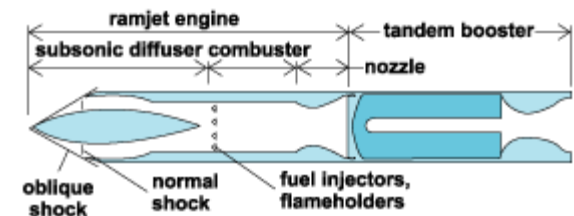
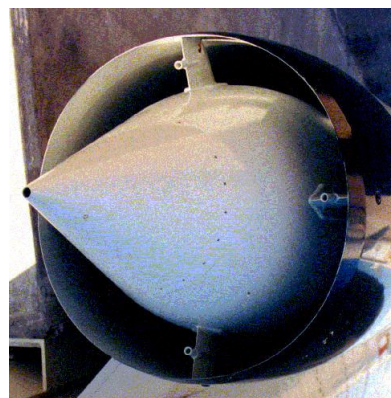
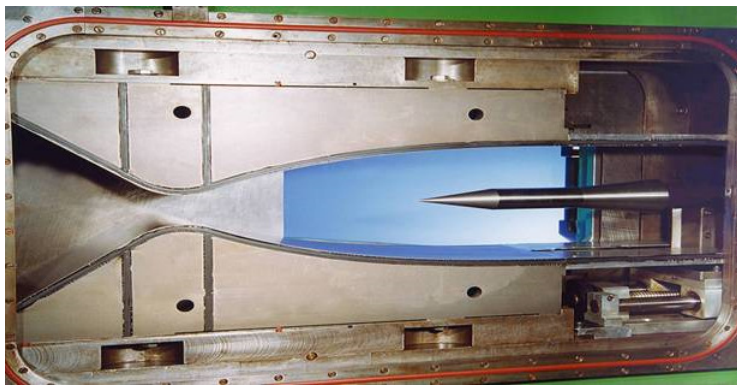


Dinâmica de Gases

Capítulo 10 Escoamento cônico

10.1 Introdução

- Cones são frequentemente empregados na aerodinâmica de mísseis supersônicos, difusores de aviões supersônicos e experimentos de pesquisa sobre os escoamentos super e hipersônicos.



10.1 Introdução

- Será abordada a solução exata não-linear para um caso especial degenerado de escoamento tridimensional: o escoamento supersônico axissimétrico sobre um cone pontiagudo com ângulo de ataque nulo em relação ao escoamento livre.

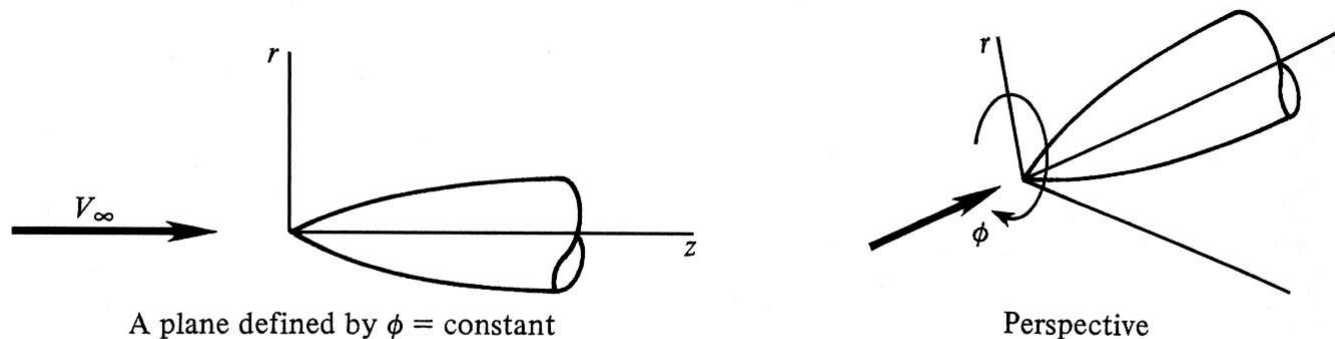


Figure 10.1 | Cylindrical coordinate system for an axisymmetric body.

10.1 Introdução

- Por inspeção, observa-se que o campo de escoamento deve ser simétrico em relação ao eixo z , isto é, todas as propriedades devem ser independentes do ângulo ϕ :

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \equiv 0$$

- O escoamento depende apenas de r e z .

10.1 Introdução

- Tal escoamento é chamado de escoamento axissimétrico e ocorre no espaço tridimensional. Contudo, como existem apenas duas variáveis independentes (r e z), tal escoamento é por vezes chamado de escoamento quase-bidimensional.

10.1 Introdução

- Neste capítulo será estudado o caso de um cone circular reto em um escoamento supersônico. A importância deste caso se deve ao fato de que:
 - As equações do movimento podem ser resolvidas exatamente para este caso.
 - O escoamento supersônico sobre um cone é de grande importância prática na aerodinâmica: muitos mísseis de alta velocidade e aviões supersônicos possuem elementos aproximadamente cônicos.

10.1 Introdução

- A primeira solução do escoamento supersônico sobre um cone foi obtido em 1929 por A. Busemann. Esta solução era essencialmente gráfica e mostrava alguns dos fenômenos físicos mais importantes. Em 1933, G. I. Taylor e J. W. Maccoll reapresentaram uma solução numérica, que é um marco na evolução do estudo de escoamentos compressíveis. Neste caso, o estudo do escoamento cônico apresenta também importância histórica.

10.1 Introdução

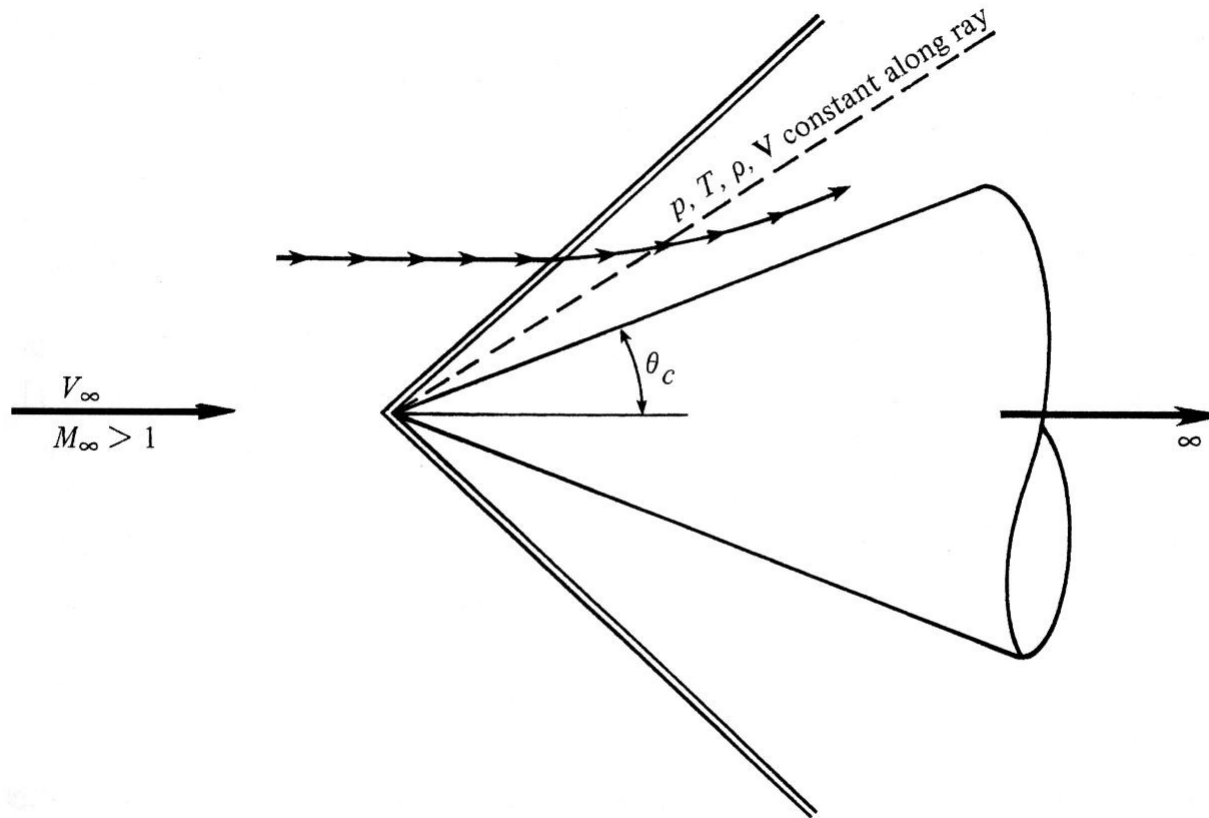


Figure 10.2 | Supersonic flow over a cone.

10.2 Aspectos físicos do escoamento cônico

- Considere um cone semi-infinito com semi-ângulo θ_c . Considerando-se que o cone esteja em um escoamento supersônico, então haverá a formação de uma onda de choque oblíqua a partir do vértice do cone. O formato da onda de choque também deve ser cônico.

10.2 Aspectos físicos do escoamento cônico

- Uma linha de corrente da região do escoamento supersônico livre é defletida ao atravessar o choque, curvando-se continuamente a jusante do choque, tornando-se assintoticamente paralela à superfície do cone.
- Como o cone é semi-infinito, a pressão pode ser assumida constante ao longo da superfície do cone, bem como as demais propriedades.

10.2 Aspectos físicos do escoamento cônico

- O escoamento cônico, deste modo, apresenta como característica o fato de que todas as propriedades do escoamento são constantes ao longo de raios a partir de um dado vértice.

10.3 Formulação quantitativa (segundo Taylor e Maccoll)

- Considere os sistemas de coordenadas cartesiano e esférico sobrepostos. O eixo z é o eixo de simetria para o cone circular reto e V_∞ é orientada na direção z .

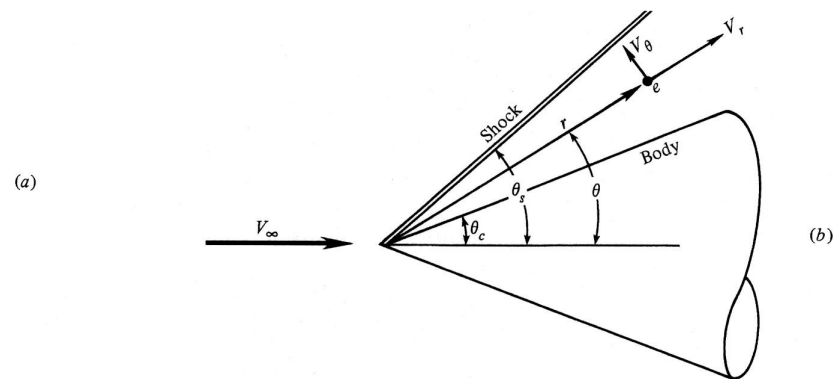
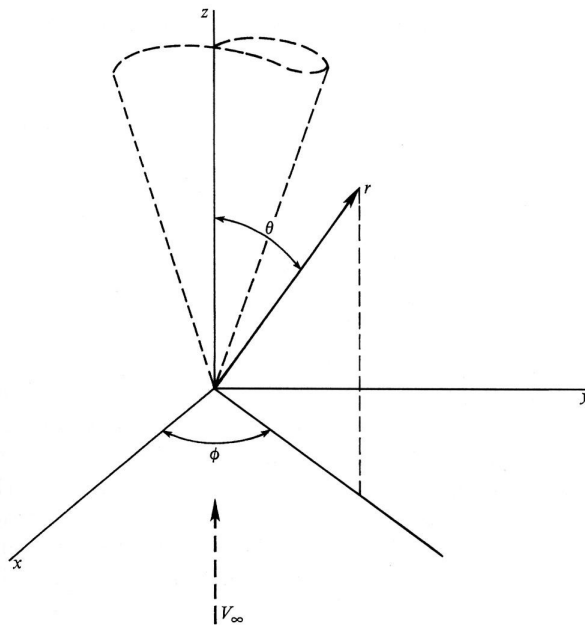


Figure 10.3 | Spherical coordinate system for a cone.

10.3 Formulação quantitativa (segundo Taylor e Maccoll)

- Lembrando-se que no caso de um escoamento cônico axissimétrico

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \equiv 0 \qquad \frac{\partial}{\partial r} \equiv 0$$

- ou seja, as propriedades são independentes de ϕ e são constantes ao longo de um raio a partir do vértice.

10.3 Formulação quantitativa (segundo Taylor e Maccoll)

- Equação da continuidade em regime permanente:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

– Em coordenadas esféricas

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho V_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho V_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho V_\phi) = 0$$

10.3 Formulação quantitativa (segundo Taylor e Maccoll)

- Avaliando-se as derivadas e aplicando-se as condições de escoamento cônico axissimétrico:

$$\frac{1}{r^2} \left[r^2 \frac{\partial(\rho V_r)}{\partial r} + \rho V_r (2r) \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\rho V_\theta \cos \theta + \sin \theta \frac{\partial(\rho V_\theta)}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\rho V_\theta)}{\partial \phi} = 0$$

$$\frac{2\rho V_r}{r} + \frac{\rho V_\theta}{r} \cot \theta + \frac{1}{r} \left(\rho \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_\theta \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right) = 0$$

$$2\rho V_r + \rho V_\theta \cot \theta + \rho \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_\theta \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = 0$$

10.3 Formulação quantitativa (segundo Taylor e Maccoll)

- No escoamento cônico, como a onda de choque é reta, tem-se que o aumento de entropia através de todo o choque é o mesmo para todas as linhas de corrente. Tem-se, assim, que para um escoamento cônico $\nabla_s = 0$. Além disso, pelo fato de o escoamento ser adiabático e em regime permanente, tem-se $\Delta h_0 = 0$.

10.3 Formulação quantitativa (segundo Taylor e Maccoll)

- Empregando-se o teorema de Crocco, observa-se que o escoamento cônico é irrotacional. Neste caso, tem-se então que

$$\nabla \times \vec{V} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{e}_r & r\hat{e}_\theta & (r \sin \theta)\hat{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ V_r & rV_\theta & (r \sin \theta)V_\phi \end{vmatrix} = 0$$

10.3 Formulação quantitativa (segundo Taylor e Maccoll)

- Expandindo-se a relação anterior

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{V} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \hat{e}_r \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (r V_\phi \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial \phi} (r V_\theta) \right] \right. \\ &\quad \left. - r \hat{e}_\theta \left[\frac{\partial}{\partial r} (r V_\phi \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial \phi} (V_r) \right] \right. \\ &\quad \left. + (r \sin \theta) \hat{e}_\phi \left[\frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (V_r) \right] \right\} \\ &= 0\end{aligned}$$

10.3 Formulação quantitativa (segundo Taylor e Maccoll)

- Aplicando as condições de escoamento cônico axissimétrico, da equação anterior obtém-se

$$V_{\theta} = \frac{\partial V_r}{\partial \theta}$$

- que é a condição de irrotacionalidade para o escoamento cônico axissimétrico.

10.3 Formulação quantitativa (segundo Taylor e Maccoll)

- Como o escoamento é irrotacional, podem-se empregar as equações de Euler:

$$dp = -\rho V dV$$

- onde:

$$V^2 = V_r^2 + V_\theta^2$$

- Assim,

$$dp = -\rho (V_r dV_r + V_\theta dV_\theta)$$

10.3 Formulação quantitativa (segundo Taylor e Maccoll)

- Lembrando-se que em um escoamento isentrópico

$$\frac{dp}{d\rho} \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = a^2$$

- Tem-se que:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{1}{a^2} (V_r dV_r + V_\theta dV_\theta)$$

10.3 Formulação quantitativa (segundo Taylor e Maccoll)

- Definindo-se, então, uma nova velocidade de referência (V_{\max})

$$h_0 = \text{const} = h + \frac{V^2}{2} = \frac{V_{\max}^2}{2}$$

- E, desta forma,

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{V^2}{2} = \frac{V_{\max}^2}{2}$$

10.3 Formulação quantitativa (segundo Taylor e Maccoll)

- Da relação anterior,

$$a^2 = \frac{\gamma-1}{2} (V_{\max}^2 - V^2) = \frac{\gamma-1}{2} (V_{\max}^2 - V_r^2 - V_\theta^2)$$

- que, substituída na equação de Euler, fornece

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{2}{\gamma-1} \left(\frac{V_r dV_r + V_\theta dV_\theta}{V_{\max}^2 - V_r^2 - V_\theta^2} \right)$$

- Esta equação é a equação de Euler para escoamentos cônicos.

10.3 Formulação quantitativa (segundo Taylor e Maccoll)

- A partir da equação da continuidade, tem-se que:

$$2V_r + V_\theta \cot \theta + \frac{dV_\theta}{d\theta} + \frac{V_\theta}{\rho} \frac{d\rho}{\theta} = 0$$

- Da equação de Euler para escoamentos cônicos,

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{2\rho}{\gamma-1} \left(\frac{V_r \frac{dV_r}{d\theta} + V_\theta \frac{dV_\theta}{d\theta}}{V_{\max}^2 - V_r^2 - V_\theta^2} \right)$$

10.3 Formulação quantitativa (segundo Taylor e Maccoll)

- Utilizando-se as duas relações anteriores, em conjunto ao resultado do teorema de Crocco, obtém-se a equação de Taylor-Maccoll para escoamentos cônicos:

$$\frac{\gamma-1}{2} \left[V_{\max}^2 - V_r^2 - \left(\frac{dV_r}{d\theta} \right)^2 \right] \left[2V_r + \frac{dV_r}{d\theta} \cot \theta + \frac{d^2V_r}{d\theta^2} \right] - \frac{dV_r}{d\theta} \left[V_r \frac{dV_r}{d\theta} + \frac{dV_r}{d\theta} \left(\frac{d^2V_r}{d\theta^2} \right) \right] = 0$$

10.3 Formulação quantitativa (segundo Taylor e Maccoll)

- O valor de V_θ é dado por

$$V_\theta = \frac{dV_r}{d\theta}$$

- Não existe uma solução analítica para a equação de Taylor-Maccoll. Sendo assim, deve-se resolvê-la numericamente. Neste caso, define-se a velocidade adimensional

$$V' \equiv \frac{V}{V_{\max}}$$

10.3 Formulação quantitativa (segundo Taylor e Maccoll)

- Neste caso, a equação de Taylor-Maccoll assume a forma

$$\frac{\gamma-1}{2} \left[1 - V_r'^2 - \left(\frac{dV_r'}{d\theta} \right)^2 \right] \left[2V_r' + \frac{dV_r'}{d\theta} \cot \theta + \frac{d^2V_r'}{d\theta^2} \right] - \frac{dV_r'}{d\theta} \left[V_r' \frac{dV_r'}{d\theta} + \frac{dV_r'}{d\theta} \left(\frac{d^2V_r'}{d\theta^2} \right) \right] = 0$$

10.3 Formulação quantitativa (segundo Taylor e Maccoll)

- A velocidade adimensional pode ser escrita como função do número de Mach. Isto pode ser visto a partir da equação da conservação da energia, fornecendo

$$\frac{V}{V_{\max}} \equiv V' = \left[\frac{2}{(\gamma - 1)M^2} + 1 \right]^{-1/2}$$

10.4 Procedimento numérico

- Para a solução numérica do escoamento supersônico sobre um cone circular reto, será empregada a abordagem inversa, que consiste em, dada uma onda de choque, calcular o cone que a provocaria. (No caso da abordagem direta, o cone é fornecido, enquanto a onda de choque e o escoamento são calculados).

10.4 Procedimento numérico

- O procedimento numérico é o seguinte:
 - Assume-se um ângulo θ_s entre a onda de choque e o vetor que representa o número de Mach do escoamento livre. Neste caso, o número de Mach após o choque e o ângulo de deflexão são, respectivamente, M_2 e δ .

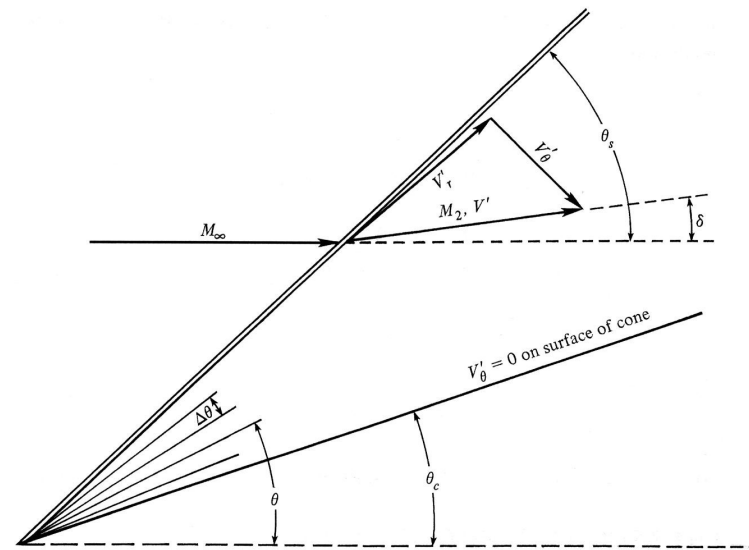


Figure 10.4 | Geometry for the numerical solution of flow over a cone.

10.4 Procedimento numérico

- A partir de M_2 e δ , obtém-se as componentes normal e radial da velocidade, V_r' e V_θ' , atrás da onda de choque.
- Empregando-se o valor de V_r' , diretamente após o choque, deve-se resolver a equação

$$\frac{\gamma-1}{2} \left[1 - V_r'^2 - \left(\frac{dV_r'}{d\theta} \right)^2 \right] \left[2V_r' + \frac{dV_r'}{d\theta} \cot \theta + \frac{d^2V_r'}{d\theta^2} \right] - \frac{dV_r'}{d\theta} \left[V_r' \frac{dV_r'}{d\theta} + \frac{dV_r'}{d\theta} \left(\frac{d^2V_r'}{d\theta^2} \right) \right] = 0$$

- em passos de θ , através do choque. Nesse caso, o escoamento é dividido em incrementos de ângulo $\Delta\theta$.

10.4 Procedimento numérico

- Para cada incremento em θ , o valor de V_θ' é calculado através de

$$V_\theta' = \frac{dV_r}{d\theta}$$

- Para algum valor de θ , chamado θ_c , ter-se-á que $V_\theta' = 0$. Como a componente normal da velocidade em uma superfície impermeável é zero, tem-se que quando $V_\theta' = 0$ em $\theta = \theta_c$, o valor de θ_c representa a superfície do cone que provoca o choque.

10.4 Procedimento numérico

- Através do processo apresentado pelos passos anteriores, obtém-se o campo completo de velocidades do escoamento entre o choque e o corpo que o provoca. As propriedades termodinâmicas após o choque podem ser obtidas através das relações isentrópicas.
- Caso um valor diferente de M_∞ e/ou de θ_s seja utilizado, um campo de escoamento e um cone diferente serão obtidos.

10.5 Aspectos físicos do escoamento sobre cones

- Para dados valores do ângulo de cone θ_c e de número de Mach M_∞ , existem duas ondas de choque possíveis: a forte e a fraca. A solução fraca é quase sempre a observada em cones reais finitos; contudo, pode-se induzir a onda forte através do aumento independente da pressão na região próxima à base do cone.

10.5 Aspectos físicos do escoamento sobre cones

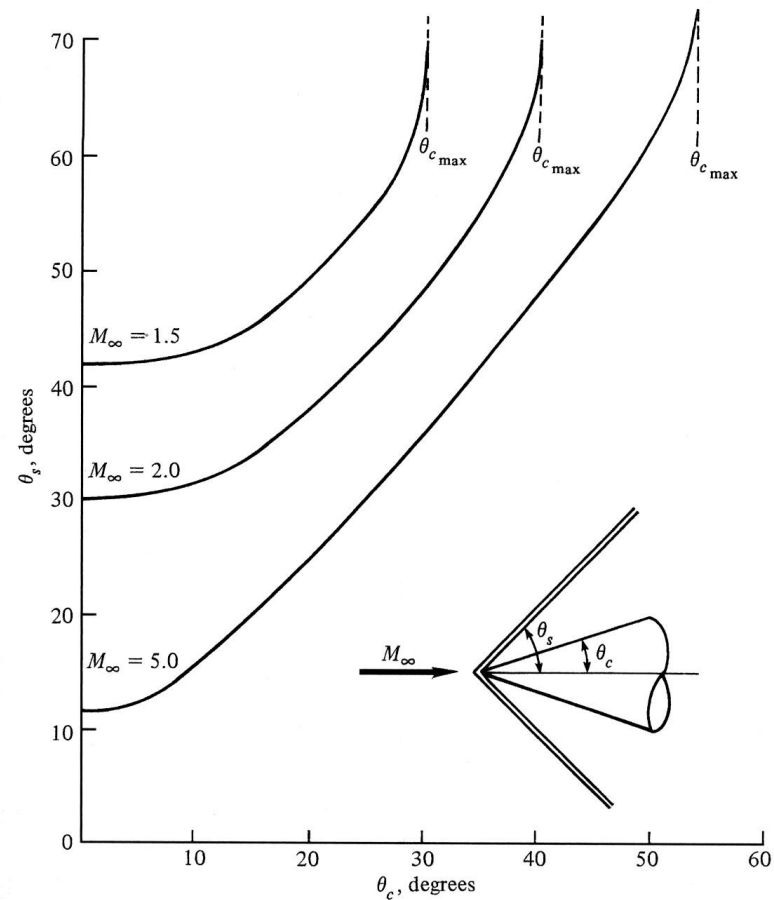


Figure 10.5 | θ_c - θ_s - M diagram for cones in supersonic flow. (The top portion of the curves curl back for the strong shock solution, which is not shown here.)

10.5 Aspectos físicos do escoamento sobre cones

- Existe um ângulo de cone máximo a partir do qual a onda de choque torna-se destacada.

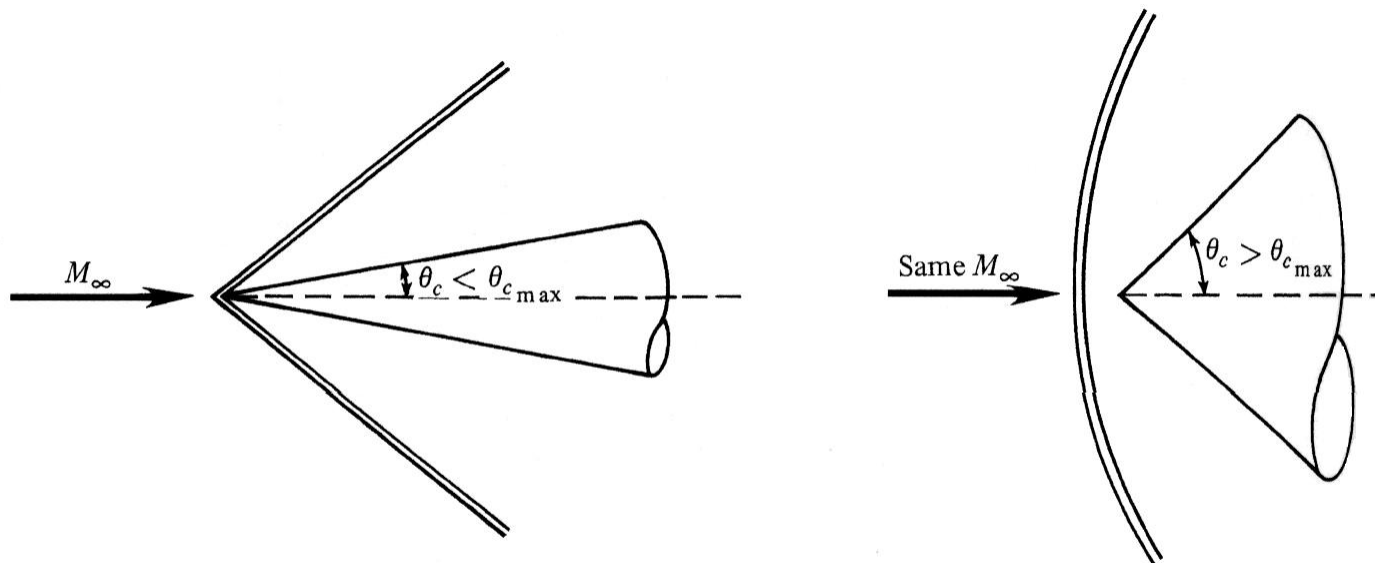


Figure 10.6 | Attached and detached shock waves on cones.

10.5 Aspectos físicos do escoamento sobre cones

- Comparando-se o escoamento sobre cunhas (bidimensional) com o sobre cones (tridimensional), observa-se que a dimensão extra confere ao escoamento a possibilidade de uma maior expansão. Assim, a onda de choque em um cone com um dado ângulo é mais fraca que o choque observado para uma cunha com mesmo ângulo. Deste modo, o ângulo máximo de cone admissível para choque não-destacado é maior que o verificado para cunhas.

10.5 Aspectos físicos do escoamento sobre cones

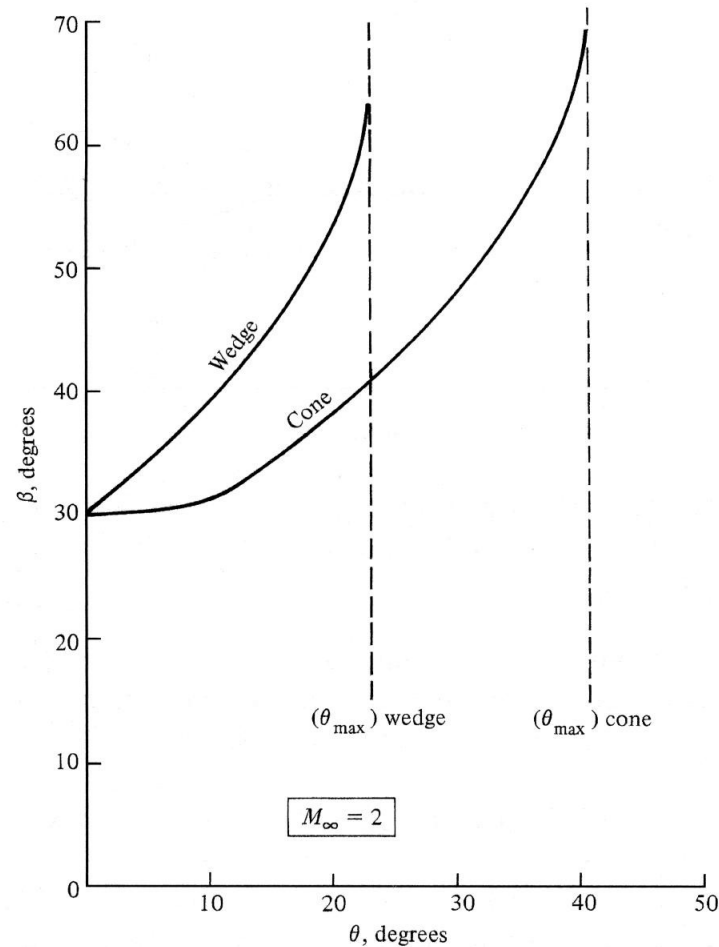


Figure 10.7 | Comparison of shock wave angles for wedges and cones at Mach 2.

10.5 Aspectos físicos do escoamento sobre cones

- As linhas de corrente entre a onda de choque e a superfície do cone são curvas, tendendo assintoticamente a serem paralelas à superfície do cone.
- Na maioria dos casos, o campo de escoamentos completo entre o choque e o cone é supersônico. No entanto, se o ângulo do cone é grande o suficiente, mas menor que $\theta_{c \text{ max}}$, podem haver casos em que o escoamento torna-se subsônico próximo à superfície.

10.5 Aspectos físicos do escoamento sobre cones

- Nesse caso, tem-se um dos poucos casos em que o escoamento é realmente comprimido isentropicamente de uma velocidade supersônica para uma velocidade subsônica. Nesse caso, a transição entre os escoamentos ocorre sem a formação de uma onda de choque.

10.5 Aspectos físicos do escoamento sobre cones

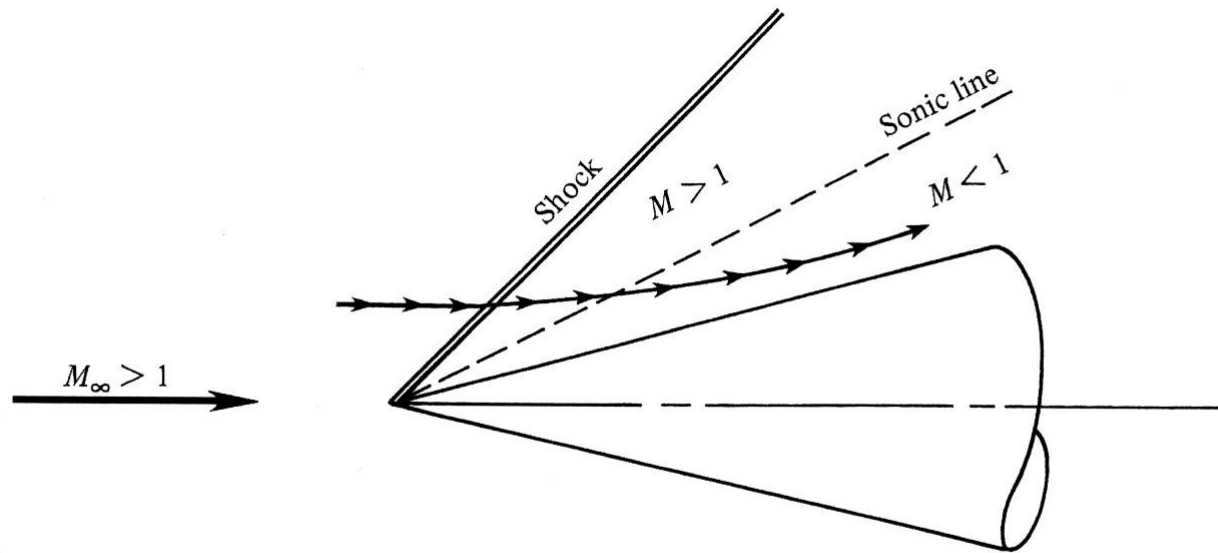


Figure 10.8 | Some conical flowfields are characterized by an isentropic compression to subsonic velocities near the cone surface.