calcular:**

- a) eficiência da roda
- b) o diâmetro dos jatos (há 2 injetores idênticos, separados de  $180^\circ$  um do outro).

**Solução:**

a)  $\Delta H = (0,9)(200) = 180$  m (altura de energia conversível em velocidade)

$$V_1 = \sqrt{(2)(9,81)(180)} = 59,5 \text{ m/s}$$

$$U = \pi DN/60 = \pi(1,5)(500)/(60) U = 39,3 \text{ m/s}$$

Da Eq. 6-3,

$$\eta = \frac{(2)(39,3)}{(59,5^2)} \left( (59,5 - 39,3)(1 + (0,9)(\sin 75^\circ)) \right) = 0,84$$

b) Se a roda tem eficiência de 84%,

$$W_{e,jato} = W_e / \eta = 4 \times 10^6 / 0,84 = 4,762 \text{ MW}$$

Como, para cada jato,

$$W_{e,jato}/jato = 2,381 \text{ MW}$$

e como a potência do jato é dada por

$$\frac{1}{2} \dot{m} V_1^2 = \frac{1}{2} \rho A_1 V_1 V_1^2 = \frac{1}{2} \rho A_1 V_1^3$$

segue-se que

$$A_1 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{W_{jato} / jato}{\frac{1}{2} \rho V_1^3} = \frac{2,381 \times 10^6}{\frac{1}{2} \times 1000 \times 59,5^3} = 0,0226063$$

e que

$$d = \sqrt{\frac{4}{\pi} (0,0226063)} = 0,170 \text{ m}$$

A vazão volumétrica pode ser calculada por

$$\dot{Q} = V_1 A = 59,5 \times 0,0226 = 1,345 \text{ m}^3/\text{s}$$

e a vazão em massa por

$$\dot{m} = \rho \dot{Q} = 1000 \times 1,345 = 1345 \text{ kg/s.}$$

Obs.: A título de exercício, verifique se a rotação específica desta máquina está na faixa recomendada.

**Exemplo 2:** Potência do equipamento de uma instalação hidráulica

Considere a instalação hidráulica esquematizada abaixo, que compreende uma estação de bombeamento de 1,2 MW e uma central de geração hidrelétrica formada por 4 turbinas Pelton cujas características são: vazão de  $19,5 \text{ m}^3/\text{s}$ , vazão máxima de  $22,65 \text{ m}^3/\text{s}$ , rotação de 428,6 rpm, 20 pás por roda, diâmetro da roda de 0,72m, 5 injetores por turbina. Desprezar a variação de níveis dos reservatórios, uma vez que os lagos são extensos. A instalação contém 4 turbinas Pelton de eixos verticais. A tubulação de entrada se divide, ao nível da central hidrelétrica, em 4 dutos idênticos, cada um alimentando uma turbina com 5 injetores horizontais à cota  $z_0$ .

Supõe-se que o jato formado à saída do injetor seja cilíndrico e de seção circular  $D_2$  e que a distribuição de velocidade no jato seja uniforme.

Pede-se:

- 1) Fazer esquemas apropriados para a resolução. Obter as equações apropriadas ao estudo da turbina Pelton.
- 2) Determinar as perdas de energia do circuito, baseando-se nos dados geométricos da figura abaixo.
- 3) Determinar a altitude do nível de água na chaminé de equilíbrio.
- 4) Introduzindo-se a perda de energia específica  $gH$  do duto de alimentação, exprimir a energia específica da seção de alta pressão da máquina. Sendo  $Z_A$  a altitude do nível livre no canal de restituição (a jusante), qual é a energia específica colocada à disposição da máquina?
- 5) Qual é a energia específica disponível para as turbinas Pelton?

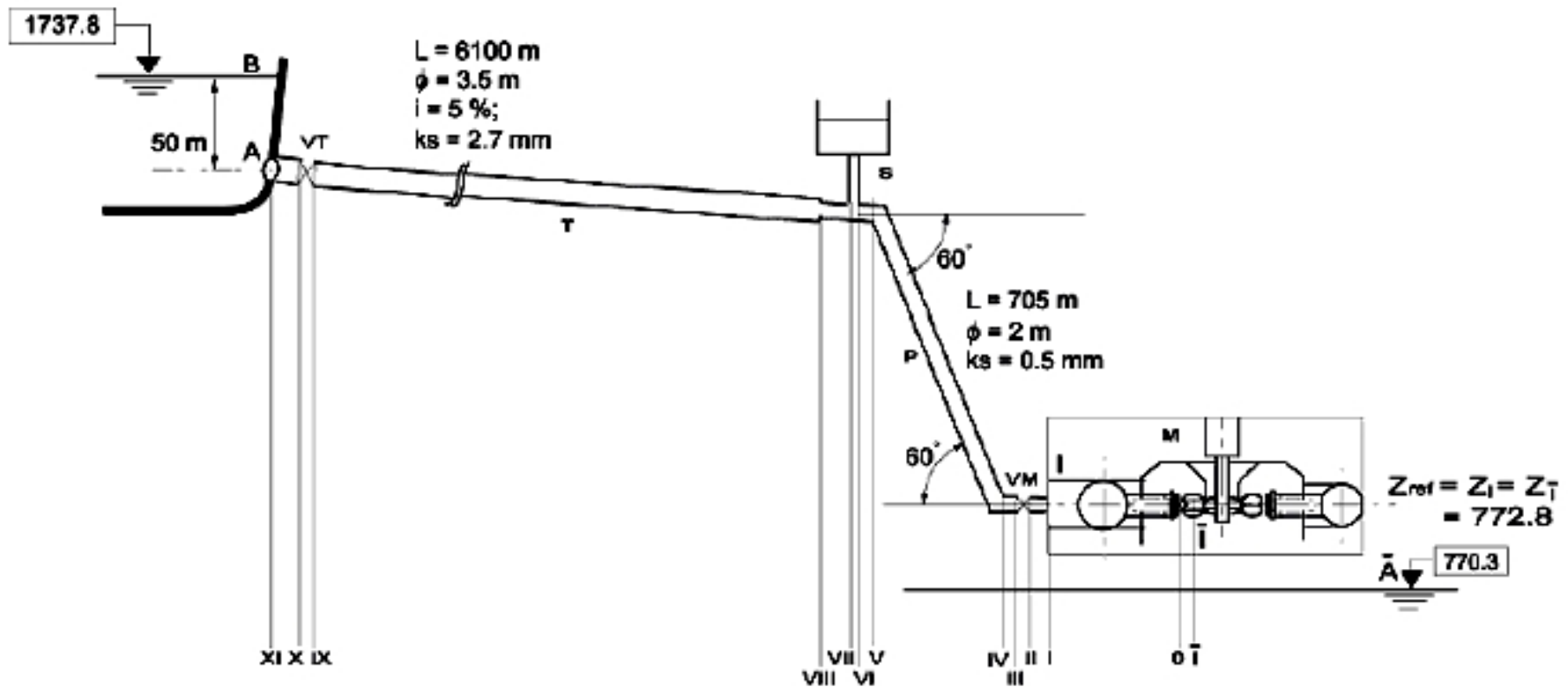
- 6) Determinar o valor da velocidade do jato, expressa em função da diferença de altitude  $Z_b - A_a$  e da perda de energia específica de instalação, calculada como 16% da energia específica bruta. Deduzir a expressão que dá a variação do diâmetro do jato para uma vazão  $Q$  entre  $Q_{\min}$  e  $Q_{\max}$ .
- 7) Determinar a potência  $P_0$  de um jato e a potência  $P_h$  disponível para uma máquina.
- 8) Supondo-se que as pás (conchas) provocam um desvio de  $180^\circ$ , traçar justificando os triângulos de velocidades à entrada e à saída de uma pá.
- 9) Com auxílio da equação de Euler determinar a evolução da energia e da potência transformada pela roda, em função da velocidade de rotação.
- 10) Explicar por qual razão física evidente a velocidade tangencial deve ser a metade daquela do jato. Deduzir o valor do diâmetro ótimo  $D$  do jato sobre a roda, para a velocidade de rotação dada na figura.

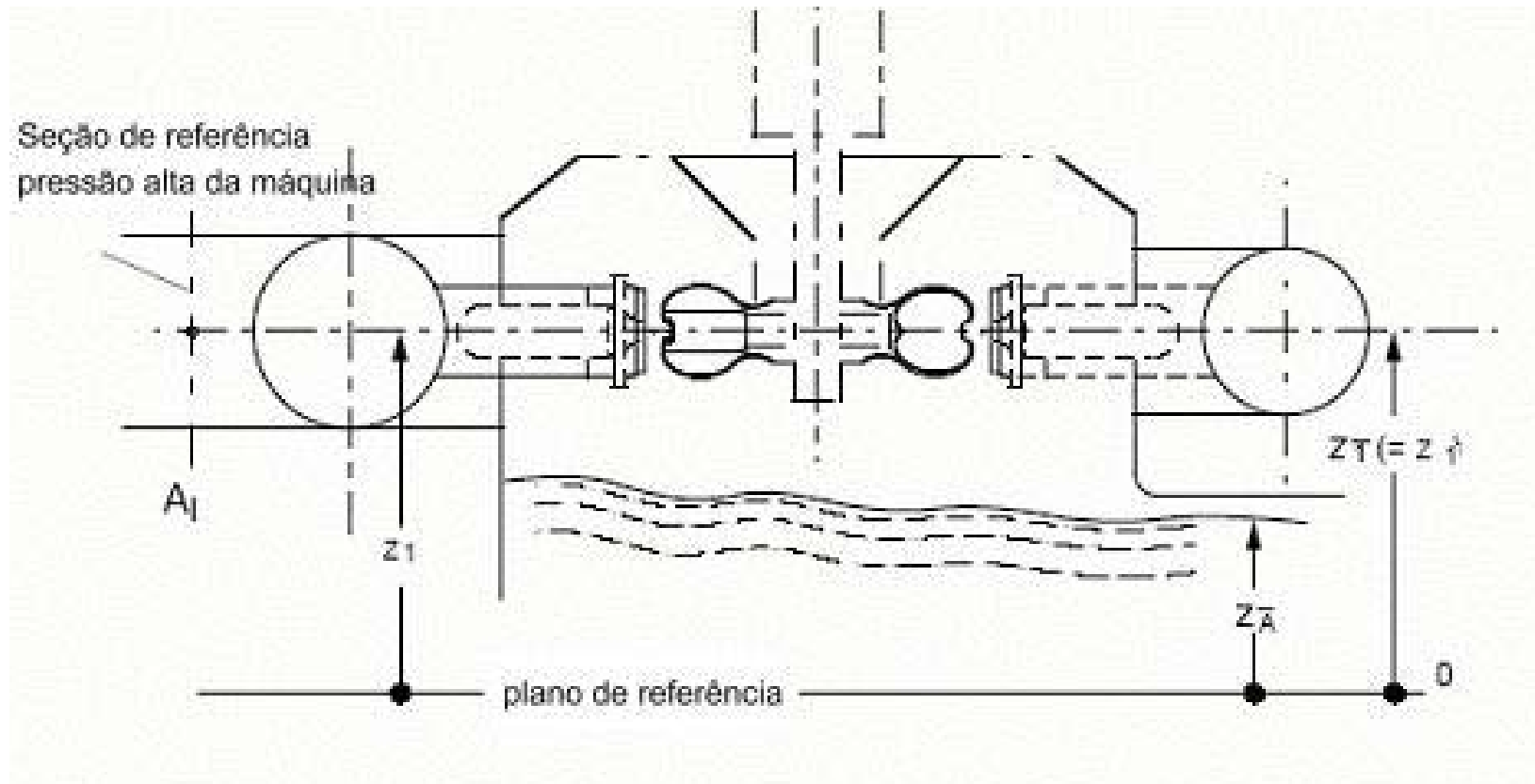
$$U_1 = U_T = \frac{C_1}{2}$$

# MÁQUINAS DE FLUXO

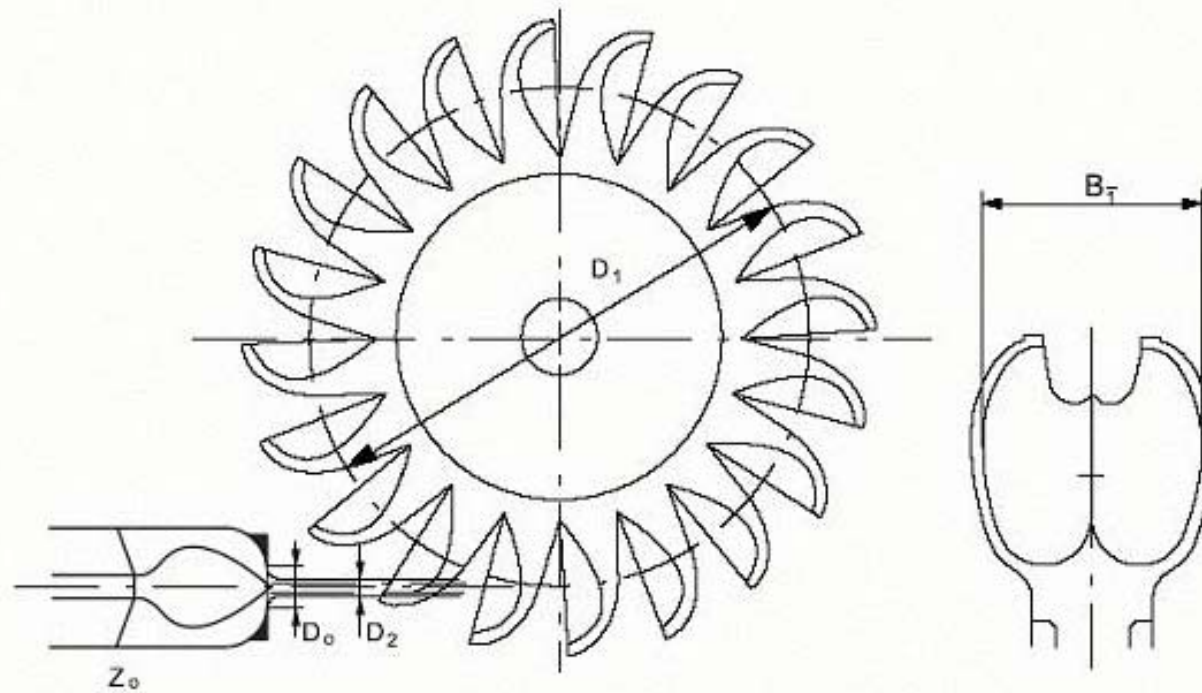
## NOTAS DE AULAS - 2010

6-48/120







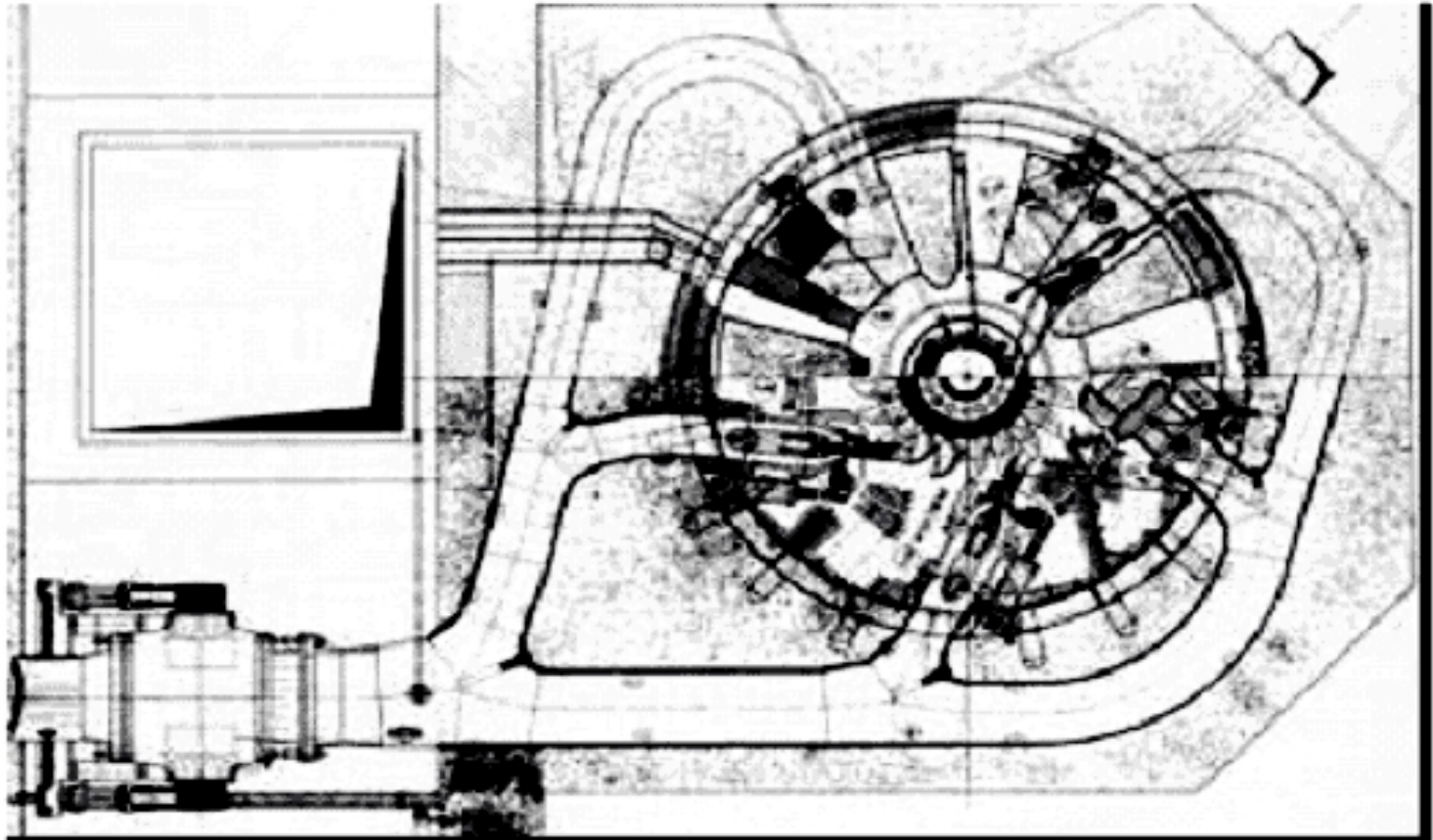


Dados físicos

$$g = 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$\rho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$



## Solução

Escrevendo-se a equação de conservação da energia hidráulica específica entre a superfície livre (B) e a seção de alta pressão (entrada) da turbina (I), tem-se

$$gH_B = gH_I + gH_{r,B-I}$$

em que  $gH_{r,B-I}$  é a perda de energia no circuito, composta pelas perdas regulares sobre a galeria de admissão ao duto forçado, mais as perdas singulares nas peças de mudanças de seções, etc.

A perda de energia regular num duto cilíndrico de comprimento L e diâmetro D pode ser calculada por

$$gH_r = \lambda \frac{L}{D} \frac{V^2}{2}$$

com

- V = velocidade do escoamento na seção considerada do duto
- $\lambda$  = coeficiente de perdas de energia, que depende da rugosidade relativa média do duto e do número de Reynolds do escoamento ( $Re = \frac{VD}{\nu}$ ).

Para determinar esse coeficiente dispõe-se da fórmula de Churchill aplicada a todos os regimes de escoamento:

- $\lambda = 8 \left[ \left( \frac{8}{\text{Re}} \right)^{12} + \frac{1}{(A + B)^{3/2}} \right]^{\frac{1}{12}}$

$$A = \left[ 2,457 \ln \frac{1}{\left( \frac{7}{\text{Re}} \right)^{0,9} + 0,27 \frac{\varepsilon}{D}} \right]^{16} \quad \text{e} \quad B = \left[ \frac{37530}{\text{Re}} \right]^{16}$$

Na Tabela seguinte estão os resultados dos cálculos das perdas de energia específica regulares no circuito, para duas situações:  $Q = Q_{\min}$  e  $Q = Q_{\max}$ , para o caso de uma única turbina em operação.

**MÁQUINAS DE FLUXO**  
**NOTAS DE AULAS - 2010**

6-54/120

Trecho		Vazão Mínima		Vazão Máxima	
		galeria de captação (T)	duto forçado (P)	galeria de captação (T)	duto forçado (P)
<b>Comprimento</b>	L (m)	6100	705	6100	705
<b>Diâmetro</b>	D (m)	3,5	2,0	3,5	2,0
<b>vazão</b>	Q (m <sup>3</sup> /s)	19,50	19,50	22,65	22,65
<b>área seção</b>	A (m <sup>2</sup> )	9,62100	3,14200	9,62100	3,14200
<b>Velocidade</b>	C (m/s)	2,03	6,21	2,35	7,21
<b>N. Reynolds</b>	Re	7,09e+06	1,24e+07	8,24e+07	1,44e+07
<b>Rugosidade</b>	Ks (mm)	2,7	1,5	2,7	1,5
<b>Rugosidade relat</b>	Ks/D	7,71e-04	7,50e-04	7,71e-04	7,50e-04
<b>A</b>	-	1,21e+21	1,29e+21	1,22e+21	1,30e+21
<b>B</b>	-	3,77e-37	4,87e-41	3,43e-38	4,43e-42
<b>Coef de perda</b>	$\lambda$	0,0185	0,0184	0,0185	0,0184
<b>Perda de energia</b>	gHr (J/kg)	66,3	124,8	89,4	168,3
<b>Total</b>	<b>(J/kg)</b>		<b>191,1</b>		<b>257,7</b>

As perdas de energia singulares são dadas por  $gH_{rV} = K_V \frac{V^2}{2}$

com

$$V = \frac{Q}{A_{\text{seção}}} = \text{velocidade local}$$

$K_V$  = coeficiente de perda, que depende fortemente do tipo da singularidade.

Na Tabela tem-se uma lista detalhada dos componentes do circuito que introduzem as perdas de energia bem como os valores estimados

- para a entrada,  $K_V$  tem um valor constante de  $K_V = 0,05$
- para as pás na posição completamente abertas, a perda local é praticamente nula
- para a variação brusca de diâmetro,  $K_V$  é dado por

$$K_V = \frac{1 - \left( \frac{A_{\text{saída}}}{A_{\text{entrada}}} \right)^2}{2}$$

- para as curvas, o coeficiente de perda dependem do ângulo de desvio do escoamento. A  $60^\circ$ ,  $K_V=0,47$ .

# MÁQUINAS DE FLUXO

## NOTAS DE AULAS - 2010

6-56/120

Perdas concentradas (caso de uma única turbina em operação)									
	A	Coef	Diâm	Seção	Vaz	Veloc	Perda Energ	Total	
		Kv	D (m)	A (m2)	Q (m3/s)	C (m/s)	gHv (J/kg)	(J/kg)	
a	Entrada do Circuito	A	0,05	3,5	9,621	19,50	2,0	0,1	24,7
	pá galeria entrada	VT	-	3,5	9,621	19,50	2,0	-	
	variação brusca	VIII	0,34	2,0	3,142	19,50	6,2	6,5	
	Curva 60 gaus	V	0,47	2,0	3,142	19,50	6,2	9,1	
	Curva 60 graus	IV	0,47	2,0	3,142	19,50	6,2	9,1	
	Válvula esférica	VM	-	2,0	3,142	19,50	6,2	-	
b	Entrada circuito	A	0,05	3,5	9,621	22,65	2,4	01,	33,3
	Válvula galeria entr	VT	-	3,5	9,621	22,65	2,4	-	
	Variação brusca	VIII	0,34	2,0	3,142	22,65	7,2	8,8	
	Curva 60 gaus	V	0,47	2,0	3,142	22,65	7,2	12,2	
	Curva 60 graus	IV	0,47	2,0	3,142	22,65	7,2	12,2	
	Válvula esférica	VM	-	2,0	3,142	22,65	7,2	-	

Fazendo a síntese das perdas de energia específica no circuito até a entrada da máquina, tem-se:

$$gH_{rB-I} = gH_{rT} + gH_{rP} + gH_{vA} + gH_{vVT} + gH_{vVIII} + gH_{vV} + gH_{vIV} + gH_{vVM}$$

Seja  $gH_{rB-I} = 215,8 \text{ J/kg}$  para uma vazão de  $19,5 \text{ m}^3/\text{s}$

e

$gH_{rB-I} = 291,0 \text{ J/kg}$  para uma vazão de  $22,65 \text{ m}^3/\text{s}$

A variação do nível na chaminé de equilíbrio é resultado da flutuação transitória da pressão e dos fenômenos transitórios, golpe de ariete e à parada brusca da máquina. Em regime estacionário, o nível é determinado pela pressão estática na seção em que a chaminé se liga ao duto principal.

Aplicando a conservação de energia específica entre um ponto situado na superfície livre do lago a montante da usina e um ponto situado na superfície livre na chaminé, tem-se:

$$gH_B = gH_S + gH_{rB-S}$$

de onde a perda de energia específica entre as duas seções é dada por

$$gH_{rB-S} = gH_{rT} + gH_{vA} + gH_{vVT} + gH_{vVIII} = 6,6 \text{ J/kg}$$

A energia hidráulica de uma seção é definida como a soma da energia (específica) potencial, energia de pressão e energia cinética do escoamento médio.

$$gH = gZ + P/\rho + c^2/2$$



Sobre a superfície livre pode-se desprezar no cálculo a diferença de pressão entre os 2 níveis, variação da pressão atmosférica e a energia cinética em B e S:

$$gH_B = gH_S + gH_{rB-S}$$

$$gZ_B + \frac{P_{atm}}{\rho} + \frac{c_B^2}{2} = gZ_S + \frac{P_{atm}}{\rho} + \frac{c_B^2}{2} + gH_{rB-S}$$

$$gZ_B \approx gZ_S + gH_{rB-S}$$

$$gZ_S = gZ_B - gH_{rB-S} = 9,8065 \times 1737,8 - 6,6 = 17,04 \text{ kJ/kg}$$

$$Z_S = gZ_S / g = 17041,2 / 9,8065 = 1737,1 \text{ m}$$

3 - A energia específica disponível à entrada da máquina é dada pela energia hidráulica específica a montante menos a perda de energia no circuito do lado de alta pressão.

$$gH_I = gH_B - gH_r = gZ_B - gH_r = 9,8065 \times 1737,8 - 215,8 = 16,83 \text{ kJ/kg}$$

Em virtude de que, à saída do canal, o escoamento está à pressão atmosférica, a perda de energia

específica na parte de baixa pressão (roda - a jusante) é praticamente nula para uma roda Pelton.

Assim, a energia específica disponível para a máquina depende somente do escoamento na parte de alta pressão do circuito e é igual à energia disponível à entrada da turbina.

A roda deve ser colocada a uma distância suficiente abaixo do nível livre a jusante para evitar retorno (respingo) de água nas pás (conchas).

A velocidade do jato é determinada a partir da relação que dá o balanço de energia entre o nível a montante (superfície livre do reservatório - B) e a seção de descarga do injetor (O):

$$gH_B = gH_0 + gH_r$$

$$gZ_B + \frac{P_{\text{atm}}}{\rho} + \frac{c_B^2}{2} = gZ_0 + \frac{P}{\rho} + \frac{c_I^2}{2} + gH_r$$

A velocidade do jato é, portanto

$$c_I = \sqrt{2g(Z_B - Z_0) - 2gH_r}$$

onde a perda de energia específica da instalação é equivalente a 16% da energia específica bruta

$$\rho H_r = 16\% g(Z_b - Z_0)$$

Então, tem-se

$$c_I = \sqrt{2g(Z_B - Z_0) - 2 \times 0,16 \times g(Z_B - Z_0)} = \sqrt{2 \times (1 - 0,16)g(Z_B - Z_0)} = 126,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A velocidade do jato pode também ser expressa em função da vazão que atravessa a seção de saída do jato:

$$c_I = \frac{q}{A} = \frac{4Q}{Z_0 \pi D_I^2}$$

O diâmetro de um jato fica, então:

$$D_I = \sqrt{\frac{4Q}{Z_0 \pi c_I}} \Rightarrow D_{I,\max} = \sqrt{\frac{4Q_{\max}}{5\pi c_I}} = 0,210\text{m} \Rightarrow D_{I,\min} = \sqrt{\frac{4Q_{\min}}{5\pi c_I}} = 0,200\text{m}$$

A potência disponível para um desses jatos é dada pela vazão do jato vezes a energia disponível à entrada do injetor:

$$P_0 = \rho q E = \rho \frac{Q}{Z_0} H$$

Como já foi mostrado,

$$gH = g(Z_B - Z_0) - gH_r = \frac{c_I^2}{2}$$

isto é, a turbina Pelton utiliza somente a energia cinética específica do escoamento.

A vazão correspondente a um desses injetores é:

$$q = \frac{Q}{Z_0} = c_I A_I = c_I \frac{\pi D_I^2}{4}$$

Dáí, a potência de um jato será

$$P_0 = \rho \frac{C_1^3}{2} \frac{\pi D_1^3}{4} \Rightarrow P_0^{\max} = \rho \frac{C_1^3}{2} \frac{\pi D_{\max}^3}{4} = 34,7 MW$$

$$P_0^{\min} = \rho \frac{C_1^3}{2} \frac{\pi D_{\min}^3}{4} = 31,5 MW$$

A potência disponível para a máquina completa é equivalente à potência de cada injetor vezes o número de injetores:

$$P_h = z_0 P_0 = 5 P_0 \Rightarrow P_h^{\max} = 173,5 MW$$

$$P_h^{\min} = 157,5 MW$$

Como as pás provocam um desvio do jato de  $180^\circ$ , tem-se uma turbina Pelton ideal, isto é, a energia cinética é completamente transformada e, portanto, a velocidade absoluta da água na saída é nula:

$$\beta = 180^\circ \Rightarrow C_2 = 0$$

Neste caso ideal o ângulo de entrada é nulo

$$\beta_1 = 0.$$

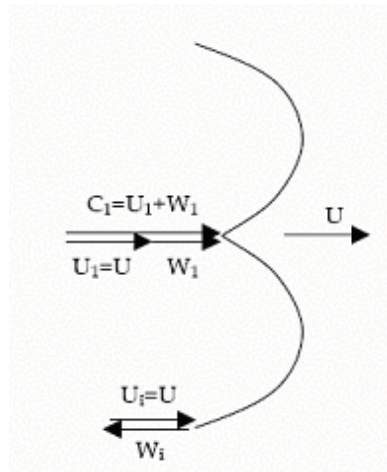
As perdas por atrito nas pás são pequenas, tendo-se praticamente

$$|\overline{W_1}| = |\overline{W_1}| \quad W_1 = -W_1$$

Também, tem-se a velocidade tangencial do escoamento igual à velocidade periférica da pá:

$$U_1 = U_2 = U$$

Os triângulos de velocidades no ponto de impacto do jato sobre a pá e à saída da pá têm o aspecto seguinte



A equação de Euler para as turbinas será, portanto:

$$E_t = U_1 C_{u1} - U_2 C_{u2}$$

Considerando-se os triângulos de velocidades teóricos, tem-se:

- a igualdade da velocidade tangencial à entrada e à saída com a velocidade periférica da roda
- as velocidades relativas de entrada e de saída são iguais em valor absoluto, mas de sentido oposto

$$|\overline{W}_1| = |\overline{W}_2| \quad W_2 = -W_1$$

- as componentes tangenciais da velocidade na entrada sobre a pá e na saída:

$$C_{a1} = C_1 = U_1 + W_1$$

$$C_{u2} = U_2 - W_2 \cos \beta_2 ; \beta_2 = 180^\circ \Rightarrow C_{u2} = U + W_1 = U - W_1$$

Substituindo-se essas informações na equação de Euler, tem-se, em termos de escoamento relativo

$$E_t = U(C_{u1} - C_{u2}) = U(U + W_1 - U + W_1)$$

A potência transformada pela roda será

$$E_t = U(2W_1) = 2U(C_1 - U)$$

Portanto, a potência mecânica tem uma variação parabólica em relação à velocidade periférica da roda, com valor máximo dado por

$$P = \rho Q E_t = 2\rho Q U W = 2\rho Q U (C - U),$$

Para  $U=0$  e  $U=C$ :  $P=0$

Esta potência pode assim ser expressa em relação à força de pressão da água na pá:

$$P = F \cdot U \Rightarrow F = \frac{P}{U} = \frac{2\rho Q U (C - U)}{U} = 2\rho Q (C - U)$$

O torque é dado pela força de pressão aplicada na periferia da roda:

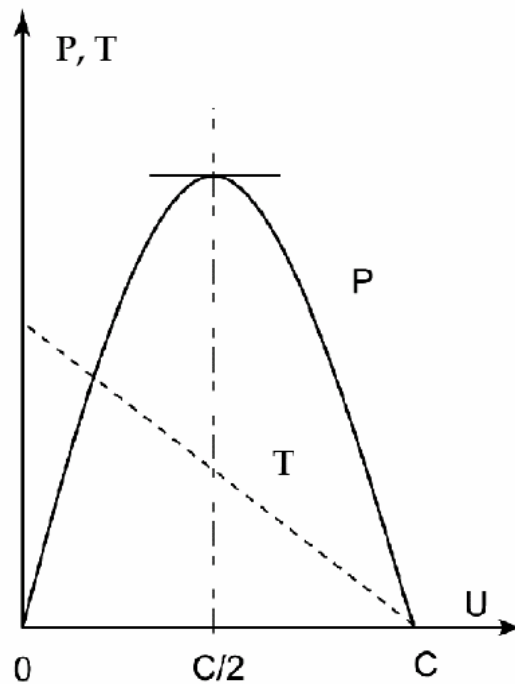
$$T = F \cdot \frac{D}{2} = \rho Q D (C - U)$$

e portanto tem uma variação linear com a velocidade periférica da roda:

$$U=0 \rightarrow T=\rho QDC$$

$$U=C/2 \rightarrow T=\rho QDC/2$$

$$U=C \rightarrow T=0$$



Variação da potência com a velocidade da roda

Também, a potência máxima teórica é obtida para uma velocidade periférica da roda igual à metade da velocidade absoluta do jato no ponto em que o jato toca a roda:

$$U=U_1=U_2=\frac{C_1}{2}$$

O diâmetro ótimo da roda é obtido para este valor da velocidade periférica que, aliás, pode ser expressa em função da velocidade angular da roda:

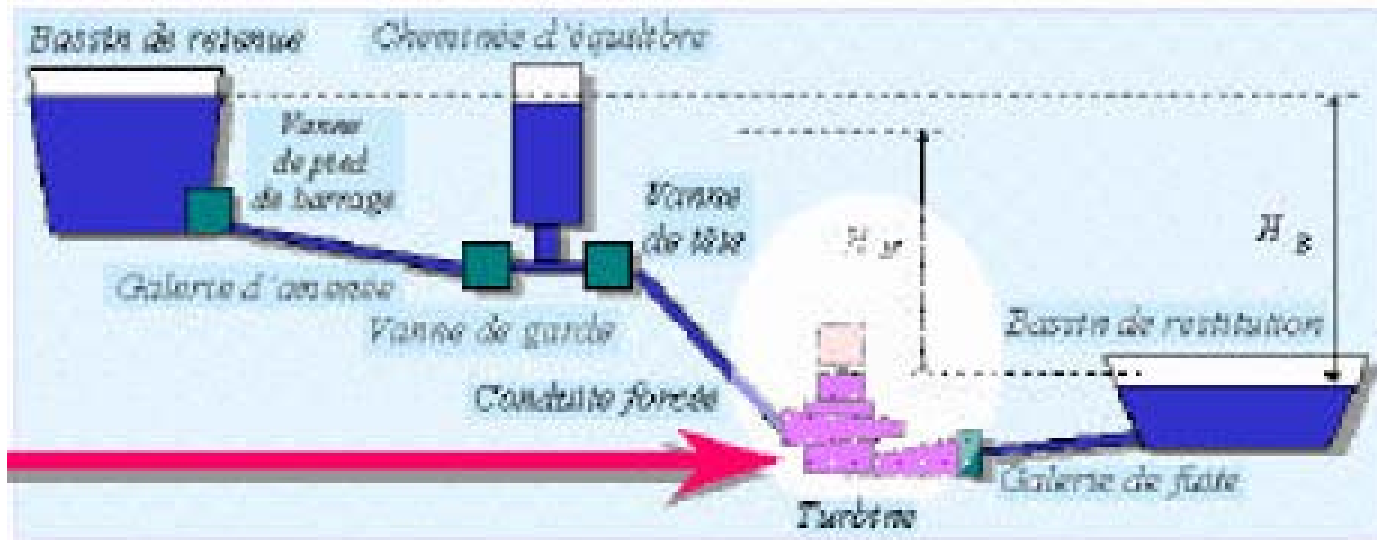
$$U=\omega R=\frac{2\pi N}{60} \frac{D}{2}$$

$$D_{opt}=\frac{30}{\pi} \frac{C_1}{N}=2,81m$$



#### 6.1.4.2. TURBINAS FRANCIS

São turbinas de reação, constituídas de um rotor radial (diagonal) e de um estator formado por uma grade externa fixa e por uma grade em que as pás podem mover-se para controlar a vazão.

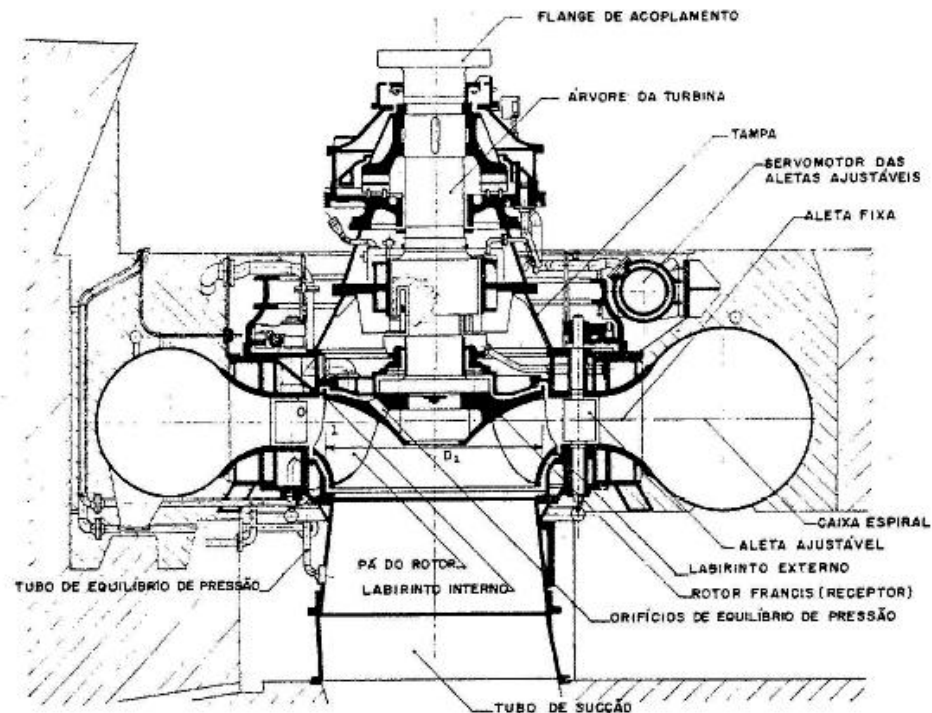


Esquema de uma instalação com turbina hidráulica

## MÁQUINAS DE FLUXO NOTAS DE AULAS - 2010

6-67/120

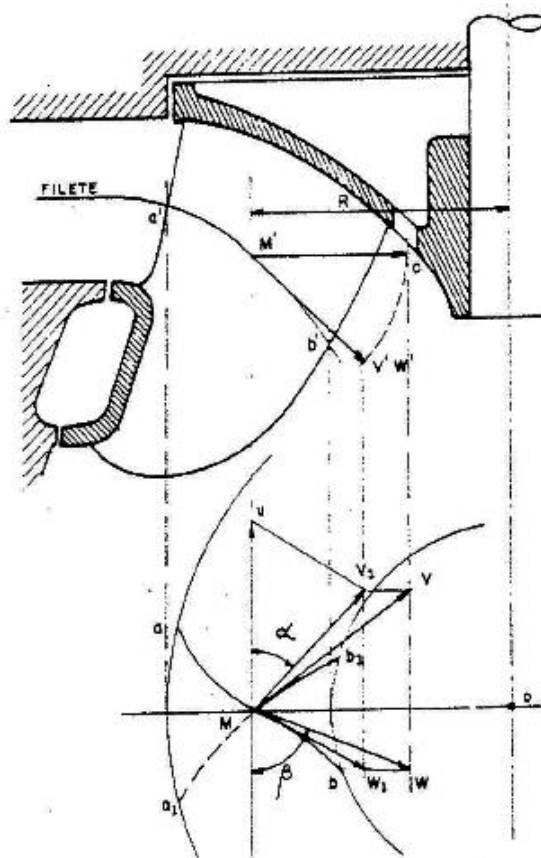
1847 James B. *Francis* aperfeiçoou a turbina Dowd construída por Samuel Dowd em 1838

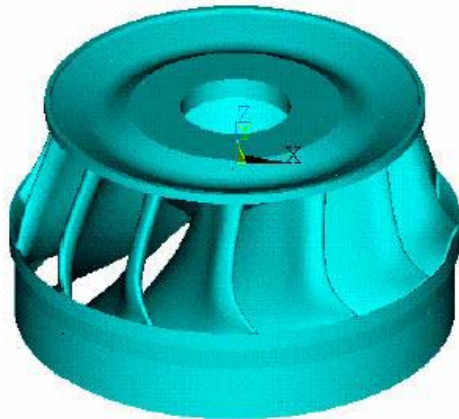


# MÁQUINAS DE FLUXO

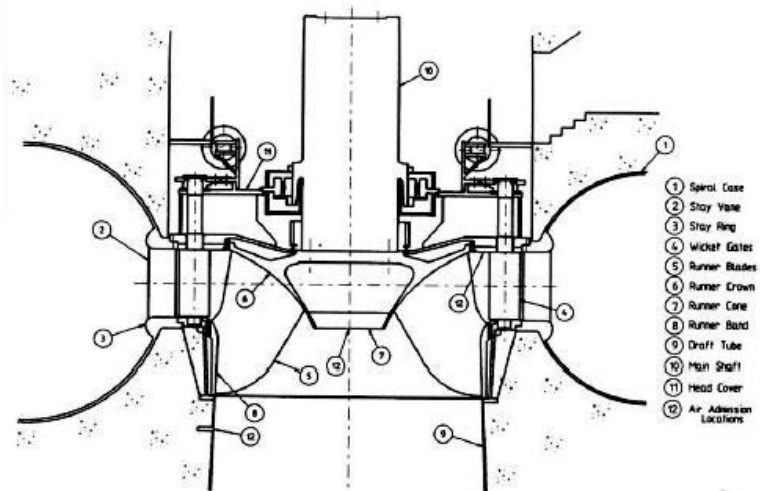
## NOTAS DE AULAS - 2010

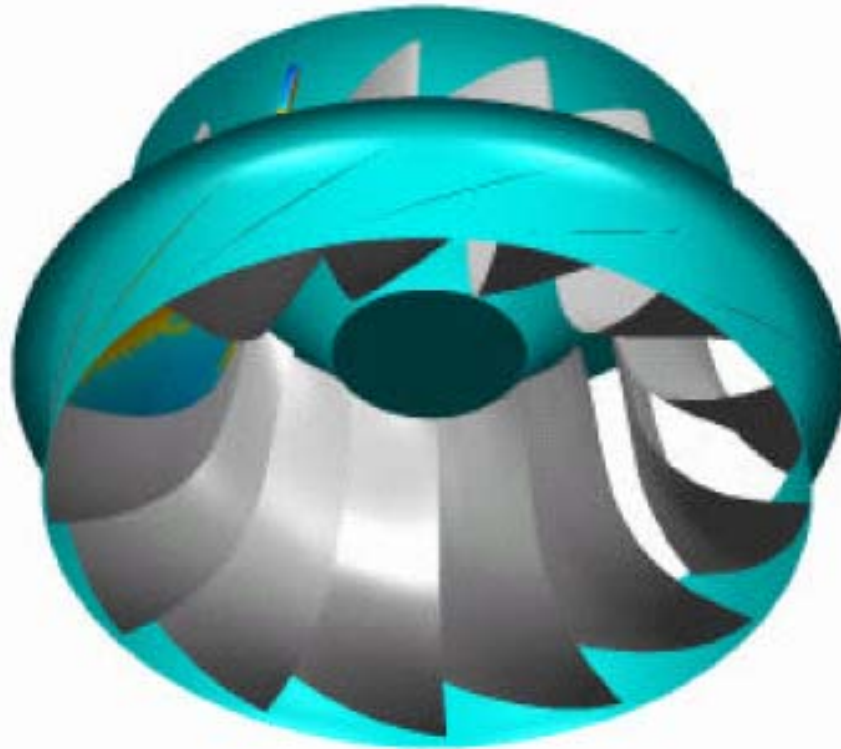
6-68/120





**Francis**  
 $15 \text{ m} < H < 750 \text{ m}$   
até 820 MW





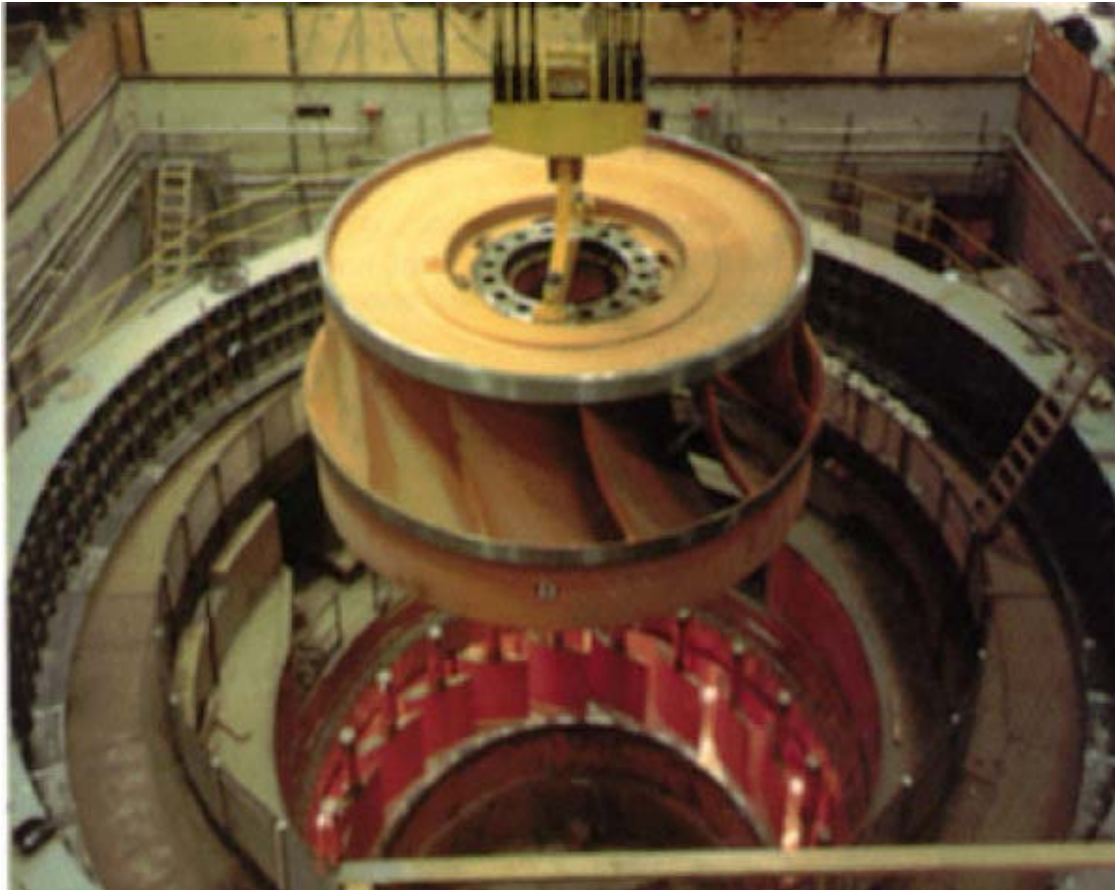


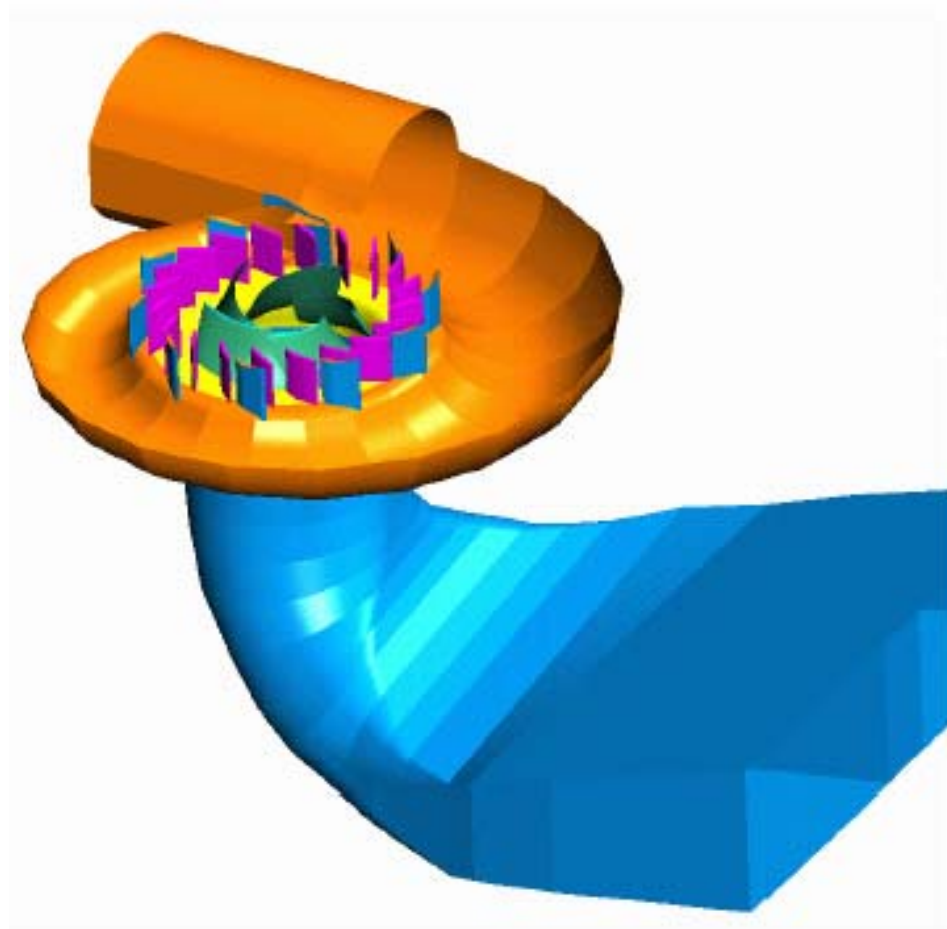
Rotor de uma turbina Francis



**MÁQUINAS DE FLUXO**  
**NOTAS DE AULAS - 2010**

6-72/120





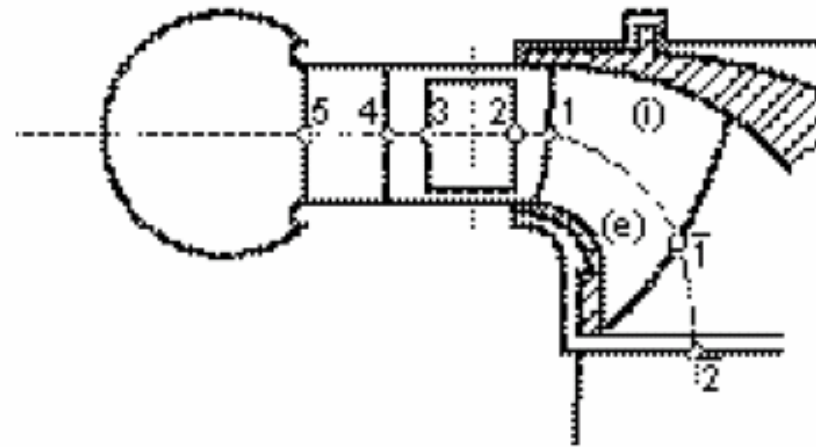
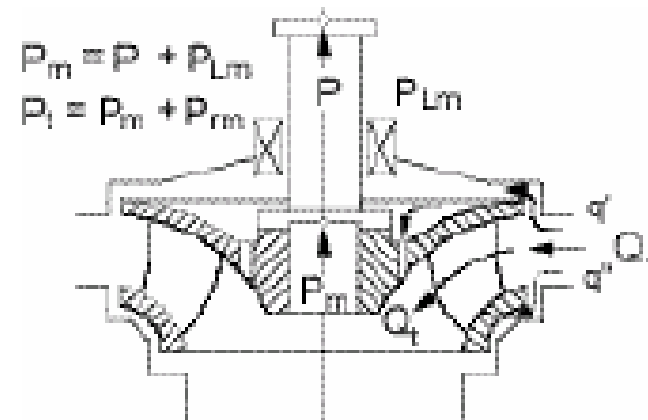
Esquema de uma instalação com turbina Francis

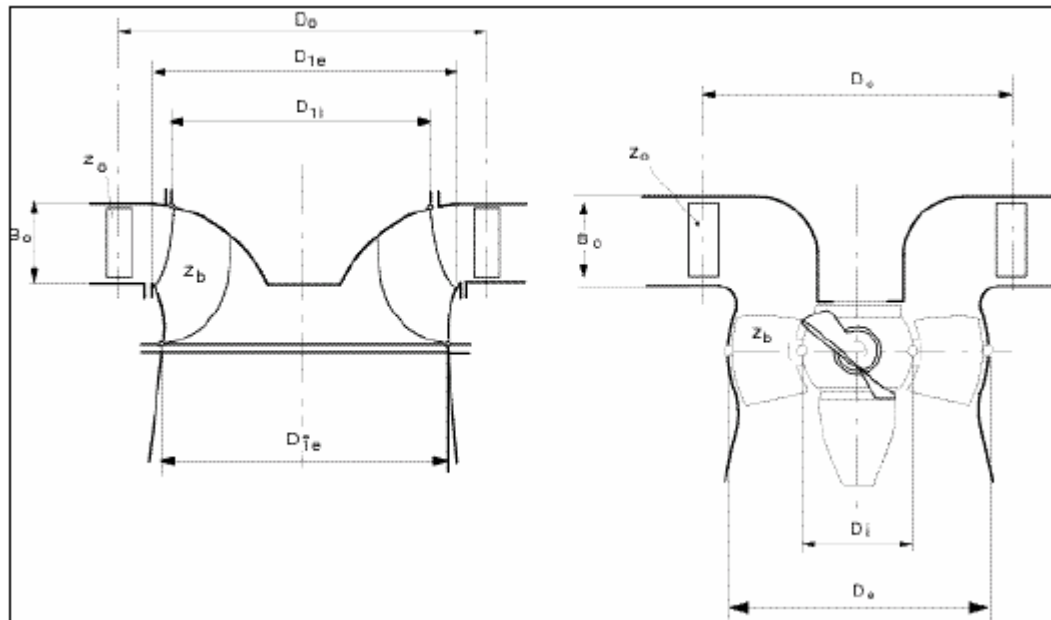


# MÁQUINAS DE FLUXO

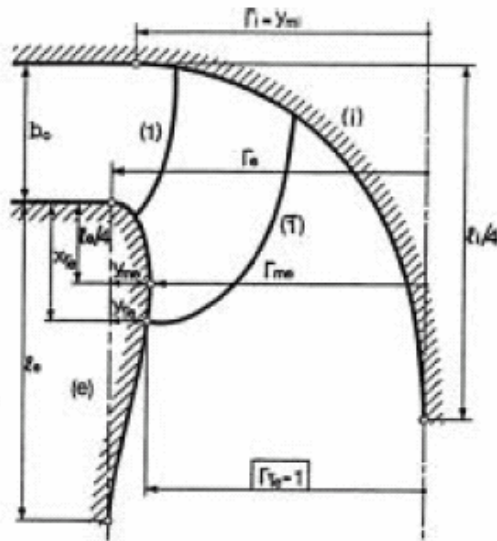
## NOTAS DE AULAS - 2010

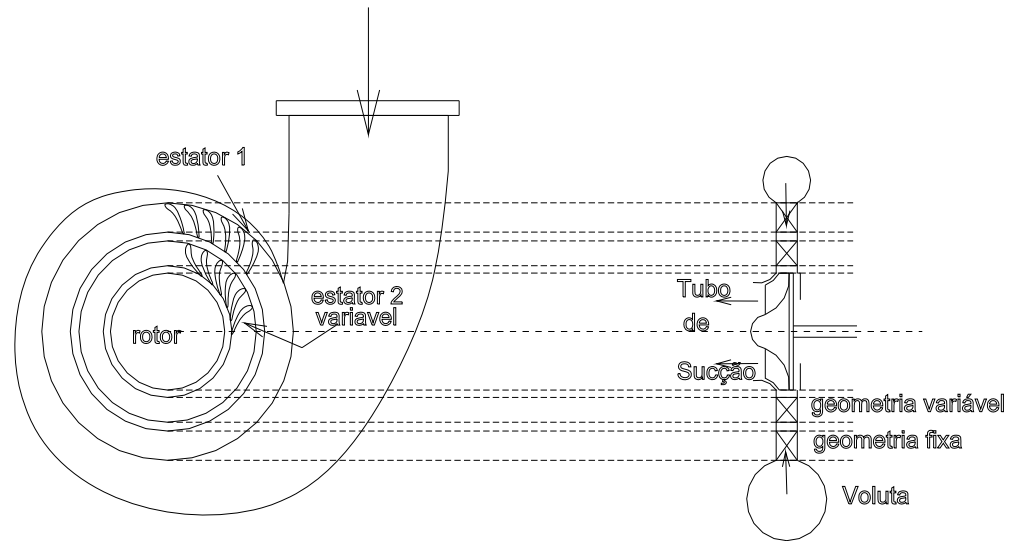
6-74/120



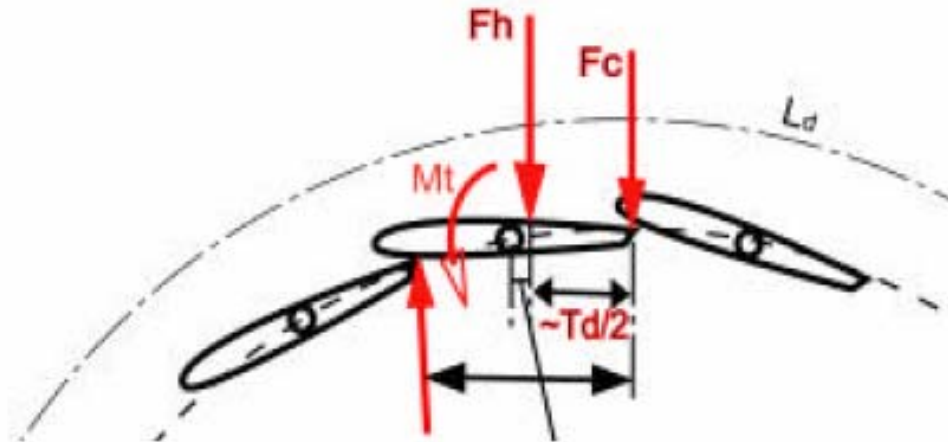


Indicação das dimensões principais de turbinas Francis e Axiais





**Figura 6-13 - Esquemas (cortes) de uma turbina Francis**



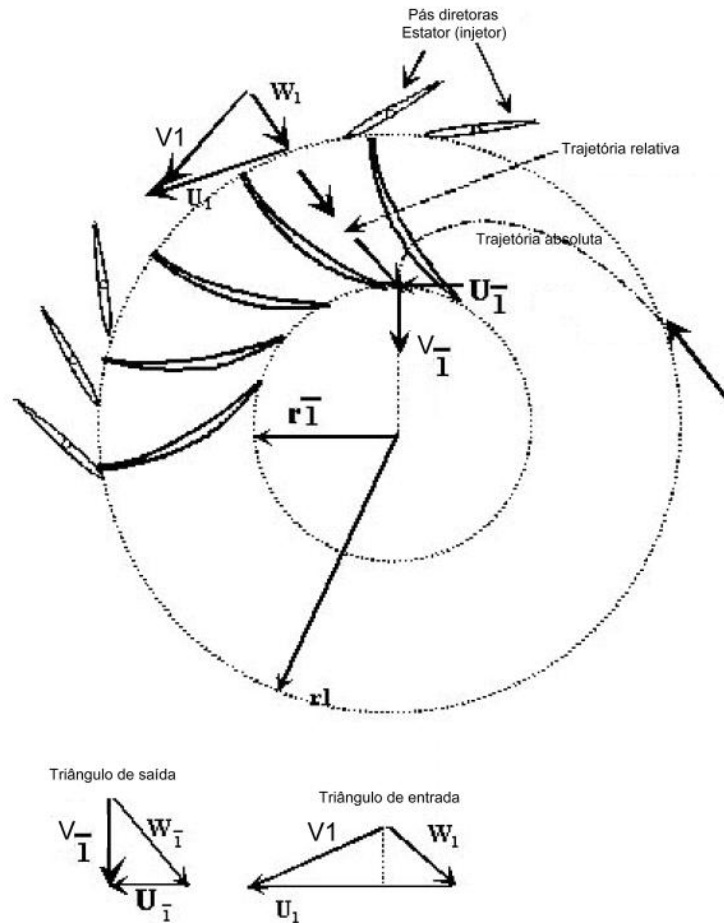
Pás direcionadoras (estator; injetor)



F:\Mem31 -  
Maquinas de Fluxo\20

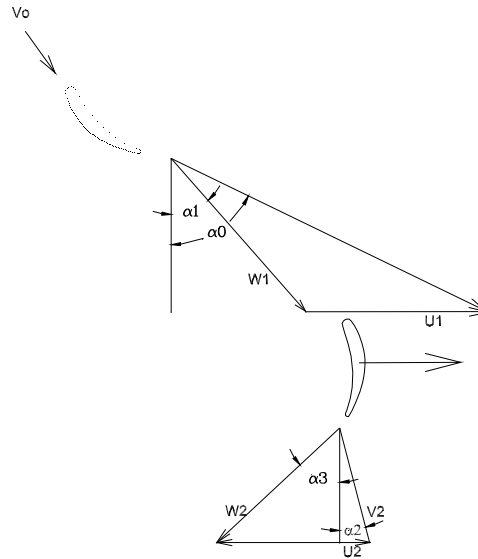


F:\Mem31 -  
Maquinas de Fluxo\20



Triângulos de velocidades de uma turbina radial

O escoamento nas turbinas se dá da periferia para o centro. A água adentra a voluta e desta passa para o(s) estator(es).



**Figura 6-14 - Triângulos de velocidades para uma turbina Francis**

A equação da continuidade estabelece que

$$V_o A_o = W_{1r} A_1 = W_1 \cos \alpha_1 A_1 = V_1 \cos \alpha_o A_1$$

O ângulo  $\alpha_0$  pode ser modificado devido à geometria variável do estator.

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{W_{1u}}{W_{1r}} = \frac{(U_1 - V_{1u})}{W_{1r}}$$

Como  $\operatorname{tg} \alpha_o = \frac{V_{1u}}{W_{1r}}, V_{1u} = W_{1r} \operatorname{tg} \alpha_o$

vem

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = U_1 / W_{1r} - \operatorname{tg} \alpha_o$$

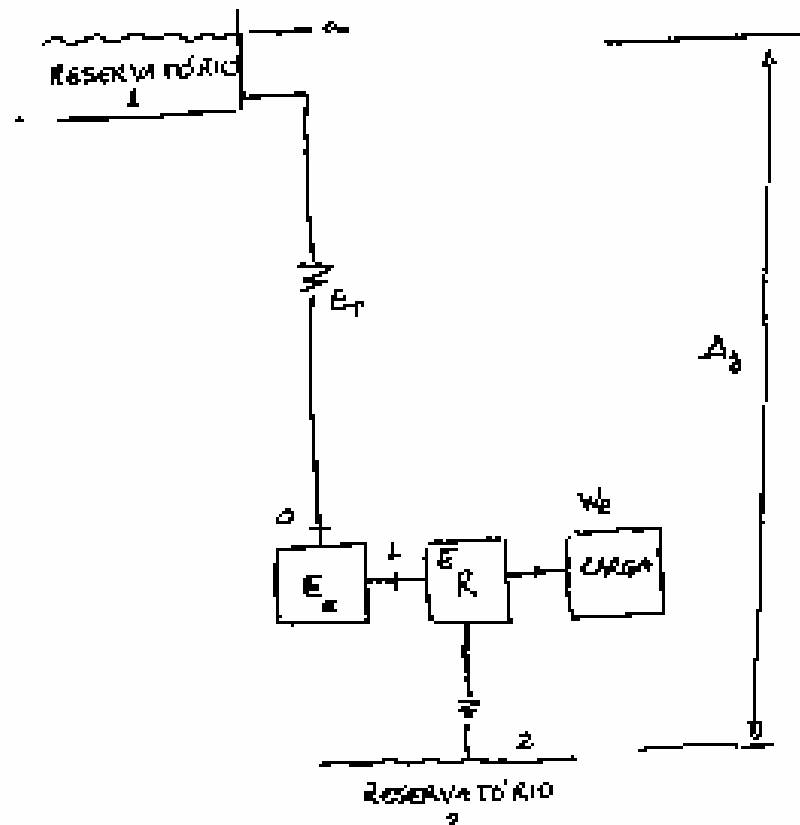
ou

$$\frac{U_1}{W_{1r}} = \operatorname{tg} \alpha_o + \operatorname{tg} \alpha_1$$

Logo

$$U_1 = W_{1r} (\operatorname{tg} \alpha_o + \operatorname{tg} \alpha_1)$$





A energia total entrando na turbina  $gH_0 = g\Delta z_0 - E_T$

A energia total entrando no rotor  $gH_1 = gH_0 - E_E = \frac{P_1}{\rho} + \frac{1}{2}V_1^2 + gz_1$

A energia total deixando o rotor  $gH_2 = gH_1 - E_R - W_R = \frac{P_2}{\rho} + \frac{1}{2} V_2^2 + gz_2$

A energia transferida ao rotor  $W_R = gH_1 - gH_2 = \dots = g\Delta z_0 - (E_T - E_E - E_R) - \frac{1}{2} V_2^2$

Para  $V_{2u} = 0$ ,  $\tan \alpha_3 = \frac{U_2}{V_2}$

e

$$A_1 W_{1r} = A_2 W_{2r} = A_2 V_{2r} = A_2 V_2$$

ou

$$V_2 = W_{1r} \frac{A_1}{A_2}$$

Logo o ângulo  $\alpha_3$  pode ser determinado em função das áreas.

Define-se eficiência hidráulica da máquina por

$$\eta_h = \frac{W_e}{gH_0} = \frac{U_1 V_{1u}}{gH_0}$$

Define-se eficiência global da máquina por

$$\eta = \frac{\dot{W}_{\text{eixo}}}{\dot{m}gH_0} = \frac{\dot{m}(U_1 V_{1u} - E_R)}{\dot{m}gH_0}$$

Para as turbinas Francis deve-se observar que a faixa de variação recomendada de  $\frac{U_2}{\sqrt{2gH_0}}$  é a seguinte:

$$0,6 \leq \frac{U_2}{\sqrt{2gH}} \leq 0,9$$

O controle de potência é feito por variação do ângulo de montagem do estator.

Para uso em centrais elétricas, a turbina deve girar com rotação N constante.

Esta condição acarretará o aparecimento de choque de entrada em operação fora do ponto de projeto.

A saída também deixará de ser axial.

No tubo de sucção haverá componente tangencial e no centro do tubo poderá haver cavitação, acarretando diminuição de eficiência mais rapidamente do que na turbina Pelton.

### Curvas de desempenho típicas de uma turbina Francis

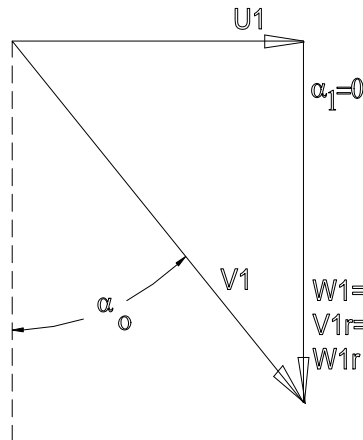
**Exemplo:**

Uma turbina Francis está instalada numa queda d'água de 12 m e é atravessada por  $0,5 \text{ m}^3/\text{s}$  de água. A relação entre diâmetros interno / externo é 0,5. A velocidade meridional é constante e vale  $0,15\sqrt{2gH}$ . O rotor gira a 300 rpm; as pás têm ângulo nulo na periferia do rotor.

**Calcular:**

- a) os ângulos do estator móvel
- b) ângulo de saída do rotor para descarga radial
- c) dimensões do rotor, sabendo-se que as pás ocupam 10% da circunferência e que a eficiência hidráulica é de 80%.

**Solução:**



**Figura 6-15 - Triângulo de velocidades à entrada da máquina**

a)  $V_{1r} = 0,15\sqrt{2gH_0} = V_{2r} = 0,15(2 \times 9,81 \times 12)^{0,5} = 2,3 \text{ m/s}$

Em geral,

$$U_1 = W_{1u} + V_{1u} = V_{1r} (\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_0)$$

$$V_{1u} = V_{1r} \operatorname{tg} \alpha_0$$

$$\eta_h = \frac{U_1 V_{1u}}{gH_0} = \frac{V_{1r} (\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_0) V_{1r} \operatorname{tg} \alpha_0}{gH_0}$$

Com  $\alpha_1 = 0$  (pá com entrada radial no rotor) e eficiência hidráulica de 80%, resulta:

$$\frac{V_{1r}^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_0}{gH} = \eta_h \quad 0,80 = \frac{2,3^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_0}{(9,81)(12)}$$

ou

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = 4,214 \quad \text{e} \quad \alpha_0 = 76,7^\circ$$

Daí,

$$V_{1u} = 2,3 \operatorname{tg}(76,7^\circ) = 9,7 \text{ m/s} = U_1$$

$$\text{b)} \quad \operatorname{tg} \alpha_3 = U_2 / W_{2r} = \frac{1}{2} U_1 / W_{2r} r = \frac{1}{2} U_1 / V_{1r} = \frac{1}{2} (\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_0) =$$

$$= \frac{1}{2} (\operatorname{tg} 0^\circ + \operatorname{tg} 76,7^\circ) = 2,115$$

$$\alpha_3 = 64,7^\circ$$

$$\text{c)} \quad U_1 = 2\pi N R_1 / 60, \\ R_1 = 60 U_1 / (2\pi N) = (60)(9,7) / (2\pi \times 300) = 0,3087$$

$$D_1 = 0,6174 \text{ m}$$

$$D_2 = 0,5 D_1 = 0,3087 \text{ m}$$

Como  $A_1 = 2\pi R_1 b_1$  e  $\dot{Q}_1 = A_1 V_{1r}$  vem

$$b_1 = \frac{A_1}{2\pi R_1} = \frac{\dot{Q}}{V_{1r} 2\pi R_1} = \frac{0,5}{(2,3)(2\pi)(0,3087)} = 0,112$$

Admitindo-se que há obstrução de 10% da área devida à espessura das pás,

$$b_1^* = b_1 / 0,9 = 0,1244 \text{ m.}$$

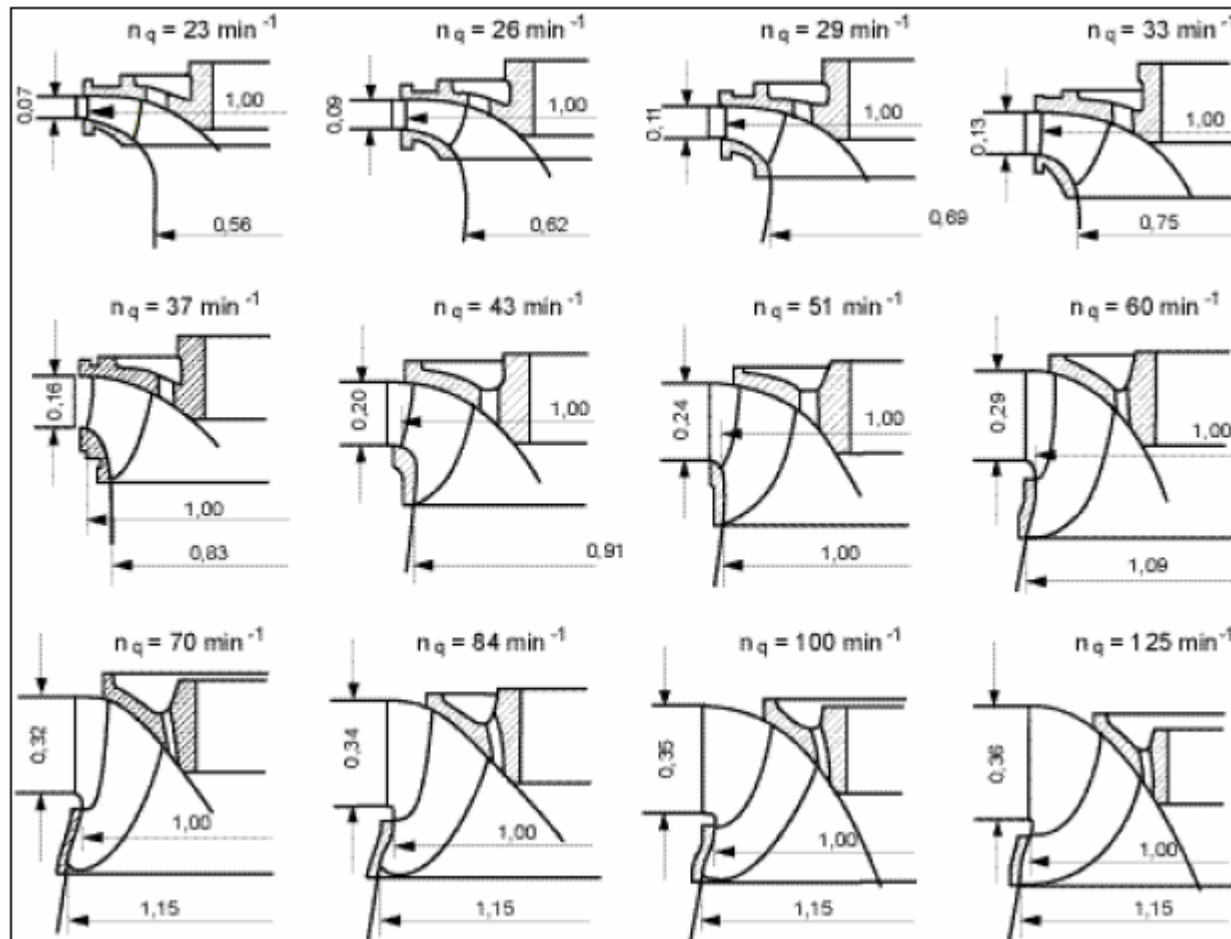
Segue-se que, para a mesma velocidade radial,

$$b_2^* = b_1^* R_1 / R_2 = 0,1244 \times 2 = 0,2488 \text{ m.}$$

Nota: não estão sendo analisados, até agora, problemas construtivos como os decorrentes de valor encontrado para  $b_2^*$  (= 0,2488 m) em face de  $R_2$  (=0,1522 m).

Devido ao número finito de pás, a guiagem do escoamento pelos canais formados pelas pás do rotor e do estator não acarreta que o escoamento saia com o mesmo ângulo  $\beta_2$ , havendo um desvio da direção indicada pelas pás. Esse desvio depende de diversos fatores, um deles sendo o número de pás. Neste curso não se entrará em pormenores a respeito desse desvio, sendo considerado nulo para efeito dos cálculos realizados.



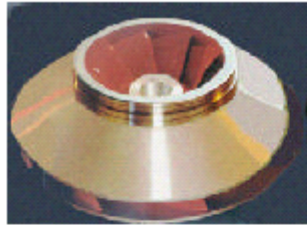


Formas dos canais das Turbinas Francis em função da velocidade específica

# MÁQUINAS DE FLUXO

## NOTAS DE AULAS - 2010

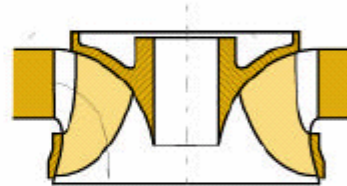
6-91/120



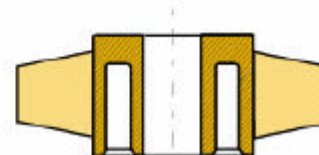
$n_q = 12 \dots 35$   
 $v = 0.10 \dots 0.22$   
 $\eta_{QE} = 0.04 \dots 0.10$



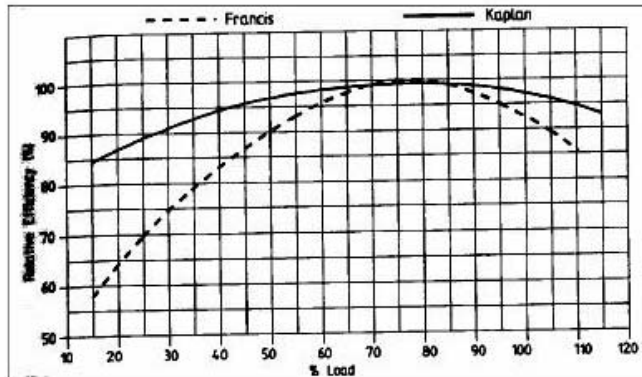
$n_q = 35 \dots 80$   
 $v = 0.22 \dots 0.50$   
 $\eta_{QE} = 0.10 \dots 0.24$



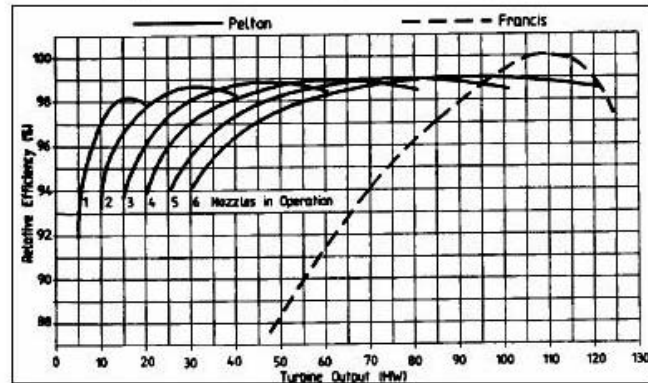
$n_q = 200 \dots 400$   
 $v = 1.25 \dots 2.50$   
 $\eta_{QE} = 0.50 \dots 1.20$



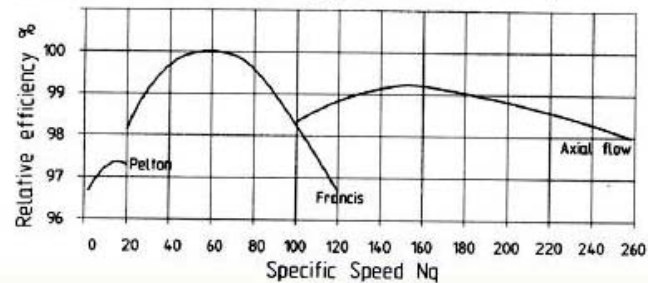
Desempenho Francis X Kaplan:



Desempenho Francis X Pelton:



Rendimento X  $N_q$  para o três tipos



#### 6.1.4.3. TURBINAS AXIAIS

As turbinas axiais são adequadas a aplicações em que a velocidade específica é alta, o que é devido a vazões elevadas e pequenas alturas de queda d'água.

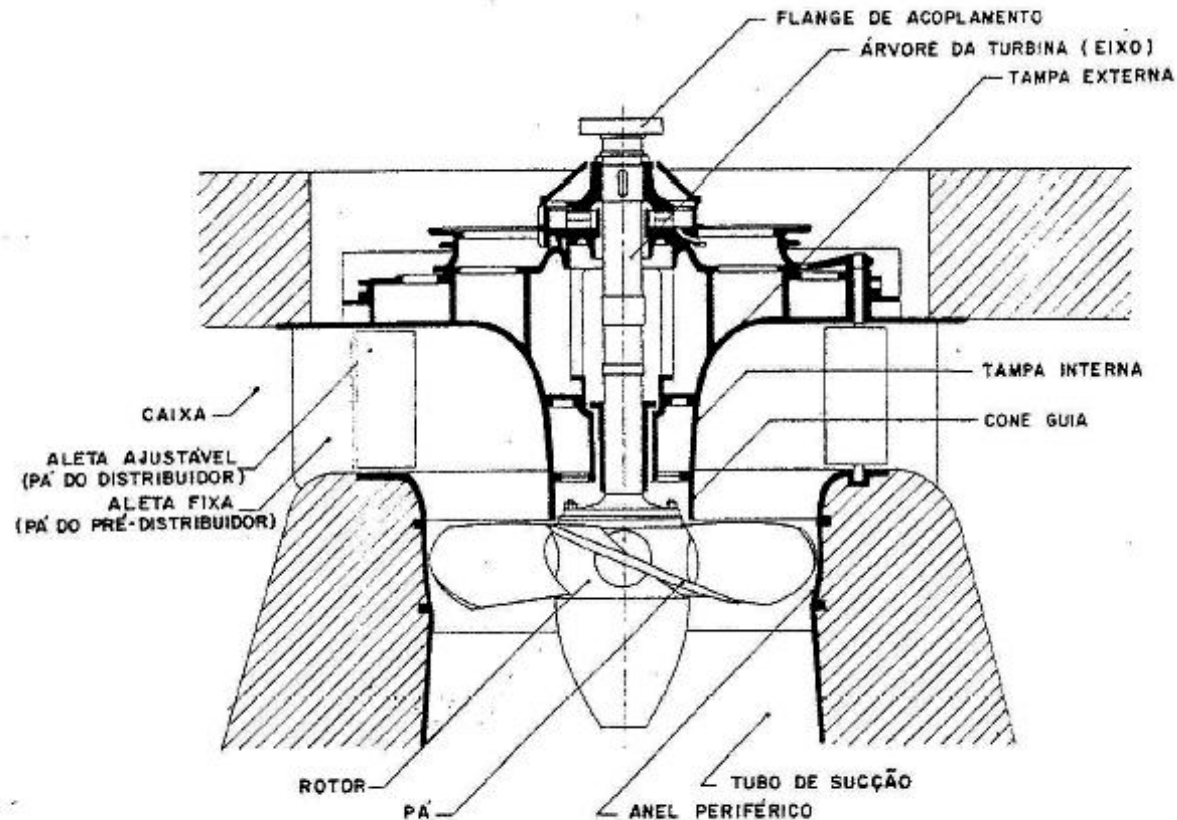
Como a potência desenvolvida por uma turbina é  $\dot{m}U\Delta V_u$ , podem-se combinar os 3 fatores para se obter a potência desejada.

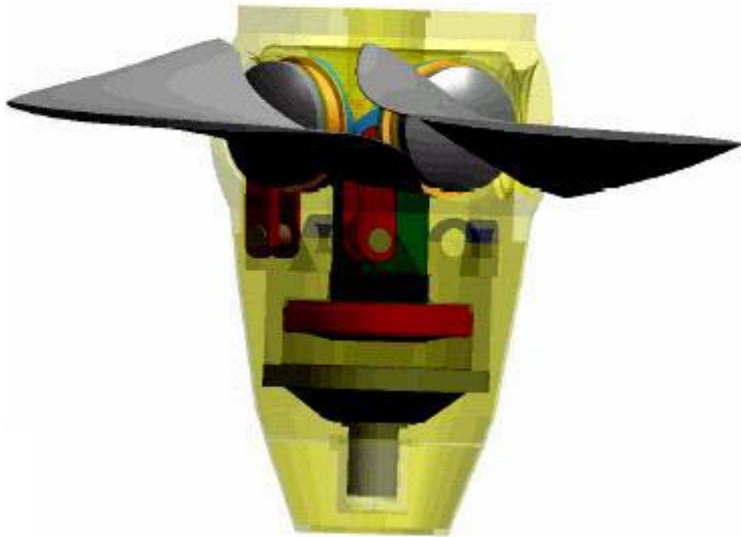
Geralmente  $U$  é limitado pelas tensões nos materiais de que são construídas as turbinas, principalmente discos e pás, tensões essas que dependem do quadrado da velocidade de rotação do rotor.

Na realidade apenas a vazão em massa e a variação das velocidades tangenciais podem ser escolhidas pelo projetista.

Para o controle da vazão (e da potência) utiliza-se estator de pás com ângulos de montagem ajustáveis. O estator serve também para fazer com que o escoamento, antes de atingir o rotor, adquira uma pré-rotação.

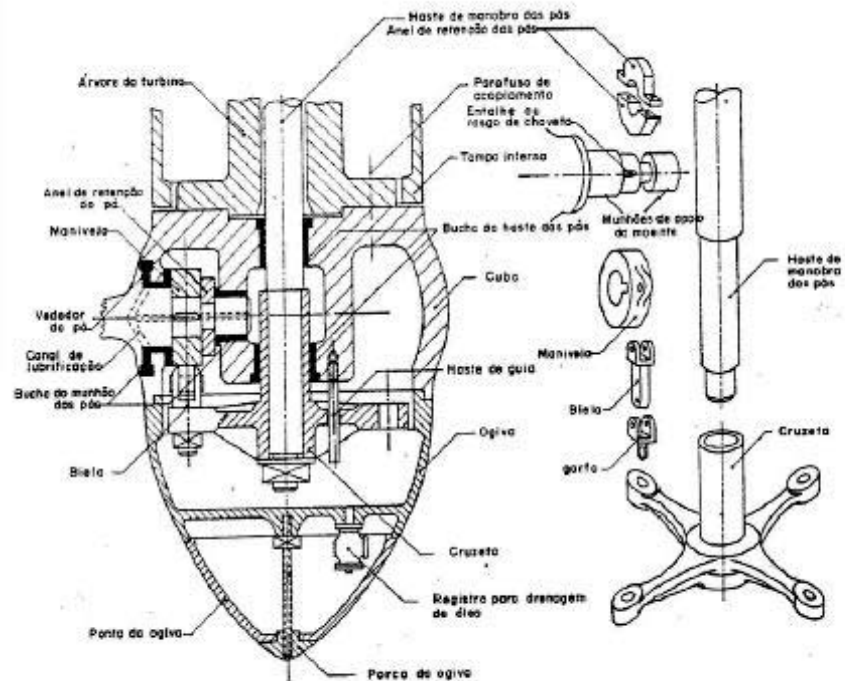
1912 Victor Kaplan concebe novo tipo de máquina Propeller,  
com variação do passo das pás





Servomotor:

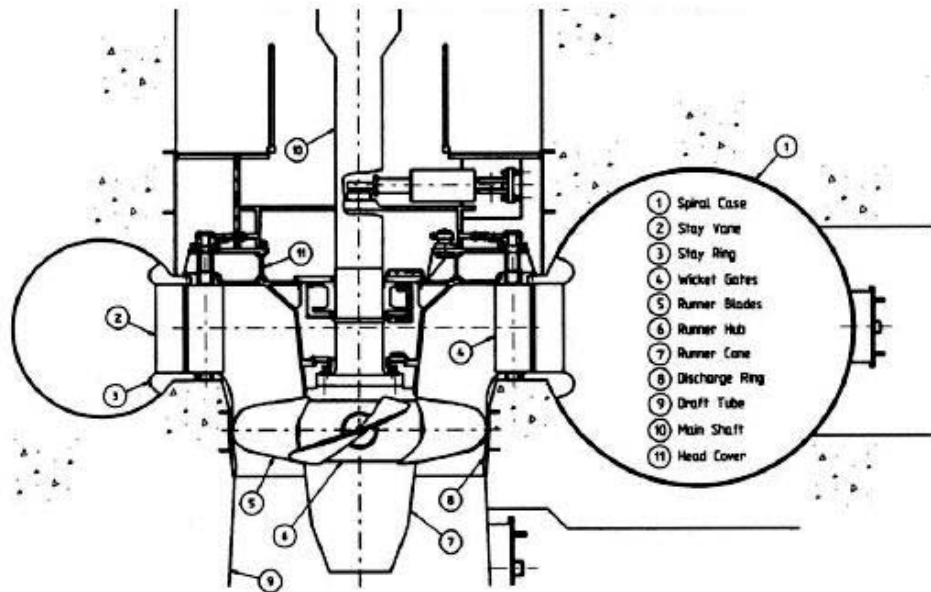
- Interno
- Externo





## Kaplan

$H < 50\text{m}$  (75m)  
até 200 MW



No projeto dessas máquinas geralmente se considera que, ao atingir o rotor, o fluido satisfaz a condição de vórtice livre, isto é,

$$rV_{1u} = \text{constante}.$$

Um ponto de partida para projeto de turbinas axiais é a adoção de  $h/c$  na faixa de 1,0 a 1,5 e o número de pás  $N_P$  de 4 a 6 (número de pás pequeno).

Observando-se os triângulos de velocidades calculados para posições radiais da raiz ao topo das pás, conclui-se que, devido a  $rV_{1u}$  ser constante à entrada do rotor, a direção do escoamento relativo do fluido deve também variar da base ao topo das pás.

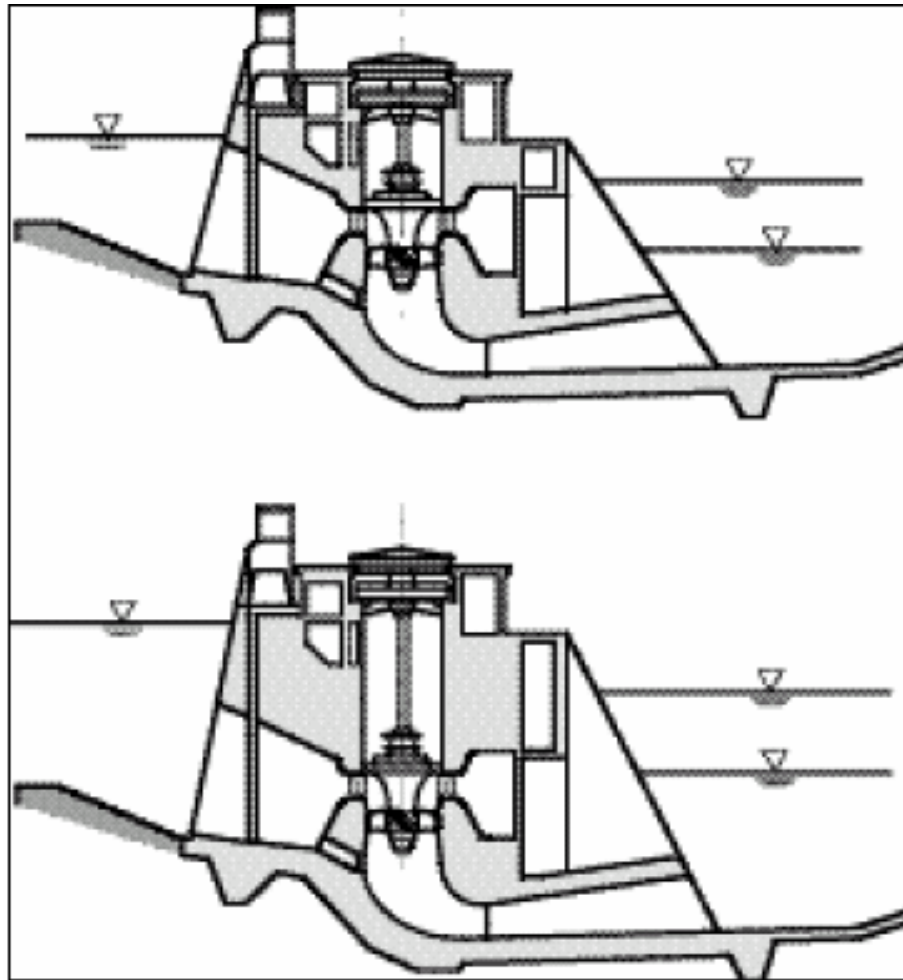
Desta forma, o ângulo  $\beta_1$  varia, resultando no retorcimento da pá.



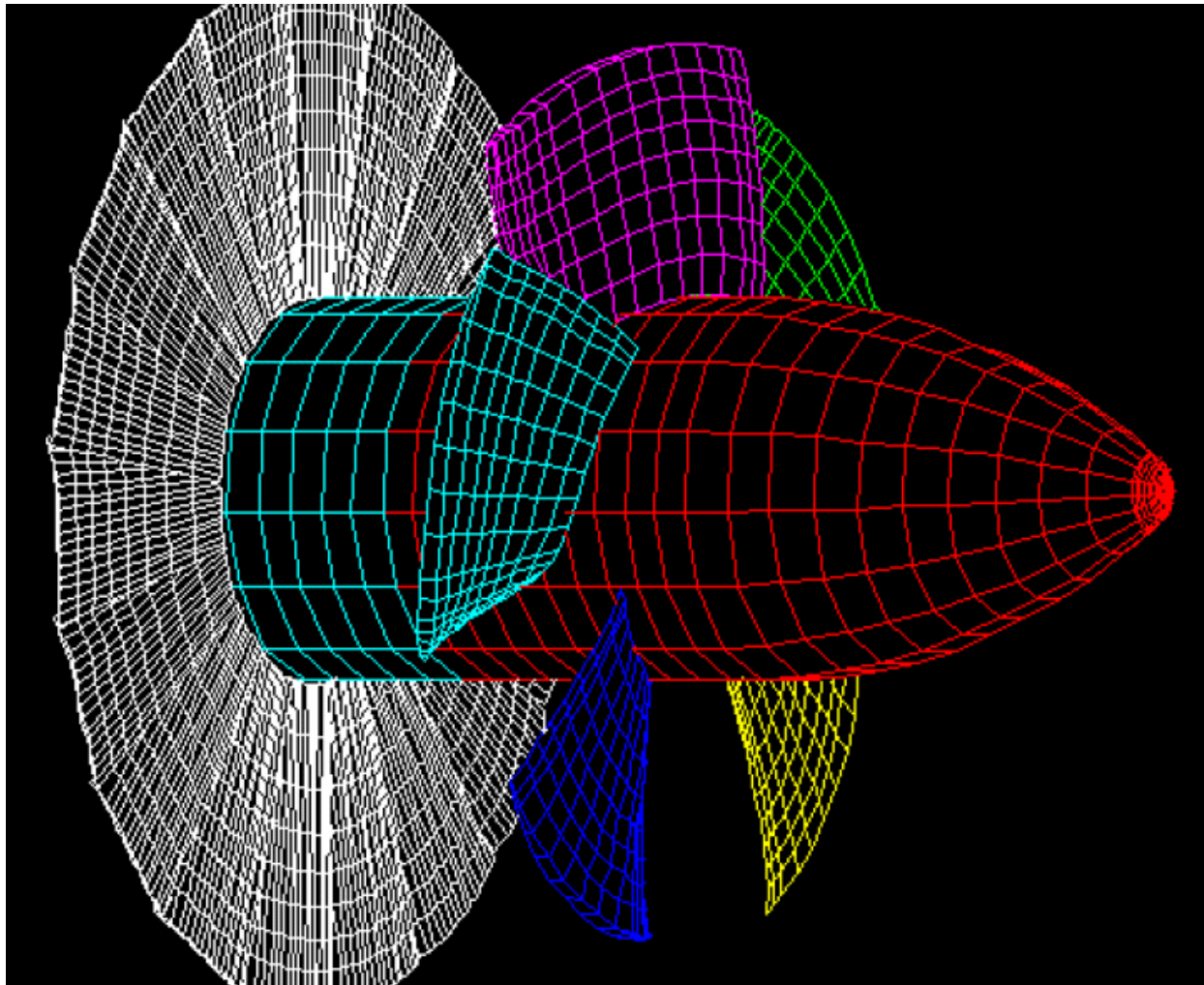
MÁQUINAS DE FLUXO  
NOTAS DE AULAS - 2010

6-98/120





Implantação vertical de uma turbina axial (Kaplan)



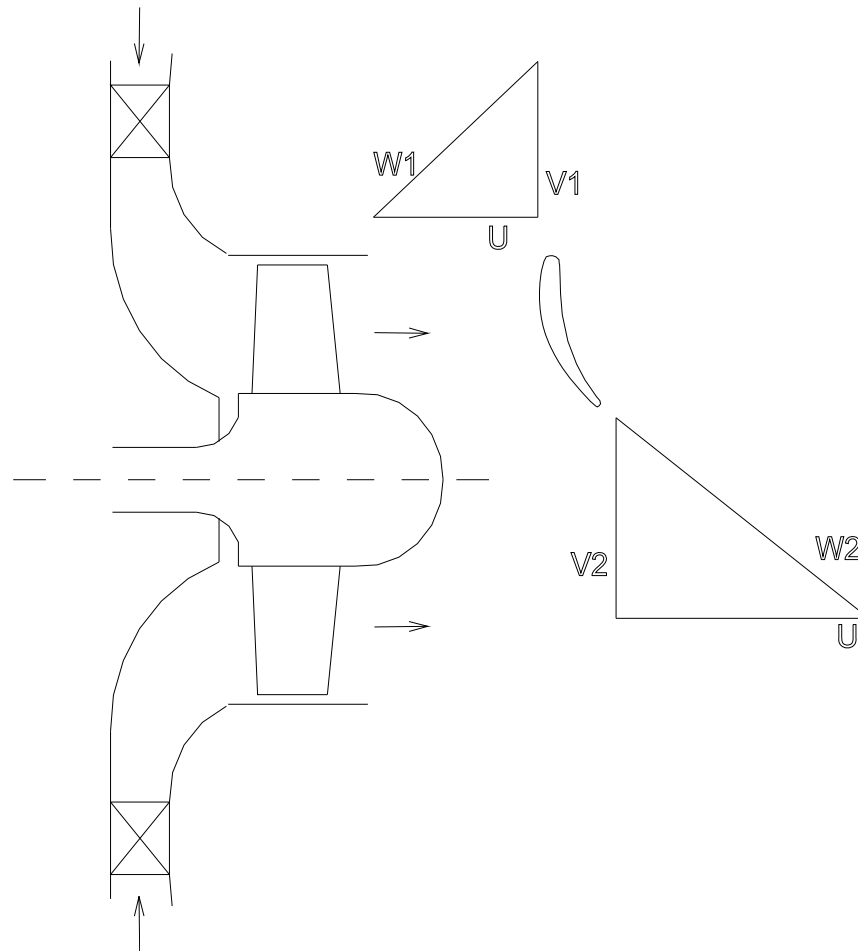
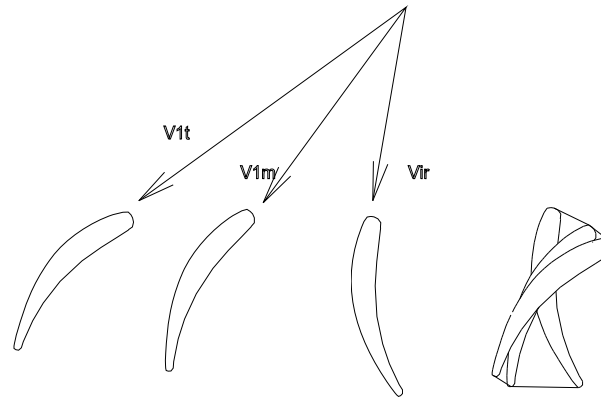


Figura 6-16 - Esquema de uma turbina axial



**Figura 6-17 - Seções de pá em diversas alturas**

Refazer o desenho para refletir canal de turbina

Para

$$V_{2u} = 0 \quad (\text{saída axial})$$

e

$$U = \omega r ,$$

tem-se

$$W_e = U V_{1u} = U(U - W_{1u}) = \omega r(\omega r - V_{1a} \operatorname{tg} \alpha_1)$$

Para  $W_e$  constante à entrada da pá e como  $r$  aumenta da raiz ao topo da pá,  $\alpha_1$  também aumentará da raiz ao topo da pá.

**Exemplo:** Água entra numa turbina axial com  $H = 35$  m.

O diâmetro médio do rotor é de 2m e sua velocidade de rotação é 145 rpm.

A água deixa o estator a  $60^\circ$ .

Na altura média da pá,  $\beta_2 = 62^\circ$

As perdas até a saída do estator são de 7%.

A velocidade relativa é reduzida de 8% devido às perdas.

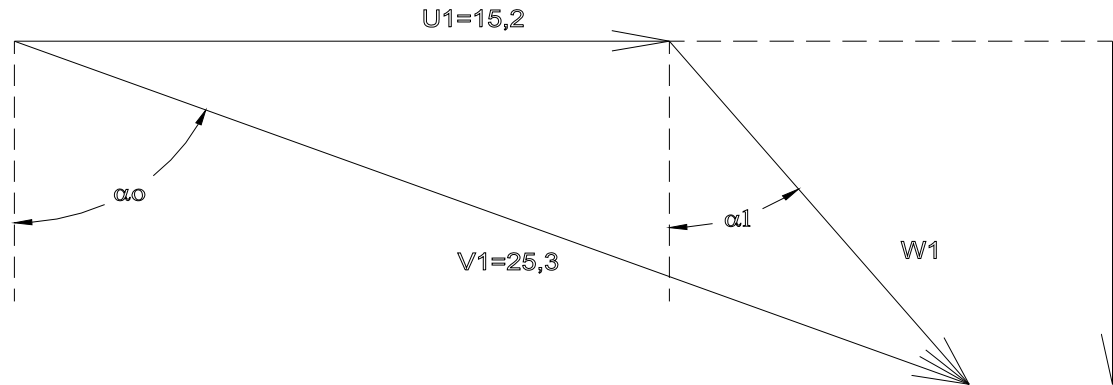
Calcular: a)  $\beta_{1m}$  b)  $\eta_h$

**Solução:**

$$a) \quad H_{\text{máx}} = (1 - 0,07)H = (0,93)(35) = 32,6 \text{ m}$$

$$V_1 = \sqrt{2gH_{\text{máx}}} = \sqrt{(2)(9,81)(32,6)} = 25,3 \text{ m/s}$$

$$U = \pi D N / 60 = \pi (2) (145) / 60 = 15,2 \text{ m/s}$$



**Figura 6-18 - Triângulo de velocidades à entrada do rotor**

$$\alpha_o = 60^\circ = \beta_{2E}$$

$$V_{1u} = V_1 \sin \alpha_o = 21,92 \text{ m/s}$$

$$\alpha_o = 60^\circ = \alpha_{2E} = \beta_{2E}$$

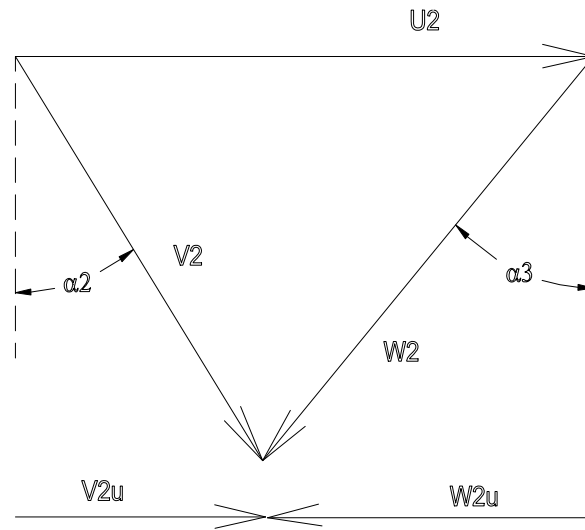
$$W_{1u} = V_{1u} - U_1 = 6,71 \text{ m/s}$$

$$W_{1a} = V_1 \cos \alpha_o = 12,65 \text{ m/s}$$

$$\beta_1 \approx \alpha_1 = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{W_{1u}}{W_{1a}} \right) = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{V_{1u} - U_1}{V_{1a}} \right) = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{V_1 \sin \alpha_0 - U_1}{V_1 \cos \alpha_0} \right) =$$

$$= \operatorname{tg}^{-1} 0,53 = 27,98^\circ$$

$$W_1 = (W_{1u}^2 + W_{1r}^2)^{0,5} = 14,32 \text{ m/s}$$



**Figura 6-19 - Triângulo de velocidades à saída do rotor**



$$W_2 = (1 - 0,08)W_1 = 13,17 \text{ m/s}$$

$$\beta_2 \sim \alpha_3 = 62^\circ$$

$$W_{2u} = W_2 \sin 62^\circ = 11,63 \text{ m/s}$$

$$V_{2u} = U_2 - W_{2u} = 15,2 - 11,63 = 3,6 \text{ m/s}$$

$$V_{2a} = W_2 \cos \alpha_3 = 13,17 \cos(62^\circ) = 6,18 \text{ m/s}$$

$$V_2 = \sqrt{V_{2u}^2 + V_{2a}^2} = \sqrt{3,6^2 + 6,18^2} = 7,15 \text{ m/s}$$

$$W_e = U(V_{1u} - V_{2u}) = (15,2)(21,91 - 3,6) = 278,6 \text{ J/kg} = 28,4 \text{ m H}_2\text{O}$$

$$\eta_h = W_e / (gH) = (278,6)/(9,81 \times 35) = 0,811 = 81,1 \%$$

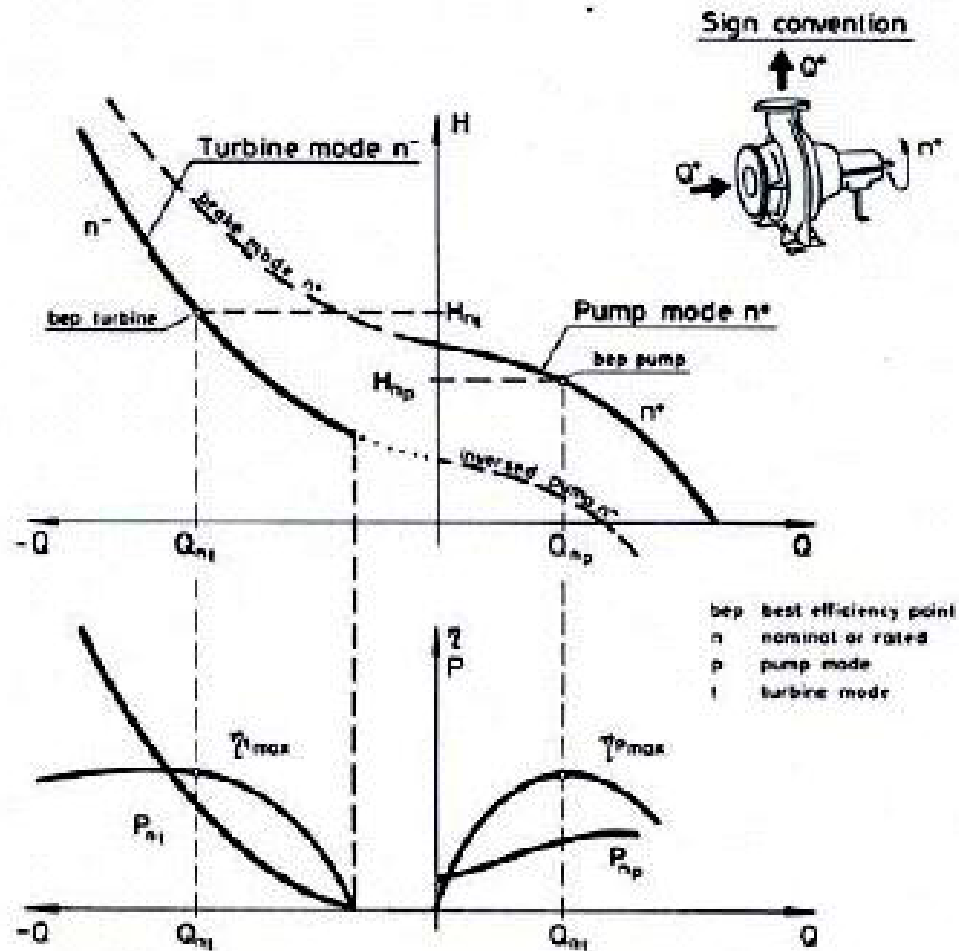
**MÁQUINAS DE FLUXO**  
**NOTAS DE AULAS - 2010**

6-107/120



#### **6.1.4.4. BOMBA-TURBINA**

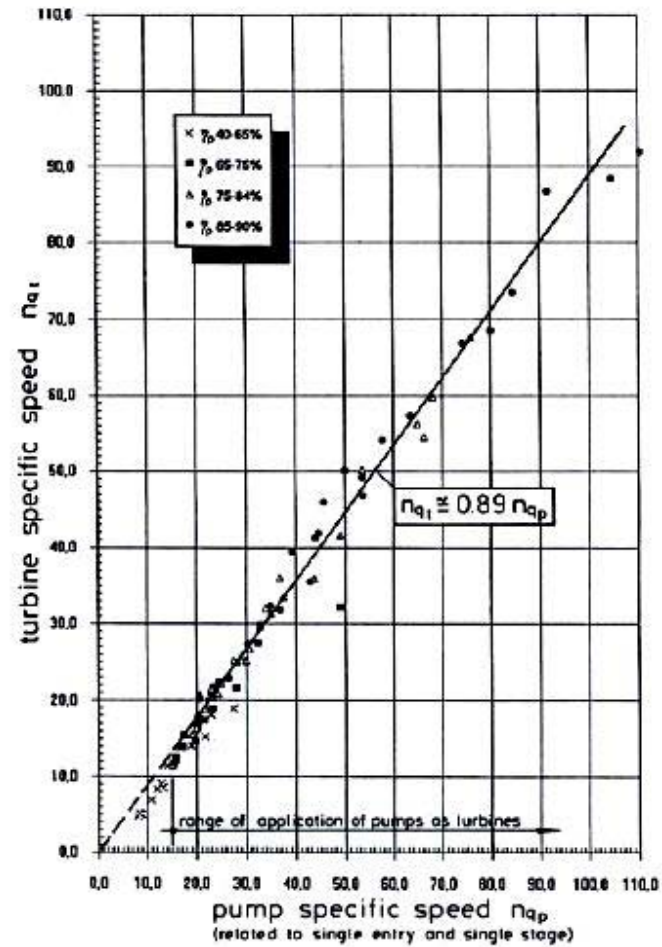
Em usinas em que haja necessidade de recuperar a água utilizada durante a geração de energia elétrica pode-se recorrer à utilização de uma mesma máquina com a função de turbina e de bomba (bomba-turbina). Apenas a título ilustrativo seguem algumas informações sobre esse equipamento, cujo estudo não faz parte deste curso.

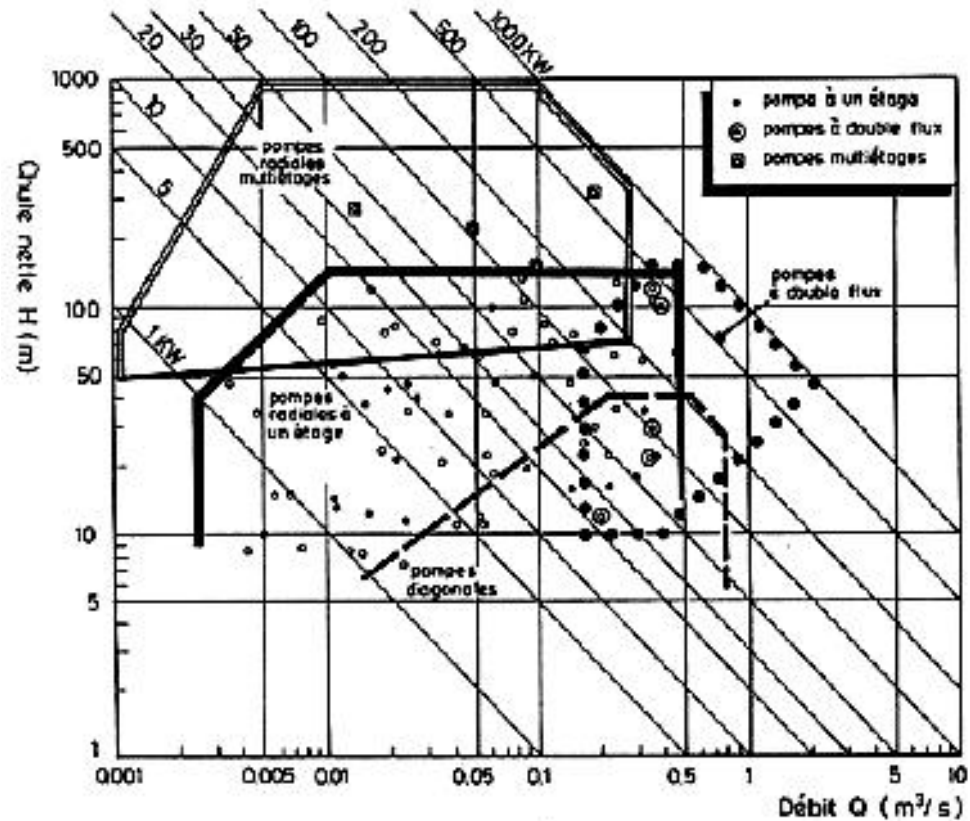


# MÁQUINAS DE FLUXO

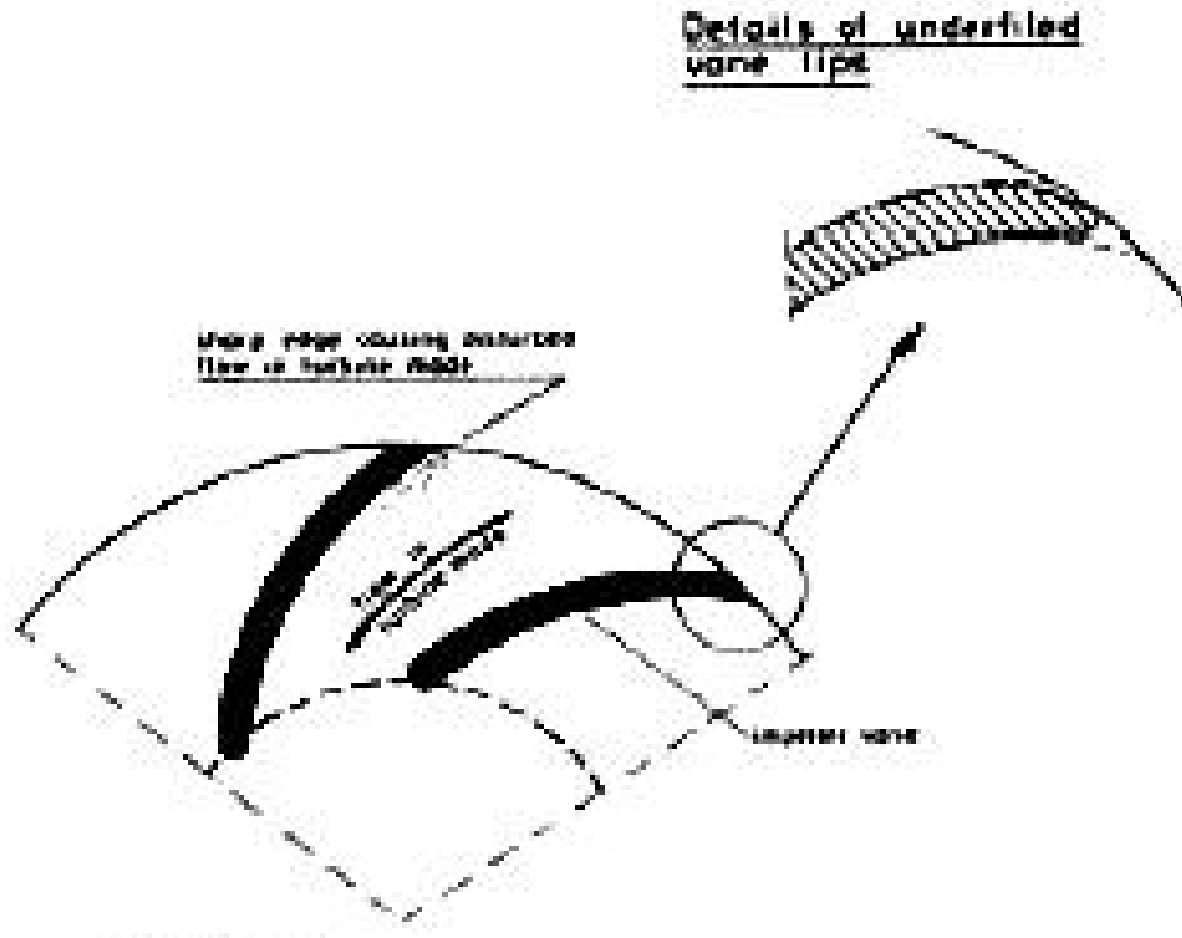
## NOTAS DE AULAS - 2010

6-110/120

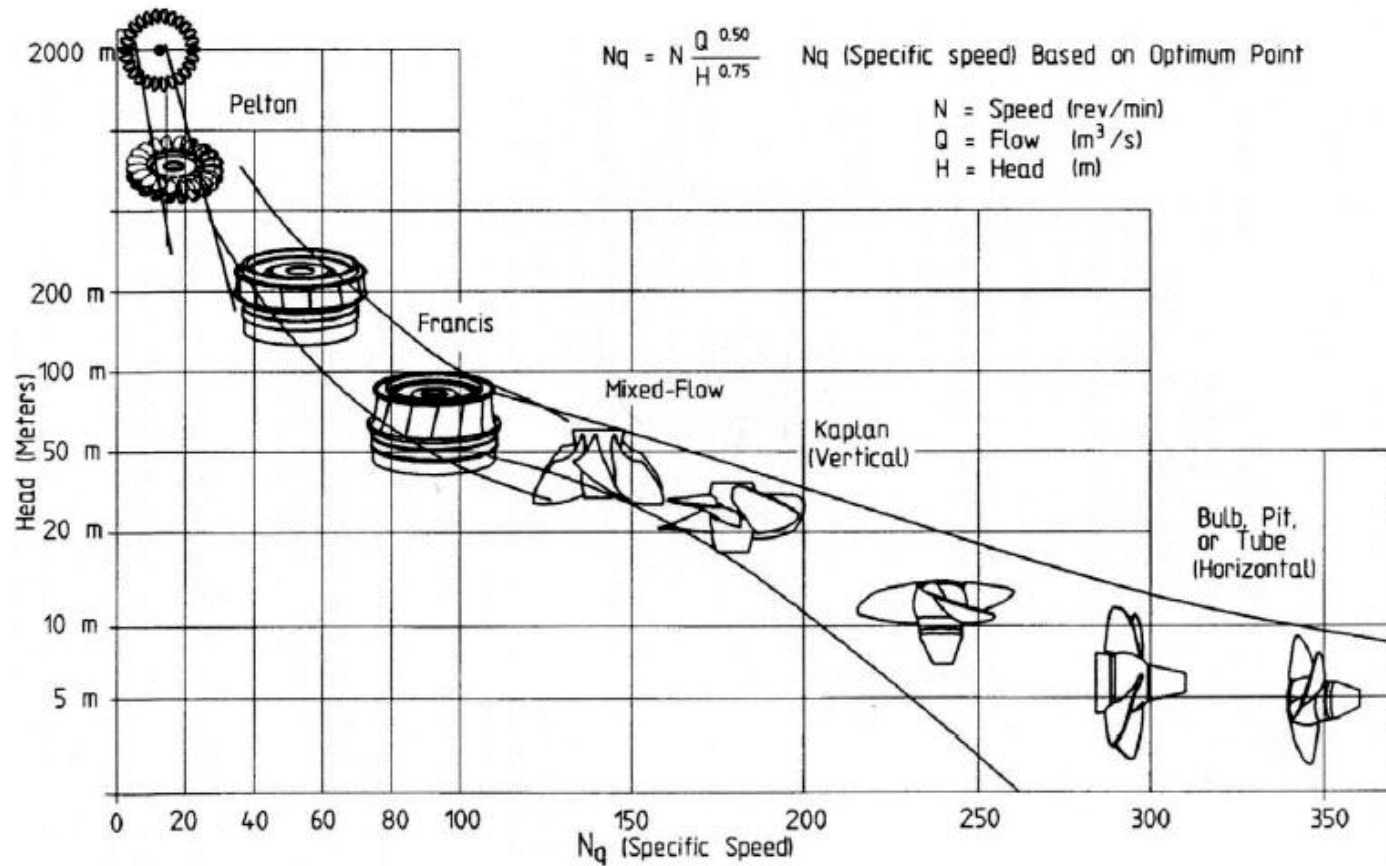




Domínio de utilização de uma bomba-turbina



Detalhe das pás de uma bomba-turbina



Seleção de turbinas em função da velocidade específica



### 6.3. EXERCÍCIOS

#### EXERCÍCIO 1

Um ventilador centrífugo bombeia  $2,0 \text{ m}^3/\text{s}$  rodando a 960 rpm. O diâmetro do rotor é 70 cm e o diâmetro à entrada é de 48 cm. O ar entra no rotor com pequena pré-rotação na direção da rotação mas a velocidade relativa é tangente à pá. A altura da pá é 16 cm na entrada e 11,5 cm na saída do rotor. As pás são inclinadas para trás, fazendo ângulo de  $67,5^\circ$  e  $40^\circ$  com as direções meridionais à entrada e à saída, respectivamente. Desenhe em escala os triângulos de velocidades e, deles, determine a altura de carga teórica produzida pelo rotor. Admitindo que as perdas na entrada, no rotor e na carcaça, valem 70% da pressão dinâmica à saída do rotor e que a pressão dinâmica à saída do ventilador é 0,1 daquela observada à saída do rotor, calcule a pressão estática do ventilador, em mm  $\text{H}_2\text{O}$ , se a densidade do ar for de  $1,2 \text{ kg/m}^3$ , desprezando-se efeitos da espessura das pás e perdas secundárias.

[67,1 mm  $\text{H}_2\text{O}$ ]

**EXERCÍCIO 2** - Uma bomba centrífuga bombeia água à razão de  $0,022 \text{ m}^3/\text{s}$ ; roda a 1470 rpm. Os manômetros instalados à entrada e à saída da bomba indicam  $-3\text{m}$  e  $12 \text{ m}$  respectivamente (estão no mesmo nível). A potência consumida é  $4,8 \text{ kW}$ . A seção transversal do tubo de sucção da bomba mede  $14,2 \times 10^{-3} \text{ m}^2$  e a de descarga  $10,3 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ . A bomba tem  $23 \text{ cm}$  de diâmetro (rotor), com pás de  $19 \text{ mm}$  de altura na saída. As pás estão inclinadas de  $60^\circ$  para trás. Admitindo-se que não haja pré-rotação à entrada do rotor e que devido aos escoamentos secundários internos a componente da velocidade tangencial na saída é  $2/3$  da teórica, calcular a perda de altura de energia e a eficiência global.

[2,89 m; 67,8%]

**EXERCÍCIO 3** - Uma bomba axial bombeia óleo de densidade  $800 \text{ kg/m}^3$  à taxa de  $1,0 \text{ m}^3/\text{s}$ . Gira a 250 rpm. O óleo chega axialmente ao rotor; a velocidade do escoamento, que pode ser considerado constante da base ao topo da pá, é de  $3,0 \text{ m/s}$ . A bomba consome  $60 \text{ kW}$ ; sua eficiência global é de 77% e a eficiência hidráulica, incluindo o estator, é de 86%. Se o diâmetro do rotor é  $0,8 \text{ m}$  e o diâmetro na base das pás é  $0,4 \text{ m}$ , calcular os ângulos de entrada e de saída do rotor e de entrada do estator, na base e no topo das pás. Admita que a distribuição de trabalho específico é constante ao longo da altura das pás. - [base:  $60,2^\circ$ ;  $68,5^\circ$ ;  $76,8^\circ$  – topo:  $74^\circ$ ;  $53,5^\circ$ ;  $65^\circ$ ]

**EXERCÍCIO 4** - Uma roda Pelton de diâmetro 2m deflete o escoamento de  $162^\circ$ . O diâmetro do jato é 165 mm. A pressão à entrada do injetor é  $10^6$  Pa. Gira a 320 rpm. Despreze as perdas de atrito e calcule a potência desenvolvida e a eficiência hidráulica da turbina. - [701 kW; 73,3%]

**EXERCÍCIO 5** - Uma turbina Pelton produz 8 MW quando opera com altura e carga de 130m e gira a 200 rpm. Admitindo coeficiente de velocidade do injetor igual a 0,98, eficiência hidráulica 87%, relação de velocidades 0,46 e relação de diâmetro do jato – diâmetro da roda igual a  $1/9$ , determinar:

- a) diâmetro da roda;
- b) diâmetro e número dos injetores necessários;
- c) velocidade específica.

[7,21 m<sup>3</sup>/s; 2,17 m; 3; 0,039]

**EXERCÍCIO 6** - O injetor de uma turbina Pelton, cujo coeficiente de velocidade é 0,97, está num local a 400 m abaixo da superfície de uma represa. O diâmetro do jato é 80 mm; o diâmetro da tubulação de alimentação é 0,6 m; o comprimento dessa linha é 4 km;  $f = 0,008$  (fator de atrito). As pás defletem de  $165^\circ$  o jato. A relação de velocidades é 0,48 ( $U/V_{\text{jeto}}$ ). O atrito nas pás reduz a velocidade relativa em 15%. A eficiência mecânica é 90%. Determine a vazão e a potência desenvolvida pela turbina.

[0,42 m<sup>3</sup>/s; 1189 kW]

**EXERCÍCIO 7** - A velocidade do jato de uma turbina Pelton é 60 m/s; o diâmetro da roda é 33 cm e sua rotação é  $N$  rpm. A velocidade relativa na saída é 0,85 da de entrada. A deflexão do jato é  $160^\circ$ . A partir das equações de conservação, deduzir uma expressão para a eficiência hidráulica da roda e calculá-la para  $N = 400$  rpm e para  $N = 800$  rpm. Qual será a eficiência máxima? - [36,6%; 63,7%; 89,9%]

**EXERCÍCIO 8** - 3 turbinas Pelton de jatos duplos idênticas operam sob um desnível de 400 m. Diâmetro dos injetores = 75 mm. Coeficiente de velocidade = 0,97. Diâmetro da roda = 1,2 m. Relação de velocidades = 0,46. Deflexão do jato =  $165^\circ$ . Redução da velocidade relativa devida a atrito = 18%. Eficiência mecânica = 96%. A água da represa chega às turbinas por 2 tubulações paralelas de 0,5 m de diâmetro e 450 m de comprimento (cada). Fator de atrito = 0,0075. Se cada turbina recebe  $0,65 \text{ m}^3/\text{s}$ , calcule a potência de eixo e a rotação da turbina. - [1876 kW; 602 rpm]

**EXERCÍCIO 9** - Uma turbina Francis vertical tem eficiência global de 90%, gira a 428 rpm e consome  $15,5 \text{ m}^3/\text{s}$  de água. A velocidade à entrada da carcaça espiral é 9 m/s e, aí, a altura de pressão é 260 mH<sub>2</sub>O. A linha de centro da espiral está 3,3 m acima do nível da água de descarga. O diâmetro do rotor na entrada é 2,4 m e a altura das pás, aí, é 0,3 m. A eficiência hidráulica é 93%. Determine a potência gerada, a velocidade específica, o ângulo das pás do injetor (estator) e o ângulo de entrada das pás do rotor. - [36 MW; 0,073;  $9^\circ$ ;  $41^\circ$ ]

**EXERCÍCIO 10** - Uma turbina axial opera sob 21,8 m de altura de carga e desenvolve 21 MW a 140 rpm. O diâmetro externo do rotor é 4,5 m e o da base 2,0 m. Se a eficiência hidráulica é 94% e a eficiência global 88%, determine os ângulos de entrada e de saída das pás na altura média.

[30°; 20°20']

**EXERCÍCIO 11** - Uma turbina axial com estator fixo à entrada do rotor, rodando a 250 rpm, tem diâmetros externo de 1,8 m e interno de 0,75 m. No diâmetro médio o ângulo de saída é 50° no estator e 60° na entrada do rotor. Determine:

- a) vazão quando o ângulo de incidência no rotor é nulo, considerando que a velocidade axial é uniforme;
- b) ângulo das pás do rotor (saída) considerando componente tangencial nula;
- c) potência teórica considerando que a componente tangencial é uniforme.

[12 m<sup>3</sup>/s; 71,1°; 1360 kW]

**EXERCÍCIO 12** - Fazer uma análise para a escolha entre turbinas Kaplan, Francis e Pelton para serem utilizadas em um sistema gerador de energia elétrica para aproveitar uma queda d'água de 325m de altura e  $10 \text{ m}^3/\text{s}$  de vazão, justificando o tipo de turbina escolhido.

## 7. EQUILÍBRIO RADIAL

O escoamento nas máquinas axiais é muito complexo.

Os modelos simplificados permitem obtenção de resultados qualitativos.

Para obtenção de resultados quantitativos torna-se necessário o tratamento tridimensional do escoamento, bem como dos efeitos viscosos e turbulentos.

Muitas aplicações requerem, também, o estudo das máquinas em regime transitório.

Nas máquinas axiais, a aproximação 2-D só é válida nos casos em que a componente radial da velocidade nos canais entre as pás é muito menor do que a componente axial. Isto geralmente acontece quando  $D_i / D_e > 0,8$ .

Nos **estágios anteriores** de um compressor de alto desempenho, por exemplo, a **relação de diâmetros é usualmente pequena** (quase sempre abaixo de 0,5). Nesses estágios o **escoamento na direção radial é significativo**.

Por outro lado, nos **estágios posteriores** essa relação pode alcançar valores **da ordem de 0,8** e o **escoamento se dá praticamente na direção axial**, com a componente  $W_r$ , embora não nula, bem menor que as demais. Vê-se que as partículas se movimentam na direção radial.



A partícula se move numa trajetória contida entre o cubo e a carcaça externa do compressor graças a diversas forças que agem sobre ela.

Até que haja equilíbrio entre as forças de pressão e as de inércia, o escoamento se move na direção radial.

O equacionamento do equilíbrio dessas forças pode ser feito tendo-se a Fig. 12-1 por base.

As equações representam esse equilíbrio de forças na direção radial:

- forças de pressão
- forças inércia.

**As forças de inércia são aquelas associadas com**

- a) rotação da partícula em torno do eixo do compressor
- b) rotação da partícula em relação ao centro instantâneo de rotação quando está se movimentando em sua trajetória
- c) aceleração da partícula na sua própria trajetória.

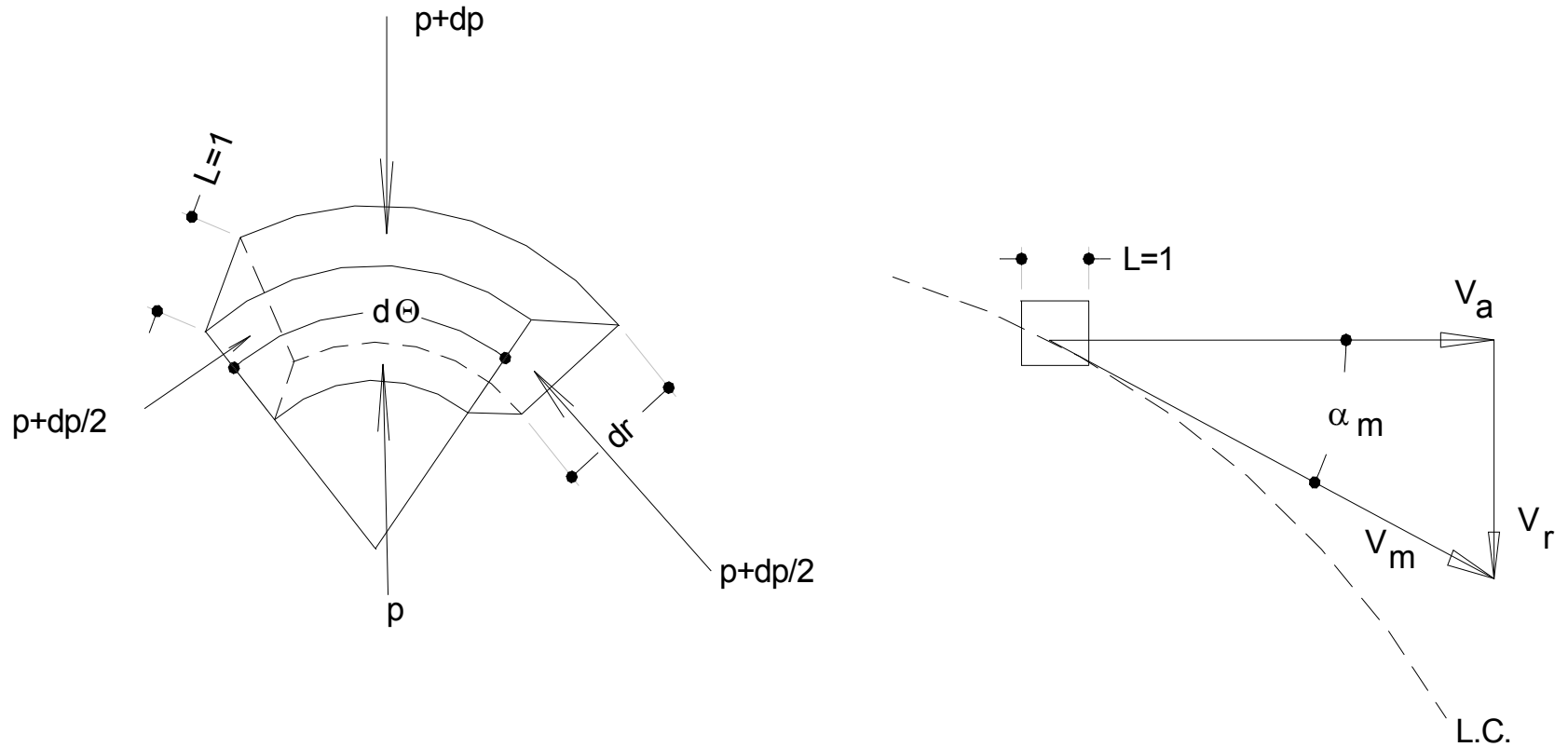


Figura 7-1 - Esquema para determinação das equações de equilíbrio radial

As forças de inércia no equilíbrio radial são, portanto:

- força centrípeta associada com o escoamento tangencial
- componente radial da força centrípeta associada com o escoamento ao longo da linha de corrente (encurvada)
- componente radial da força requerida para produzir aceleração linear ao longo da linha de corrente

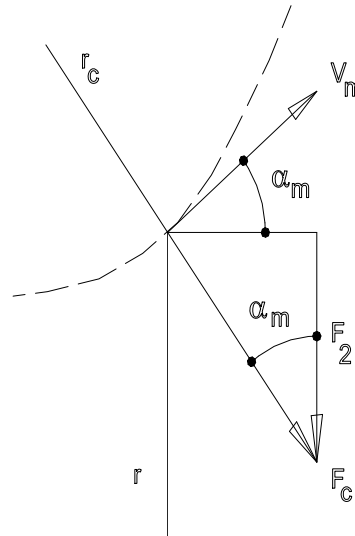
A força resultante de inércia deve ser produzida por forças de pressão atuando na direção radial. Notar que a aceleração radial pode ser milhares de vezes maior do que a gravitacional. Neste caso, esta pode ser desprezada.

Para um elemento de fluido de comprimento axial unitário, com densidade  $\rho$ , tem-se:

1. **Força centrípeta devida a  $V_u$**  (aceleração na direção radial)

$$F_1 = \frac{V_u^2}{r} = \rho(r d\theta dr) \frac{V_u^2}{r}$$

2. **Componente da força radial devida a  $V_m$**  (aceleração na direção meridional)



**Figura 7-2 - Esquema determinação da força centrífuga  $F_2$**

$$F_2 = m \frac{V_m^2}{r_c} \cos \alpha_m = \rho(r d\theta dr) \frac{V_m^2}{r_c} \cos \alpha_m$$

### 3. Força para acelerar na direção da linha de corrente

$$F_3 = m \frac{dV_m}{dt} \sin \alpha_m = \rho(r d\theta dr) \frac{dV_m}{dt} \sin \alpha_m$$

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = \rho r d\theta dr \left( \frac{V_u^2}{r} + \frac{1}{r_c} V_m^2 \cos \alpha_m + \frac{dV_m}{dt} \sin \alpha_m \right)$$

### 4. Força de pressão

$$\begin{aligned} F_p &= (p + dp)(r + dr)d\theta - p r d\theta - 2 \left( p + \frac{dp}{2} \right) dr \frac{d\theta}{2} = \\ &= p r d\theta + p dr d\theta + r dp d\theta + dr dp d\theta - r p d\theta - p dr d\theta - \frac{1}{2} dp dr d\theta = \\ &= r dp d\theta + \frac{1}{2} dp dr d\theta \end{aligned}$$

Então,

$$r dp d\theta + \frac{1}{2} dr dp d\theta = \rho r dr d\theta \left[ \frac{V_u^2}{r} + \frac{V_m^2}{r_c} \cos \alpha_m + \frac{dV_m}{dt} \sin \alpha_m \right]$$

ou, simplificando com a eliminação de termos comuns e desprezando termo de ordem superior, tem-se:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = \frac{V_u^2}{r} + \frac{V_m^2}{r_c} \cos \alpha_m + \frac{dV_m}{dt} \sin \alpha_m$$

#  
7-1

Esta é a **Equação do Equilíbrio Radial completa**.

Para uma grande parte das finalidades de projeto, pode-se ter

$$r_c \gg 1$$

e

$$\alpha_m \cong 0.$$

Em regime permanente, a equação 7.1 fica simplificada como

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = \frac{V_u^2}{r}$$

#

7-2

que é chamada de **equação do equilíbrio radial**, na qual a componente radial da velocidade está sendo desprezada.

Com a equação 7.1 pode-se deduzir a equação da variação da entalpia ao longo do raio.

Como

$$h_t = h + \frac{V^2}{2} = h + \frac{V_m^2 + V_u^2}{2}$$

Então,

$$\frac{dh_t}{dr} = \frac{dh}{dr} + V_a \frac{dV_m}{dr} + V_u \frac{dV_u}{dr}$$

Das relações termodinâmicas

$$Tds = dh - dP/\rho,$$

$$dh = Tds - dP/\rho$$

e, daí,

$$\frac{dh}{dr} = T \frac{ds}{dr} + \frac{DT}{dr} ds + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} - \frac{1}{\rho^2} \frac{dP}{dr} dP$$

Desprezando-se termos de ordem superior ( >1):

$$\frac{dh}{dr} = T \frac{ds}{dr} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr}$$

Então

$$\frac{dh_t}{dr} = T \frac{ds}{dr} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} + V_m \frac{dV_m}{dr} + V_u \frac{dV_u}{dr}$$

ou



$$\frac{dh_t}{dr} = T \frac{ds}{dr} + \frac{V_u^2}{r} + V_m \frac{dV_m}{dr} + V_u \frac{dV_u}{dr}$$

#

7-3

Esta equação inclui a variação das perdas na direção radial na seção considerada (termo  $Tds/dr$ ).

Note-se que a equação geral tem a forma:

$$\frac{dh_t}{dr} = T \frac{ds}{dr} + \frac{V_u^2}{r} + V_m \frac{dV_m}{dr} + V_u \frac{dV_u}{dr} + \frac{dV_m}{dt} \text{sen} \alpha_m + \frac{V_m^2}{r_c} \cos \alpha_m$$

onde  $V_m$  é a velocidade meridional.

A variação radial das perdas pode ser significativa quando o raio de curvatura da linha de corrente for pequeno.

Neste estudo, para efeito de simplificação, será admitido que essa variação de perdas na direção radial é desprezível. Logo, a Eq. 7.3 fica:

$$\frac{dh_t}{dr} = \frac{V_u^2}{r} + V_m \frac{dV_m}{dr} + V_u \frac{dV_u}{dr}$$

#

7-4

Uma condição freqüentemente encontrada à entrada da máquina (distribuição uniforme de entalpia de estagnação ou da temperatura total na entrada) é  $\frac{dh_t}{dr} \cong 0$ .

Outra hipótese muito utilizada é a que considera acréscimo constante de trabalho específico em todas as seções da grade (note-se que  $h_t$  varia de uma grade para outra, mas não varia radialmente). Então

$$\frac{dh_t}{dr} = 0 \Rightarrow V_m \frac{dV_m}{dr} + V_u \frac{dV_u}{dr} + \frac{V_u^2}{r} = 0$$

No caso específico de velocidade meridional constante da raiz ao todo da pá,

$$V_m = \text{cte.},$$

tem-se

$$V_u \frac{dV_u}{dr} + \frac{V_u^2}{r} = 0$$

$$V_u \frac{dV_u}{dr} = -\frac{V_u^2}{r}$$

ou

$$\frac{dV_u}{dr} = -\frac{V_u}{r} \Rightarrow \frac{dV_u}{V_u} = -\frac{dr}{r}$$

ou

$$\boxed{rV_u} = \text{constante.}$$

7-5

A equação 7-5 indica **escoamento de vórtice livre**, onde a velocidade  $V_u$  varia inversamente com o raio.

- Então:
- a) trabalho específico constante
  - b) velocidade meridional constante
  - c) vórtice livre

satisfazem a condição de equilíbrio radial e são, portanto, utilizados em projeto, pois essas condições são compatíveis entre si.

**Vórtice livre** é um critério de projeto. Tem o inconveniente de causar variação do grau de reação ao longo da altura da pá, muitas vezes chegando a valores muito pequenos.

Para realizar o projeto de uma grade o projetista deve escolher:

- a) como varia a velocidade axial **ou**
- b) como varia a componente tangencial da velocidade absoluta,

isto é, como varia ou  $V_{1a}$  ou  $V_{1u}$ .

Variações típicas de velocidades tangenciais de interesse e já estudadas são:

$$V_{1u} = ar^n + \frac{b}{r}$$

$$V_{2u} = ar^n - \frac{b}{r},$$

com  $n \in \{-1, 0, 1\}$  e **a** e **b** constantes.

Neste caso,

$$\Delta h_t = c_p \Delta T_t = U(V_{2u} - V_{1u}) = \omega r \left[ ar^n - \frac{b}{r} - \left( ar^n + \frac{b}{r} \right) \right] = -\omega b = \text{const.}$$

Fixada uma dessas velocidades ( $V_{1u}$  ou  $V_{1a}$ ), a outra pode ser determinada.

A título de exercício: Adotando-se  $V_{1a} = \text{const}$ , calcular  $V_{2a}$  para um projeto em que a variação de trabalho específico seja constante da raiz ao topo da pá.

## 8. PARÂMETROS CONSTRUTIVOS

### 8.1 PERFIS AERODINÂMICOS

Até a década de 50, o desenvolvimento de perfis aerodinâmicos (ou perfis de asas) era quase 100% empírico.

A necessidade de novos perfis de melhor desempenho surgiu com o aparecimento de aviões mais sofisticados. Uma quantidade muito grande de perfis foi testada, mas não satisfaziam as novas exigências.

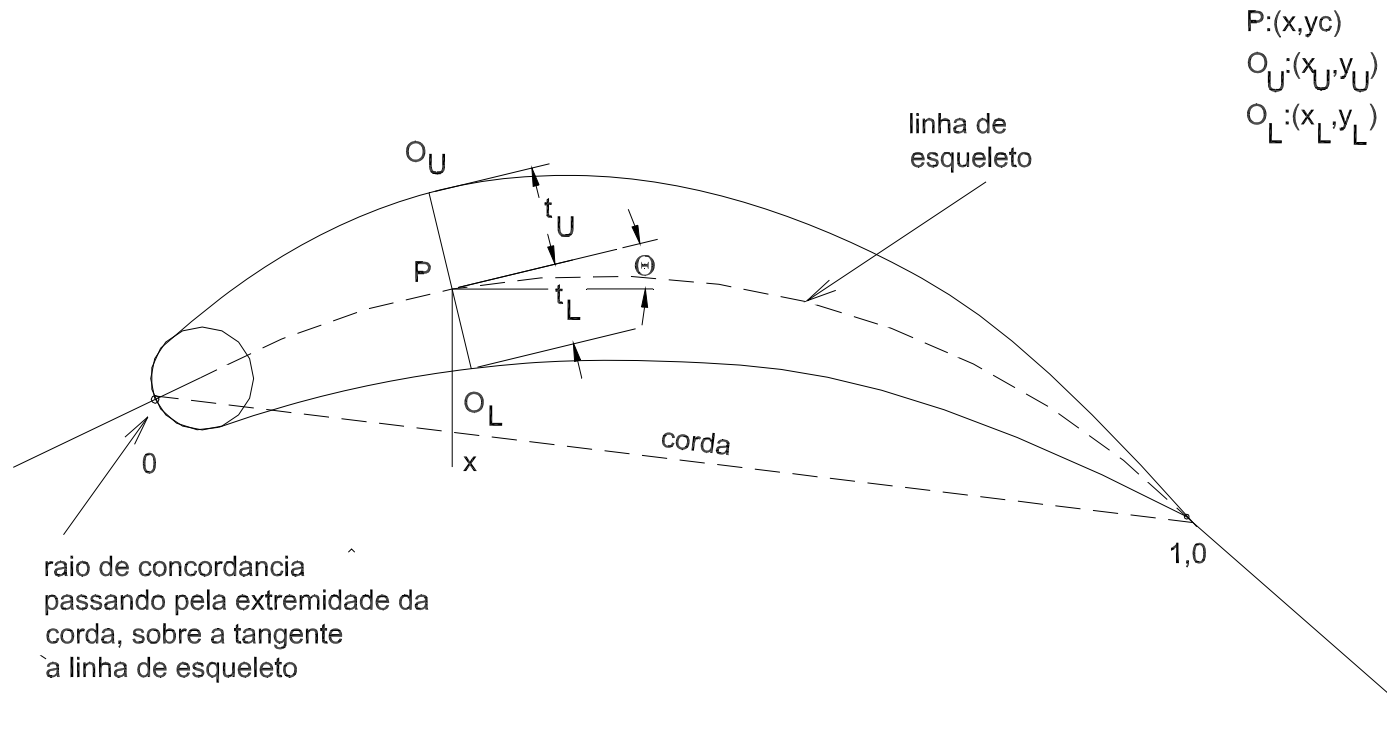
Com o desenvolvimento da teoria das asas, uma série sistemática de ensaios foi feita. Para se ter uma idéia do atraso no desenvolvimento da teoria, durante a 2ª guerra mundial a maioria dos perfis utilizados na aeronáutica era derivada dos perfis Göttingen, já utilizados por volta de 1920.

No final da década de 40, muitos países sistematizaram o estudo dos perfis aerodinâmicos, tendo a NACA (Estados Unidos) se notabilizado pela separação dos efeitos do encurvamento da linha de esqueleto e da distribuição de espessura da seção sobre a linha de esqueleto no desempenho do perfil, além de realizar ensaios a números de Reynolds mais altos do que os obtidos nos outros locais de pesquisa.

Assim, os perfis hoje em uso ou são NACA ou fortemente influenciados por eles.

As **seções transversais** encurvadas dos perfis NACA são obtidas pela **combinação de uma linha média** (**linha de esqueleto**) e uma **distribuição de espessura**.

A Figura 11.1 indica como é feita essa distribuição.



**Figura 8-1 - Método de combinação de linha de esqueleto com distribuição de espessura**

Se  $t_U = t_L$ , a linha de esqueleto é a linha média.

Tem-se

$$\begin{aligned}x_U &= x - t_U \sin \theta_C & x_L &= x + t_L \sin \theta_C \\y_U &= y_C + t_U \cos \theta_C & y_L &= y_C - t_L \cos \theta_C\end{aligned}$$

O centro do raio de concordância fica sobre a tangente à linha de esqueleto, passando pela extremidade da corda, a 0,5% da corda (isto leva ao fato de a projeção do perfil encurvado ser maior do que a corda!).

Esses perfis têm o bordo de fuga em bisel. Na prática, há raios de concordância nos bordos de ataque e de fuga.

Os dados para construção de um perfil encurvado são tabelados e podem ser obtidos na literatura (Abbott [5]).

As famílias de perfis NACA principais são:



### 8.1.1 NACA 4 DÍGITOS

- Distribuição de espessura

$$\pm y_t = \frac{t}{0,20} \left( 0,2969\sqrt{x} - 0,126x - 0,3516x^2 + 0,2843x^3 - 0,1015x^4 \right)$$

$t$  = espessura máxima da pá.

- raio de concordância - bordo de ataque:

$$r_t = 1,1019t^2$$

- linha média:

$$y_C = \frac{m}{p^2} (2px - x^2)$$

a montante da máxima ordenada

$$y_C = \left( \frac{m}{1-p^2} \right) \left[ (1-2p) + 2px - x^2 \right]$$

a jusante da máxima ordenada.

$m$  = máxima ordenada da linha média, expressa em fração da corda (geralmente  $m = 0,06c$ )  
 $p$  = posição, sobre a corda, do ponto de máxima ordenada

- numeração baseada na geometria

### **NACA 2415**

1º. dígito (2) = valor máximo de  $y_c$  em % da corda

2º. dígito (4) = distância, a partir do bordo de ataque, da localização do máximo encurvamento, em décimos da corda (0,4 = 40%)

2 últimos dígitos = espessura da seção, em porcentagem da corda (15%)

Então, a **seção NACA 2415** tem **encurvamento** de 2% da corda à distância de 40% da corda a partir do bordo de ataque e 0,15c de espessura nessa seção.

Perfis simétricos são indicados por 00 no lugar dos dois primeiros dígitos (estes 2 dígitos definem a linha média). Então NACA 0015 é um perfil que define a distribuição de espessura para a família.

Por exemplo, o perfil básico NACA 0012 é definido por (Abbott [1], página 321):

<b>x/c</b>	<b>y/c</b>
0	0
0,5	---
1,25	1,894
2,5	2,615
5,0	3,555
7,5	4,200
10	4,683
15	5,345
20	5,737

<b>x/c</b>	<b>y/c</b>
25	5,941
30	6,002
40	5,803
50	5,294
60	4,563
70	3,664
80	2,623
90	1,448
95	0,807
100	0,126

$$r_t = 0,0158c$$

### 8.1.2 NACA 5 DÍGITOS

- **distribuição de espessura**

igual à de 4 dígitos

- **raio de concordância - bordo de ataque:**

$$r_t = 1,1019t^2$$

- **linha média:**

$$y_C = \frac{k_1}{6} [x^3 - 3mx^2 + m^2(3-m)x] \quad 0 \leq x \leq m$$

$$y_C = \left( \frac{m}{1-p^2} \right) [(1-2p) + 2px - x^2] \quad m \leq x \leq c = 1$$

$m$  = é determinado para dar 5 posições  $p$  de máximo encurvamento:  
0,05c 0,10c 0,15c 0,20c e 0,25c

$k_1$  é calculado para dar coeficiente de sustentação de projeto igual a 0,3

designação da linha de esqueleto	posição do encurvamento p	m	k1
210	0,05	0,0580	361,4
220	0,10	0,1260	51,64
230	0,15	0,2025	15,957
240	0,20	0,2900	6,643
250	0,25	0,3910	3,236

- **numeração**: é uma combinação de características aerodinâmicas e geométricas

1º dígito = é uma medida da sustentação

2º e 3º dígitos = distância, a partir do bordo de ataque, da localização do máximo encurvamento

2 últimos dígitos = espessura da seção, em porcentagem da corda

Exemplo: **NACA 23012**

- coeficiente de sustentação de 0,3
- máximo encurvamento de 15% da corda
- espessura de 12% da corda

O perfil básico NACA 23012 é definido por (Abbott [1], página 413):

**MÁQUINAS DE FLUXO**  
**NOTAS DE AULAS - 2010**

8-23/35

superior			inferior	
x/c	y/c		x/c	y/c
0	---		0	0
1,25	2,67		1,25	-1,23
2,5	3,61		2,5	-1,71
5,0	4,91		5,0	-2,26
7,5	5,80		7,5	-2,61
10	6,43		10	-2,92
15	7,19		15	-3,50
20	7,50		20	-3,97
25	7,60		25	-4,28
30	7,55		30	-4,46
40	7,14		40	-4,48
50	6,41		50	-4,17
60	5,47		60	-3,67
70	4,36		70	-3,00
80	3,08		80	-2,16
90	1,68		90	-1,23
95	0,92		95	-0,70
100	(0,13)		100	(-0,13)
100	---		100	0

$$r_t = 0,0158c$$

$$\theta_t = 0,305$$

- **Outras séries**

- Séries NACA modificadas de 4 e 5 dígitos
- Série 1 NACA
- Série 6 NACA
- Série 7 NACA
- Série C (britânica)
- Série T
- Perfis DCA
- Perfis MCA
- Perfis J

Deve-se referir a publicações especializadas para obter as informações pormenorizadas dos diversos tipos de perfis.

## 8.2 EMPALHETAMENTO

Chama-se **empalhetamento** da máquina a determinação da geometria das pás para forçar o escoamento seguir as direções indicadas nos triângulos de velocidades.

A título de exemplo de como se procede para determinar o empalhetamento de uma grade será analisado o caso de grades de máquinas axiais bombeando ar. Outros casos poderão ser analisados recorrendo-se à literatura específica.

O estudo até agora realizado tratou da determinação de parâmetros do escoamento (velocidades, pressões, vazões, etc.) adequados à transferência de energia entre máquina e fluido.

O empalhetamento da máquina trata da determinação da forma geométrica das pás (ângulos das pás, tipos de perfis a serem utilizados, dimensões das pás, número de pás, etc.) para que o escoamento, ao passar pela máquina, produza as condições previamente especificadas.

Falta, portanto, fazer a ligação entre os parâmetros de escoamento, mais especificamente os triângulos de velocidades, com os da geometria das pás e da máquina.

Nesta seção será apresentado, como exemplo, o empalhetamento de grades de compressores axiais. Os demais casos deverão ser analisados recorrendo-se à literatura específica.

O empalhetamento é feito para as condições de projeto da máquina. Parte-se dos triângulos de velocidades calculados para a condição de projeto.



No caso de projeto de compressores axiais, recomenda-se recorrer ao relatório NASA SP 36, Aerodynamic Design of Axial Flow Compressors. Publicações mais recentes usualmente utilizam as informações contidas naquele Relatório.

O ângulo  $\beta_1$  de entrada da pá é calculado a partir do ângulo  $\alpha_1$  do escoamento relativo que entra na grade:

$$\beta_1 = \alpha_1 - i$$

A incidência  $i$  pode ser escolhida como a incidência que acarretará o mínimo de perdas de atrito, seguindo algum critério, como o sugerido no relatório NASA SP 36.

Uma aproximação inicial é adotar incidência nula como primeira tentativa.

O ângulo  $\beta_2$  de saída da pá é calculado a partir do ângulo  $\alpha_3$  do escoamento relativo que sai da grade:

$$\beta_2 = \alpha_3 - \delta$$

O desvio  $\delta$  é calculado utilizando-se um critério adequado, como o de Carter.

Nem sempre é adequado fixar os ângulos das pás a partir das condições de projeto, porque a máquina também funciona em pontos fora da condição de projeto.

Operação do estágio com **vazão reduzida acarreta aumento do ângulo de incidência.**

Operação do estágio com vazão aumentada **acarreta diminuição do ângulo de incidência.**

As perdas de perfil aumentam com o distanciamento da incidência em relação à incidência de projeto.

Existe uma faixa de variação de incidência (e, portanto, de vazão através da grade) em que as perdas são mais baixas.

Pode-se escolher o melhor ângulo de incidência para projeto para acomodar as variações de vazão sem incorrer em perdas muito elevadas.

Conhecendo-se os triângulos de velocidades, pode-se escolher o perfil aerodinâmico apropriado a partir das características desses perfis, levantadas em bancos de ensaios e disponíveis na literatura (Abbott).

Determina-se, então, a geometria da grade, isto é, como devem ser montadas as pás para que o escoamento esteja de acordo com os triângulos de velocidades calculados inicialmente.

Neste curso não está previsto o estudo detalhado do empalhetamento, mas o leitor é aconselhado a consultar o Relatório **NASA SP 36**, "Aerodynamic Design of Axial Flow Compressors", quando for tratar de compressores axiais.

Referências apropriadas podem ser encontradas para o empalhetamento de outros tipos de máquinas, como turbinas, bombas, ventiladores, etc.

As referências bibliográficas citadas nestas Notas de Aulas indicam algumas delas.

A título de ilustração, considere-se o caso de **escoamento de ar ou de gases de combustão** comuns nas turbinas a gás convencionais.

Sem maiores considerações a respeito da operação fora do ponto de projeto, a **incidência** será considerada nula, isto é, o ângulo do escoamento relativo incidente na grade coincide com o ângulo da pá no bordo de ataque.

Para a determinação do **desvio** do escoamento à saída da grade será utilizada a correlação de Carter.

A correlação de Carter, para o desvio, é dada por

$$\delta = m \left( \frac{s}{c} \right)^a \theta$$

# 8-1

onde

$$\theta = \beta_1 - \beta_2$$

s/c = relação espaçamento-corda

$$m = 0,23 \left( 2 \frac{b}{c} \right)^2 + 0,1 \left( \frac{\alpha_3}{50} \right) \quad \text{ou} \quad \alpha_3 = \beta_2 \left[ 1 - m(\alpha_3) \left( \frac{s}{c} \right)^a \right] + \beta_1 m(\alpha_3) \left( \frac{s}{c} \right)^a$$

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{IGV - NGV} \\ 0,5 & \text{demais} \end{cases}$$

$b/c$  = % da corda onde se tem flecha máxima

$\beta_1$  = ângulo do bordo de ataque

$\beta_2$  = ângulo do bordo de fuga

$\alpha_3$  = ângulo do escoamento relativo no bordo de fuga

$\delta$  = desvio =  $\alpha_3 - \beta_2$

O ângulo de montagem  $\zeta$  é dado por

$$\zeta = \beta_1 - \frac{\theta}{2} \text{ ou } \zeta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$$

#  
8-2

A altura da pá é determinada a partir do dimensionamento do canal (axial) da máquina.

A corda é calculada a partir da seleção do valor de  $s/c$ , que está relacionado com minimização de perdas, através de, por exemplo, um fator de difusão como o definido em SP 36 [8].

Para a determinação das dimensões das pás, adota-se, como ponto de partida, as seguintes relações:

$$h/c = 3 \text{ e } s/c = 0,85.$$

Adotam-se também as seguintes relações para o espaçamento entre as grades:r

$$\Delta z = 0,25c \text{ a } 0,30c$$

Tendo-se calculado o espaçamento entre as pás e a geometria do canal axial, pode-se determinar o número de pás.

Recomenda-se escolher o número de pás que não seja múltiplo ou submúltiplo de algum número ligado a possíveis forças de excitação (como aquela decorrente da flutuação da pressão após os bordos de fuga das pás, frequência da rede elétrica, etc.), para evitar vibrações com frequências próximas das frequências naturais da máquina.

Saravanamuttoo sugere fixar um número par de pás para o estator e um número primo de pás para o rotor.

**Exemplo:** Durante o dimensionamento de u'a máquina axial chegou-se, para um de seus rotores, a:

$$R_m = 0,180 \text{ m}$$

$$U = 450 \text{ m/s}$$

$$\Psi = \frac{\Delta V_u}{U} = 0,4$$

$$V_{1u} = W_{2u}$$

$$h = 0,060$$

$$V_{1a} = V_{2a} = V_a = 0,55 U$$

$$i = 0^\circ$$

$$h/c = 3$$

$$s/c = 0,85.$$

Então:

$$\Delta V_u = 0,4 U = (0,4)(450) = 180$$

$$V_{1u} = (0,5)(U - \Delta V_u) = (0,5)(450 - 180) = 135$$

$$W_{2u} = V_{1u} = 135$$

$$V_a = (0,55)(450) = 247,5$$

$$\beta_1 = \alpha_1 = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{W_{2u} + \Delta V_u}{V_a} \right) = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{135 + 180}{247,5} \right) = 51,84^\circ$$

$$\alpha_3 = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{W_{2u}}{V_a} \right) = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{135}{247,5} \right) = 28,61^\circ$$

$$c = h/3 = 0,060 / 3 = 0,020$$

$$s = 0,85c = (0,85)(0,020) = 0,017$$

$$N_p = 2\pi(0,180) / (0,017) = 66,5.$$

Como o número de pás deve ser inteiro e primo, segundo Saravanamutto, será fixado em 67.

Logo, adotando-se 66 pás, tem-se:

$$s = 2\pi(0,180) / (67) = 0,01688$$

$$c = (0,01688) / (0,85) = 0,01986$$

$$h = 3c = (3)(0,01986) = 0,0596$$

Da correlação de Carter:

$$\delta = m \left( \frac{s}{c} \right)^{\frac{1}{2}} (\beta_1 - \beta_2)$$

$$m = 0,23 \left( 2 \frac{c}{2} \right)^2 + 0,1 \left( \frac{\alpha}{50} \right) = 0,23 + 0,1 \frac{28,61}{50} = 0,2873$$

Da definição de  $\delta$ :

$$\delta = \alpha_3 - \beta_2$$

Portanto,

$$m \left( \frac{s}{c} \right)^{\frac{1}{2}} (\beta_1 - \beta_2) = \alpha_3 - \beta_2$$

de onde resulta

$$\beta_2 = \frac{m\left(\frac{s}{c}\right)^{\frac{1}{2}} \beta_1 - \alpha_3}{m\left(\frac{s}{c}\right)^{\frac{1}{2}} - 1} = \frac{0,2873 \times \sqrt{0,85 \times 51,84} - 28,61}{0,2873 \times \sqrt{0,85} - 1} = 20,23^\circ$$

Dai,

$$\delta = 28,61 - 20,13 = 8,38^\circ$$

$$\theta = 51,84 - 20,23 = 31,61^\circ$$

$$\zeta = 0,5 \times (51,84 + 20,23) = 36,04^\circ$$





Deve-se notar que essa geometria foi determinada para apenas uma das seções de uma pá na grade (usualmente inicia-se pela seção correspondente à altura média das pás).

É preciso, portanto, repetir esse procedimento para um número adequado de seções da grade, incluindo a raiz e o topo das pás.

Para isso é preciso que os triângulos de velocidades nessas seções sejam conhecidos.

Para determinar os triângulos de velocidades em seções da grade que vão da raiz ao topo das pás é preciso, antes, estudar o escoamento no canal formado pelas grades, o que será feito com auxílio da teoria do equilíbrio radial.

Através desse obtém-se informações sobre as características do escoamento a partir do estudo das forças que atuam numa partícula de fluido ao atravessar um canal da máquina de fluxo.

## 8. CAVITAÇÃO

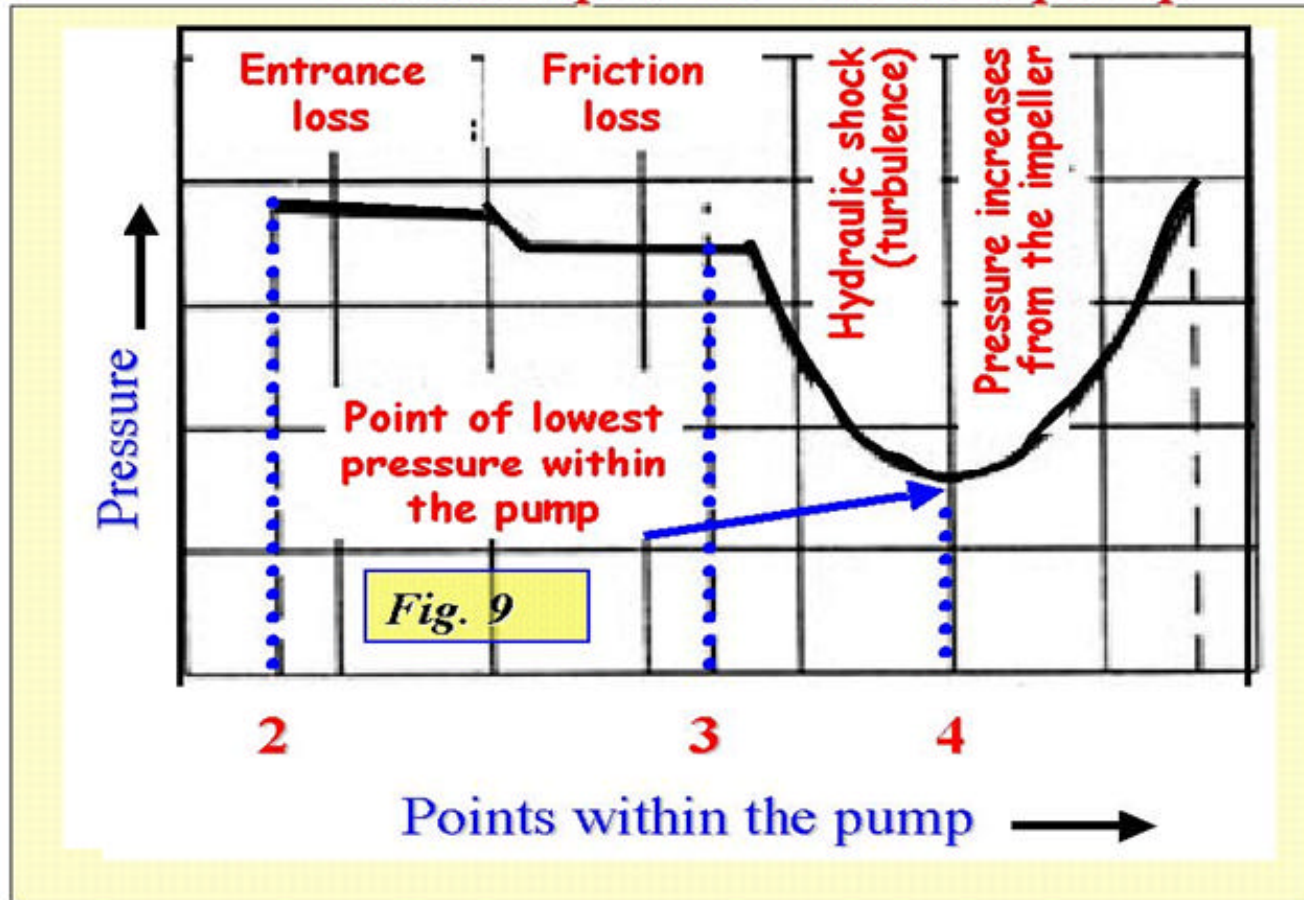
A cavitação é o fenômeno da aparição de bolhas de vapor num escoamento líquido, decorrente da vaporização do líquido, sem aporte de calor, em algum local da máquina hidráulica, devido a baixa pressão. Pode aparecer tanto nas máquinas motoras quanto nas movidas.

A vaporização do líquido é devida à queda da pressão estática abaixo do valor da pressão de vapor do líquido à sua temperatura.

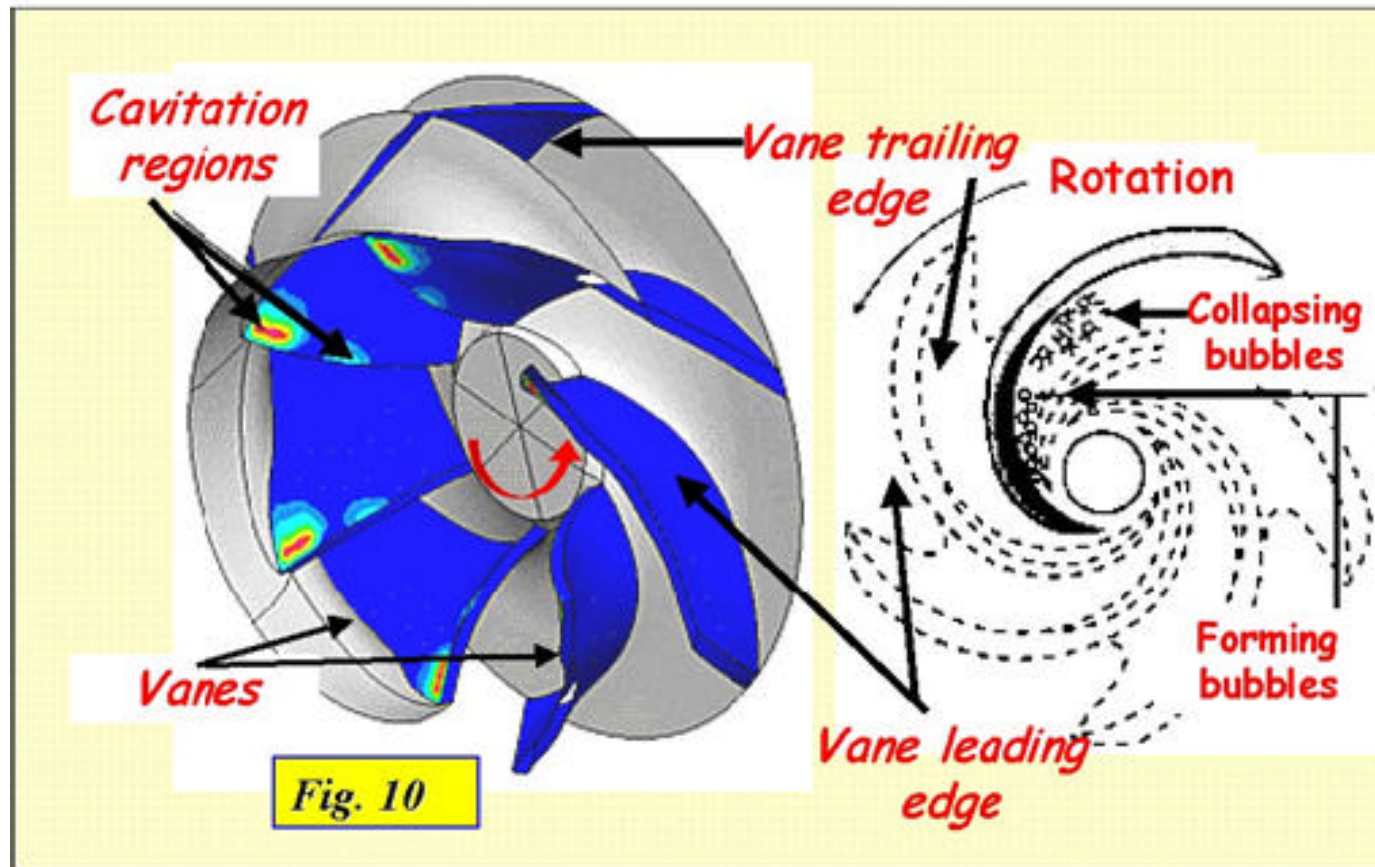
Formam-se pequenas bolhas de vapor com a conseqüente fervura do líquido. Na prática, o aparecimento de bolhas acontece a pressões acima da de vapor devido à dissolução de gases no líquido.

Acredita-se que o início da cavitação é devido à existência de partículas de gases presas entre as rugosidades do material de que é feita a máquina.

## Pressure profile inside a pump

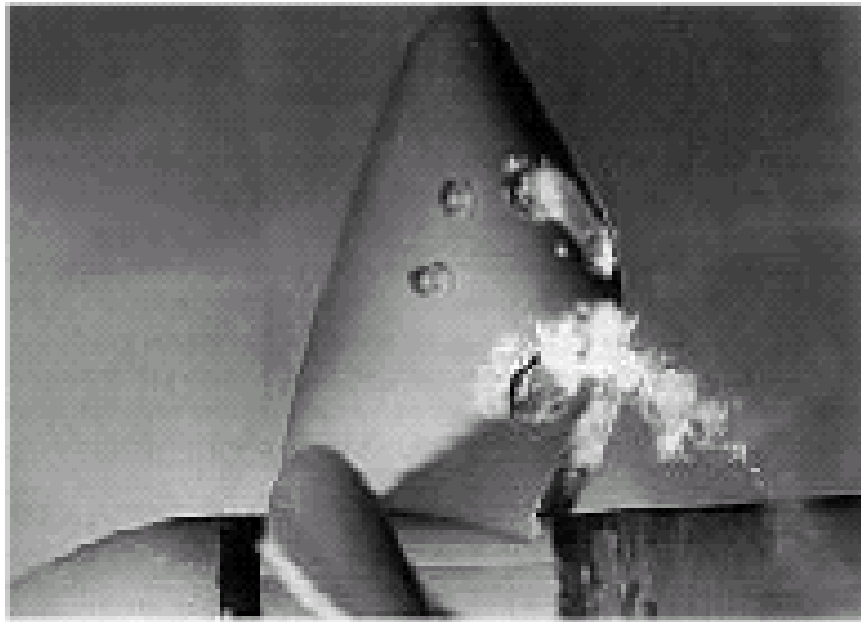


## Impeller cavitation regions



Não se deve confundir a cavitação com outros fenômenos que também são observados, como gás dissolvido em um refrigerante ou injeção de ar na água.

É a característica explosiva do aumento das bolhas e a baixa escala de tempo que é inferior a  $10^{-3}$ s (a escala de tempo dos exemplos acima é da ordem  $10^{-1}$ s) que diferencia a cavitação dos exemplos acima.



A associação que se faz entre cavitação e mudança de fase implica em que as cavidades (bolhas) formadas sejam constituídas apenas do vapor do líquido considerado. Porém o gás dissolvido no líquido pode juntar-se à bolha de vapor.

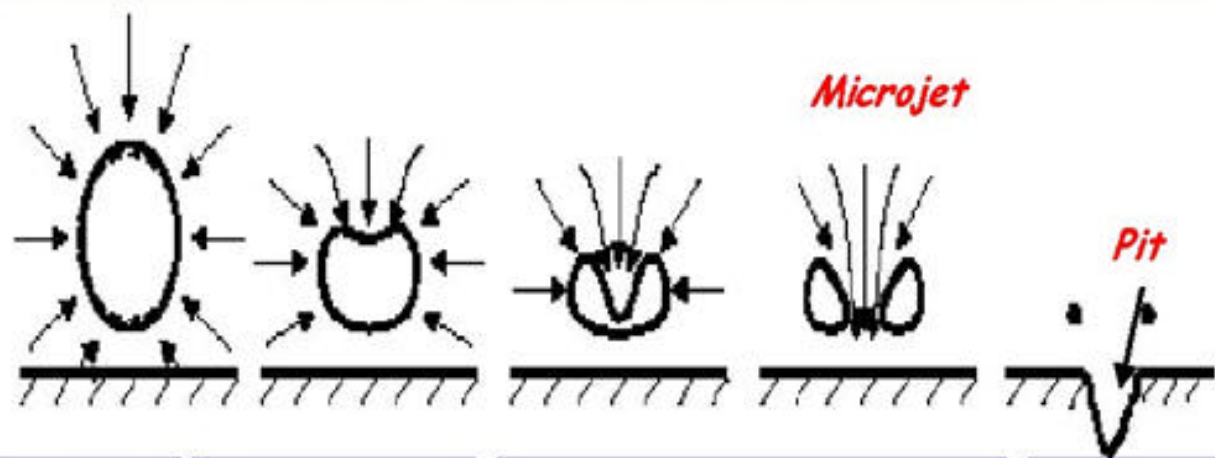
Segue-se que uma injeção de ar no escoamento pode interferir na cavitação.

Quando essas bolhas são levadas para regiões de pressões mais altas, desaparecem mais rapidamente do que quando foram criadas.

Este fenômeno de condensação, ou colapso, demora em torno de  $10^{-6}$  s. Isto é a origem dos aspectos prejudiciais da cavitação tais como erosão e geração de ruído que permitirão, na prática, caracterizar a cavitação.

## Collapse of a vapor bubble

*Fig. 11*



*Initial  
bubble*

*Initiation  
of bubble  
collapse*

*Forming of liquid microjet*

*Impact &  
metal  
extrusion*

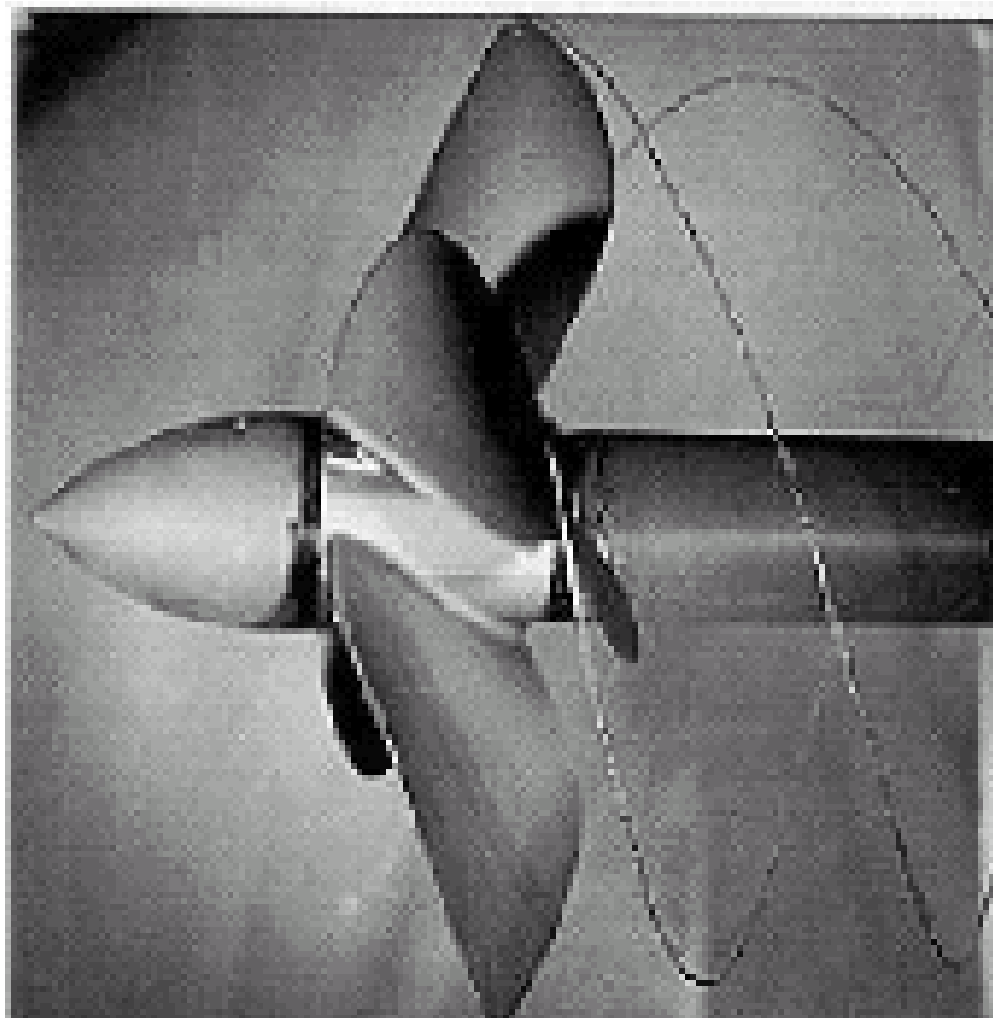


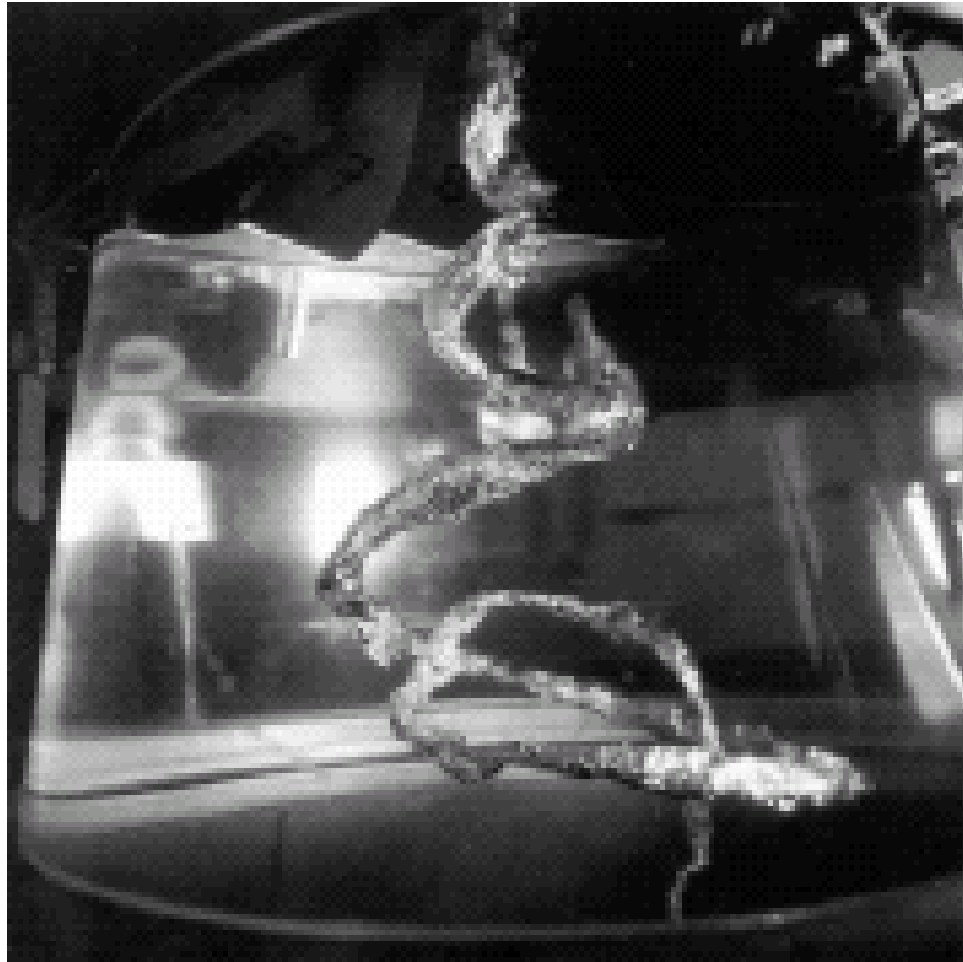
Máquinas e instalações hidráulicas estão sujeitas à cavitação em regiões de baixa pressão, como as faces de sucção de máquinas, a entrada de bombas e a saída de turbinas, os condutos de sucção de bombas ou os tubos de sucção de turbinas, as faces a jusante de válvulas, ou quaisquer regiões do escoamento líquido onde se podem ter pressões próximas daquelas de vaporização.

O estudo da cavitação pode ser dividido em dois ramos:

- fenomenológico, em que interessa a identificação e o combate à cavitação e seus efeitos;
- teórico, em que interessa o equacionamento do fenômeno visando à sua quantificação no que concerne às condições de equilíbrio, desenvolvimento e colapso das bolhas.

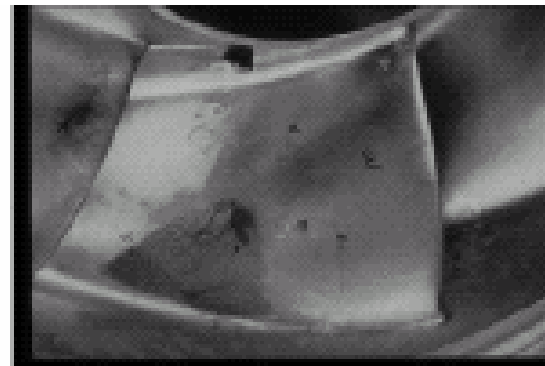
O objetivo deste trabalho é mostrar a problemática e a complexidade da cavitação em máquinas hidráulicas e os avanços no estudo da cavitação nas últimas décadas. Será abordada inicialmente a teoria do fenômeno da cavitação para depois se estudar mais detalhadamente a cavitação em máquinas hidráulicas, com um enfoque mais prático do que teórico.







Modelo reduzido



protótipo após 1000 h de operação

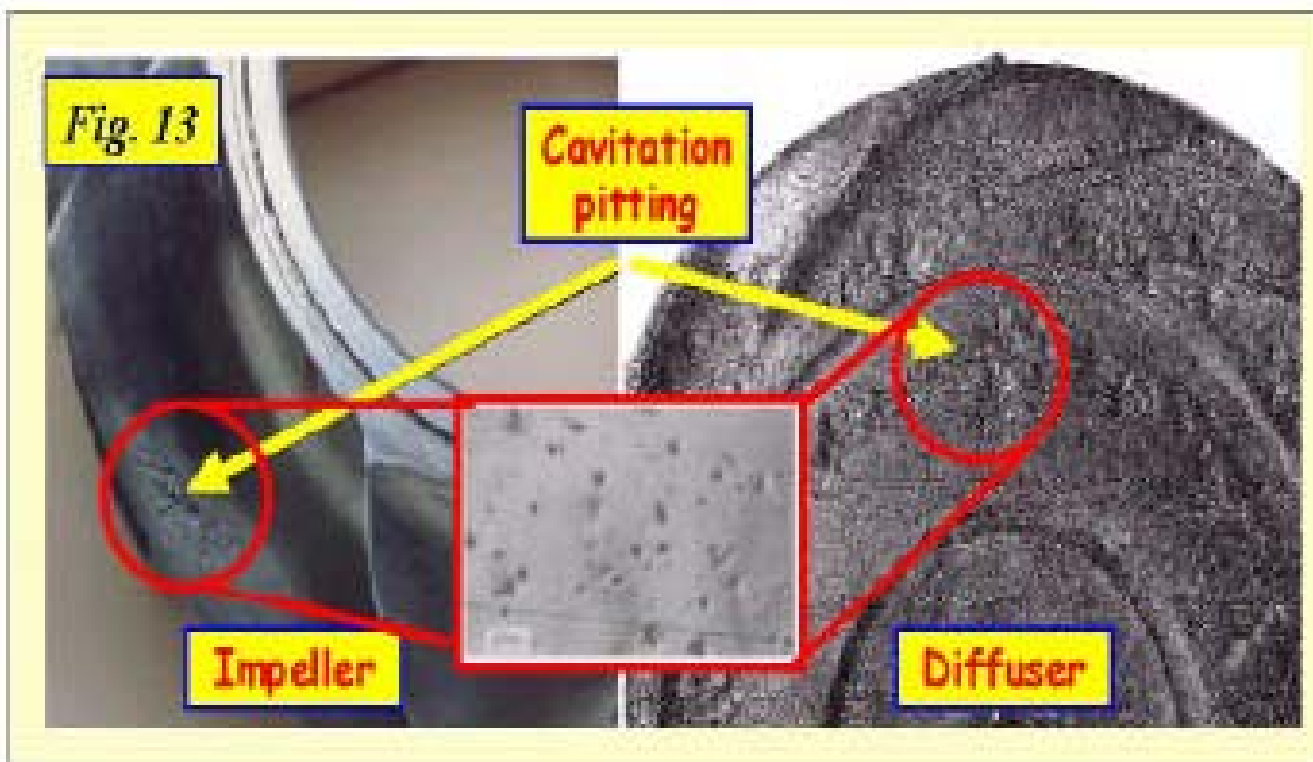
Em princípio, o aparecimento das bolhas não seria problemático não fosse o seu colapso quando a pressão deixa de ser desfavorável, formando ondas de pressão de alta intensidade e de curta duração.

Pressões locais da ordem de  $4 \times 10^8$  Pa e temperaturas de mais de 1.000 K podem aparecer localmente, causando dano ao material da máquina. Ruído característico aparece, bem como emissão muito fraca de luz.

A queda local de pressão deve-se ao fluido atingir velocidades elevadas. Logo, pode aparecer à entrada de bombas e descarga de turbinas, como também em válvulas, venturis, etc.

Os efeitos da cavitação são: ruído, erosão e vibração.

## Cavitation pitting



## Cavitation damages

**Fig. 14**

**Cavitation damage holes on impellers**



Mede-se a cavitação pelo coeficiente de cavitação, definido por

$$\sigma = \frac{p_1 - p_c}{\frac{1}{2}\rho\bar{V}_1^2} \cong \frac{p_1 - p_{\text{vap}}}{\frac{1}{2}\rho\bar{V}_1^2}$$

# 8-1

onde

$p_1$  pressão a montante (ou jusante) da máquina

$p_c$  pressão crítica do fluido em que a cavitação ocorre

$p_v$  pressão de vapor do fluido

$\bar{V}_1$  velocidade média do fluido a montante (ou a jusante) da máquina

$\sigma_{\text{crít}}$  é o valor de  $\sigma$  em que a cavitação se inicia.

Como  $P_v$  varia com a temperatura,  $\sigma$  também varia, o que **pode causar cavitação em uma bomba no verão e não no inverno.**



$$\frac{P_a}{\rho} + \frac{V_a^2}{2} + gz_a = \frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 + gH_{\text{Perdas}} \Rightarrow P_1 = P_a - \rho g \left\{ \frac{V_1^2}{2g} + \Delta z + H_{\text{Perdas}} \right\}$$

Portanto, em uma bomba,  $P_1 = P_a - \rho g H_s$

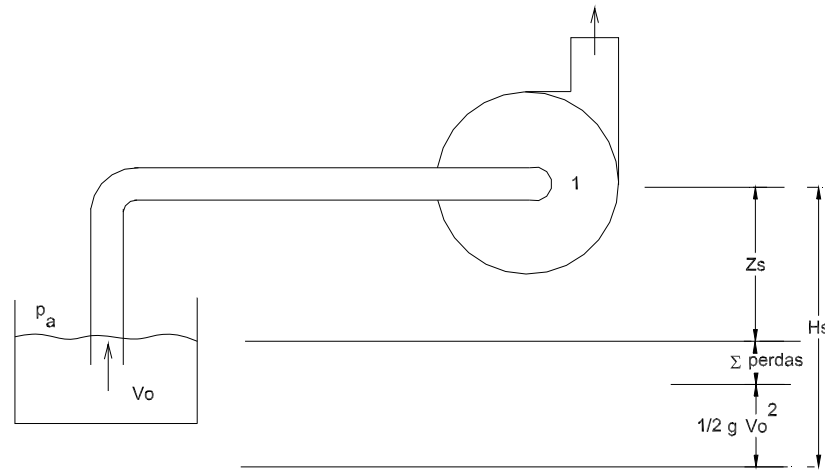
onde  $H_s = \frac{V_1^2}{2g} + \Delta z_1 + H_{\text{Perdas}}$

$P_a$  = pressão ambiente

$H_s$  = a altura de energia de sucção, ou altura de sucção

As perdas na tubulação devem-se a atrito, mudança de direção do escoamento (curvas, cotovelos), válvulas (pé, registro, etc.), telas, etc.

$\Delta z$  = diferença de nível entre a superfície livre do reservatório de sucção e a entrada da bomba.



**Figura 8-1 - Esquema da instalação de uma bomba radial**

Se  $P_1$  é a pressão à entrada da bomba;  $P_i$  é a pressão em que se inicia a cavitação e  $P_v$  é a pressão de vapor do líquido, define-se a altura de cavitação NPSH por:

$$\text{NPSH} = \frac{P_i - P_v}{\rho g} = \frac{P_a - \rho g H_s - P_v}{\rho g} = \frac{P_a}{\rho g} - H_s - \frac{P_v}{\rho g}$$

ou

$$\text{NPSH} = \frac{P_a - P_v}{\rho g} - H_s$$

que é uma medida da altura de energia disponível à entrada da bomba, antes de se iniciar a cavitação.

Chama-se **NPSH disponível** o valor de NPSH calculado a partir das condições de operação da bomba na instalação.

Chama-se **NPSH requerido** o valor de NPSH que a bomba requer para operação livre de cavitação. Este valor é obtido através de ensaios da bomba, devendo ser fornecido pelo fabricante.

Segue-se que a bomba operará com segurança se  $\text{NPSH}_D \geq \text{NPSH}_R$ .

Define-se também **velocidade específica de sucção** por

$$K_s = \omega \frac{\dot{Q}^{1/2}}{(gNPSH)^{3/4}}$$

# 8-3

onde  $\omega$  é a velocidade de rotação do rotor, em rad/s. Recomenda-se  $2,5 \leq K_s \leq 2,8$  a  $3,2$

Uma relação entre  $K_s$  e a velocidade específica pode ser dada por

$$\frac{N_s}{K_s} = \frac{2\pi N \dot{Q}^{1/2}}{(gH)^{3/4}} \div \frac{2\pi N \dot{Q}^{1/2}}{(gNPSH)^{3/4}} = \left( \frac{NPSH}{H} \right)^{3/4}$$

Define-se o **Coefficiente de Thoma** por

$$\sigma_{Th} = \frac{NPSH}{H}$$

e, daí,

$$K_s = \frac{N_s}{\sigma_{Th}^{3/4}} \quad \text{ou} \quad K_s = \frac{2\pi n_s Q}{\sigma_{Th}^{3/4}}$$

Então,

$$\sigma_{th} = \left( \frac{N_s}{K_s} \right)^{\frac{4}{3}}$$

# 8-4

Para bombas geometricamente semelhantes, segue-se da condição de  $K_{s1} = K_{s2}$  que

$$2\pi N_1 \frac{\dot{Q}_1^{1/2}}{[gNPSH_1]^{3/4}} = 2\pi N_2 \frac{\dot{Q}_2^{1/2}}{[gNPSH_2]^{3/4}}, \text{ de onde vem } \frac{N_1}{N_2} = \left( \frac{NPSH_1}{NPSH_2} \right)^{3/4} \left( \frac{\dot{Q}_2}{\dot{Q}_1} \right)^{1/2} = \left( \frac{NPSH_1}{NPSH_2} \right)^{3/4} \left( \frac{N_2 D_2^3}{N_1 D_1^3} \right),$$

$$\text{pois } K_{\dot{Q}} = \frac{\dot{Q}}{(gNPSH)^{3/4}}.$$

Segue-se que

$$\frac{NPSH_1}{NPSH_2} = \left[ \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^{3/2} \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^{3/2} \right]^{4/3} = \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^2$$

# 8-5

O desempenho de uma bomba, que está com cavitação, é severamente prejudicado.

A Fig. 9-2 mostra como H pode variar em função da cavitação.

O ensaio de cavitação pode ser feito da seguinte maneira. Fechando-se VR<sub>1</sub>, a pressão P<sub>1</sub> cai. Com o aumento da vazão, pode aparecer cavitação. A partir desse instante não há mais aumento de vazão com a abertura de VR<sub>2</sub>.

A curva  $NPSH_{crít}$  pode ser obtida ligando-se os pontos sobre as curvas A, B, C, etc., que correspondem a 2 ou 3% de queda de H, sem aparecimento de cavitação.

Na prática, para bombas de água fria, Z<sub>s</sub> é da ordem de 6 m.

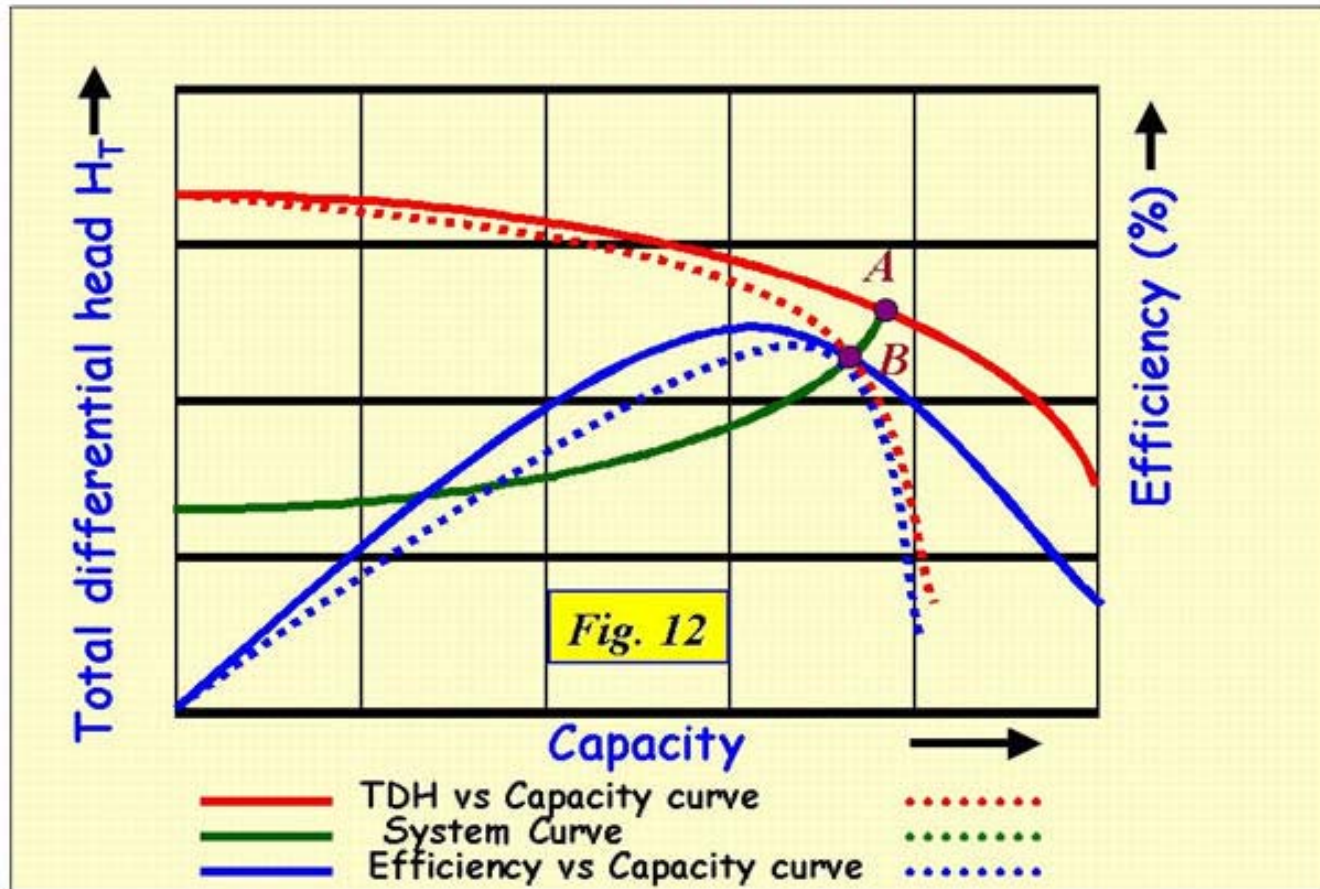
Em turbinas, a cavitação pode ocorrer no bordo de fuga do rotor e no tubo de descarga. É possível evitar cavitação em turbinas submergindo-se sua saída.

Como em grandes instalações hidrelétricas a submersão da máquina exige escavação, cujo custo pode ser muito elevado, tolera-se algum nível de cavitação.

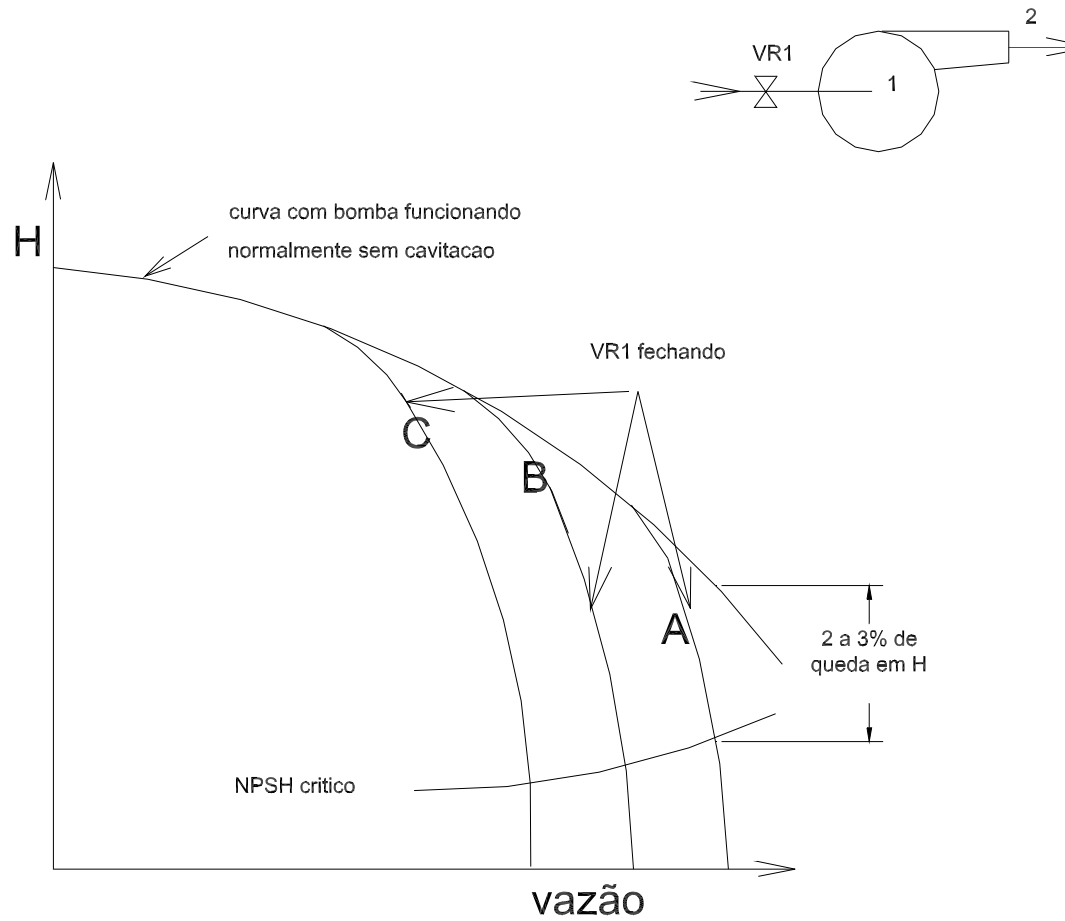
A cavitação, entretanto, pode causar erosão das pás, exigindo paradas da turbina para reparos das partes afetadas.

Como a cavitação ocorre depois do rotor, influi pouco no desempenho da turbina.

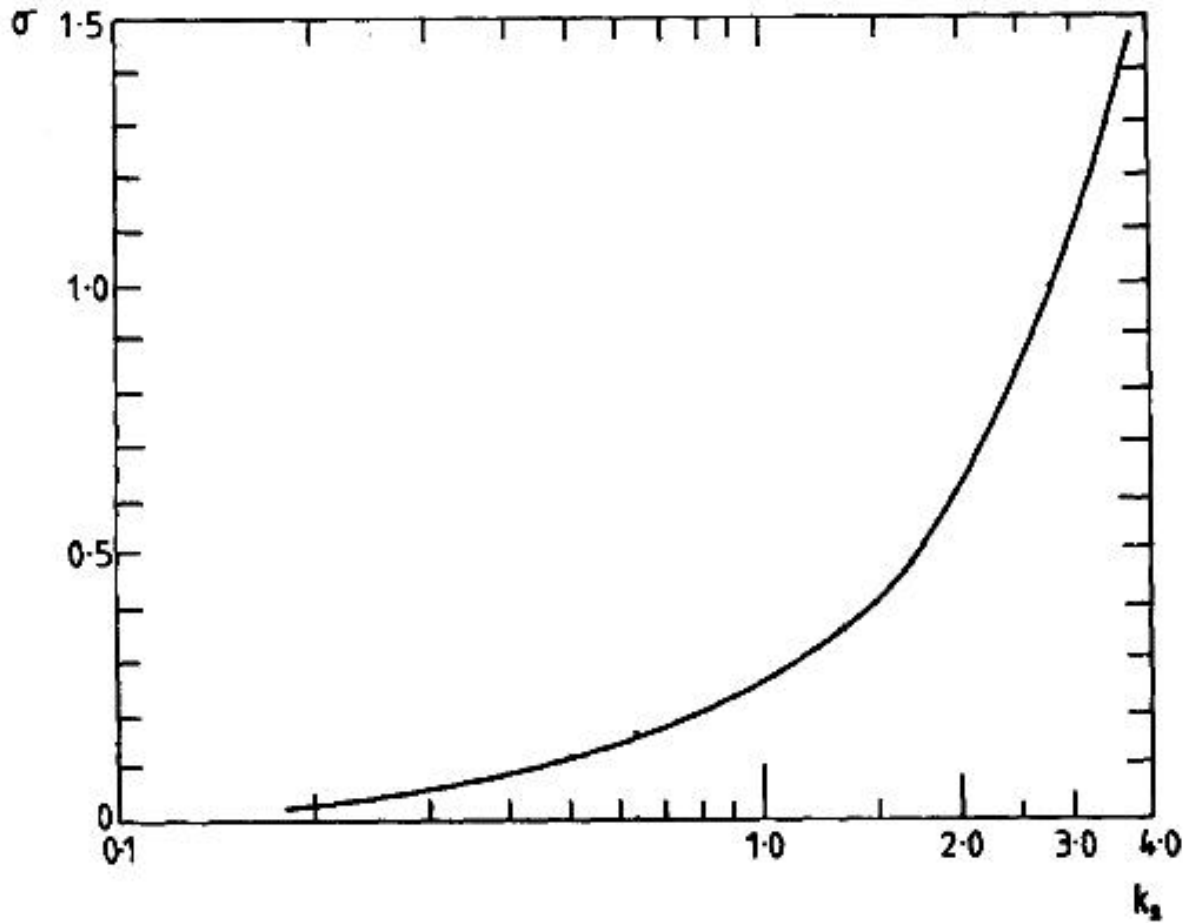
## Performance curves



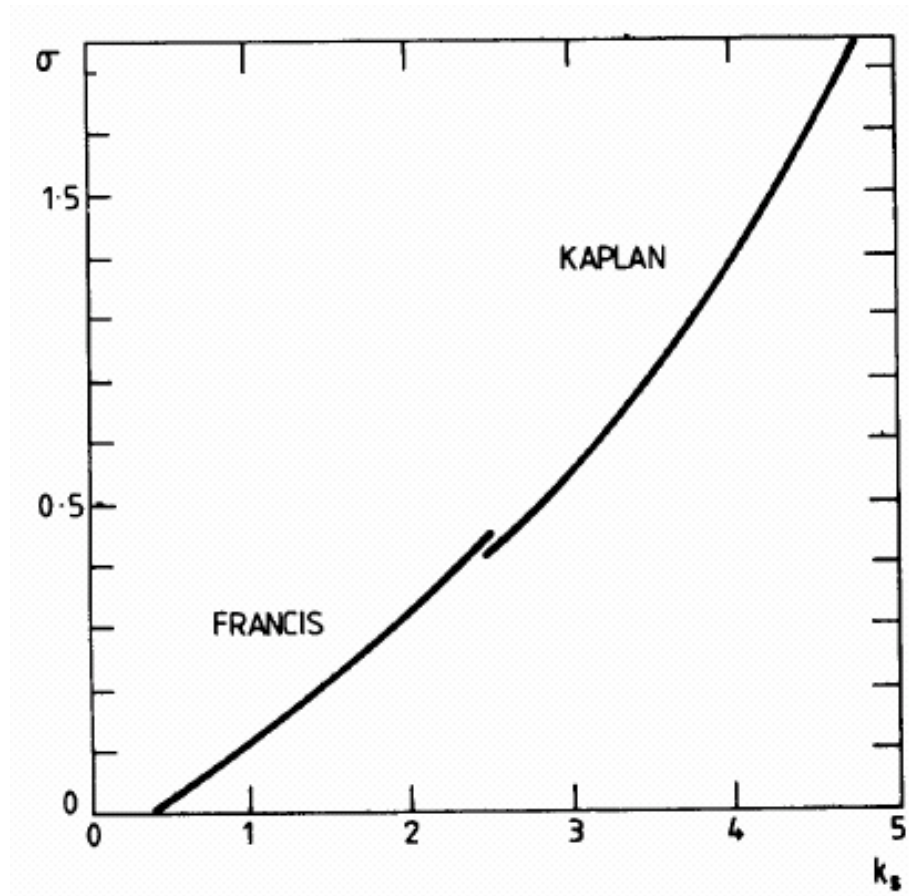




**Figura 8-2 - Efeito da cavitação no desempenho de uma bomba**



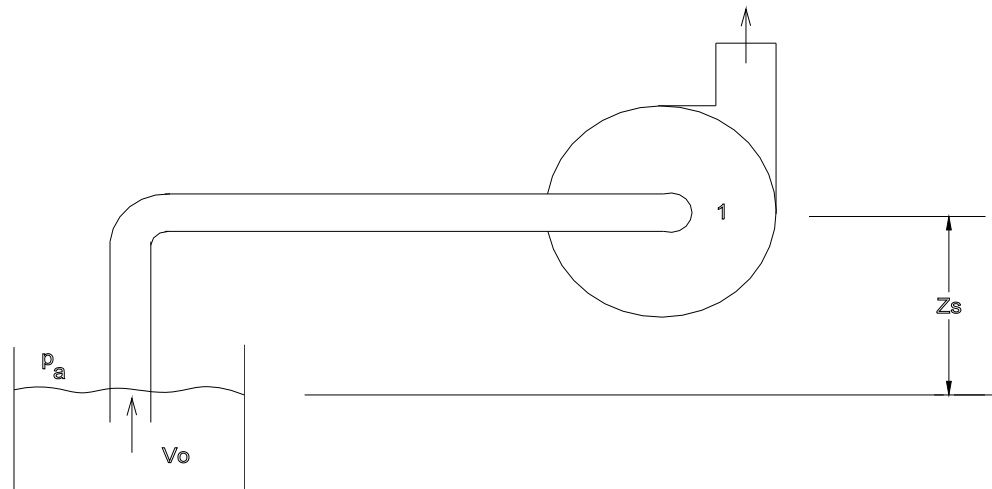
Estimativa do coeficiente de Thoma para bomba



Estimativa do coeficiente de Thoma para turbinas Francis e Kaplan

**Exemplo:** Uma bomba centrífuga, com  $N_s = 2\pi 0,45$  deve bombear  $0,85 \text{ m}^3/\text{s}$  de água a 152 m de altura. A pressão de vapor da água na sucção é de 350 Pa. O reservatório de sucção está ao nível do mar. Calcular a elevação da seção de entrada da bomba para que uma cavitação aceitável seja compatível com  $K_S = 3,2$ . Desprezar as perdas na sucção.

**Solução:**



**Figura 8-3 - Esquema da instalação da bomba**

$$\text{NPSH} = \frac{P_a}{\rho g} - H_s - \frac{P_v}{\rho g} = H_{\text{atm}} - Z_s - H_v$$

(supondo-se que  $H_s = Z_s$  não considerando perdas na entrada).

$$\frac{n_s Q}{K_s} = \left( \frac{\text{NPSH}}{H} \right)^{3/4}$$

de onde resulta

$$\text{NPSH} = (0,45/3,2)^{4/3} H = 0,073128 H = 0,07318 \times 152 = 11,12 \text{ m}$$

$$H_v = 350 / (1000 \times 9,81) = 0,03568 \text{ m}$$

$$Z_s = H_{\text{atm}} - H_v - \text{NPSH} = 101325 / (1000 \times 9,81) - 0,03568 - 11,12 =$$

$$= 10,329 - 0,03568 - 11,12 = -0,830 \text{ m}$$

Segue-se que a bomba deverá estar 0,83 m, no mínimo, submersa.

Note-se que esses cálculos são baseados na diferença de duas grandezas de mesma magnitude, o que pode comprometer a precisão de resultado.

Dados para resolução dos exercícios apresentados neste curso

Pressão de vapor de água:

<b>T (°C)</b>	20	40	60	80	100
<b>P<sub>v</sub> (Pa)</b>	2340	7380	19900	47400	101325

Pressão atmosférica média:

<b>h (m)</b>	0	500	1000	2000
<b>P<sub>a</sub> (Pa)</b>	101325	95300	87900	79600

$$E_a = \frac{P_a}{\rho} + \frac{V_a^2}{2} + gz_a$$

$$E_1 = \frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1$$

$$E_1 = E_a - \text{Perdas}$$

$$\text{Portanto: } E_1 = \frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = E_a - \text{Perdas} = \frac{P_a}{\rho} + \frac{V_a^2}{2} + gz_a - \text{Perdas}$$

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} = \frac{P_a}{\rho} + \frac{V_a^2}{2} - g(z_1 - z_a) - \text{Perdas}$$

$$\begin{aligned} E_{\text{disp}} &= E_1 - \frac{P_v}{\rho} = \frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 - \frac{P_v}{\rho} = \frac{P_1 - P_v}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \\ &= \frac{P_a - P_v}{\rho} + \frac{V_a^2}{2} + gz_a - \text{Perdas} \geq E_{\text{cav}} = g\text{NPSH}_R \end{aligned}$$

Deve-se adotar  $0,40 \leq S_q \equiv \frac{n\sqrt{\dot{Q}}}{[E_{\text{cav}}]^{3/4}} < 0,45$ , com  $S_q$  próximo de 0,45 para melhorar as características

de não-cavitação.



**Exercício:** Para uma bomba que bombeia água aquecida a  $65^{\circ}\text{C}$  conhecem-se  $\dot{Q} = 100 \text{ l/s}$ ,  $N = 1500 \text{ rpm}$ . Calcular  $\Delta z_{\text{máx}}$  sabendo-se que as perdas na tubulação de sucção são de  $10 \text{ J/kg}$ . Qual seria esse  $\Delta z_{\text{máx}}$  se a água estivesse à temperatura ambiente?

## 8.1 COMBATE À CAVITAÇÃO

Primeiramente, é importante entender que, no caso de máquinas hidráulicas, a cavitação é um fator determinante que limita o tamanho mínimo de uma máquina e também impede o aumento da velocidade do escoamento. Então, para uma queda e uma vazão dadas, a tendência é construir máquinas com a maior velocidade específica possível, isto é, de dimensões mais reduzidas, que estão associadas a máquinas mais leves e baratas. Porém, a cavitação é o fator limitante.

Dependendo da instalação, pode-se admitir um certo nível de ruído, corrigir as frequências de ressonância ou mesmo aceitar um certo nível de diminuição de desempenho levando-se em conta o preço da máquina (principalmente para máquinas pequenas) ou até mesmo aceitar um certo nível de erosão desde que seja pequeno e não comprometa o desempenho da máquina ao longo de sua vida útil ou mesmo fazendo algumas manutenções (reposição de metal), se valer a pena em termos de custo-benefício. O que fica inaceitável é se constatar uma forte erosão de uma roda depois de algumas horas de funcionamento.

Identificando as causas do problema gerado pela cavitação pode-se lançar mão de soluções para eliminar ou amenizar o problema. Dependendo da causa, as soluções possíveis são:

- **Aumento da pressão estática local**: este é o procedimento mais simples, em que a pressão local mais elevada irá contribuir para a eliminação da cavitação. Apesar de ser um procedimento aparentemente simples, o aumento da pressão estática local corresponde a uma alteração na instalação (elevação do nível de reservatórios ou recalque de fluido a pressões superiores à local), o que, muitas vezes é impossível de se proceder.
- **Alteração na forma dos perfis**: uma alteração na forma dos perfis irá conduzir a uma mudança de comportamento do escoamento ao seu redor e, com isso, do campo de velocidades e de pressões. O objetivo de tal procedimento será o de obter campos de velocidades com menor intensidade e, assim, campos de pressões mais elevados. Devido à impossibilidade de previsão teórica do desempenho dos perfis, tal medida pode ser tomada após a confecção dos mesmos, o que encarece muito o projeto.
- **Escolha de material resistente**: este procedimento desconsidera as condições de escoamento, concentrando-se apenas na seleção do material mais resistente à sua ação. Com isso a incidência de cavitação se mantém, com os intervalos de manutenção mais espaçados devido à resistência do material selecionado. Ligas de aço inoxidável (Cr-Ni) são mais indicadas para tal serviço.

- **Injeção de ar comprimido**: esta medida é tomada especificamente para atenuar os efeitos da cavitação e da formação de vórtices à entrada de tubos de sucção de turbinas. Este procedimento impõe um aumento localizado da pressão, enquanto o colchão de ar injetado protege a superfície contra o ataque erosivo.
- **Diminuição da velocidade de rotação da máquina**: a diminuição da velocidade de rotação diminuirá a velocidade do escoamento e por consequência aumentará a pressão e portanto diminuirá a cavitação. No entanto, isto pode acarretar em máquinas de dimensões maiores (mantendo a mesma vazão e altura) e portanto, muitas vezes, em máquinas mais caras.

A cavitação é um problema complexo. Muitos estudos têm sido realizados no mundo inteiro. Para as máquinas hidráulicas os estudos mais recentes têm sido na descoberta de novos materiais resistentes à cavitação, na elaboração de técnicas e processos de reparo, códigos numéricos que simulam a dinâmica da bolha no intuito de simular numericamente a cavitação e na elaboração de novas técnicas para detectar a cavitação.

## Referências adicionais

1. “New Monitoring Systems Warns of Cavitation and Low Flow Instabilities”, Pumps and Systems Magazine, April 1996, Robert A. Atkins, Chung E.Lee, Henry F.Taylor
2. “Understanding Pump Cavitation”, Chemical Processing, Feb 1997, W.E. Nelson
3. “Centrifugal pumps operation at off-design conditions”, Chemical Processing April, May, June 1987, Igor J. Karassik
4. “Understanding NPSH for Pumps”, Technical Publishing Co. 1975, Travis F. Glover
5. “Centrifugal Pumps for General Refinery Services”, Refining Department, API Standard 610, 6th Edition, January 1981
6. “Controlling Centrifugal Pumps”, Hydrocarbon Processing, July 1995, Walter Driedger
7. “Don’t Run Centrifugal Pumps Off The Right Side of the Curve”, Mike Sondalini
8. “Pump Handbook”, Third Edition, Igor j. Karassik, Joseph P.Messina, Paul Cooper Charles C.Heald
9. "Centrifugal Pumps and System Hydraulics", *Chemical Engineering*, October 4, 1982, pp. 84-106. , Karassik, I.J.,
10. Unit Operations of Chemical Engineering (5th Edition), McGraw-Hill, 1993, pp. 188- 204. , McCabe, W.L., J.C. Smith, and P. Harriott,
11. “CAVISMONTOR: Cavitation Monitoring In Hydraulic Machines With Aid Of A Computer Aided Visualization Method”, Bernd Bachert, Henrik Lohrberg, Bernd Stoffel Laboratory for Turbomachinery and Fluid Power Darmstadt University of Technology Magdalenenstrasse 4, 64289 Darmstadt, Germany
12. “The Hydraulic Pump Inlet Condition: Impact on Hydraulic Pump Cavitation Potential”, G.E. Totten and R.J. Bishop, Jr.Union Carbide Corporation Tarrytown, NY
13. "Study of Cavitation Collapse Pressure and Erosion, Part I: A Method for Measurement of Collapse Pressure", Wear, 1989, Vol. 133, p.219-232, T. Okada, Y. Iwai and K. Awazu, 14. “Key Centrifugal Pump Parameters and How They Impact Your Applications” Part 1 Pumps and Systems: They Go Together, Doug Kriebel, PE, Kriebel Engineered Equipment

15. “How to compute Net Positive Suction Head for centrifugal pumps”. J. J. Paugh, P.E. Vice President, Engineering, Warren Pumps Inc.
16. “New Monitoring System Warns of Cavitation and Low-Flow Instabilities”, APRIL 1996 PUMPS AND SYSTEMS MAGAZINE, Robert A. Atkins, Chung E. lee and Henry F. Taylor
17. “Detecting Cavitation in Centrifugal Pumps”, Experimental Results of the Pump Laboratory, Jeremy Jensen Project Engineer, Bentley Rotor Dynamics Research Corporation

## **9. INSTALAÇÕES HIDRÁULICAS. seleção de bombas e ventiladores**

As máquinas de fluxo são utilizadas em sistemas diversos, constituídos por dutos, válvulas, curvas, reduções, derivações, reguladores de pressão etc. A vazão movimentada pela bomba é a mesma que circula pelo sistema; a potência fornecida pela bomba deve ser a mesma absorvida pelo sistema.

### **9.1 SELEÇÃO DE BOMBAS**

A vazão de massa e o diferencial de pressão (ou de vazão volumétrica e de altura de energia) são estabelecidos para cada aplicação. A bomba é geralmente acionada diretamente por um motor, o que fixa a sua rotação igual à do motor que a aciona. O fabricante da bomba deve garantir uma eficiência mínima de operação da bomba, baseando-se nas variações de carga e de vazão. A escolha do tipo axial ou centrífuga depende do tipo da instalação.

Em geral, o projetista deve resolver um problema envolvendo:

- tipo (axial/centrífuga)
- tipo de fluido (nem sempre é água): densidade, viscosidade, abrasividade (partículas sólidas em suspensão), acidez, etc.
- eficiência mínima
- rpm da bomba
- característica de potência x vazão de massa (para proteção do motor, se for o caso)
- espaço para instalação da bomba e do motor
- nível de ruído máximo



A seleção de uma bomba inicia-se, geralmente, pela análise do parâmetro velocidade específica  $n_s$ . A velocidade específica relaciona vazão com altura de carga a uma velocidade definida. Velocidade específica  $n_s$  grande significa altura de carga baixa; quanto maior a vazão, maior a rotação específica.

Diversas informações podem ser obtidas da análise de  $n_s$ . Por exemplo:

a) **com relação ao tamanho (diâmetro) da máquina:**

Para vazão e rotação determinadas, a máquina será tanto maior quanto menor for o valor numérico de  $n_s$  ou vice-versa, pois precisa de rotores com relações de diâmetros  $D_e/D_i$  grandes para produzir a altura de carga elevada.

De fato,  $n_s$  pequeno está associado com  $H$  elevado e este, por sua vez, com  $U$  elevado. Fixada sua rotação,  $D$  deve ser, portanto, também elevado. De fato,  $n_s$  pequeno está associado com  $H$  elevado e este, por sua vez, com  $U$  elevado. Fixada a rotação,  $D$  deve ser, portanto, também elevado.

b) com relação à altura de carga:

Para vazão determinada, se  $n_s$  for pequeno, em geral a máquina será menor e/ou rodará mais devagar; para  $n_s$  grande, a máquina será maior e/ou rodará mais rápida.

Se apenas são dados a vazão de massa e o diferencial de pressão para a seleção de uma bomba, então, a partir de

$$n_s = N \frac{\left( \frac{\dot{m}}{\rho} \right)^{1/2}}{\left( \frac{\Delta P}{\rho} \right)^{3/4}} = N \frac{\dot{Q}^{1/2}}{(gH)^{3/4}}$$

determina-se N.

A especificação de  $N$  é feita levando-se em conta que  $N = 60 \frac{f}{\frac{n_p}{2}}$ , sendo  $f$  a frequência da rede (Hz) e  $n_p$  o número de polos do motor. Pondo

$$A = \frac{\left(\frac{\dot{m}}{\rho}\right)^{1/2}}{\left(\frac{\Delta P}{\rho}\right)^{3/4}}$$

tem-se

$$n_s = AN = 60A \frac{f}{\frac{n_p}{2}}$$

Desta forma, escolhendo-se  $N$ , tem-se o valor de  $n_s$  e, portanto, sabe-se qual o tipo de máquina mais adequada para a aplicação.

A escolha de  $N$  deve levar em conta que a rotação do motor é menor do que a rotação de sincronismo, determinada pela frequência da rede elétrica a que será

ligado, devido ao fenômeno do **escorregamento**.

Pode-se escolher o tipo de motor apropriado (escolhendo o número de polos) para se obter  $n_s$  adequado (como no caso de utilização de uma bomba já existente, cujo  $n_s$  é conhecido)

A seleção final deve também ser baseada na avaliação dos custos. Para uma determinada aplicação (vazão e pressão determinados),

- Máquinas com velocidades específicas altas são menores e mais baratas, embora possam ser menos eficientes.
- Máquinas pequenas consomem pouca energia: o investimento inicial é importante.
- Máquinas grandes consomem muita energia: devem ser muito eficientes, para reduzir o custo operacional.

Fixado o tipo e a rotação, pode-se estimar o diâmetro do rotor da bomba:

Com

$$K_{\dot{Q}} = \frac{\dot{Q}}{ND^3} \text{ e com } K_H = \frac{gH}{N^2 D^2}$$

pode-se calcular o diâmetro específico  $D_s = \frac{K_H^{1/4}}{K_{\dot{Q}}^{1/2}} = \dots = \frac{(gH)^{1/4}}{\dot{Q}^{1/2}} D$

Para uma bomba escolhida, conhecendo-se  $K_{\dot{Q}}$ ,  $K_H$  calcula-se  $D_s$  e, a partir de  $D_s$  calcula-se o seu diâmetro  $D$ .

Em problemas práticos usualmente é fixada a rotação  $N$ .

Calcula-se a velocidade específica  $n_s$  e não se encontra disponível no mercado qualquer tipo de bomba com a característica desejada. Então, uma bomba especial

deve ser projetada e fabricada.

Entretanto, os custos de projeto e fabricação podem ser muito altos e são justificados provavelmente apenas nos casos de máquinas de altas capacidades, que são produzidas para atenderem características muito especiais. Assim, deve-se escolher uma bomba disponível no mercado, com  $n_s$  maior e o mais próximo possível do valor calculado.

Neste caso, a bomba não funcionará no ponto ótimo, mas à direita dele (maior vazão). Não se usa  $n_s$  menor porque, para alguns tipos de bombas, o ponto de operação pode ser instável.

**Exemplo:** Deve-se selecionar uma bomba para bombear  $0,5 \text{ m}^3/\text{s}$  de água, de um reservatório subterrâneo a 7 m abaixo da superfície, para um reservatório a 20 m acima da superfície. São conhecidos:

- Perdas nos dutos e bomba são equivalentes a 52 m  $\text{H}_2\text{O}$ .
- A bomba deve ser acionada diretamente por um motor AC síncrono.
- Três bombas são disponíveis e as suas características são dadas.
- Considerar que a cavitação segue as leis de similaridade.
- A pressão ambiente é de 750 mm Hg
- A altura de energia do vapor saturado é de 0,2 m.
- Para as bombas operando no ponto de máxima eficiência tem-se:

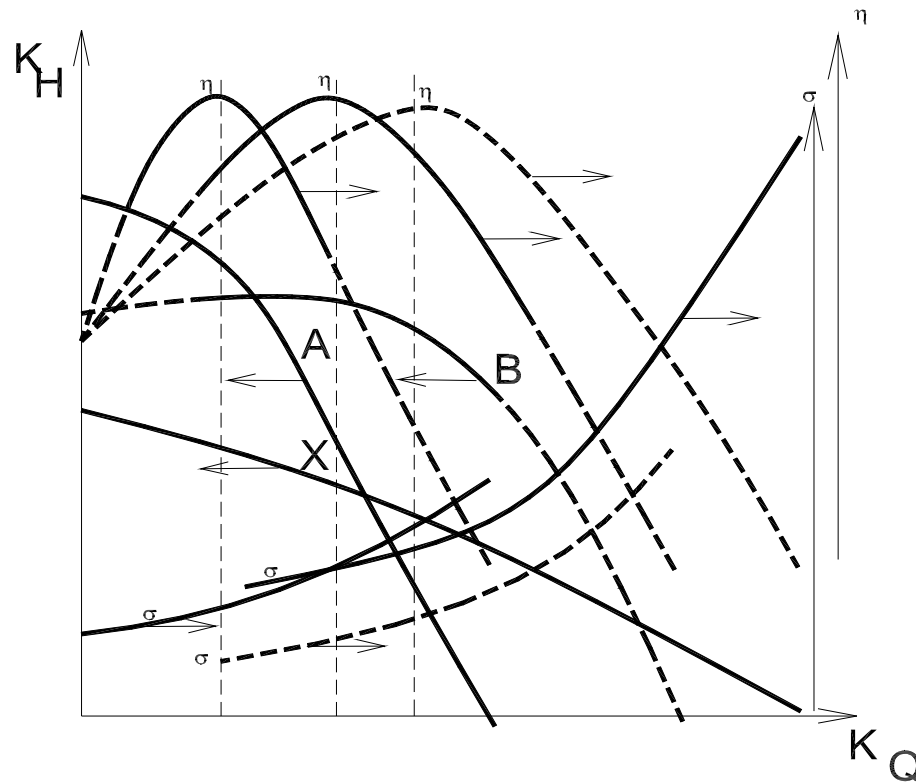


Figura 9-0 – Características das bombas disponíveis no mercado



bomba s	KQ	KH	n <sub>s</sub>	$\sigma_{th}$
A	0,07	6,75	0,0631	0,055
B	0,20	5,50	0,1250	0,035
C	0,16	2,80	0,1850	0,085

**Solução:**

As informações dadas permitem obter diretamente:

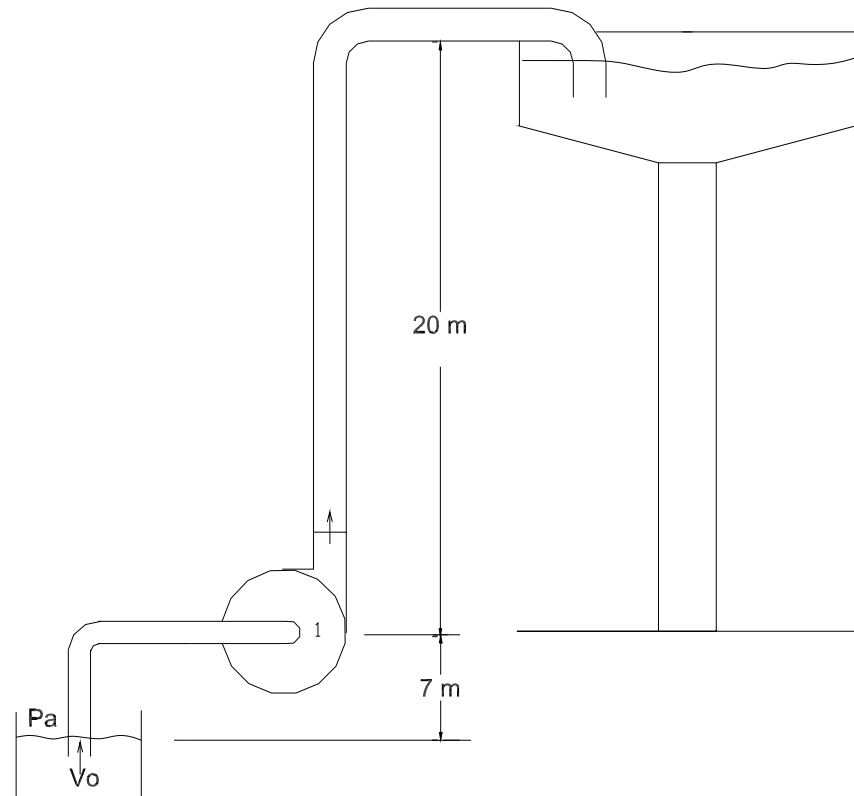
$$\dot{Q} = 0,5 \text{ m}^3/\text{s} \text{ (vazão requerida)}$$

$$H = (20+7) + 52 = 79 \text{ m (altura de carga requerida)}$$

$$n_s = N (0,5)^{0,5} / (9,81 \times 79)^{0,75} = N / 207,7 \text{ (N em rps)}$$

Montando-se a tabela seguinte, para as possíveis configurações e rotações do motor elétrico, considerando-se um escoarregamento de 4% no motor:

<b>Nº polos</b>	<b>N<sub>sinc</sub></b>	<b>N<sub>nom</sub></b>	<b>N<sub>s</sub> calc</b>
<b>2</b>	3600	3456	<b>0,2770</b>
<b>4</b>	1800	1728	<b>0,1390</b>
<b>6</b>	1200	1152	<b>0,0925</b>
<b>8</b>	900	864	<b>0,0690</b>
<b>10</b>	720	691	<b>0,0550</b>
<b>12</b>	600	576	<b>0,0460</b>
<b>14</b>	514	493	<b>0,0395</b>
<b>16</b>	450	432	<b>0,0347</b>



**Figura 9-1 - Esquema da instalação**

Então, pode-se escolher:

ou a bomba A girando a 720 rpm

$$n_s = 0,0631 \quad \text{e} \quad n_{s, \text{calc}} = 0,055$$

ou a bomba B girando a 1200 rpm

$$n_s = 0,125 \quad \text{e} \quad n_{s, \text{calc}} = 0,0925$$

ou a bomba C girando a 1800 rpm

$$n_s = 0,185 \quad \text{e} \quad n_{s, \text{calc}} = 0,139)$$

A bomba C será descartada porque o valor de  $n_s$  está muito acima do valor requerido. As bombas A e B serão, portanto, as analisadas.

**Para a bomba A:**

Quer-se  $n_s = 0,055$  e tem-se uma bomba disponível com  $n_s = 0,0631$ .

Para se achar o ponto de operação, deve-se recorrer às curvas  $K_H \times K_Q$ .

De curvas semelhantes às da Figura 10-2 abaixo obtém-se

$K_Q$	$K_H$	$n_s$
0,07	6,75	0,06310
0,08	6,20	0,07198
0,06	7,00	0,05700
0,058	6,90	0,05650

Com a precisão com que se pode ler os valores de  $K_Q$  e  $K_H$  na figura, pode-se concluir que os valores de

$$K_Q = 0,058$$

e de

$$K_H = 6,9$$

definem o ponto de operação desejado, com  $n_s = 0,055$ .

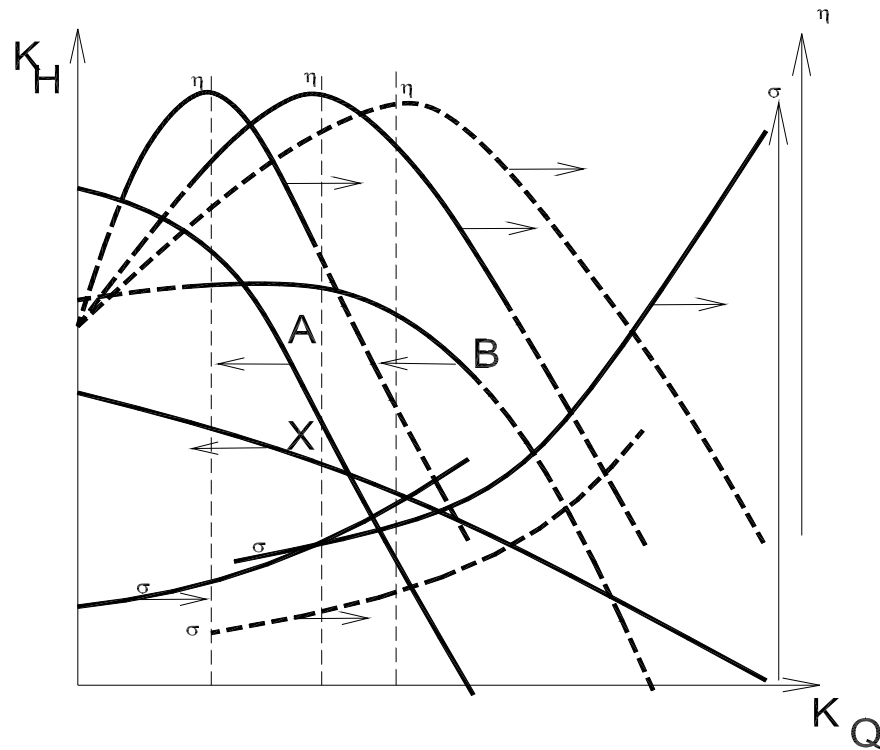


Figura 9-2 - Características adimensionais das bombas A, B e C (ilustrativo)

Portanto, a bomba operará com  $K_Q = 0,058$  e  $K_H = 6,9$ , com eficiência de 79%.

O diâmetro será

$$D = \left( \frac{\dot{Q}}{NK_Q} \right)^{1/3} = \left( \frac{0,5}{\frac{691}{60} \times 0,058} \right)^{1/3} = 0,908 \text{ m.}$$

A potência será

$$\dot{W} = \frac{\dot{m}g\Delta H}{\eta} = \frac{\rho\dot{Q}g\Delta H}{\eta} = \frac{(1000)(0,5)(9,81)(79)}{0,79} = 490.500 \text{ W} = 490,5 \text{ kW}$$

$$\sigma_{th} = \frac{NPSH}{\Delta H} = 0,06 \text{ (da curva)}$$

e, daí,



$$\text{NPSH} = 0,06 \Delta H = (0,06)(79) = 4,74 \text{ m}$$

$$H_s = \frac{P_a}{\rho g} - \frac{P_v}{\rho g} - \text{NPSH} = 10,2 - 0,2 - 4,74 = 5,26 \text{ m.}$$

Isto significa que a máxima altura de sucção, incluindo as perdas nos dutos, não deve exceder 5,26 m, para não haver cavitação.

Como o nível da água está a 7m abaixo da superfície, a bomba deverá ser instalada a  $7 - 5,26 = 1,74 \text{ m}$  abaixo da superfície, no mínimo.

**Para a bomba B:**

Quer-se  $n_s = 0,0925$  e tem-se uma bomba disponível com 0,125. Similarmente ao realizado com relação à bomba A:

<b>K<sub>Q</sub></b>	<b>K<sub>H</sub></b>	<b>n<sub>s</sub></b>
0,20	5,50	0,1250
0,15	6,00	0,1010
0,10	6,00	0,0825
0,12	6,00	0,0904

Ter-se-á que o ponto determinado será dado por  $K_Q = 0,12$  e  $K_H = 6,0$

Então, a bomba operará com  $K_Q = 0,12$  e  $K_H = 6,0$  e com eficiência de 69%.

O diâmetro será

$$D = \left( \frac{\dot{Q}}{NK_{\dot{Q}}} \right)^{1/3} = \left( \frac{0,5}{\frac{1152}{60} \times 0,12} \right)^{1/3} = 0,600 \text{ m.}$$

A potência será

$$\dot{W} = \frac{\dot{m}g\Delta H}{\eta} = \frac{\rho\dot{Q}g\Delta H}{\eta} = \frac{(1000)(0,5)(9,81)(79)}{0,69} = 561.600 \quad (561,6 \text{ kW})$$

$$\sigma_{th} = \frac{NPSH}{\Delta H} = 0,025 \text{ (da curva)}$$

e, daí,

$$NPSH = 0,025 \Delta H = (0,025)(79) = 1,98 \text{ m}$$

$$H_s = \frac{P_a}{\rho g} - \frac{P_v}{\rho g} - NPSH = 10,2 - 0,2 - 1,98 = 8,02 \text{ m.}$$

A bomba B poderá, então, ser instalada na superfície, desde que esteja bem perto do reservatório, para que todas as perdas fiquem do lado da descarga. A bomba B será menor do que a bomba A. Será a escolhida, então, para operar a  $N = 1200$  rpm (sincronismo; 1152 nominal)., baseando-se em fatores geométricos. Uma análise econômica seria, entretanto, necessária.

Resumo: diâmetro:  $D = 0,600$  m  
eficiência:  $\eta = 0,69$   
potência:  $P = 561,6$  kW.

## 9.2 INSTALAÇÕES HIDRÁULICAS

As máquinas hidráulicas são instaladas em sistemas de bombeamento complexos, compostos geralmente por dutos de diversas dimensões e comprimentos, curvas, flanges, bifurcações, junções, válvulas, etc.. O fluxo através desses componentes gera diversos tipos perdas, dentre elas atrito, separação, etc., de tal forma que o desempenho das máquinas hidráulicas instaladas não depende apenas das suas características, mas também das características de toda a instalação.

A bomba deve ter capacidade para vencer todas as perdas de carga que aparecem, desde a sucção até a descarga. As perdas de carga no sistema são geralmente calculadas através da determinação dos **comprimentos equivalentes**, ou da **resistência do sistema**.

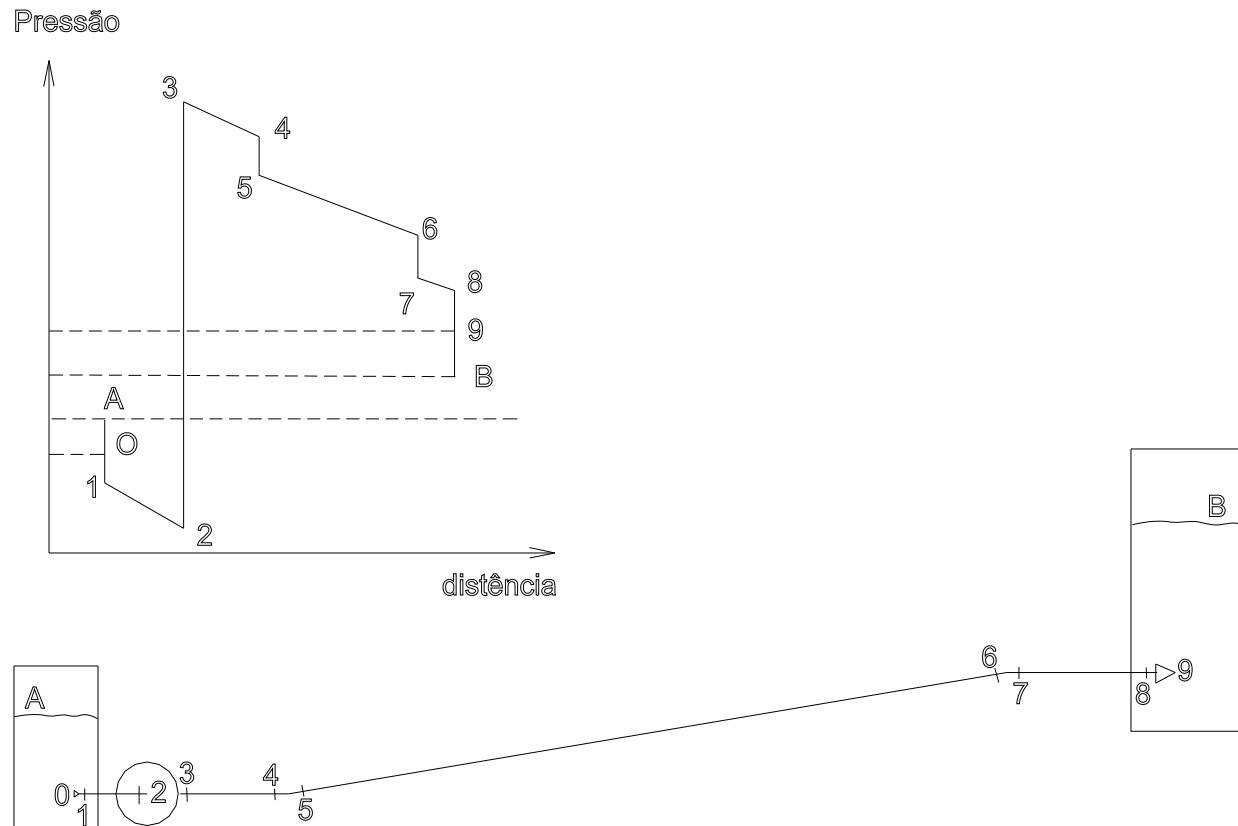
Como as perdas são proporcionais ao quadrado da velocidade média do

escoamento e, portanto, são proporcionais ao quadrado da vazão, pode-se escrever que, para cada um dos componentes do sistema de bombeamento

$$\Delta H = k\dot{Q}^2$$

**# 9-1**

onde k é um coeficiente que leva em conta a geometria e o tipo de fluxo no componente em análise. Assim, para que a vazão  $\dot{Q}$  seja passada pelo componente, energia equivalente à dada pela equação # 9-1 deve ser suprida à instalação.



**Figura 9-3 - Esquema da instalação com indicação de perdas**

Tendo-se em conta o esquema acima, para elevar a água do nível A até o nível B,

$$\frac{W_e}{g} = \Delta z + k \dot{Q}^2$$

onde k é um coeficiente global, isto é,

$$k = k_{01} + k_{12} + k_{34} + k_{45} + k_{56} + k_{67} + k_{78} + k_{89}$$

com  $k_{ij}$  representando o coeficiente de comprimento equivalente do componente  $ij$ .

É comuns definir o coeficiente de sucção,  $K_s$ , e o de descarga,  $K_d$ , englobando, cada qual, as perdas na sucção e na descarga da bomba.

No caso,

$$K_s = k_{01} + k_{12} \text{ (perdas de entrada e de atrito)}$$

com

$$h_s = K_s \dot{Q}^2$$



e

$$K_d = k_{34} + k_{45} + k_{56} + k_{67} + k_{78} + k_{89}$$

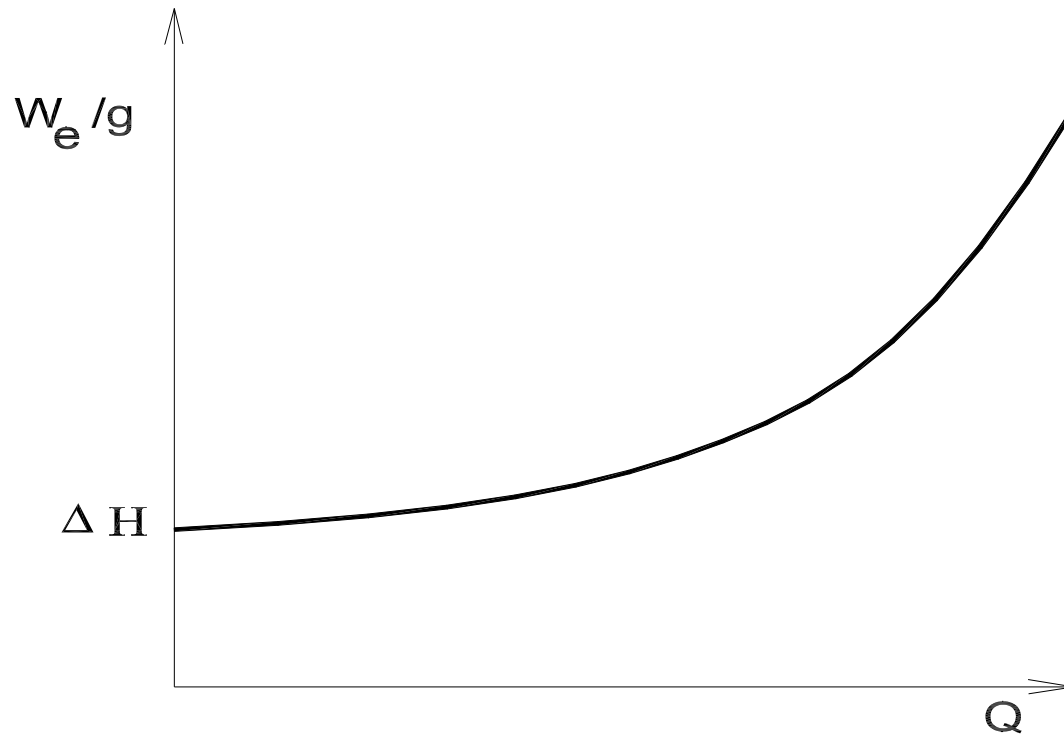
(perdas de atrito e nas curvas + perdas de saída)

com

$$h_d = K_d \dot{Q}^2$$

Logo,

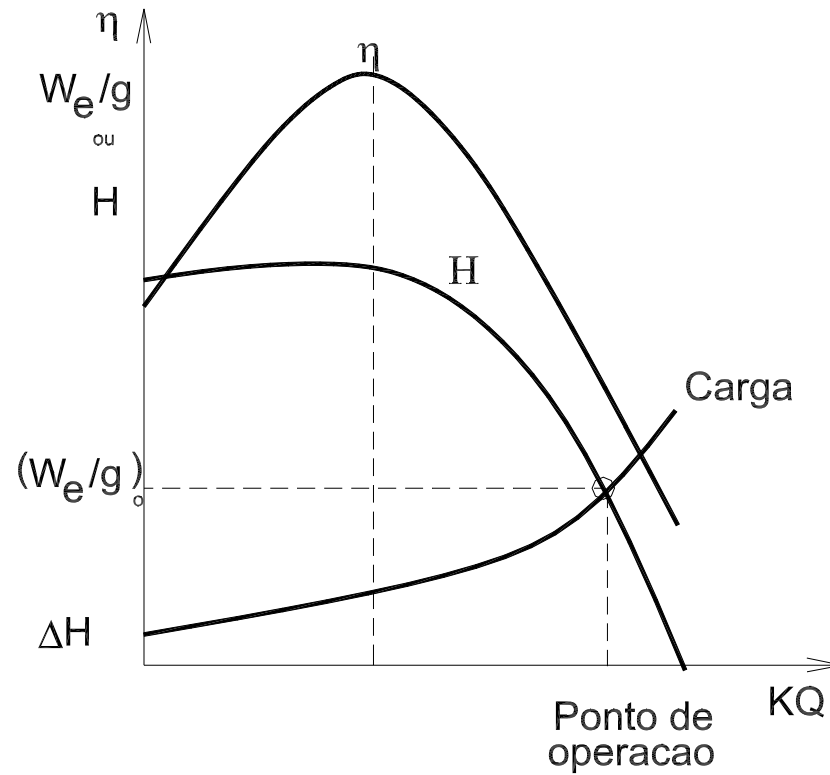
$$\frac{W_e}{g} = \Delta z + \underbrace{h_s + h_d}_{\substack{\text{para} \\ \text{vencer} \\ \text{as} \\ \text{perdas}}} + \underbrace{\Delta \frac{V^2}{2}}_{\approx 0} = \Delta z + (K_s + K_d) \dot{Q}^2$$



**Figura 9-4 - Curva de carga de uma instalação**

O ponto de funcionamento da bomba poderá ser obtido superpondo-se a curva  $W_e/g$  versus vazão volumétrica sobre a curva da bomba.

É importante observar que se a estimativa de carga não for bem feita, o ponto de operação pode se afastar muito do ponto de máxima eficiência e, em consequência, aumentar indesejavelmente a potência consumida.



**Figura 9-5- Determinação do Ponto de Operação da bomba**

### 9.3 BOMBAS EM SÉRIE E EM PARALELO

Em instalações em que uma única bomba não é suficiente para bombear a quantidade de água necessária, vencendo a altura de energia requerida, pode-se recorrer ao emprego de 2 ou mais bombas associadas em série e/ou em paralelo.

Conhecendo-se as características de 2 bombas  $B_1$  e  $B_2$ , podem-se calcular as características dos conjuntos P (2 bombas em paralelo) ou S (duas bombas em série), observando-se que:

- a) no conjunto P (**bombas em paralelo**) as duas bombas devem produzir o mesmo H, enquanto que a vazão deverá ser a soma das vazões das bombas  $B_1$  e  $B_2$ .
- b) No conjunto S (**bombas em série**) a vazão é a mesma nas duas bombas  $B_1$  e  $B_2$ , mas a altura de energia do conjunto é a soma das alturas de energia das bombas  $B_1$  e  $B_2$ .

**MÁQUINAS DE FLUXO**  
**NOTAS DE AULAS - 2010**

9-32/91

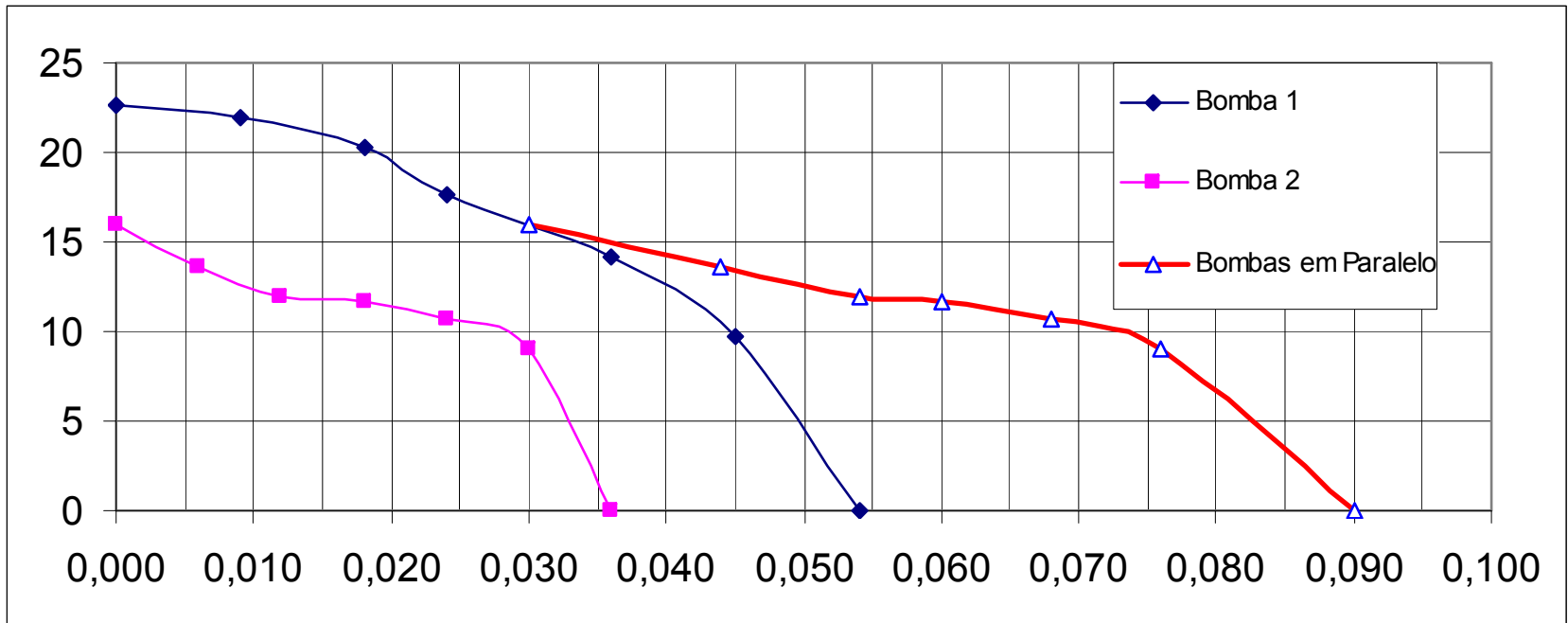
	$\dot{Q}$	0	0,006	0,012	0,018	0,024	0,030	0,036
<b>B1</b>	$H_{B1}$ (m)	22,6	21,9	20,3	17,7	14,2	9,7	3,9
	$\eta_{B1}$ (%)	0	32	74	86	85	66	28
<b>B2</b>	$H_{B2}$ (m)	16,0	13,6	11,9	11,6	10,7	9,0	6,4
	$\eta_{B2}$ (%)	0	14	34	60	80	80	60

<b>A//B</b>	<b>H</b>	<b>16,2</b>	<b>13,6</b>	<b>11,9</b>	<b>11,6</b>	<b>10,7</b>	<b>9,0</b>	<b>6,4</b>
	<b>Qa</b>	<b>0,021</b>	<b>0,0245</b>	<b>0,027</b>	<b>0,0275</b>	<b>0,0282</b>	<b>0,031</b>	<b>0,033</b>
	<b>Qb</b>	<b>0,000</b>	<b>0,006</b>	<b>0,012</b>	<b>0,018</b>	<b>0,024</b>	<b>0,030</b>	<b>0,036</b>
	<b>Qa//b</b>	<b>0,021</b>	<b>0,031</b>	<b>0,039</b>	<b>0,046</b>	<b>0,052</b>	<b>0,061</b>	<b>0,069</b>

# MÁQUINAS DE FLUXO

## NOTAS DE AULAS - 2010

9-33/91

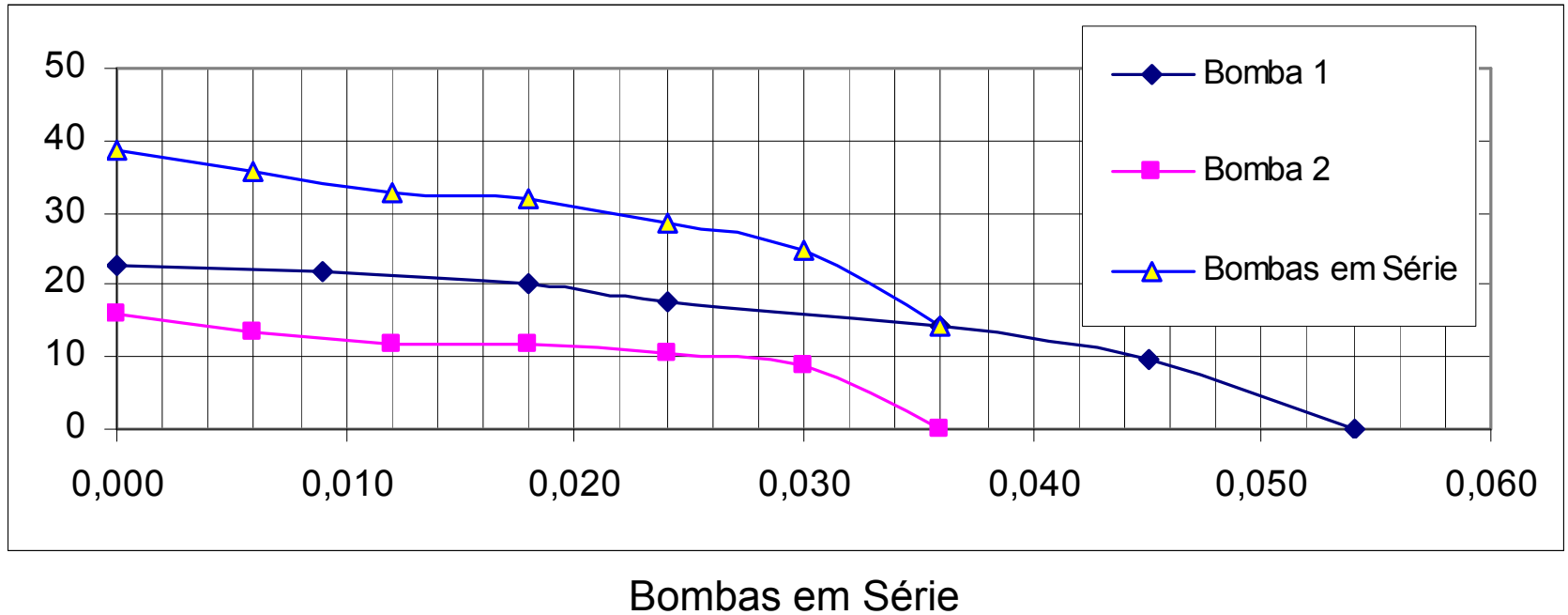


Bombas em Paralelo

# MÁQUINAS DE FLUXO

## NOTAS DE AULAS - 2010

9-34/91





c) A eficiência do conjunto P (bombas em paralelo) pode ser calculada por

$$\dot{W}_{B1} = \frac{\dot{m}_{B1} g H_{B1}}{\eta_{B1}} \quad \dot{W}_{B2} = \frac{\dot{m}_{B2} g H_{B2}}{\eta_{B2}}$$

$$\dot{W}_P = \dot{W}_{B1} + \dot{W}_{B2} = \frac{\dot{m}_{B1} g H_{B1}}{\eta_{B1}} + \frac{\dot{m}_{B2} g H_{B2}}{\eta_{B2}}$$

$$\dot{W}_P = g H_P \left( \frac{\dot{m}_{B1}}{\eta_{B1}} + \frac{\dot{m}_{B2}}{\eta_{B2}} \right), \text{ pois a altura de energia do conjunto é igual à das bombas;}$$

Então,

$$\eta_P = \frac{m_P g H_P}{\dot{W}_P} = \frac{m_P g H_P}{g H_P \left( \frac{\dot{m}_{B1}}{\eta_{B1}} + \frac{\dot{m}_{B2}}{\eta_{B2}} \right)} = \frac{m_P}{\left( \frac{\dot{m}_{B1}}{\eta_{B1}} + \frac{\dot{m}_{B2}}{\eta_{B2}} \right)}$$

$$\eta_p = \frac{\dot{m}_{B1} + \dot{m}_{B2}}{\dot{m}_{B1} \eta_{B2} + \dot{m}_{B2} \eta_{B1}} \eta_{B1} \eta_{B2}$$

d) A eficiência do conjunto S (bombas em série) pode ser calculada por:

$$\dot{W}_S = \dot{W}_{B1} + \dot{W}_{B2} = \frac{\dot{m}_{B1} g H_{B1}}{\eta_{B1}} + \frac{\dot{m}_{B2} g H_{B2}}{\eta_{B2}} = \dot{m}_S g \left( \frac{H_{B1}}{\eta_{B1}} + \frac{H_{B2}}{\eta_{B2}} \right)$$

$$\eta_S = \frac{m_S g H_S}{\dot{W}_S} = \frac{m_S g H_S}{\dot{m}_S g_P \left( \frac{H_{B1}}{\eta_{B1}} + \frac{H_{B2}}{\eta_{B2}} \right)} = \frac{H_S}{\left( \frac{H_{B1}}{\eta_{B1}} + \frac{H_{B2}}{\eta_{B2}} \right)}$$

$$\eta_P = \frac{H_{B1} + H_{B2}}{H_{B1} \eta_{B2} + H_{B2} \eta_{B1}} \eta_{B1} \eta_{B2}$$

e) Exemplo: Sejam as características das bombas B<sub>1</sub> e B<sub>2</sub> as seguintes:

	$\dot{Q}$	0	0,006	0,012	0,018	0,024	0,030	0,036
<b>B1</b>	$H_{B1}$ (m)	22,6	21,9	20,3	17,7	14,2	9,7	3,9
	$\eta_{B1}$ (%)	0	32	74	86	85	66	28
<b>B2</b>	$H_{B2}$ (m)	16,0	13,6	11,9	11,6	10,7	9,0	6,4
	$\eta_{B2}$ (%)	0	14	34	60	80	80	60

Calcular as características do conjunto S montado com as duas bombas em série, quando estiver operando em um sistema de bombeamento cuja característica é dada por  $H = 20 + 8,5 \times 10^4 \dot{Q}^2$ .

Solução:

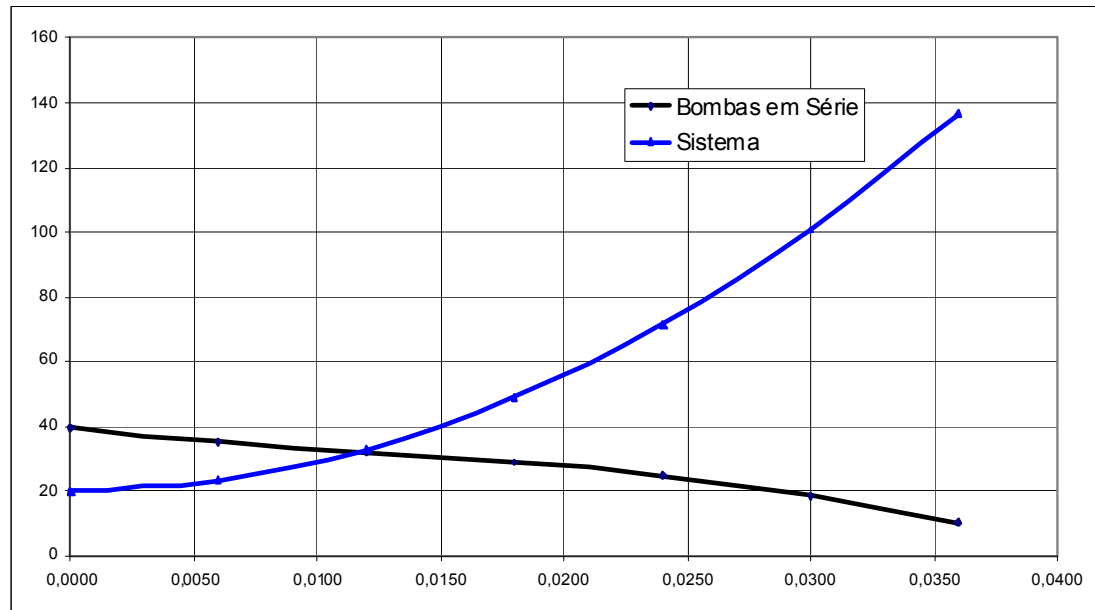
A característica do conjunto S é obtida diretamente da tabela anterior, sabendo-se que a vazão é a mesma em cada bomba e que a altura de energia do conjunto é a soma das alturas de energia das duas bombas. Assim,

	$\dot{Q}$	0	0,006	0,012	0,018	0,024	0,030	0,036
<b>S</b>	$H_S$ (m)	38,8	35,5	32,2	29,3	24,9	18,7	10,3

A característica do sistema será, calculada pela expressão fornecida:

	$\dot{Q}$	0	0,006	0,012	0,018	0,024	0,030	0,036
<b>S</b>	$H_S$ (m)	20,0	23,06	32,24	47,54	68,96	96,5	130,16

O ponto de operação é determinado através da leitura dos valores de vazão e de altura de energia no gráfico da figura abaixo, construído a partir das informações obtidas anteriormente. Neste exemplo em particular, a comparação dos resultados acima permite obter diretamente o valor da vazão através do conjunto S, que vale  $\dot{Q} = 0,012\text{m}^3 / \text{s}$ .



Portanto,  $H_{B1} = 20,3\text{m}$ ,  $\eta_{B1} = 0,74$ ;  $H_{B2} = 11,9\text{m}$  e  $\eta_{B2} = 0,34$ .

Daí,

$$\eta_s = \frac{20,3 + 11,9}{0,34 \times 20,3 + 0,74 \times 11,9} \times 0,74 \times 0,34 = 0,5157 \text{ ou } 51,57\%.$$

## 9.4 VARIAÇÃO DA ROTAÇÃO E O SISTEMA

A variação da rotação  $N$  causa a alteração do escoamento no sistema de bombeamento, alterando as perdas nos diversos componentes. Em decorrência, o ponto de operação da bomba é alterado.

O novo ponto de operação da bomba no sistema pode ser previsto a partir da compatibilização das características da bomba com as do sistema.

$$K_{\dot{Q}} = \frac{\dot{Q}}{ND^3} = \text{constante}$$

$$K_H = \frac{W_e}{N^2 D^2} = \frac{gH}{N^2 D^2} = \text{constante}$$

$$H_{\text{sist}} = \Delta z + K\dot{Q}^2$$

Uma bomba operando num sistema tem as características (o diâmetro  $D$  é fixo)

que podem ser determinadas de  $\frac{\dot{Q}}{N} = \text{constante}$

$$\dot{Q}_2 = \frac{N_2}{N_1} \dot{Q}_1$$

e de  $\frac{W_e}{N^2} = \text{constante}$

$$H_2 = \left( \frac{N_2}{N_1} \right)^2 H_1$$

Eliminando-se  $N$ ,

$$H_2 = \left( \frac{\dot{Q}_2}{\dot{Q}_1} \right)^2 H_1$$

Vê-se que, para a obtenção do ponto de operação de uma bomba no sistema, o procedimento não é direto. Se, entretanto, o sistema for apenas resistivo, isto é,  $\Delta z = 0$ :

$$H_2 = \left( \frac{H_1}{\dot{Q}_1^2} \right) \dot{Q}_2^2 = K_1 \dot{Q}_2^2$$

ou

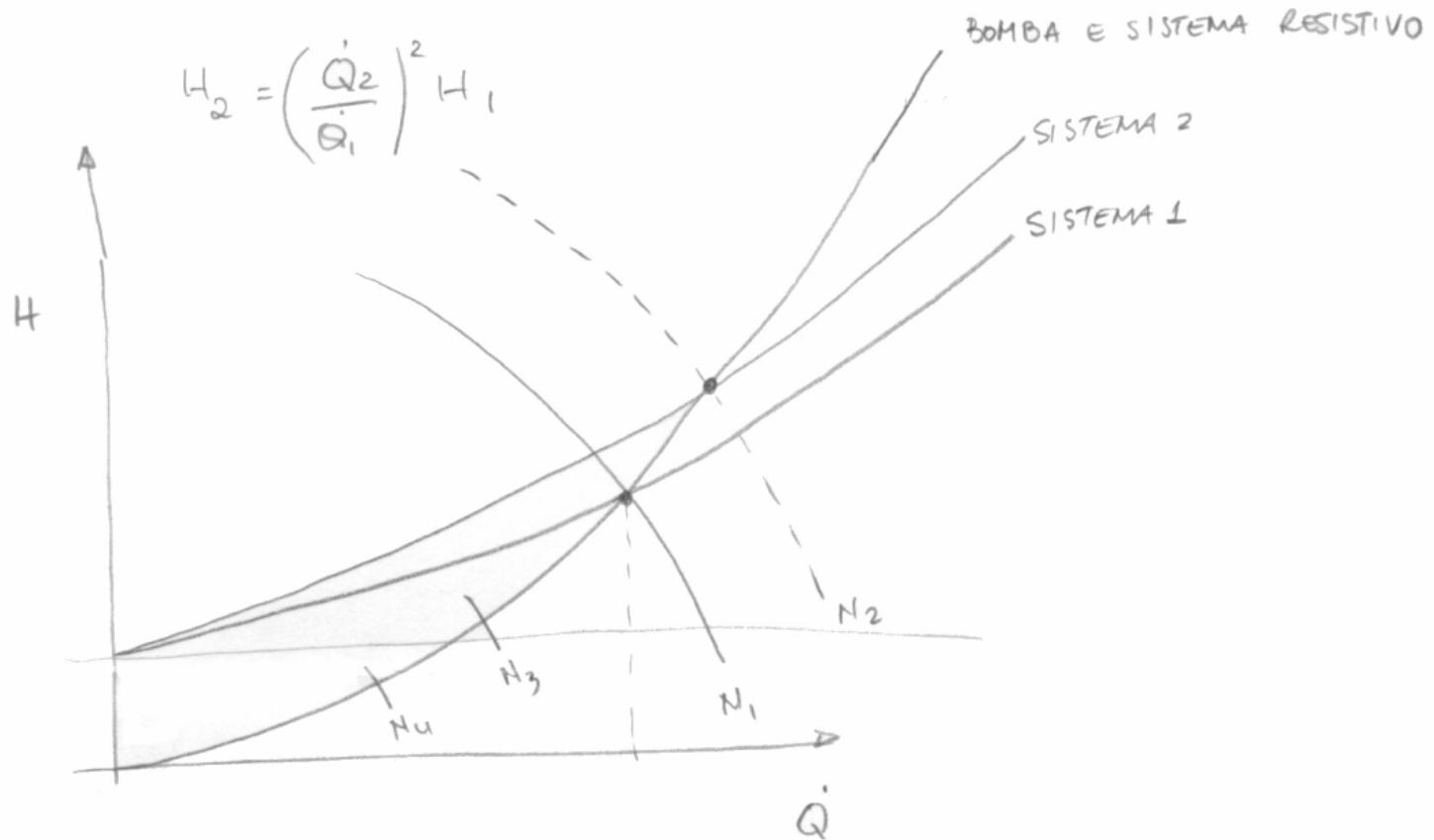
$$H_{bomba} = K_1 \dot{Q}^2$$

Para o sistema apenas resistivo

$$H_{sist} = K \dot{Q}^2$$

Deve-se ter  $H_{sist} = H_{bomba}$ , de onde segue  $K = K_1$ . Logo, a característica da bomba coincide com a do sistema. Não é necessário replotar as curvas características da bomba para obtenção de suas propriedades em qualquer ponto de operação, uma vez que podem ser obtidas das relações de semelhança. A Figura 9-6 ilustra o procedimento para a obtenção do ponto de operação do sistema.





**Figura 9-6** - Bomba e sistema resistivo

Entretanto, se o sistema não for apenas resistivo, isto é,  $\Delta z \neq 0$ , a aplicação da equação  $H_{\text{bomba}} = K_1 \dot{Q}^2$  dará resultado errado porque, em B, o sistema requer outro ponto (A') de referência.

Há necessidade de se replotar a curva da bomba, para  $N_2$ , e determinar o ponto de operação. O procedimento está ilustrado na Figura 9-7.

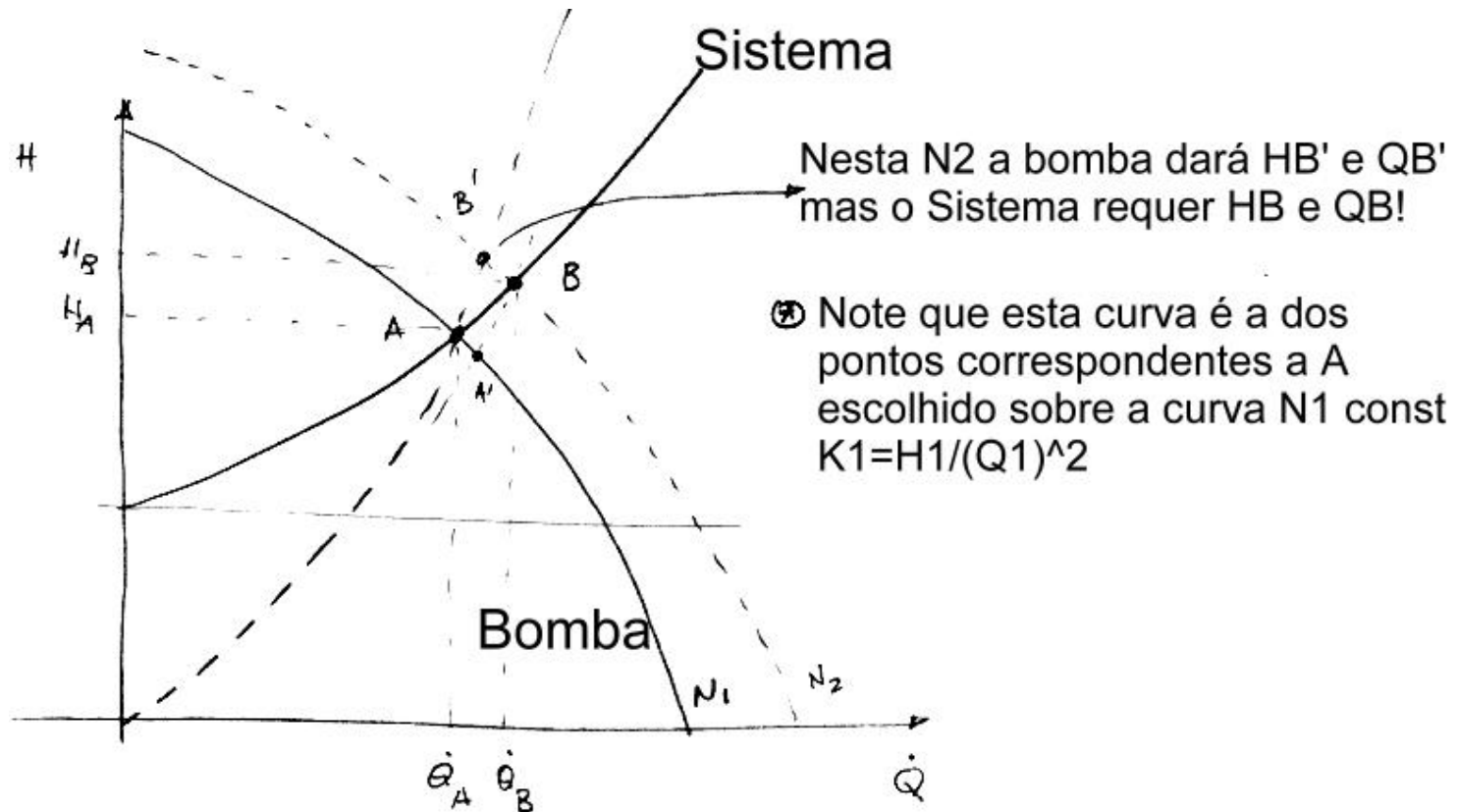
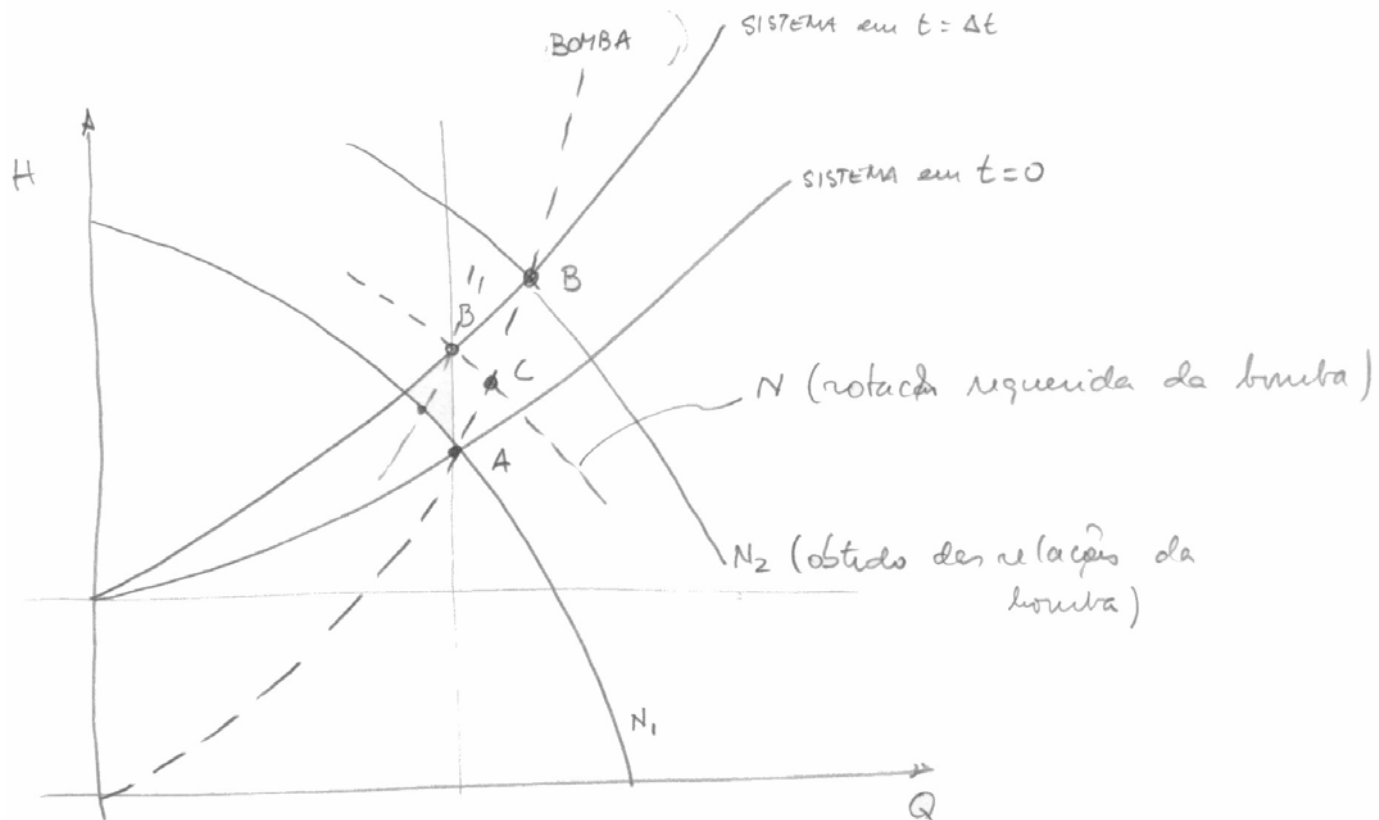


Figura 9-7 - Ponto de operação em rotação diferente da de projeto

Na prática há 2 problemas:

1. a bomba deve fornecer vazão constante a um sistema cuja característica de atrito muda com o tempo(envelhecimento)
2. a bomba deve fornecer  $H$  constante.

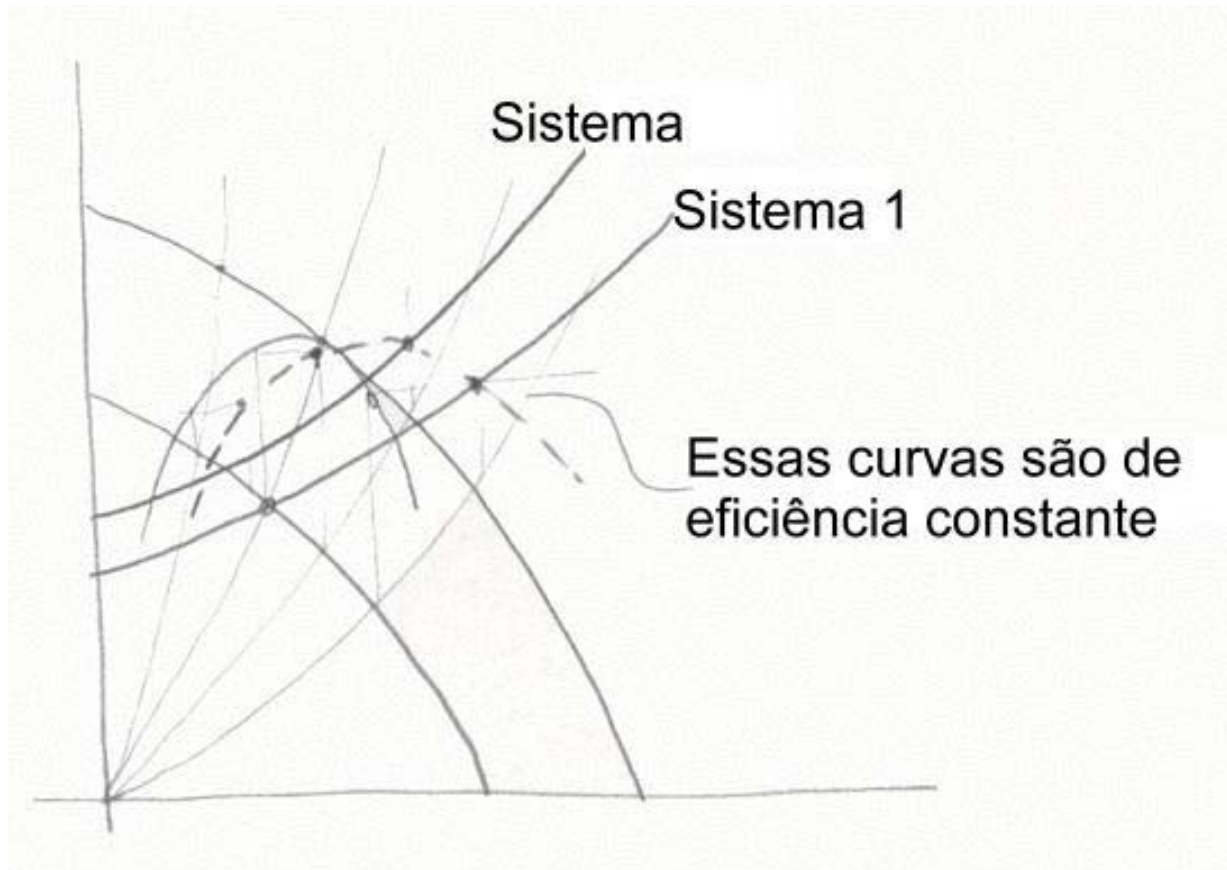
No caso 1), para manter a vazão constante é preciso alterar a rotação  $N$  da bomba. Um procedimento para a determinação do ponto de operação está esquematizado na Figura 9-8.



**Figura 9-8 - Ponto de operao para sistema envelhecido com o tempo**

A partir dessas informações, podem-se remontar as curvas de desempenho e sobre elas traçar a curva de carga e obter o novo ponto de operação, como está ilustrado nas figuras anteriores.

Como duas máquinas semelhantes, operando no mesmo ponto adimensional, têm a mesma eficiência, segue-se que a eficiência em B' terá o mesmo valor que a eficiência em A, como ilustrado na



**Figura 9-9 - Eficiência da bomba em rotação diferente da de projeto.**

## 9.5 VARIAÇÃO DO DIÂMETRO DA BOMBA E O SISTEMA

Bombas geometricamente similares, isto é, de mesmo projeto, são feitas em diferentes tamanhos. Os rotores são diferentes mas é possível aplicar as leis da similaridade para se predizer o desempenho de uma bomba de diâmetro  $D_2$  a partir das características de uma bomba similar de diâmetro  $D_1$ , **ambas rodando à mesma rotação N.**

De  $K_{\dot{Q}} = \frac{\dot{Q}}{ND^3} = \text{constante}$  e  $K_H = \frac{W_e}{N^2D^2} = \frac{gH}{N^2D^2} = \text{constante}$  vem

$$\dot{Q}_2 = \dot{Q}_1 \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^3$$

e

$$H_2 = H_1 \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^2$$

Portanto,



$$\frac{D_2}{D_1} = \left( \frac{\dot{Q}_2}{\dot{Q}_1} \right)^{1/3} \text{ e } H_2 = \left( \frac{\dot{Q}_2}{\dot{Q}_1} \right)^{2/3} H_1 \text{ e, daí,}$$

$$H_2 = \frac{H_1}{\dot{Q}_1^{2/3}} \dot{Q}_2^{2/3} = K \dot{Q}_2^{2/3}, \text{ com } K = \frac{H_1}{\dot{Q}_1^{2/3}}$$

Assim, para mudanças no diâmetro, os pontos correspondentes ( $\eta_2 = \eta_1$ ) caem sobre uma curva do tipo  $f(\dot{Q}^{2/3})$  e não sobre uma parábola. É, portanto, necessário plotar as novas curvas da segunda bomba para se saber onde estará o ponto de equilíbrio. A Figura 9-10 mostra um procedimento para essa determinação.

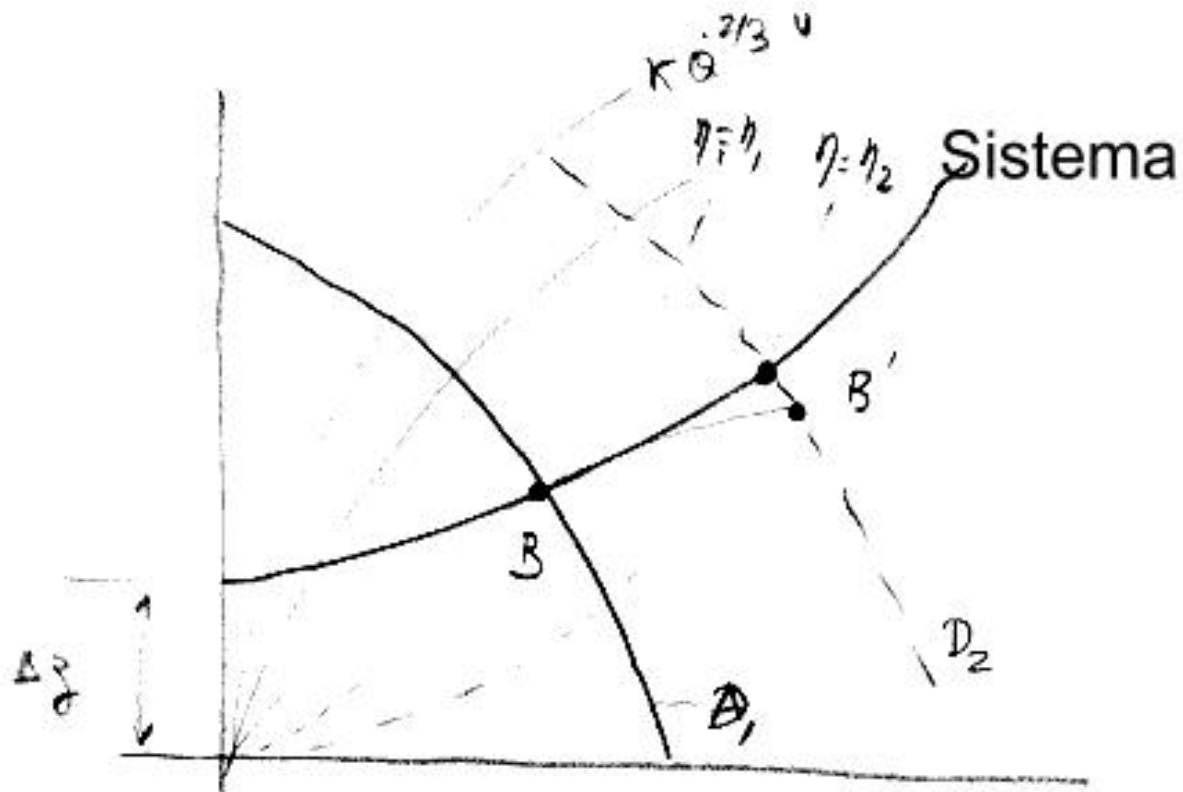


Figura 9-10 - Ponto de operação de bomba com diâmetro diferente.

Note-se que

$$\eta_x = \frac{\dot{m}_x g H_x}{W_{e_x}}$$

$$\eta = \frac{\dot{m} g H}{W_e}$$

$$\frac{\eta_x}{\eta} = \frac{\dot{m}_x}{\dot{m}} \frac{H_x}{H} \frac{W_e}{W_{e_x}} = \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^3 \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^2 \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^5 = 1$$

e, portanto,

$$W_{e_x} = W_e \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^5$$

É possível, também, obter-se o ponto de operação de uma bomba instalada num sistema e cujas características são

$$H_B = A + B\dot{Q}_B + C\dot{Q}_B^2$$

$$H_S = D + E\dot{Q}_S^2$$

O ponto de operação da bomba no sistema será aquele em que  $H_B = H_S$  e  $\dot{Q}_B = \dot{Q}_S$ , isto é,

$$H_B = A + B\dot{Q}_B + C\dot{Q}_B^2 = D + E\dot{Q}_S^2 = H_S$$

e

$$(A - D) + B\dot{Q}_{B,S} + (C - E)\dot{Q}_{B,S}^2 = 0$$

**# 9-2**

de onde vem

$$\dot{Q}_{B,S} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4(A-D)(C-E)}}{2(C-E)}$$

A equação # 9-2 admite 2 soluções que precisam ser analisadas para se saber qual é a que se aplica ao problema da bomba instalada no sistema de bombeamento.

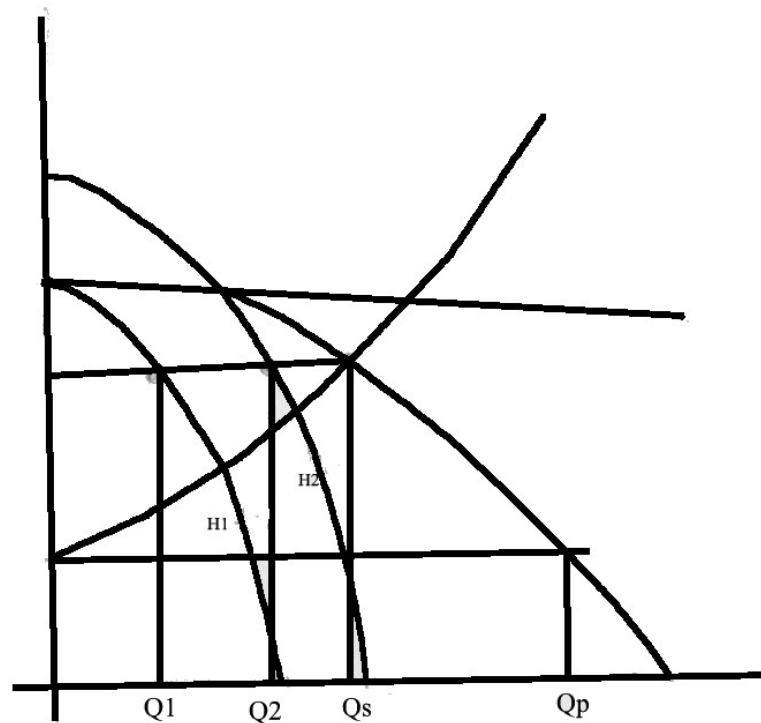
Um problema comum é o da utilização de bombas em série ou em paralelo, suprindo água a um sistema. Sejam, portanto, as características

$$H_1 = A_1 + B_1 \dot{Q}_1 + C_1 \dot{Q}_1^2$$

$$H_2 = A_2 + B_2 \dot{Q}_1 + C_2 \dot{Q}_1^2$$

$$H_s = D + E \dot{Q}_s^2$$

**Caso 1:** bombas em paralelo.



**Figura 9-11 - Determinação do ponto de operação de duas bombas em paralelo**

Deve-se ter

$$H_1 = H_2 = H_s$$

e

$$\dot{Q}_s = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2$$

Então, tem-se o problema

$$H_1 = A_1 + B_1 \dot{Q}_1 + C_1 \dot{Q}_1^2 = H_2 = A_2 + B_2 \dot{Q}_2 + C_2 \dot{Q}_2^2 = H_s = D + E(\dot{Q}_1 + \dot{Q}_2)^2$$

sujeito à restrições

$$H_1, H_2, H_s \leq \min(A_1, A_2)$$

cuja solução pode ser obtida numérica ou graficamente. Uma solução numérica pode ser obtida atribuindo-se valores crescentes a  $H$ , a partir de  $H_0 = D$  e calculando as vazões  $\dot{Q}_1$  e  $\dot{Q}_2$  a partir das equações

$$H_1 = A_1 + B_1 \dot{Q}_1 + C_1 \dot{Q}_1^2 = H$$



$$H_2 = A_2 + B_2 \dot{Q}_1 + C_2 \dot{Q}_1^2 = H.$$

Com  $\dot{Q}_1$  e  $\dot{Q}_2$  calcula-se  $H_s = D + E(\dot{Q}_1 + \dot{Q}_2)^2$ . Se  $H_s$  coincidir com  $H_1$  (ou  $H_2$ ), a solução  $\dot{Q}_s = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2$  e  $H_1 = H_2 = H_s$  foi obtida. Caso contrário, procura-se outro valor de  $H$ . Um processo iterativo pode ser montado, repetindo-se os cálculos de  $H_s$  maior que  $H$ . A partir daí deve-se diminuir o valor de  $H$ .

No caso particular de 2 bombas idênticas, a solução fica simplificada, pois

$$H_1 = H_2 = A + B\dot{Q} + C\dot{Q}^2 = H_s = D + E(\dot{Q} + \dot{Q})^2 = D + 4E\dot{Q}^2$$

ou

$$(A - D) + B\dot{Q} + (C - 4E)\dot{Q}^2 = 0$$

de onde vem

$$\dot{Q} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4(A - D)(C - 4E)}}{2(C - 4E)}$$

**Caso 2:** bombas em série.

Deve-se ter

$$H_1 + H_2 = H_s$$

e

$$\dot{Q}_s = \dot{Q}_1 = \dot{Q}_2$$

Procedendo-se analogamente ao caso das bombas em paralelo chega-se a

$$\dot{Q} = \frac{-(B_1 + B_2) \pm \sqrt{(B_1 + B_2)^2 - 4(A_1 + A_2 - D)(C_1 + C_2 - E)}}{2(C_1 + C_2 - 4E)}$$

e, no caso de duas bombas idênticas,

$$\dot{Q} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - (2A - D)(2C - 4E)}}{2C - E}$$

## **9.6 ALTERAÇÃO DA VISCOSIDADE**

A alteração da viscosidade afeta as perdas que ocorrem na máquina. Não há um método simplificado de avaliar a mudança de desempenho devida à mudança de fluido ou alteração de sua viscosidade. Deve-se recorrer a ensaio da máquina com o novo fluido, sempre que possível. O fabricante geralmente fornece fórmulas e gráficos para o cálculo de correções devidas à viscosidade. Algumas receitas também podem ser encontradas em manuais diversos, como o DeLaval Engineering Handbook, terceira edição, 1970, páginas 6-14 a 6-16, que publica uma das tabelas de padrões do Hydraulic Institute (EUA), para rotores radiais.



## **9.7 VEDAÇÕES**

As vedações (selos) servem para impedir vazamentos entre 2 espaços que estão a pressões diferentes. Muitas vezes é impossível ou não econômico vedar totalmente o vazamento, tolerando-se um mínimo de perda de fluido.

Há 2 tipos principais de vedações:

1. 2 faces que não se movem uma em relação à outra, permitindo apenas pequena movimentação axial (para acomodar dilatações térmicas);
2. 2 faces que giram uma em relação à outra (para vedação, por exemplo, dos eixos).

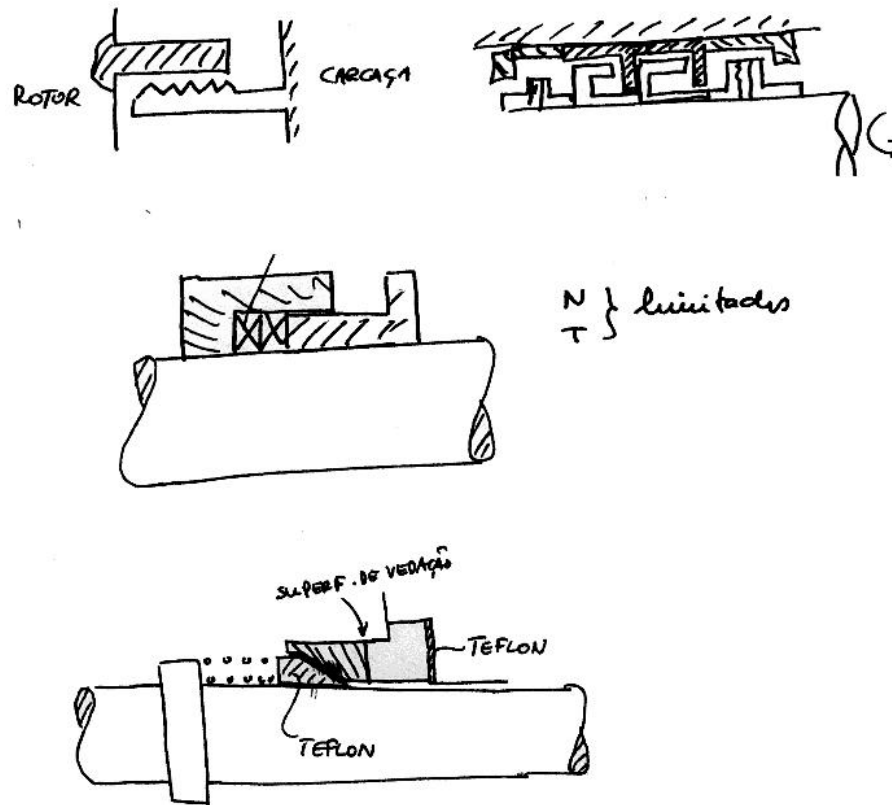


Figura 9-12 - Tipos de vedações

Tipo 1)

São usados para vedar folgas. São dos tipos:

- “o’ring” (anel de vedação) - folgas axiais e radiais
- gaxeta
- amianto em forma de espiral, com ou sem carbono - folgas axiais
- selos metálicos - folgas axiais

Tipo 2)

São dos tipos:

- sem contato com o eixo
  - labirintos
  - anéis flutuantes
- com contato
  - gaxeta prensada
  - selo mecânico



## 9.8 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

### EXERCÍCIO 1

As características de um ventilador são:

$\text{m}^3/\text{h}$	0	2000	4000	6000	8000	1000 0	1200 0
$\Delta P \text{ (mm H}_2\text{O)}$	50	54,5	56	54,5	50	42,5	32
$\dot{W}_e \text{ (kW)}$	0,4	0,63	0,90	1,20	1,53	1,70	1,75

Se a resistência da instalação é de 60 mm H<sub>2</sub>O a 7000 m<sup>3</sup>/h, calcular o ponto de operação do ventilador, sua eficiência e a potência consumida.

[950 W; 73%]

## EXERCÍCIO.2

Uma bomba centrífuga tem as seguintes características

<b>m<sup>3</sup>/h</b>	0	23	46	69	92	115
<b><math>\Delta P</math> (mm H<sub>2</sub>O)</b>	17	16	13,5	10,5	6,6	2
<b><math>\dot{W}_e</math> (kW)</b>	0	49,5	61	63,5	53	20

A bomba é usada para bombear água entre dois reservatórios com desnível de 8 m entre si, através de uma tubulação de 800 m de comprimento e 15 cm de diâmetro. Considerando apenas as perdas de atrito e admitindo que  $f=0,004$ , calcule a vazão entre os dois reservatórios e a potência requerida pela bomba.

[60 m<sup>3</sup>/h, 3,04 kW]

### EXERCÍCIO.3

O desempenho de um ventilador centrífugo é dado pela tabela

<b>Q (m<sup>3</sup>/s)</b>	0	10	20	30	40	50	60	70
<b>H (mm H<sub>2</sub>O)</b>	85	92,5	95	90	80	65	47,5	25
<b>η (%)</b>	0	46	66	70	67	60	48	32

Superpor a curva de potência de eixo no gráfico obtido da tabela. Dessas figuras, obter a potência de acionamento no ponto de projeto, para uma resistência de 100 mm H<sub>2</sub>O a 40 m<sup>3</sup>/s. Calcular a potência de acionamento se a vazão passar para 25 m<sup>3</sup>/s, com o fechamento de um damper na saída do ventilador. Calcular também a potência de eixo quando a vazão for nula.

[44 kW; 33 kW]

## EXERCÍCIO 4

As características de 2 bombas hidráulicas a velocidade constante são:

<b>Q (m<sup>3</sup>/s)</b>	0	0,006	0,012	0,018	0,024	0,030	0,036
<b>H (m)</b>	22,6	21,9	20,3	17,7	14,2	9,7	3,9
<b>η (%)</b>	0	32	74	86	85	66	28

<b>Q (m<sup>3</sup>/s)</b>	0	0,006	0,012	0,018	0,024	0,030	0,036
<b>H (m)</b>	16,2	13,6	11,9	11,6	10,7	9,0	6,4
<b>η (%)</b>	0	14	34	60	80	80	60

Selecionar a bomba mais adequada para bombear continuamente água a uma altura de 7,5 m, através de tubulação de 21 m de comprimento, 10 cm de diâmetro e coeficiente de atrito de 0,005. Justificar a seleção. Qual a potência de acionamento?  
[bomba B; 3,19 kW]

## EXERCÍCIO 5

Uma bomba centrífuga é usada para circular água em circuito fechado numa bancada de laboratório que consiste de dois tubos verticais, um de 4 m de comprimento e outro de 3; dois tubos horizontais com 1,3 m cada, três curvas de 90° e uma seção de trabalho vertical de 1 m de comprimento. A bomba está situada num dos dois cantos horizontais inferiores. Tanto os tubos como as curvas são de 7,5 cm de diâmetro. A seção de trabalho tem área de 125 cm<sup>2</sup>. O fator de atrito para todos os tubos é 0,006 e a perda em cada curva é de  $0,1 \frac{1}{2g} \rho V^2$ . A perda na seção de trabalho pode ser considerada como equivalente à de atrito em um tubo de 1m de comprimento e 7,5 cm de diâmetro. Determinar a velocidade média na seção de trabalho se as características da bomba são

Q (m <sup>3</sup> /s)	0	0,006	0,012	0,018	0,024	0,027
H (m)	3,20	3,13	2,90	2,42	1,62	0,98

[1,32 m/s]

## EXERCÍCIO 6

O rotor de uma bomba centrífuga mede 60 cm de diâmetro. Tem as seguintes características rodando a 750 rpm.

<b>Q (m<sup>3</sup>/min)</b>	0	7	14	21	28	35	42	43	44
<b>H (m)</b>	40,0	40,6	40,4	39,3	38,0	33,6	25,6	14,5	0
<b>η (%)</b>	0	41	60	74	83	83	74	51	0

- a) se a resistência do circuito for apenas de atrito e é de 40 m à vazão de 42 m<sup>3</sup>/min, determinar o ponto de operação da bomba e a potência absorvida.
- b) a bomba é usada para bombear água entre dois reservatórios desnivelados de 13 m. A tubulação é de 45 cm de diâmetro, 130 m de comprimento,  $f=0,005$ , contém 2 válvulas de gaveta ( $k=0,2$ ) e 10 curvas de 90° ( $k=0,35$ ). Obter o volume de água bombeado e a potência absorvida.
- c) se, para o sistema b) uma bomba geometricamente similar, mas com 50 cm de

diâmetro, for usada rodando a 900 rpm, determinar a vazão bombeada e a potência consumida.

[37 m<sup>3</sup>/min, 233 kW; 43,5 m<sup>3</sup>/min, 235 kW; 33,5 m<sup>3</sup>/min, 161 kW]

### EXERCÍCIO 7

As características de uma bomba axial rodando a 1450 rpm são

<b>Q (m<sup>3</sup>/s)</b>	0	0,04 6	0,06 9	0,09 2	0,11 5	0,13 8	0,18 0
<b>H (m)</b>	5,6	4,2	4,35	4,03	3,38	2,42	0

- a) Quando duas dessas bombas são ligadas em paralelo a vazão no sistema em que estão ligadas é a mesmo que quando as 2 bombas estão ligadas em série. A que rotação apenas uma bomba deverá rodar para bombear a mesma vazão que duas delas?
- b) [1691 rpm]

## EXERCÍCIO 8

As características de uma bomba centrífuga a  $N$  constante são

<b>Q (m<sup>3</sup>/s)</b>	0	0,012	0,018	0,024	0,030	0,036	0,042
<b>H (m)</b>	22,6	21,3	19,4	16,2	11,6	6,5	0,6
<b><math>\eta</math> (%)</b>	0	74	86	85	70	46	8

A bomba é usada para bombear água numa distância vertical de 6,5 m através de uma tubulação de 10 cm de diâmetro, 65 m de comprimento,  $f=0,005$ .

- determinar a vazão e a potência consumida pela bomba
- se se desejar aumentar a vazão da bomba e isto só for possível pela adição de uma segunda bomba idêntica, ligada em série ou em paralelo com a bomba original, verificar como a segunda bomba deve ser instalada, se em série ou em paralelo com a bomba original. Justificar a resposta utilizando apenas o aumento da vazão e a potência consumida pelas bombas.

[0,0268 m<sup>3</sup>/s, 4,73 kW; paralelo, 7,9 kW; série 9,9 kW]



## EXERCÍCIO 9

Uma bomba centrífuga tem as seguintes características

<b>Q (m<sup>3</sup>/s)</b>	0	0,009	0,018	0,027	0,036	0,045	0,054
<b>H (m)</b>	22,6	21,8	20,0	17,6	14,5	10,6	4,8

A bomba supre água de um lago para um reservatório cuja seção transversal tem área de 40 m<sup>2</sup>, através de 65 m de tubulação de 15 cm de diâmetro,  $f=0,007$ . A bomba é ligada quando o nível do reservatório chegar a 5 m acima do nível do lago e desligada quando esse nível atingir 18 m.

Plotando as características da bomba e a resistência do sistema a cada 30 minutos de intervalo, e considerando a vazão constante em cada intervalo de tempo, obtenha um gráfico mostrando a relação entre a descarga da bomba e o tempo, para um ciclo de operação da bomba (liga-desliga). Quanto tempo dura cada ciclo?

[4h5min]

## EXERCÍCIO 10

As características de uma bomba, em termos de coeficientes adimensionais, podem ser aproximadas por  $K_H = 8 - 2K_Q - 210K_Q^2$ . O rotor dessa bomba tem diâmetro de 0,4 m e gira a 1450 rpm. Opera num sistema cuja característica é  $H = 20 + 300\dot{Q}^2$ . Determinar a vazão no sistema no caso de duas dessas bombas serem colocadas em

a) série

b) paralelo

[0,217 m<sup>3</sup>/s, 34,12 m; 0,255 m<sup>3</sup>/s; 0,326 m<sup>3</sup>/s]

## EXERCÍCIO 11

Uma bomba tem as seguintes características quando rodando a 1450 rpm

<b>Q (m<sup>3</sup>/s)</b>	0	0,225	0,335	0,425	0,545	0,650	0,750	0,800
<b>H (m)</b>	20	17	15	13	10	7	3	0

Um sistema é projetado tal que o desnível de bombeamento é de 5m, o ponto de operação da bomba é 11,1m e 0,5 m<sup>3</sup>/s quando a bomba descrita é utilizada. O sistema é reprojeto mantendo o desnível de 5 m mas o atrito e as outras perdas sofreram um aumento de 40%. Encontrar a nova rotação da bomba a fim de que a vazão de 0,5 m<sup>3</sup>/s possa ser mantida.

[1551 rpm]

## EXERCÍCIO 12

Ensaio de cavitação foram executados para uma bomba, obtendo-se:  $\dot{Q} = 0,05 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $H = 37 \text{ m}$ , pressão barométrica 760 mm Hg, temperatura ambiente  $25^\circ\text{C}$ . A cavitação começou quando a altura de energia à entrada da bomba era de 4m. Calcular o valor do coeficiente de Thoma e o NPSH.

Qual deveria ser a altura máxima de instalação dessa bomba, referida ao nível do reservatório, quando for operar no mesmo ponto em sua curva característica mas num ambiente em que a pressão barométrica for 640 mm Hg e a temperatura de  $10^\circ\text{C}$ ?

[0,165; 6,068 m; 2,5 m]

### EXERCÍCIO 13

- a) Definir o coeficiente de Thoma e explicar seu uso em conjunto com as características das bombas hidráulicas de fluxo.
- b) Quais as diferenças entre NPSH disponível e requerido. Dizer resumidamente como são determinados.
- c) Uma bomba centrífuga cuja velocidade específica é 0,683 (baseada em rps,  $\text{m}^3/\text{s}$  e m) tem o número de Thoma crítico de 0,2. A instalação proposta para a bomba requer que a linha de centro de seu eixo fique 5,2 m acima do nível do reservatório. Quando a bomba roda a 1450 rpm bombeia 0,0637  $\text{m}^3/\text{s}$  de fluido. As perdas na sucção estão estimadas em 0,457 m de água. Se a pressão barométrica é 749 mm Hg e a temperatura da água 27°C, para a qual a pressão de vapor é 26,2 mm Hg, verifique se vai haver cavitação.

[NPSH req = 3,66 m; NPSH disp = 4,18 m; não haverá cavitação]

### EXERCÍCIO 14

O número de Thoma crítico para um certo tipo de turbina varia de acordo com a tabela abaixo.

$N_s(\text{rpm}, \text{kW}, \text{m})$	0	50	100	150	200	250
$\sigma_{th}$	0	0,04	0,10	0,18	0,28	0,41

Uma turbina gira a 300 rpm sob uma altura de carga de 50 m e produz 2 MW de potência. A velocidade de saída do escoamento do rotor é 10,4 m/s num ponto que está 4,7 m acima da saída do duto de sucção. A pressão atmosférica é equivalente a 10,3 m de água e a pressão de saturação da água é 4 kPa. Determine se há possibilidade de ocorrer cavitação e determine a perda de pressão entre a saída do rotor e a seção de descarga.

[sem cavitação; 10,2 m]

## EXERCÍCIO 15

Admitindo que a vazão  $Q$  de uma bomba centrífuga depende da viscosidade  $\mu$ , densidade  $\rho$ , diâmetro externo  $D$ , velocidade de rotação  $N$  do rotor, altura de carga efetiva  $H$  e da aceleração da gravidade  $g$ , mostre que

$$\frac{Q}{ND^3} = \text{função} \left( \frac{\rho ND^2}{\mu}, \frac{gH}{N^2 D^2} \right)$$

Uma bomba centrífuga de 1 estágio, cujo rotor tem 200 mm de diâmetro, descarrega 12,3 litros contra uma altura de energia efetiva de 21 m quando a rotação é 930 rpm.

Uma bomba multi-estágio, para rodar a 1430 rpm, é construída a partir de 3 rotores similares, cada um com 250 mm de diâmetro. Admitindo semelhança dinâmica de operação das duas bombas, calcular:

a) a altura de energia efetiva máxima de operação da bomba multi-estágio;

b) a vazão de descarga.

[232,7 m; 371 litros/s]



## EXERCÍCIO 16

Sejam as bombas centrífugas A e B do exercício 4. Calcular a eficiência do conjunto montado com as bombas A e B operando em série, quando o conjunto estiver bombeando água através de uma tubulação com a característica  $H_L = 20 + 8,5 \times 10^4 \dot{Q}^2$ .

## EXERCÍCIO 17

Deseja-se projetar uma bomba com as seguintes características:

- 1)  $H=32,5$  m col água
- 2) vazão =  $1 \text{ m}^3/\text{s}$
- 3) dois estágios: um axial seguido de um radial
- 4) ser acionada diretamente por um motor síncrono

Para o projeto será considerado

- a) velocidade meridional constante
- b) distribuição de carga em cada estágio de tal forma que as velocidades específicas correspondentes sejam adequadas
- c) altura de pá à entrada do rotor centrífugo = à altura à saída do estator axial
- d) rotor centrífugo de entrada axial

e) coeficiente de vazão à entrada da máquina = 0,5

f) relação de diâmetros à entrada da máquina = 0,5

### Solução

I) determinar a distribuição de carga entre os estágios axial e radial

Procurar valores adequados de rotações específicas para cada uma das bombas levando-se em conta que o motor é síncrono e, portanto, roda com velocidades bem determinadas: 300, 450, 600, 900, 1200, 1800, 3600 rpm

II) determinar as dimensões do estágio axial

III) determinar as dimensões do estágio radial

Verificar o diâmetro externo do rotor. Alterar o ângulo de saída das pás do rotor para que uma relação adequada de diâmetros ( $D_2/D_1$ ) seja encontrada

# MÁQUINAS DE FLUXO

## NOTAS DE AULAS - 2010

9-86/91

Bomba axial+radial

D1iD1e 0,5  
fi 0,5

freqüência 60 Hz  
polos 2

N 600 rpm

g 9,80665 m/s<sup>2</sup>

H 32,5 m/s<sup>2</sup>

Q 1 m<sup>3</sup>/s

rpm	600	150	300	450	600	900
ns1ns2	10,374	146,182	40,609	18,585	10,374	4,230
ns1	3,500	3,499	3,500	3,500	3,500	3,500
ns2	0,939	0,212	0,436	0,676	0,939	1,555
Há	4,793	0,755	1,902	3,266	4,793	8,229
Hr	27,707	31,745	30,598	29,234	27,707	24,271
H	32,500	32,500	32,500	32,500	32,500	32,500
	0,375	0,589	31,416	6,940	6,940	1,907

**MÁQUINAS DE FLUXO**  
**NOTAS DE AULAS - 2010**

9-87/91

Axial		Radial	
D1e	0,5243	Beta2	60,00
D1i	0,2621	W2u	10,70
D1m	0,3932	WeR	271,71
U1m	12,35	U2	22,68
V1a	6,18	D2R	0,722
WeA	47,01	A2r	0,16191
DVuA	3,81	h2R	0,0714
V2uA	3,81	W2R	12,35
alfa0A	0,00	V2uR	11,98
V1uA	0,00	V2R	13,48
W1uA	12,35	alfa2R	62,73
W1-A	13,81	D1eD2	0,726
alfa1A	63,43		
W2uA	8,55		
alfa3A	0,02		
Alfa2A	31,64		
h1A	0,131		

**MÁQUINAS DE FLUXO**  
**NOTAS DE AULAS - 2010**

9-88/91

Bomba-

mem31\_1998\_série/paralelo

<b>Q</b>	<b>m<sup>3</sup>/s</b>	0,000	0,006	0,012	0,018	0,024	0,030	0,036
<b>H (A)</b>	<b>m</b>	22,6	21,9	20,3	17,7	14,2	9,7	3,9
<b>η (A)</b>	<b>%</b>	0,00	32,00	74,00	86,00	85,00	66,00	26,00
<b>η (A)/2</b>		0,00	16,00	37,00	43,00	42,50	33,00	13,00

<b>H (B)</b>	<b>m</b>	16,2	13,6	11,9	11,6	10,7	9,0	6,4
<b>η (B)</b>	<b>%</b>	0,00	14,00	34,00	60,00	80,00	80,00	60,00
<b>η (B)/2</b>		0,00	7,00	17,00	30,00	40,00	40,00	30,00

<b>V</b>	<b>m/s</b>	0,000	0,764	1,528	2,292	3,056	3,820	4,584
----------	------------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Selecinar a configuração "duas bombas em paralelo" ou "duas bombas em série" mais eficiente quando o conjunto escolhido for instalado num sistema para elevação de água com um desnível de 10 m, através de uma tubulação de 210 m de comprimento e 10 cm de

**MÁQUINAS DE FLUXO**  
**NOTAS DE AULAS - 2010**

9-89/91

diâmetro. O coeficiente  
de atrito da tubulação (f) vale  
0,005.

<b>f</b>	0,01	<b>Area</b>	0,007854	<b>delta Z</b>	10			
<b>L</b>	210	<b>g</b>	9,80665					
<b>D</b>	0,1	<b>K(V)</b>	2,141404					
		<b>K(Q)</b>	34715,13					
<b>H sist</b>	<b>V</b>	10,00	11,25	15,00	21,25	30,00	41,24	54,99
	<b>Q</b>	10,00	11,25	15,00	21,25	30,00	41,24	54,99
<b>ASB</b>	<b>Q</b>	0,000	0,006	0,012	0,018	0,024	0,030	0,036
	<b>H</b>	38,8	35,5	32,2	29,3	24,9	18,7	10,3
<b>A//B</b>	<b>H</b>	16,2	13,6	11,9	11,6	10,7	9,0	6,4
	<b>Qa</b>	0,021	0,0245	0,027	0,0275	0,0282	0,031	0,033
	<b>Qb</b>	0,000	0,006	0,012	0,018	0,024	0,030	0,036
	<b>Qa//b</b>	0,021	0,031	0,039	0,046	0,052	0,061	0,069

**MÁQUINAS DE FLUXO**  
**NOTAS DE AULAS - 2010**

9-90/91

Ponto de  
operação

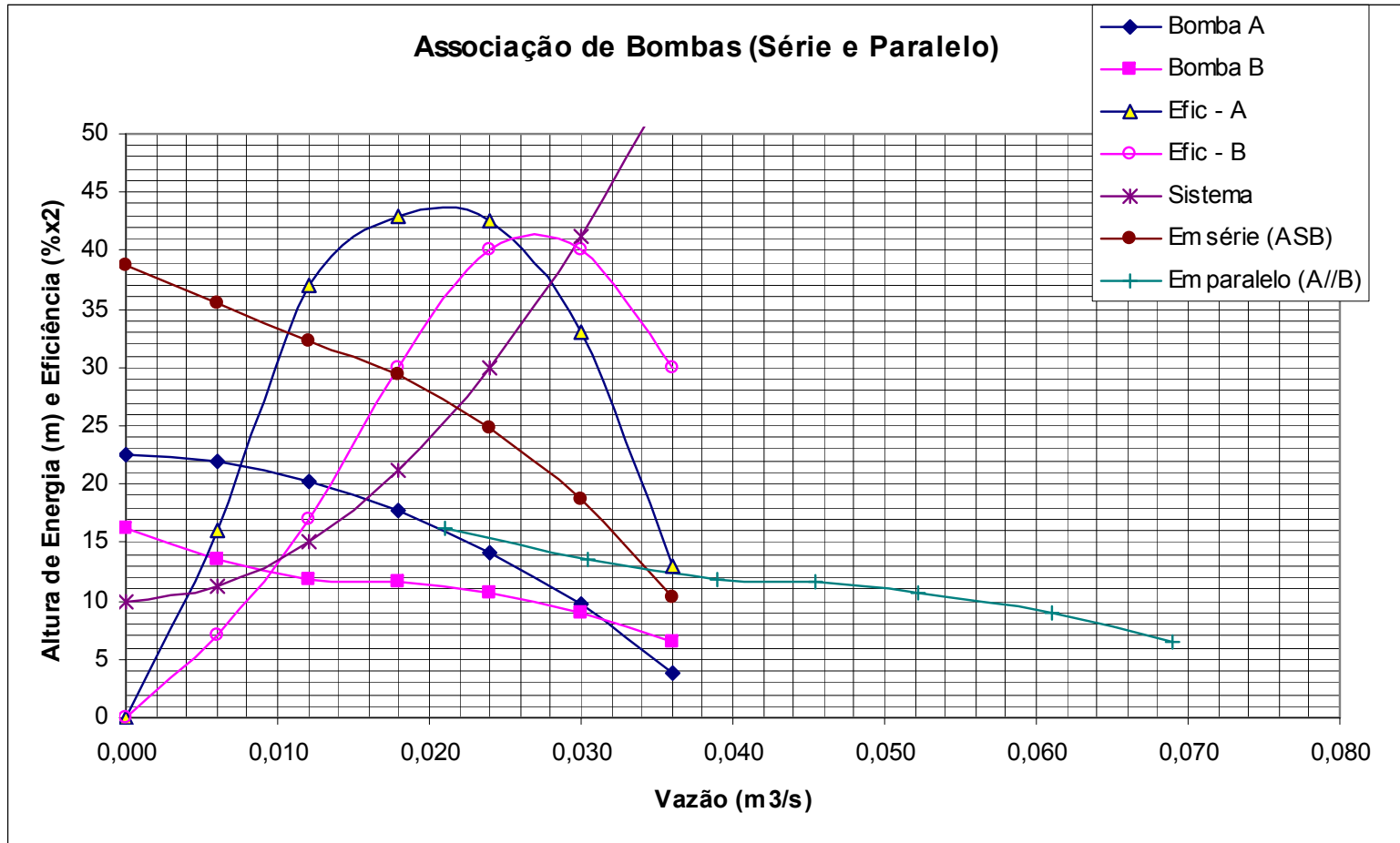
	<b>Série</b>	<b>paralelo</b>
<b>Q</b>	0,022	bomba B
<b>Hsist</b>	26,5	12,8
<b>Há</b>	15,5	-
<b>Hb</b>	11	12,8
$\eta$ (A)	0,87	-
$\eta$ ( $\beta$ )	0,74	0,22
$\eta$ ( $\alpha//\beta$ )	0,81	0,22



# MÁQUINAS DE FLUXO

## NOTAS DE AULAS - 2010

9-91/91



## 10. - ANTEPROJETOS

### 10.1. INTRODUÇÃO

No contexto deste curso, anteprojeto tem o significado de, através de considerações e cálculos, obter todas as informações necessárias para o traçado dos primeiros desenhos da máquina.

As informações a serem obtidas, relativas a considerações e cálculos, se referem, dentre outras, a:

- 
- **coleta de dados** de fabricantes de equipamentos semelhantes (panfletos, publicações, catálogos, etc.), com a finalidade de se conhecer, por exemplo, o que se tem projetado e fabricado, as técnicas utilizadas, as características de desempenho, etc.;
  - **pesquisa bibliográfica** para a seleção de literatura de apoio mais adequada (livros didáticos, artigos técnicos, publicações especializadas, etc.;
  - **cálculos em geral** (de funcionamento, de compatibilidade mecânica, de desempenho no ponto de projeto e fora dele, etc.;
  - 
  - **desenhos em geral** (esquemas, cortes, detalhes, etc..

---

O anteprojeto tem a finalidade, portanto, de obter as dimensões mais importantes da máquina, a partir das quais estudos mais pormenorizados podem ser realizados e, daí, se chegar aos desenhos do protótipo de máquina.

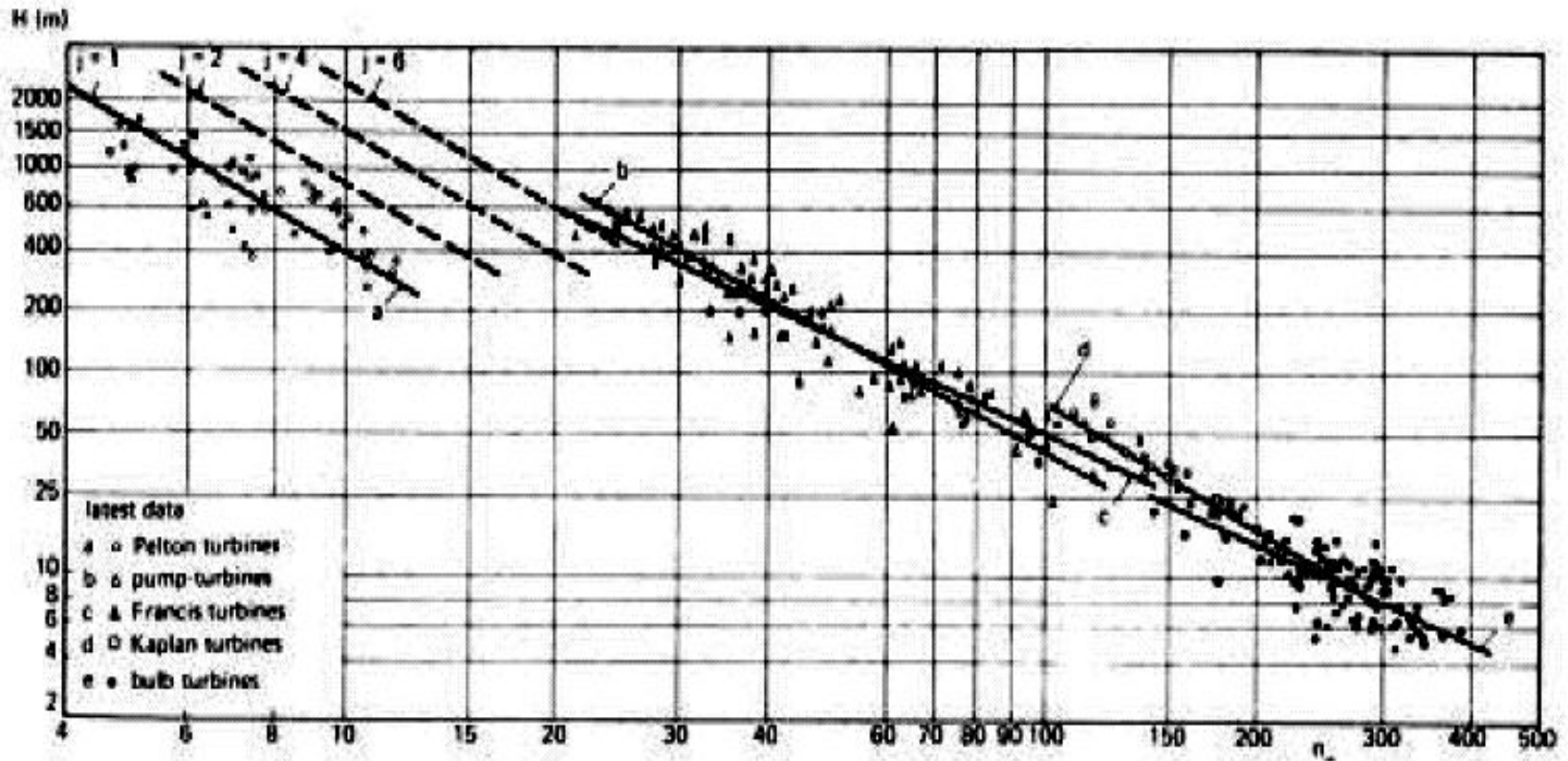
Durante a fase de anteprojeto é muito importante a análise de desempenho da máquina projetada. Esse cálculo de desempenho deve ser feito tanto para o ponto de projeto como para outros pontos de funcionamento previsto da máquina.

Os cálculos no ponto de projeto servem para verificar se a máquina dará o desempenho esperado, principalmente vazão, pressão e eficiência. Os cálculos fora do ponto de projeto servem para serem antecipados possíveis problemas de operação da máquina, além de fornecerem informações para cálculo de sistemas de controle e de proteção da máquina.

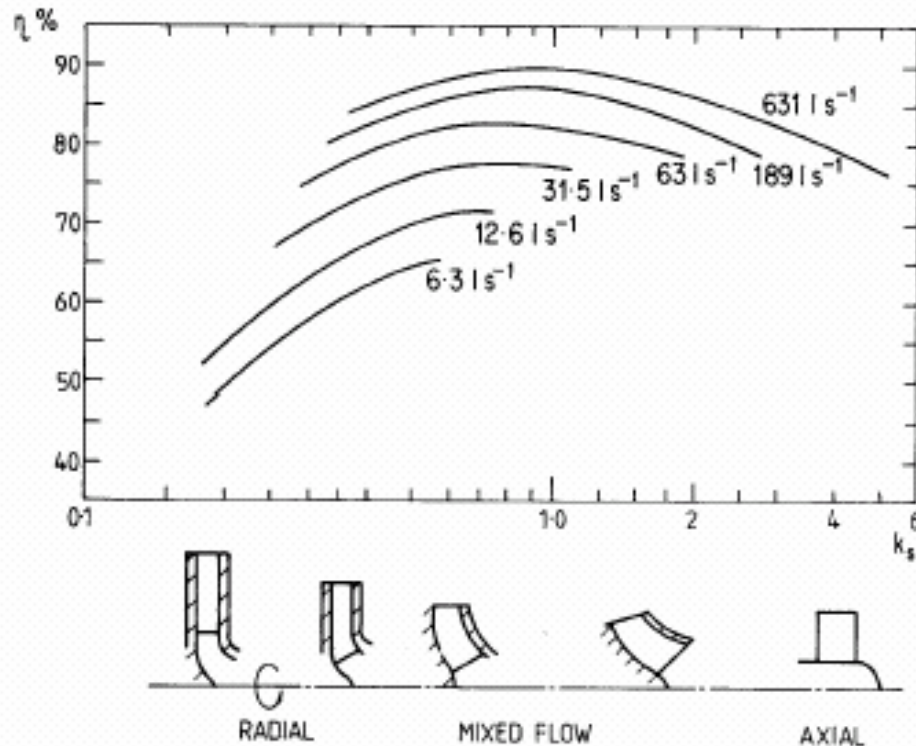
---

Por necessidade de simplificação, admitindo-se que os itens que não sejam os cálculos estejam já disponíveis e analisados, este capítulo tratará apenas do cálculo das dimensões principais e de algumas características construtivas. Análise de desempenho será objeto de outros capítulos.

A experiência prévia, do fabricante ou divulgada em literatura, serve para a escolha de alguns parâmetros de projeto. Algumas figuras são apresentadas a seguir. Contém dados estatísticos de máquinas já projetadas e ensaiadas.

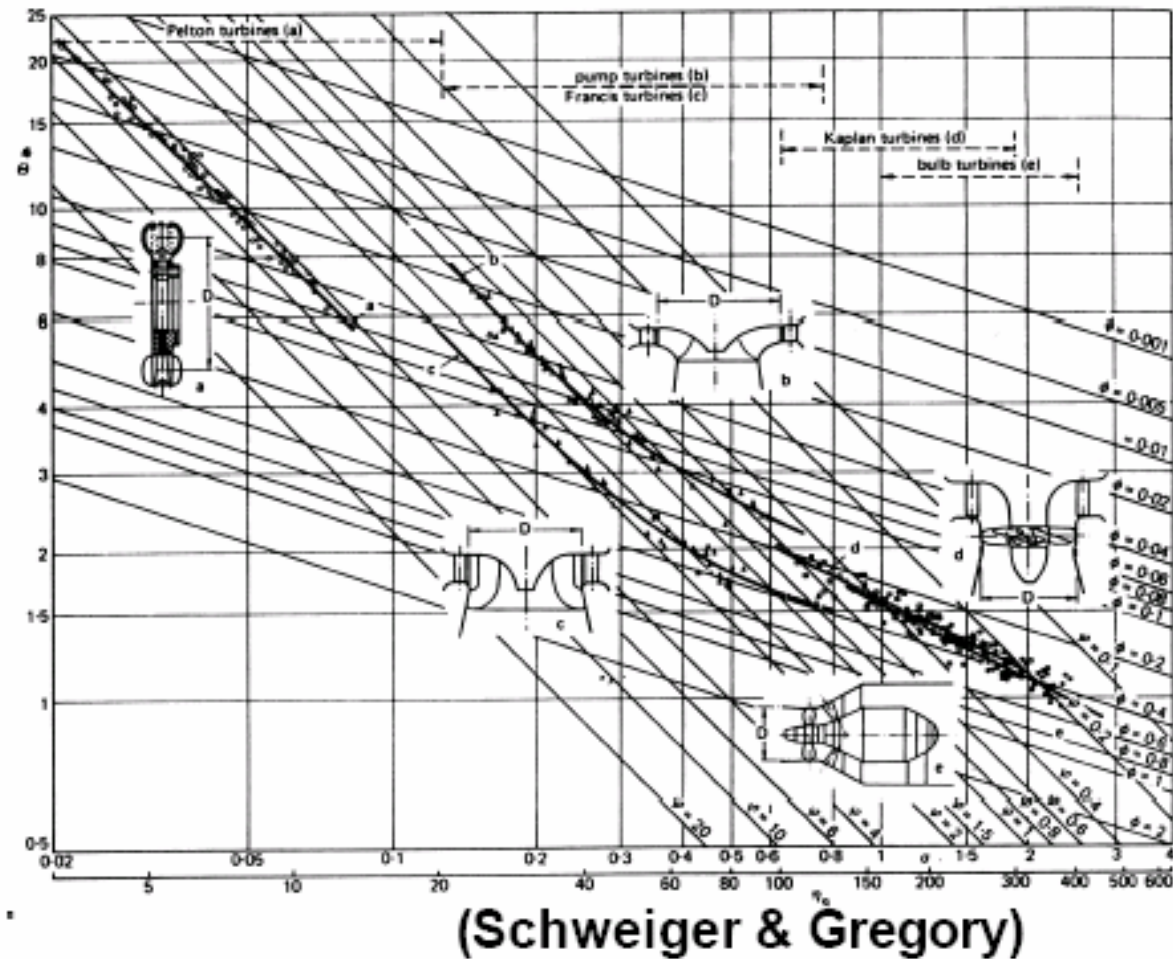


Estatísticas para início de projeto de máquinas hidráulicas

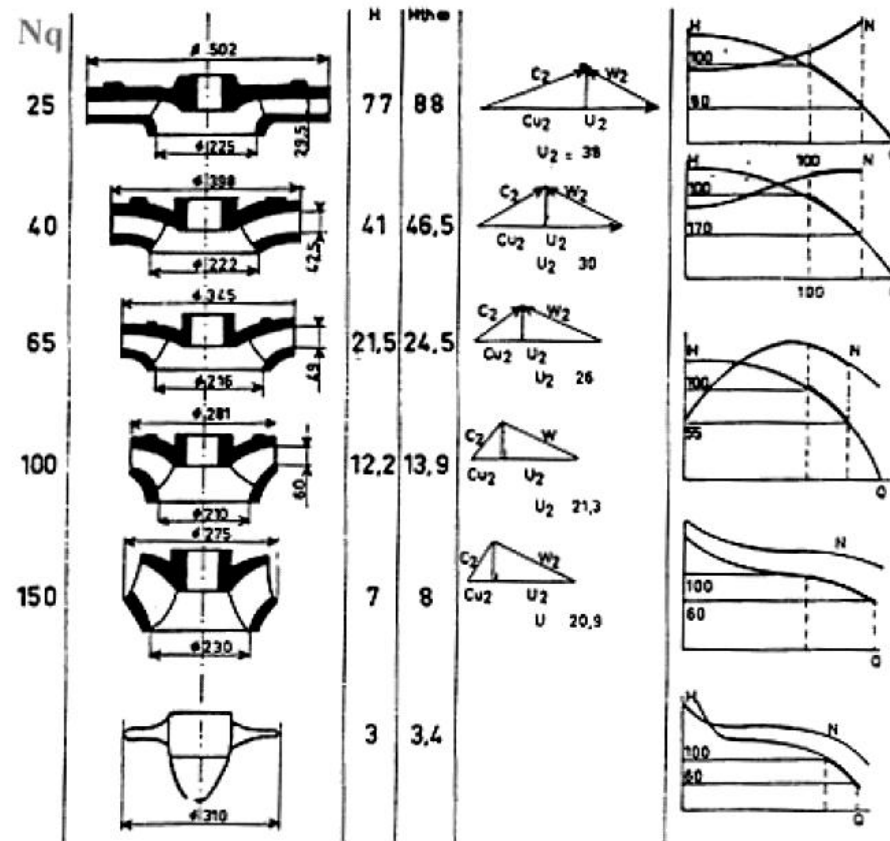


Variation of overall efficiency with non-dimensional specific speed  
(after the well known Worthington plot - TURTON 1984 )

**Variação da eficiência global com a velocidade específica**







Formas do disco e das curvas de desempenho em função da rotação específica (\*)

---

## 10.2. APLICAÇÕES

### 10.2.1. VENTILADOR RADIAL

O objetivo deste exemplo é o pré-dimensionamento de um ventilador para suprir ar a uma instalação de ensaios que consome 3 kg/s de ar à pressão de 10132 Pa (aprox. 1 m H<sub>2</sub>O). Estima-se que a perda de pressão no duto de admissão do ventilador seja de 2% da pressão ambiente. As condições ambientes são 93500 Pa e 300 K.

---

### 10.2.1.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A seleção do tipo de ventilador pode ser feita em função da rotação específica

$$N_s = 2\pi N \frac{\dot{Q}^{1/2}}{W_e^{3/4}} .$$

O ventilador deverá ser acionado diretamente por um motor elétrico, de sorte que, para manter dimensões mínimas do ventilador, será escolhido um motor de maior rotação disponível.

Uma consulta a catálogos de fabricantes indica que motores de prateleira, para 1800 e 3600 rpm nominais, são disponíveis, embora outras rotações possam ser conseguidas com motores fabricados sob encomenda.

---

As velocidades reais desses motores são 1730 e 3460, levando-se em conta um escorregamento de 4%.

No caso de ventiladores, os efeitos de compressibilidade não são importantes, dado que as velocidades de escoamento são baixas. Assim, será considerada a densidade do ar como constante.

Para uma perda de pressão de 2% à entrada e para as condições ambientes de 93500 Pa e 300 K, tem-se:

$$P_1 = 0,98 \times 93500 = 91630 \text{ Pa}$$

$$T_1 = 300 \text{ K.}$$

e a densidade igual a

$$\rho_1 = \frac{P_1}{RT_1} = \frac{91630}{287 \times 300} = 1,064 \text{ kg/m}^3.$$

Para um aumento de pressão de 9806,4 Pa, correspondente a 1 m de coluna de água, tem-se

$$\text{Para } P_2 - P_a = 9806,4 \text{ Pa}$$

tem-se

$$P_2 - P_1 = P_a + (P_2 - P_a) - P_1 = 93500 + 9806,4 - 91630 = 11676,4 \text{ Pa.}$$

isto é, o ventilador deverá ser capaz de uma elevação de pressão de 11676,4 Pa.

Assim, o trabalho específico será

$$W_e \cong \frac{\Delta P}{\rho} = \frac{11676,4}{1,064 \times 0,75} = 14628,9 \frac{J}{kg}$$

para  $V_1 = V_4$ .

Então, para as duas possíveis rotações do motor escolhido:

<b>N (rpm)</b>	<b>N (rps)</b>	<b>N<sub>s</sub></b>
1730	28,833	0,229
3460	57,667	0,457

Qualquer que seja o motor escolhido, a rotação específica leva à seleção de um ventilador centrífugo. Foi escolhido o motor de 3600 rpm nominal para se obter um ventilador de menores dimensões, já que se consegue, com menor diâmetro, a velocidade periférica necessária.

## 10.2.1.2. CÁLCULOS PRELIMINARES

### 10.2.1.2.1. Rotor

Visando obter um ventilador mais eficiente, foi selecionado rotor com pás inclinadas de  $30^{\circ}$  para trás, isto é, com  $\beta_2 = 30^{\circ}$ , coeficiente de vazão de 0,5 à entrada do rotor, relação de diâmetros do rotor de 0,5 e velocidade à saída do estator igual à de entrada no rotor ( $V_4 = V_1$ ). Ressalte-se que essas imposições poderão não permitir o dimensionamento do ventilador, devendo ser alteradas conforme as necessidades.



---

Pela relação de Stanitz, o coeficiente de escorregamento vale:

$$s_F = 1 - \frac{0,63\pi}{N_p (1 - \Phi \tan \beta_2)}$$

com  $N_p$  = número de pás

$$\Phi = \text{coeficiente de vazão} = \frac{V_{2r}}{U_2} = \frac{D_1}{D_2} * \frac{V_{1r}}{U_1} = 0.25$$

$$\beta_2 = \alpha_3 - \delta$$

$\alpha_3$  = ângulo de ar à saída do rotor

$\delta$  = desvio

Para um coeficiente de escorregamento de 0,878, arbitrado de início (e sujeito a confirmação posterior, após estimativa do escoamento no rotor), o número de pás deverá ser:

$$N_p = \frac{0,63\pi}{(1 - s_F)(1 - \Phi \tan \beta_2)} = \frac{0,63\pi}{(1 - 0,878)(1 - 0,25 \tan 30^\circ)} = 18,95$$

Será adotado  $N_p=19$ . Note-se que, se fosse adotado um coeficiente de escorregamento menor, o rotor deveria possuir número maior de pás, o que poderia causar problemas de empalhetamento, já que as pás poderiam estar muito próximas umas das outras à entrada do rotor.

Admitindo-se que a entrada do escoamento no rotor seja radial (ou axial), tem-se:

$$V_{1u} = 0 \quad \text{e} \quad W_e = U_2 V_{2u} = s_F U_2 \cdot \left(1 - \frac{V_{2r}}{U_2} \operatorname{tg} \beta_2\right)$$

Segue-se que

$$U_2 = \sqrt{\frac{W_e}{s_F \left(1 - \frac{V_{2r}}{U_2} \operatorname{tg} \beta_2\right)}} = \sqrt{\frac{14628,9}{0,878(1 - 0,25 \operatorname{tg} 30^\circ)}} = 137,54 \text{ m/s.}$$

Esta velocidade periférica é baixa e, portanto, a seleção dos materiais de que será feito o rotor não será problemática.

Em decorrência,

$$D_2 = \frac{60U_2}{\pi N} = \frac{(60)(137,54)}{\pi 3460} = 0,759 \text{ m}$$

$$D_1 = 0,5 D_2 = 0,380 \text{ m}$$

$$U_1 = 0,5 U_2 = 68,77 \text{ m/s}$$

$$V_{1r} = \phi U_1 = 0,5 U_1 = 34,38 \text{ m/s}$$

Para  $V_r$  constante,  $V_{2r} = V_{1r} = 34,38 \text{ m/s}$ .

Para a construção dos triângulos de velocidades tem-se:

$$W'_{2u} = V_{2r} \operatorname{tg}(\beta_2) = 34,38 * \operatorname{tg}(30^\circ) = 19,85 \text{ m/s}$$

$$\Delta W_{2u} = V'_{2u} - V_{2u} = V'_{2u} \left( 1 - \frac{V_{2u}}{V'_{2u}} \right) = (U_2 - V_{2r} \operatorname{tg} \beta_2) (1 - s_F) = 14,36 \text{ m/s}$$

$$V'_{2u} = U_2 - W'_{2u} = 137,54 - 19,85 = 117,69 \text{ m/s}$$

$$W_{2u} = V'_{2u} + \Delta W_{2u} = 34,21$$

$$V_{2u} = U_2 - W_{2u} = 137,54 - 34,21 = 103,33 \text{ m/s}$$

$$W_2 = \sqrt{W_{2u}^2 + W_{2r}^2} = 39,70 \text{ m/s}$$

$$V_2 = \sqrt{V_{2u}^2 + V_{2r}^2} = 108,90 \text{ m/s}$$

$$W_1 = \sqrt{U_1^2 + V_{1r}^2} = 76,89 \text{ m/s}$$

$$V_1 = V_{1r} = 34,38 \text{ m/s}$$

$$\alpha_0 = 0^\circ \quad \alpha_1 = \operatorname{tg}^{-1} \frac{W_{1u}}{V_{1r}} = 61,26^\circ$$

$$\alpha_2 = \operatorname{tg}^{-1} \frac{V_{2u}}{V_{1r}} = 71,59^\circ$$

$$\alpha_3 = \operatorname{tg}^{-1} \frac{W_{2u}}{V_{2r}} = 44,85^\circ$$

Em consequência, o desvio será de  $44,85^\circ - 30^\circ = 14,85^\circ$ , visto que as pás estão inclinadas para trás de  $30^\circ$ .

Esse desvio deverá ser confirmado por alguma correlação disponível. Para efeito de cálculo preliminar, considera-se que o desvio estará correto se o novo valor

calculado diferir deste em menos do que 1<sup>o</sup>. Caso contrário o trabalho específico será diferente do necessário. Portanto, ou se aumenta a rotação, ou se aumenta o diâmetro do rotor ou se altera a inclinação da pá para que o trabalho específico seja o correto.

Então, no rotor deverá haver o seguinte aumento de pressão:

$$\Delta P_R = \frac{\rho}{2} \{U_2^2 - U_1^2 + W_1^2 - W_2^2\} = 9.856,4 \text{ Pa.}$$

O aumento de pressão restante deverá ser conseguido com uma grade fixa (estator).

$$\Delta P_{\text{Estator}} = 2.145,59 \text{ Pa}$$

Os triângulos de velocidades referentes às condições até agora determinadas são os da figura 13.1.

### 10.2.1.2.2. Estator

As condições de escoamento à entrada do estator podem ser calculadas a partir da conservação da quantidade de movimento angular. Com as notações indicadas na Figura 13-6, tem-se

$$R_3 V_{3u} = R_2 V_{2u} :$$

ou

$$V_{3u} = \frac{R_2}{R_3} V_{2u} = \frac{D_2}{D_2 + t} V_{2u} = \frac{0,676}{0,676 + 0,020} 92,06 = 89,41 \text{ m/s}$$

Da equação da conservação de massa (continuidade), tem-se

$$V_{3r} = \frac{A_2}{A_3} V_{2r} = \left( \frac{D_2}{D_3} \right)^2 V_{2r} = \left( \frac{0,676}{0,696} \right)^2 30,63 = 28,90 \text{ m/s}$$



Então,

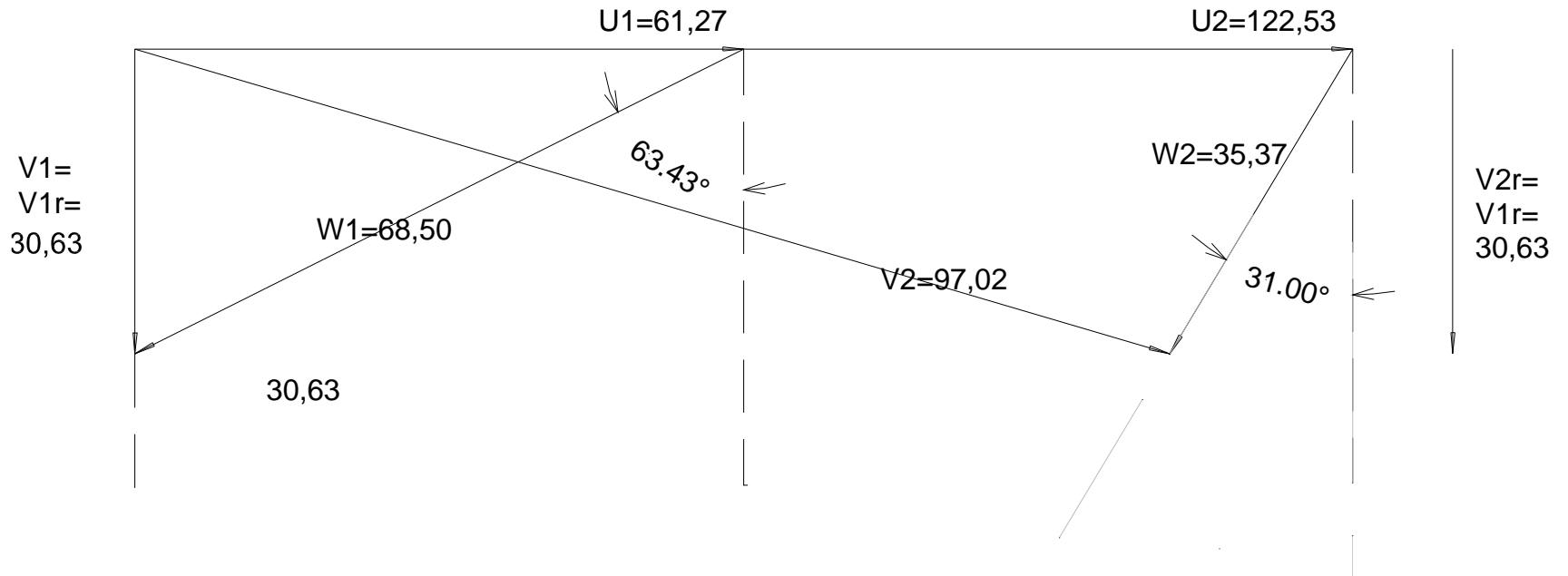
$$V_3 = \sqrt{V_{3u}^2 + V_{3r}^2} = 93,97 \text{ m/s}$$

$$\alpha_{0_E} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{V_{3u}}{V_{3r}} = 72,09^\circ$$

Para que  $\Delta P_{\text{Estator}} = 11676,4 - 9856,6 = 2145,3 \text{ Pa}$

$$\Delta P_{\text{Estator}} = \frac{\rho}{2} \{V_3^2 - V_4^2\} \quad \text{ou seja}$$

$$V_4 = \sqrt{V_3^2 - \frac{2\Delta P_{\text{estator}}}{\rho}} = \sqrt{105,84^2 - \frac{2 \times 2145,59}{1,064}} = 84,67$$



**Figura 13-1 - Triângulos de velocidades**

---

Um estudo mais pormenorizado do difusor é necessário e certamente se chegará à conclusão de que o grau de reação (neste caso vale 0,82, calculado como o acréscimo de pressão no rotor dividido pela elevação de pressão no ventilador:  $9856,4/11676,4$ ) deste ventilador deverá ser alterado, alterando-se a elevação de pressão no rotor e a difusão no estator.

### 10.2.1.3. Considerações Importantes

Entre o rotor e o estator há um espaço vazio (folga entre rotor e estator). Será adotado como sendo de 0,01 m radialmente. Este valor, entretanto, deverá ser confirmado posteriormente, através de alguma análise de escoamento suplementar.

O estator será formado de canais trapezoidais, de altura constante e igual a  $h_2$ . Outras formas de estator poderão, também, ser adotadas. Cada tipo de estator terá uma característica de desempenho apropriada. A Figura 13-6 é um esquema desse tipo de estator

Para a obtenção de uma geometria adequada do ventilador é necessário que se estudem as diversas possibilidades de variação de parâmetros que alterem o grau de

---

reação. Esses cálculos são uma repetição dos cálculos executados acima. Para facilidade de cálculo, pode-se fazer uso de uma planilha eletrônica, na qual as equações acima utilizadas são programadas. Abaixo estão extratos de cálculos realizados com uma dessas planilhas, com indicação dos parâmetros que foram modificados.

Foi feito também o uso da facilidade "goal seek" (atingir meta) que facilita sobremaneira os cálculos quando um valor de parâmetro deve ser obtido mediante a variação de um outro parâmetro.

A Tabela 1 resume os cálculos dos triângulos de velocidades, como exemplo.. A simbologia adotada é autoexplicativa.

Tabela 1 - Cálculo dos triângulos de velocidades para

$$Sf=0,85 \quad \Phi_1 = 0,6 \quad \beta_2 = 30^\circ \quad D1/D2 = 0,65 \quad e \quad \alpha_0 = -30^\circ$$

$$D1/D2 =$$

Cap\_13\_Tab\_06

$$Sf=0,85 \quad \Phi_1 = 0,6 \quad \beta_2 = 30^\circ \quad 0,65$$

Dados					
Pa	93500	Dp(%P1)	0,02	ro1	1,064
DP(Pa)	1870	T1	300	DH(m)	1
Nnominal	3600	xmpt	3	eficiência	0,750
Slipmotor	0,961	Q	2,819		
Considerações de Projeto					
Sf	0,850	b2(grau)	30	a0(grau)	45
Fi1	0,600	D1D2	0,650	Ns	0,457
Ventilador a ser projetado para				observe!	
P1	91630	Pa/m	9806,38	Reação	0,675
DpVent	9806,4	P2	105176,4	V4/V3	0,403
Dptotal	11676,4	We	14628,9	alfa0E	60,1

**MÁQUINAS DE FLUXO**  
**NOTAS DE AULAS - 2010**

10-30/50

**Cálculos**

beta2	0,524	V1r	49,39		
N	3460	V1u	49,39097	alfa0	0,79
U2	126,64	V1ux	49,39097	alfa1	33,69
U1	82,32	V1x	69,85	alfa2	59,37
D2	0,699	W1ux	32,93	alfa3	41,20
D1	0,454	W1x	96,00	desvio	11,20
pi	3,142	kV1r	1	A1x0,063416	
Fi2	0,390	V2r	49,39	A2x0,063416	
We	14628,9	W2ul	28,52		
Np	17,0	V2ul	98,13	alfaoE	60,07
D3	0,719	V2u	83,41	V4/V3	0,403
DPr	8101,7	DW2u	14,72	DPE	3900,34
h1	0,044	DW2ux	14,72	V4	37,72
h2	0,029	W2u	43,24	Pdin2	4658,402
V3u	81,09	V2ux	83,41		758,06
t	0,02	W2x	57,03		
V3r	46,68	V2x	96,94	Reação	0,68
V3x	93,57				

---

#### 10.2.1.4. ESQUEMA DO ROTOR

Os dados da Tabela 5 dão

b2(grau)	10
D1D2	0.670
U2	132,3
U1	88,64
D2	0.730
D1	0.489
Np	14
h1	0.034
h2	0.023
V1r	59,39
V2r	59,39
alfaoE	60.83

As pás serão construídas de chapas de aço, com linha de esqueleto de arco de



circunferência (raio de curvatura constante), para simplicidade de fabricação. As pás serão recortadas de chapa e calandradas.

O traçado da linha de esqueleto no disco do rotor pode ser feito através dos raios e ângulos como o indicado na Figura 13-2.

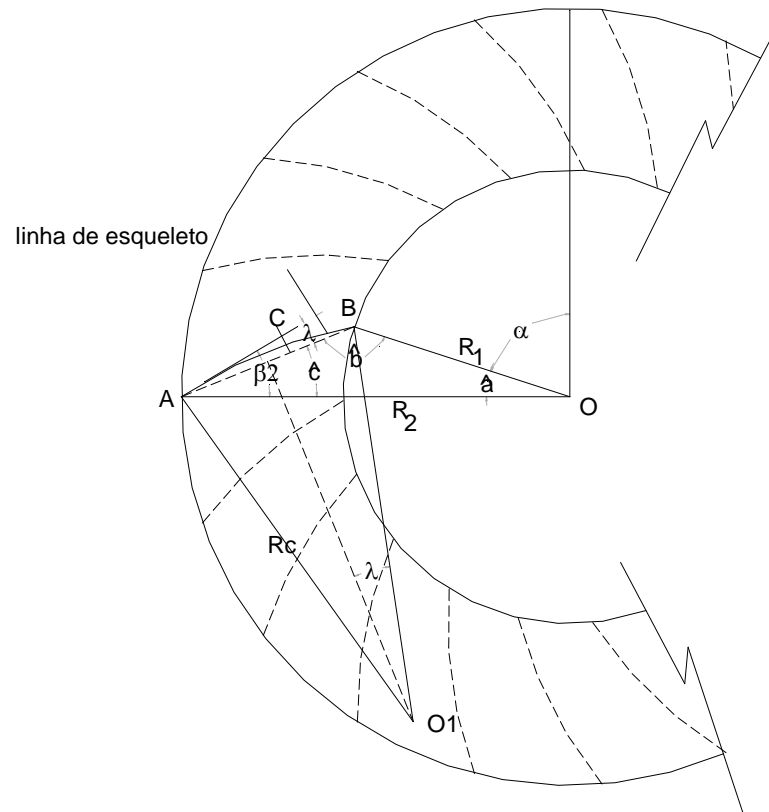
Para o triângulo OAB tem-se:

$$\frac{\text{sen}(a)}{c} = \frac{\text{sen}(b)}{R_2} = \frac{\text{sen}(c)}{R_1} = \frac{\text{sen}(b) + \text{sen}(c)}{R_1 + R_2}$$

ou

$$\frac{R_1 + R_2}{R_2} = \frac{D_1 + D_2}{D_2} = \frac{\text{sen}(b) + \text{sen}(c)}{\text{sen}(b)}$$

$$\frac{D_2 - D_1}{D_2} = \frac{\sin(b) - \sin(c)}{\sin(b)}$$



---

**Figura 10. - -2 - Traçado da linha de esqueleto**

Segue-se que

$$\frac{\text{sen}(b) + \text{sen}(c)}{\text{sen}(b) - \text{sen}(c)} = \frac{D_2 + D_1}{D_2 - D_1}$$

Mas

$$\text{sen}(b) + \text{sen}(c) = 2 \text{sen} \frac{b+c}{2} \cos \frac{b-c}{2}$$
$$\text{sen}(b) - \text{sen}(c) = 2 \cos \frac{b+c}{2} \text{sen} \frac{b-c}{2}$$

de que resulta

$$\frac{D_2 + D_1}{D_2 - D_1} = \frac{\operatorname{tg} \frac{b+c}{2}}{\operatorname{tg} \frac{b-c}{2}}$$

ou

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{b+c}{2}}{\operatorname{tg} \frac{b-c}{2}} = \frac{1 + \frac{D_1}{D_2}}{1 - \frac{D_1}{D_2}}$$

Ainda,

$$a + b + c = 180^\circ$$

$$a = 90^\circ - \alpha$$

$$b = 180^\circ - (\beta_1 + \lambda)$$

$$c = \beta_2 - \lambda$$

e, então,  $(90^\circ - \alpha) + [180^\circ - (\beta_1 + \lambda)] + \beta_2 - \lambda = 180^\circ$

$$2\lambda + \beta_1 - \beta_2 = 90^\circ$$

ou 
$$\lambda = \frac{90^\circ - \alpha + \beta_2 - \beta_1}{2}$$

Mas 
$$\frac{b+c}{2} = \frac{180^\circ - (\beta_1 + \lambda) + (\beta_2 - \lambda)}{2} = \frac{90^\circ + \alpha}{2}$$

$$\frac{b-c}{2} = \frac{180^\circ - (\beta_1 + \lambda) - (\beta_2 - \lambda)}{2} = 90^\circ - \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$$

Daí,

$$\operatorname{tg} \frac{b+c}{2} = \operatorname{tg} \frac{90^\circ + \alpha}{2} = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

e, portanto,

$$\frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 + \frac{D_1}{D_2}}{1 - \frac{D_1}{D_2}} \operatorname{tg} \left( 90^\circ - \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \right) =$$

e

$$1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \frac{D_1}{D_2}}{1 - \frac{D_1}{D_2}} \operatorname{tg} \left( 90^\circ - \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \right) - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \left[ \frac{1 + \frac{D_1}{D_2}}{1 - \frac{D_1}{D_2}} \operatorname{tg} \left( 90^\circ - \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \right) \right]$$

de onde resulta

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \frac{D_1}{D_2} \operatorname{tg} \left( 90^\circ - \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \right) - 1}{1 - \frac{D_1}{D_2} \operatorname{tg} \left( 90^\circ - \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \right) + 1}$$

A corda c pode ser calculada de

$$\frac{c}{\operatorname{sen}(a)} = \frac{R_1}{\operatorname{sen}(c)}$$

ou

$$c = \frac{\operatorname{sen}(a)}{\operatorname{sen}(c)} R_1 = \frac{\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha)}{\operatorname{sen}(\beta_2 - \lambda)} R_1 = \frac{\cos(\alpha)}{2 \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha - 90^\circ + \beta_1 + \beta_2}{2} \right)} D_1$$

O raio de curvatura  $R_c$  pode ser obtido de

$$\frac{c}{2R_c} = \text{sen}(\lambda)$$

ou

$$R_c = \frac{c}{2\text{sen}(\lambda)} = \frac{c}{2\text{sen}\left(\frac{90^\circ - \alpha + \beta_2 - \beta_1}{2}\right)}$$

Para facilidade de fabricação da carcaça frontal (tampa anterior), adota-se distribuição linear de  $h$  com  $R$ :

$$h = h_1 + \frac{h_2 - h_1}{D_2 - D_1}(D - D_1)$$

A planificação da pá para ser cortada de chapa plana resulta numa figura como a abaixo, com a curva dada pelas equações:



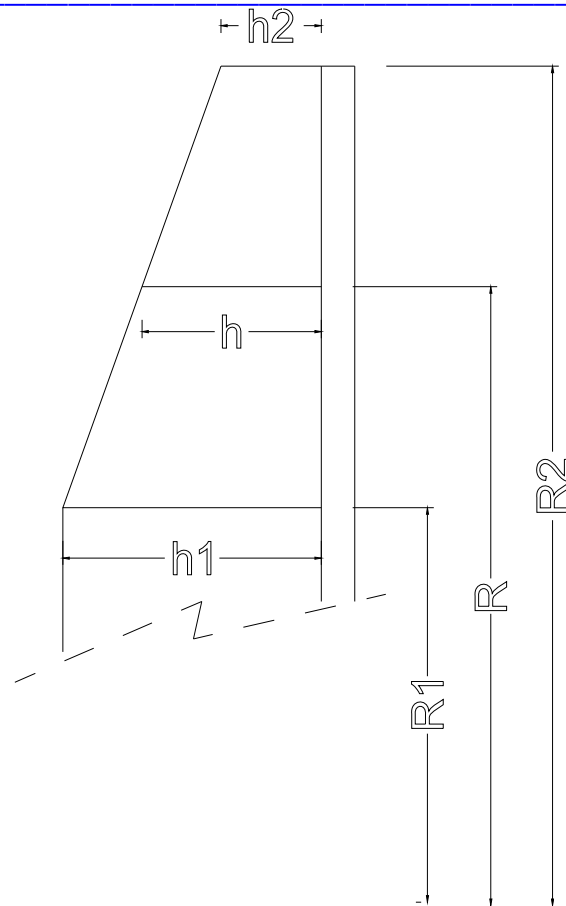
$$x^2 + y^2 = R_c^2$$

$$z = \frac{h_1 - h_2}{2} y + \frac{h_1 + h_2}{2} R_c \cos(\lambda)$$

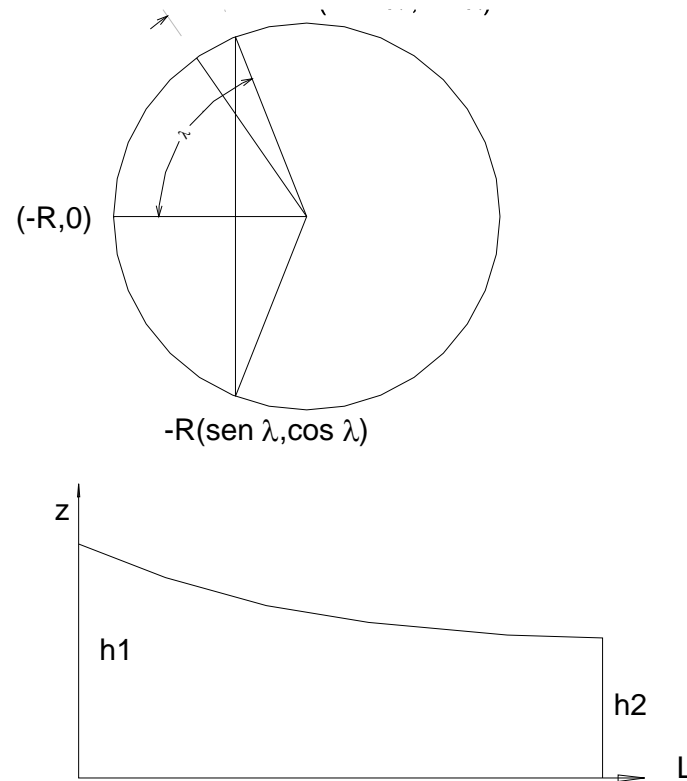
$$\begin{cases} x = -R_c \cos(t) \\ y = R_c \sin(t) \end{cases} \pi - \lambda \leq t \leq \pi + \lambda$$

$$dL = R_c dt$$

referidas à Figura 13-4:

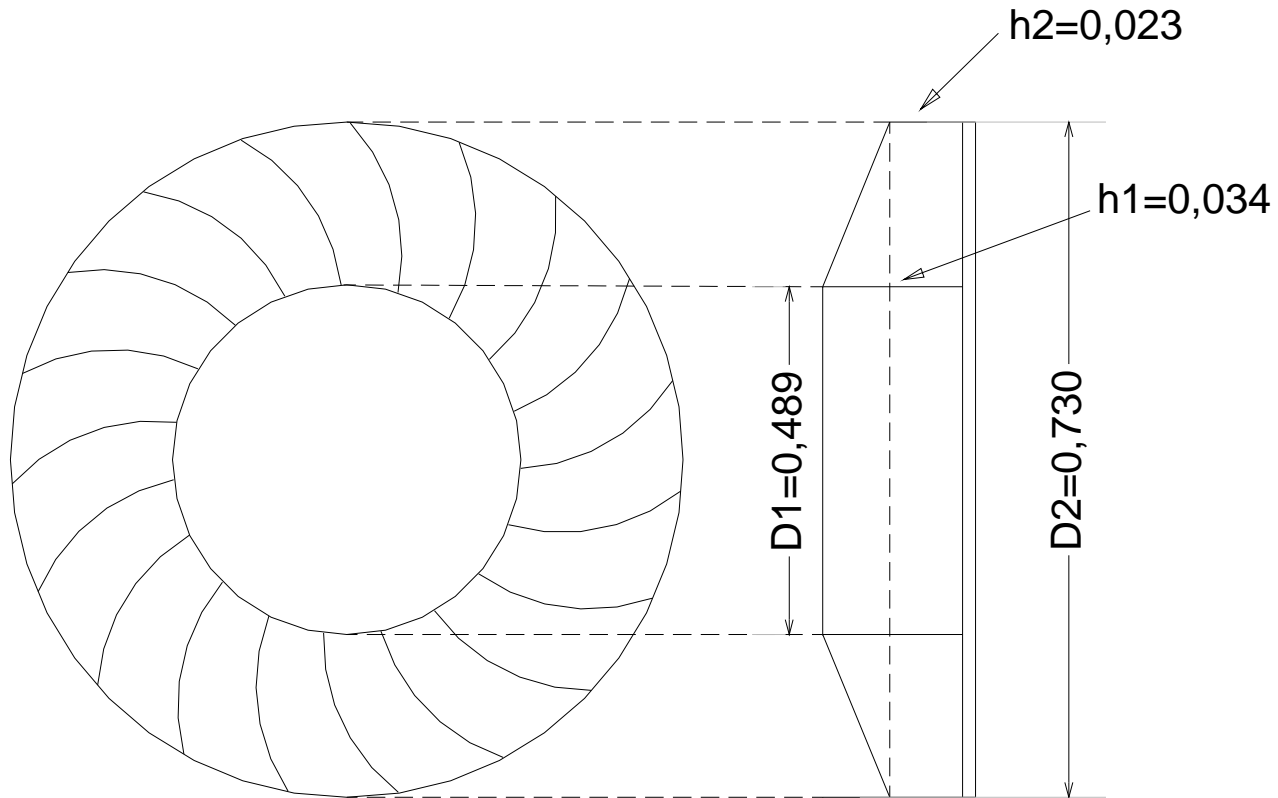


**Figura 13-3 - Altura das pás**



**Figura 13-4 - Planificação da pá**

A Figura 13-5 mostra um esquema do rotor



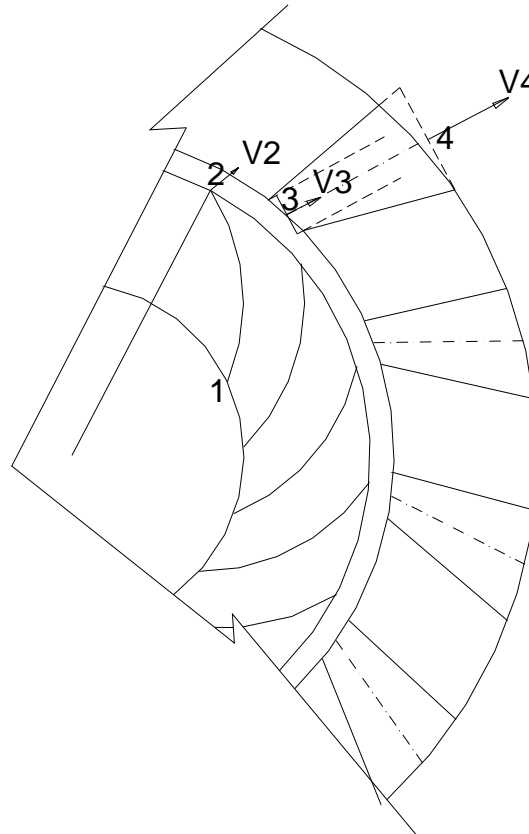
**Figura 13-5 - Corte do rotor**

---

#### 10.2.1.5. ESQUEMA DO ESTATOR

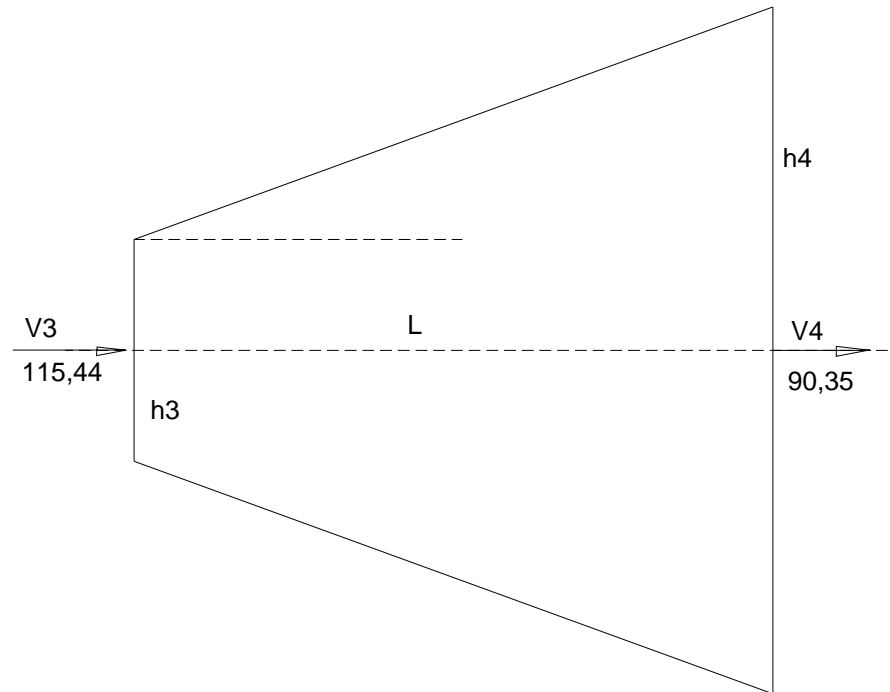
O espaçamento entre rotor e estator é de 1cm na direção radial, de tal forma que  $D_3 = D_2 + 0,020$  ou

$$D_3 = 0,730 + 0,020 = 0,750 \text{ m}$$



**Figura 13-6 - Estator**

Admitindo-se que seja possível alcançar o grau de difusão desejado, para um canal de altura constante, trapezoidal, tem-se:



**Figura 13-7 - Canal do estator**

---

$$\rho_3 V_3 h_3 = \rho_4 V_4 h_4$$

ou

$$h_4 = (V_3 / V_4) h_3 = 1,28 h_3$$

Para o semiângulo  $\Theta$  do difusor menor ou igual a  $7^\circ$  (máximo recomendável), tem-se:

$$\frac{h_4 - h_3}{2L} = \text{sen}(\Theta)$$

ou

$$L = \frac{h_4 - h_3}{2 \text{sen}(\Theta)}$$

ou



$$L = \frac{\frac{V_3}{V_4} - 1}{2 \sin(\Theta)} h_3$$

ou

$$L = \frac{1,28 - 1}{2 \sin(7^\circ)} h_3 = 0,21h_3$$

Admitindo-se que o número de canais do estator seja 23 e que o diâmetro  $D_4$  seja o medido ao término do comprimento  $L$ , no seu eixo, tem-se

$$h_3 \sim pD_3/N_{P,estator} = \pi \times 0,750/14 = 0,168$$

$$R_4 = R_3 + L \cos(\alpha_{0E}) = 0,375 + 0,2 \times 0,168 \times \cos(60,83^\circ)$$

então  $R_4 = 0,392 \text{ m.}$

Com os valores geométricos principais estimados, um esquema completo do

---

ventilador pode, então, ser feito.

**Nota:** nenhuma verificação a respeito da compatibilidade dos valores de  $h_3 = 0,168$  e o número de pás igual a 14 foi feita, assim como a verificação da possibilidade do grau de difusão no estator ser atingido. Fica, portanto, para o aluno o trabalho de verificá-los, utilizando alguma técnica disponível, alterando, em consequência, os parâmetros envolvidos.

Atenção deve ser dada ao problema da compatibilidade mecânica, para que um canal não se superponha ao adjacente. Se isto, entretanto, acontecer, uma solução é aumentar a distância entre o estator e o rotor (espaço sem pás) e/ou o número e a geometria dos canais.

---

Não serão abordadas neste capítulo as formas construtivas das diversas partes, ainda que elas sejam ponto fundamental no anteprojeto do ventilador.

## 11. ANEXO I - LEIS DE CONSERVAÇÃO

### 11.1 EQUAÇÕES BÁSICAS

As leis que governam o escoamento de um fluido são bem conhecidas. Um modo de identificá-las é a observação de que **a evolução de um sistema físico é caracterizada pela massa, quantidade de movimento e energia em cada instante**. Em outras palavras, seu comportamento é governado por leis de conservação. Essa conclusão foi um dos **grandes acontecimentos da ciência moderna**, pois não importa quão complicada seja essa evolução: a conservação daquelas propriedades é observada.

---

Um escoamento de fluido é considerado conhecido se sua velocidade, sua pressão e sua temperatura estáticas são conhecidas a qualquer instante.

Em casos em que a temperatura permanece praticamente invariável, a temperatura não é considerada (como nas turbinas hidráulicas).

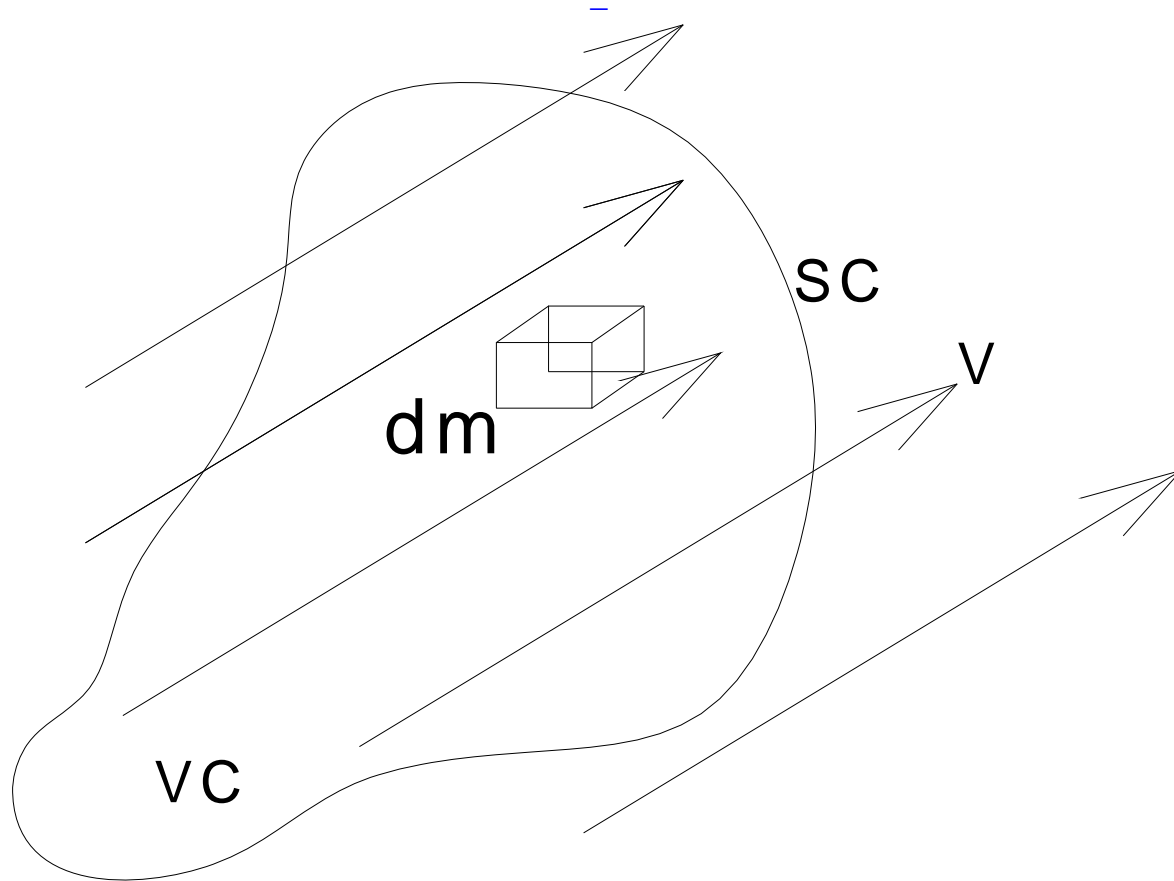
O princípio geral da conservação estabelece que ***a variação da quantidade de uma propriedade extensiva*** (que depende da massa) ***em um volume especificado é devida à soma*** (líquida) ***de fontes*** (da propriedade) ***internas e do balanço da quantidade*** (da propriedade) ***que atravessa a fronteira do volume.***

Em outras palavras, o princípio de conservação estabelece que ***a variação de uma propriedade extensiva num volume especificado é devida às fontes e sumidouros dessa propriedade, no interior do volume, mais o fluxo da propriedade através da fronteira do volume.***

O fluxo é gerado devido ao transporte convectivo do fluido e ao movimento molecular (sempre presente). O efeito do movimento molecular expressa a tendência do fluido em atingir a condição de equilíbrio. As diferenças em intensidade da propriedade considerada acarretam transferência espacial destinadas a homogeneizar o fluido. Essa contribuição é proporcional ao gradiente da propriedade correspondente (porque a contribuição deve ser nula numa distribuição homogênea).

No Apêndice I é recapitulado o desenvolvimento das equações de conservação (de Mecânica dos Fluidos). Neste capítulo apenas são apresentadas aquelas equações, nas formas apropriadas ao presente estudo.

Sejam um **volume de controle** (VC), como o da Fig. 4-1, delimitado por uma **superfície de controle** (SC) indeformável através do qual flui o escoamento de um fluido com **velocidade**  $[V(x,y,z)]$  e um **elemento de massa** ( $dm$ ) desse fluido que escoa através do volume de controle.



## Figura 11-1 - Volume de Controle

- FONTES E SUMIDOUROS:

Se A é a quantidade total da propriedade e a sua quantidade específica, então

$$A = a.m$$

Para um elemento infinitesimal de fluido,

$$dA = a.dm.$$

Como

$$dm = \rho.dV, (\rho \text{ é a densidade do fluido})$$

tem-se



$$dA = a \cdot \rho \cdot dV$$

Então, para o volume de controle VC indeformável, tem-se:

$$A = \iiint_{VC} a \rho dV$$

que é a **quantidade total da propriedade A contida no volume VC**.

A variação, por unidade de tempo, da propriedade A no volume VC será:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} a \rho dV$$

---

## FLUXO

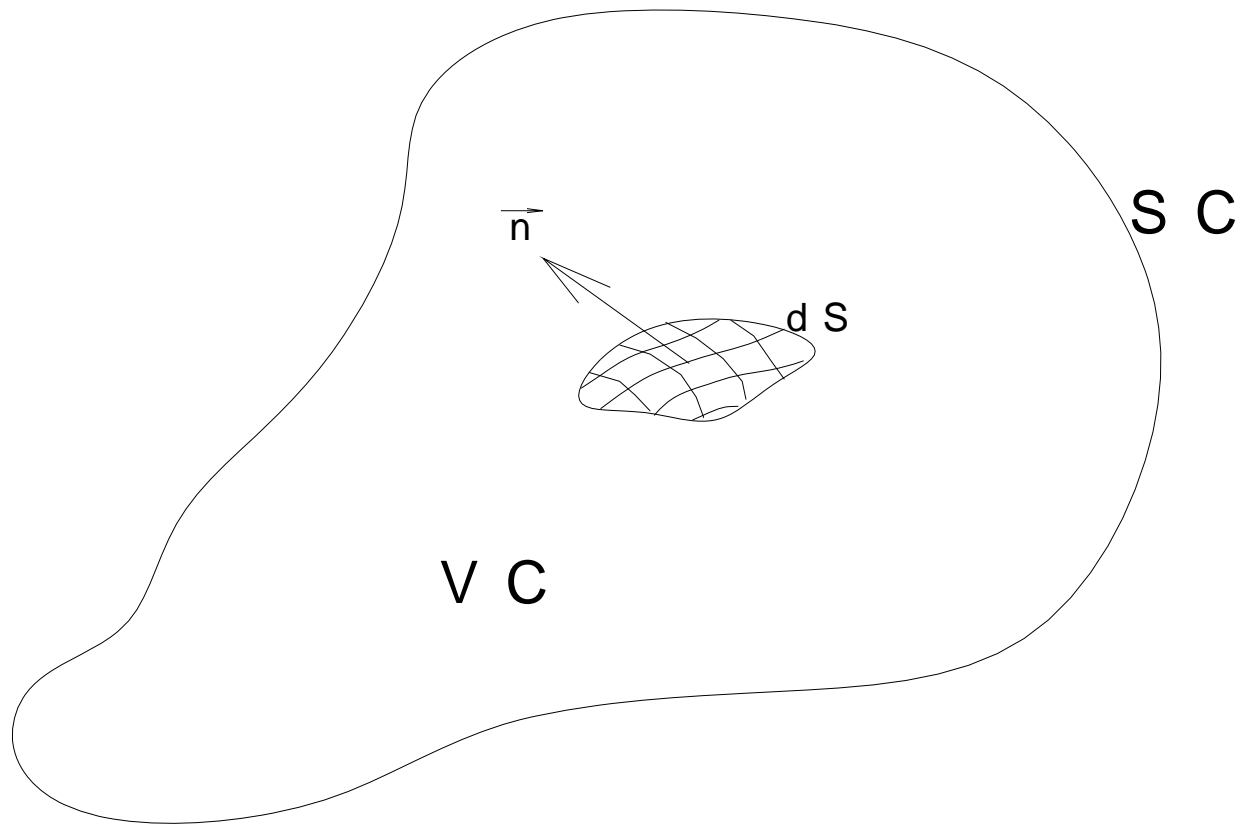
Sejam

$d\vec{S}$  um **elemento da superfície** (orientado) SC (Fig. 4-2)

$\vec{v}$  a **velocidade do fluido relativa à superfície**  $d\vec{S}$

$\vec{n}$  o **vetor unitário normal** à superfície  $d\vec{S}$

$dS$  o **módulo** de  $d\vec{S}$



### Figura 11-2 - Elemento de Superfície

O volume de fluido que atravessa esse elemento de superfície por unidade de tempo (**vazão volumétrica**) é dado por

$$d\dot{V} = \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

A quantidade de massa que atravessa a superfície  $d\vec{S}$ , por unidade de tempo, é

$$\rho d\dot{V} = d\dot{m} = \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

Segue-se que a quantidade da propriedade  $A$  que atravessa a superfície de controle, por unidade de tempo, é:

$$\oint_{sc} \rho a \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

**MÁQUINAS DE FLUXO**  
**NOTAS DE AULAS - 2010**

---

**11-10/36**

—

- **PRINCÍPIO GERAL DA CONSERVAÇÃO**

A taxa de variação de uma propriedade extensiva  $A$ ,  $\frac{dA}{dt} = \dot{A}$ , para um volume determinado, num instante  $t$ , é a soma da taxa de geração ou de destruição da propriedade  $A$  no interior do volume, no instante  $t$ , com a taxa de transferência da propriedade  $A$  através da superfície desse volume, no tempo  $t$ :

$\dot{A} =$	Contribuição devida a fontes e sumidouros internos	+	Contribuição devida ao fluxo
-------------	--	---	------------------------------

Segue-se que

$$\dot{A} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \rho dV + \oiint_{SC} \rho \vec{a} \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

# 11-1

Como  $d\dot{m} = \rho d\dot{V} = \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS$ ,

$$\dot{A} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} a dm + \oiint_{SC} a dm$$

# 11-2

## 11.2 CONSERVAÇÃO DA MASSA

Considere-se a equação # 11-1 e seja m (massa) a propriedade extensiva considerada. Segue-se que

$$a = 1 \text{ pois } \dot{m} = 1 \cdot \dot{m} = a \cdot \dot{m}.$$

Pelo princípio da conservação de massa,  $\dot{m} = 0$  pois massa não é criada nem destruída (pelo menos nas máquinas ora em estudo). Então

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \rho dV + \iint_{SC} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0$$

# 11-3

que é a **forma integral da equação da conservação de massa** para um volume de controle VC limitado por uma superfície SC e imerso num escoamento cujo campo de velocidade é  $\vec{v}$ . Deve-se ter em mente que  $\vec{v}$  é a **velocidade relativa** à superfície.

A equação # 11-3 representa o **princípio da conservação de massa** na forma integral. Deve-se notar que esta forma é aplicável a qualquer tipo de escoamento, in-



clusive com descontinuidades como aquele onde aparecem ondas de choque. Entretanto, muitas vezes é mais conveniente a utilização da equação de conservação de massa na forma diferencial, que pode ser deduzida da eq. # 11-3. Um procedimento para obter a forma diferencial utiliza o teorema de Gauss para o campo vetorial  $\vec{f}$  no qual está o volume de controle VC, limitado pela superfície SC indeformável:

$$\oint_{SC} \vec{f} \cdot \vec{n} dS = \iiint_{VC} \vec{\nabla} \cdot \vec{f} dV \quad \# 11-4$$

Fazendo  $\vec{f} = \rho \vec{v}$  na eq. # 11-4 tem-se

$$\oint_{SC} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \iiint_{VC} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) dV \quad \# 11-5$$

Substituindo-se a eq. # 11-5 na eq. # 11-3 resulta:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \rho dV + \iiint_{VC} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) dV = 0$$

ou

$$\iiint_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iiint_{VC} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) dV = 0$$

ou

$$\iiint_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iiint_{VC} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) dV = 0$$

ou

$$\iiint_{VC} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \right] dV = 0.$$

Como VC é arbitrário, segue-se que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

# 11-6

que é a **forma diferencial do princípio da conservação de massa**.

Deve-se observar que as equações # 11-3 e # 11-6 são também aplicáveis a escoamentos em regime transitório.

Um tipo de escoamento importante é o escoamento em regime permanente. Nesse tipo de escoamento, as propriedades só dependem das coordenadas espaciais, isto é, só do local em que se analisa o escoamento. Desprezando-se as partes das equações # 11-3 e # 11-6 que dependem do tempo, obtém-se, respectivamente,

$$\oint_{SC} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad \# 11-7$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad \# 11-8$$

Estas são, respectivamente, as formas integral e diferencial do princípio de conservação de massa, em regime permanente.

—

Neste caso, deve-se ter em mente que todas as variáveis envolvidas dependem das 3 coordenadas espaciais

$$\bar{v} = \bar{v}(x, y, z)$$

$$\rho = \rho(x, y, z)$$

$$\vec{n} = \vec{n}(x, y, z)$$

$$S = S(x, y, z)$$

$$\vec{\nabla} = \vec{\nabla}(x, y, z)$$

### 11.3 CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO LINEAR

Primeiramente, considere-se a equação # 11-1 e seja  $\vec{q}$  a quantidade de movimento linear:

$$\vec{q} = m\vec{v}$$

Então

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \rho \vec{v} dV + \oiint_{SC} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \dot{\vec{q}}$$

# 11-9

Note-se que # 11-9 é uma equação vetorial, que pode ser decomposta em 3 componentes escalares.

Por outro lado, da 2ª Lei de Newton, a resultante das forças aplicadas no corpo

delimitado pela superfície SC é igual à variação da sua quantidade de movimento:

$$\dot{\vec{q}} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \sum \vec{F}$$

As forças que atuam no volume de controle são de 2 tipos:

- de superfície (ou de contato),  $\vec{f}_s$
- de volume (ou de campo),  $\vec{f}_v$

As **forças de superfície** dependem da natureza do fluido em questão e são resultantes das considerações feitas sobre as propriedades das deformações internas do fluido relacionadas às tensões internas.

Neste curso serão considerados apenas os fluidos newtonianos, para os quais as tensões internas podem ser escritas na forma:

$$\vec{\sigma} = -P\vec{I} + \vec{\tau}$$

# 11-10

onde

$P$  é a pressão estática (considerada isotrópica)  
 $\vec{\tau}$  é o tensor de tensões de cisalhamento viscosas.

As forças de superfície são, portanto:

$$\vec{f}_s = \oiint_{SC} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} dS$$

# 11-11

As **forças de volume** são (considerando apenas a força gravitacional)

$$\vec{f}_v = \iiint_{VC} d\vec{f}_v = \iiint_{VC} \rho \vec{g} dV$$

# 11-12

Segue-se então que

$$\Sigma \vec{F} = \vec{f}_s + \vec{f}_v = \oiint_{SC} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} dS + \iiint_{VC} \rho \vec{g} dV$$

# 11-13

Substituindo-se # 11-14 em # 11-9 tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \rho \vec{v} dV + \oiint_{SC} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \oiint_{SC} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} dS + \iiint_{VC} \rho \vec{g} dV$$

Deve-se observar que a única força de campo considerada foi a gravitacional (que é a única importante nas máquinas de fluxo usuais).

Levando-se em conta as equações # 11-10 e # 11-14 obtém-se



$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \rho \vec{v} dV + \oiint_{SC} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = - \oiint_{SC} P \vec{I} \cdot \vec{n} dS + \oiint_{SC} \vec{\tau} \cdot \vec{n} dS + \iiint_{VC} \rho \vec{g} dV$$

# 11-14

Esta é a **forma integral da lei de conservação da quantidade de movimento linear**.

Em muitos casos, como quando se usam métodos numéricos com diferenças finitas, a forma integral não é a forma apropriada. É necessária a forma diferencial correspondente. Essa forma é obtida da equação # 11-14 através da aplicação do Teorema de Gauss para converter as integrais de superfície em integrais de volume, como mostrado a seguir.

$$\oiint_{SC} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \iiint_{VC} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} (\vec{v})) dV$$

# 11-15

$$-\oint_{SC} \vec{P}\vec{I} \cdot \vec{n} dS = -\iiint_{VC} \vec{\nabla} \cdot (\vec{P}\vec{I}) dV$$

$$\oint_{SC} \vec{\tau} \cdot \vec{n} dS = \iiint_{VC} \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} dV$$

Substituindo-se # 11-15 em # 11-14, resulta:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \rho \vec{v} dV + \iiint_{VC} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) dV = - \iiint_{VC} \vec{\nabla} \cdot \vec{P}\vec{I} dV + \iiint_{VC} \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} dV + \iiint_{VC} \rho \vec{g} dV$$

ou

$$\iiint_{VC} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \vec{v} + \vec{P}\vec{I} - \vec{\tau}) - \rho \vec{g} \right] dV = \vec{0}$$

Para um volume de controle indeformável genérico,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \vec{v} + \vec{P}\vec{I} - \vec{\tau}) - \rho \vec{g} = \vec{0}$$

**# 11-16**

que é a **forma diferencial da lei de conservação da quantidade de movimento linear**.

As equações # 11-14 e # 11-16 também se aplicam a escoamentos transitórios, isto é, que variam com o tempo.

Analogamente ao deduzido para a equação de conservação de massa, para escoamentos permanentes, tem-se:

$$\oint_{SC} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS + \oint_{SC} \vec{P} \vec{I} \cdot \vec{n} dS - \oint_{SC} \vec{\tau} \cdot \vec{n} dS - \iiint_{VC} \rho \vec{g} dV = \vec{0} \quad \# 11-17$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \vec{v} + \vec{P} \vec{I} - \vec{\tau}) - \rho \vec{g} = \vec{0} \quad \# 11-18$$

## 11.4 CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO ANGULAR

O princípio da conservação da quantidade de movimento angular estabelece que a resultante dos torques aplicados ao corpo delimitado pela superfície de controle SC é igual à variação da sua quantidade de movimento angular.

Devido aos mancais da máquina, movimentos na direção axial e radial são impedidos, deixando o rotor livre apenas para girar em torno do seu eixo (admitido coincidente com o eixo coordenado  $z$ ). Desta forma, apenas a componente de momento das forças tangenciais (ao rotor) é de interesse e é ela a responsável pelo aparecimento do torque transmitido pelo eixo da máquina.

Nas máquinas de fluxo está-se interessado na avaliação do torque (momento) transmitido entre fluido e o seu rotor.

Aplicando-se o princípio geral de conservação (eq. # 4-1), com

$\mathbf{a} = \vec{r} \times \vec{v}$ , tem-se

$$\vec{M} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \rho \vec{r} \times \vec{v} dV + \oiint_{SC} \rho \vec{r} \times \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS$$

# 11-19

Em regime permanente, tem-se

$$\vec{M} = \oiint_{SC} \rho \vec{r} \times \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS$$

ou

$$\vec{M} = \oiint_{SC} \vec{r} \times \vec{v} dm$$

# 11-20

pois  $\rho(\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = dm$ .

Pondo

$$\vec{r} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$

$$\vec{V} = V_r\vec{e}_r + V_u\vec{e}_\theta + V_z\vec{e}_z$$

tem-se

$$(\vec{r} \times \vec{V})_z = rV_u$$

Logo,

$$M_z = \iiint_{SC} rV_u d\dot{m}$$

Esta equação permite o cálculo do momento e da potência associados ao escoamento através do rotor da máquina de fluxo.

**É importante concluir dessa expressão que apenas a projeção da velocidade absoluta na direção tangencial (na direção da velocidade  $U$ ),  $V_u$ , contribui para o momento na direção axial e, portanto, para a potência transferida para o eixo ou dele extraída.**

Isto está associado à variação da quantidade de movimento na direção tangencial a que, pela segunda lei de Newton, corresponde uma força, também na direção tangencial. Esta força produz um torque em relação ao eixo de rotação da máquina.

## 11.5 CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

Considerem-se o escoamento de um fluido através de um volume de controle, delimitado por uma superfície de controle e a 1ª Lei da Termodinâmica associada, na forma

$$\dot{E} + \dot{K} = \dot{Q} + \dot{W}$$

# 11-21

ou

$$dE + dK = \underbrace{\delta Q}_{\text{caor adicionado}} + \underbrace{\delta W}_{\text{Trabalho feito pelo meio no sisitema}}$$

Onde

E      energia interna



- 
- K      energia cinética  
Q      calor adicionado ao fluido  
W      trabalho da resultante das forças que agem no fluido.

Considere-se a equação # 4.1 aplicada às energias interna e cinética, com

$$a = e \quad (E = me)$$

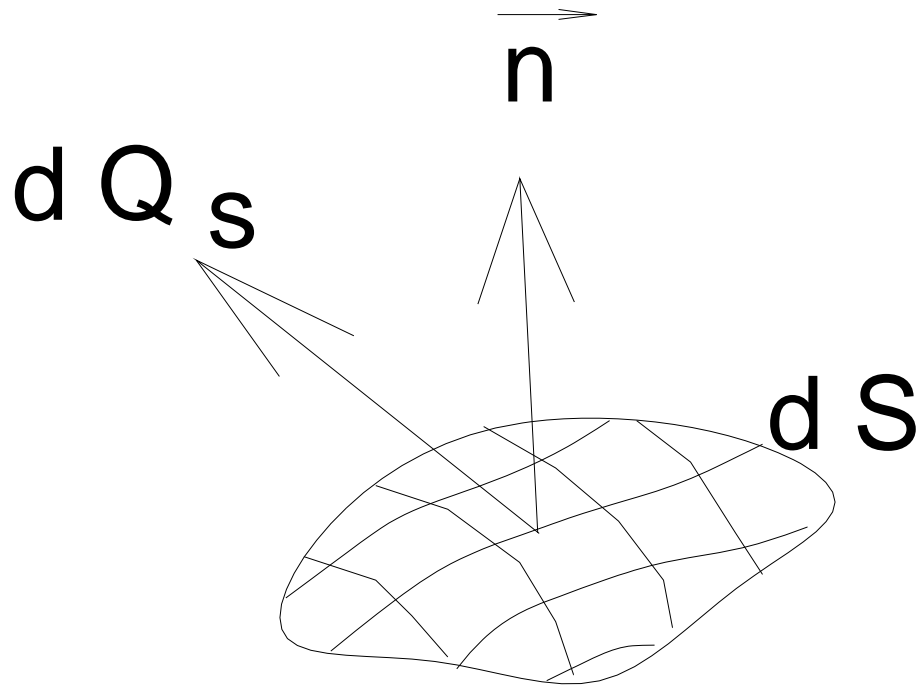
e

$$a = \frac{1}{2} v^2 \quad \left( K = \frac{1}{2} m v^2 \right)$$

$$\dot{E} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \rho e dV + \iint_{SC} \rho e (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS \quad \# 11-22$$

$$\dot{K} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \rho \frac{v^2}{2} dV + \iint_{SC} \rho \frac{v^2}{2} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS \quad \# 11-23$$

Considere-se a Figura 11-3.



**Figura 11-3 - Superfície Orientada**

O fluxo de calor, isto é, a quantidade de calor introduzida no Volume de Controle através do elemento de superfície  $d\vec{S}$  pode ser calculado, por unidade de tempo, por

$$d\dot{Q}_s = -\vec{q}_s \cdot \vec{n}dS$$

onde  $\vec{q}_s$  é o vetor de fluxo de calor por unidade de tempo.

Então,

$$\dot{Q}_s = -\oint_{SC} \vec{q}_s \cdot \vec{n}dS$$

Para o calor gerado internamente,

$$d\dot{Q}_v = \dot{q}_v dV \quad \text{onde}$$

$\dot{q}_v$  é a quantidade de calor gerada internamente, por unidade de tempo.

Então,

$$\dot{Q}_v = \iiint_{VC} \dot{q}_v dV$$

Segue-se que

$$\dot{Q} = \dot{Q}_s + \dot{Q}_v = - \oiint_{SC} \vec{q}_s \cdot \vec{n} dS + \iiint_{VC} \dot{q}_v dV \quad \# 11-24$$

Para o trabalho resultante das forças que agem no Volume de Controle distinguem-se 2 parcelas:

- $\vec{f}_s$  das forças de superfície
- $\vec{f}_v$  das forças de volume

As forças de volume são a soma de  $\vec{f}_v$  com as outras fontes de calor exceto condução ( $q_H$ ), a saber: radiação, reações químicas, etc.

Logo, o trabalho das forças de volume, por unidade de tempo, é

$$d\dot{W}_v = (\rho \vec{f}_v \bullet \vec{v} + q_H) dV \quad \# 11-25$$

As forças de superfície são as mesmas consideradas em # 11-11. Segue-se, então, que

$$d\dot{W}_s = (\vec{\sigma} \bullet \vec{v}) \bullet \vec{n} dS = (-P\vec{v} + \vec{\tau} \bullet \vec{v}) \bullet \vec{n} dS \quad \# 11-26$$

Para as máquinas de fluxo convencionais, a única força de campo a ser considerada é a gravitacional:  $\vec{f}_v = \vec{g}$

Então,

$$\dot{W} = \iiint_{VC} \rho \vec{g} \cdot \vec{v} dV + \oint_{SC} (-P\vec{v} + \vec{\tau} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{n} dS \quad \# 11-27$$

Assim, a equação # 11-27 pode ser rescrita na forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \rho e dV + \oint_{SC} \rho e \vec{v} \cdot \vec{n} dS + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \rho \frac{v^2}{2} dV + \oint_{SC} \rho \frac{v^2}{2} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = - \oint_{SC} \vec{q} \cdot \vec{n} dS + \iiint_{VC} \dot{q}_v dV + \iiint_{VC} \rho \vec{g} \cdot \vec{v} dV + \oint_{SC} (-P\vec{v} + \vec{\tau} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{n} dS$$

# 11-28

Agrupando as energias interna e cinética:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) dV + \oint_{SC} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = - \oint_{SC} \vec{q} \cdot \vec{n} dS + \iiint_{VC} \dot{q}_v dV + \iiint_{VC} \rho \vec{g} \cdot \vec{v} dV + \oint_{SC} (-P\vec{v} + \vec{\tau} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{n} dS$$

# 11-29

Para regime permanente,

$$\oint_{SC} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = - \oint_{SC} \vec{q} \cdot \vec{n} dS + \iiint_{VC} \dot{q}_v dV + \iiint_{VC} \rho \vec{g} \cdot \vec{v} dV + \oint_{SC} (-P\vec{v} + \vec{\tau} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{n} dS \quad \# 11-30$$

É possível, também, obter uma forma diferencial da equação da energia, utilizando procedimento análogo ao utilizado anteriormente, conforme o exposto na Eq. 4-30b.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) \right) + \vec{\nabla} \cdot \left( \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) \vec{v} \right) + \vec{\nabla} \cdot \vec{q} - \rho \vec{g} \cdot \vec{v} - \dot{q}_v - \vec{\nabla} \cdot (-P\vec{v} + \vec{\tau} \cdot \vec{v}) = 0 \quad \# 11-30b$$