Escoamentos Compressíveis

Capítulo 09

Escoamentos linearizados

9.1 Equação linearizada do potencial de velocidade

- Considere um escoamento bidimensional, isentrópico e irrotacional sobre um corpo imerso em um escoamento uniforme com velocidade V_∞, orientado na direção x.

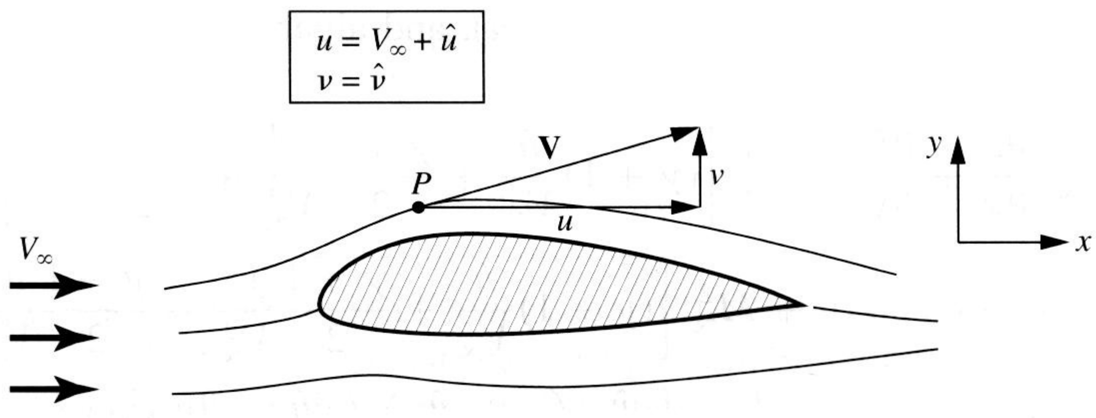


Figure 11.2 Uniform flow and perturbed flow.

9.1 Equação linearizada do potencial de velocidade

- Em um ponto P no escoamento, a velocidade pode ser decomposta em suas três componentes, u, v, w. Pode-se visualizar tais componentes como a soma de uma velocidade constante e um incremento, na forma:

$$u = V_\infty + u'; \quad v = v'; \quad w = w'$$

u', v', w' são chamadas de perturbações de velocidade.

9.1 Equação linearizada do potencial de velocidade

- Definindo-se uma perturbação do potencial de velocidade:

$$\Phi = V_\infty \cdot x + \varphi(x, y, z)$$

- Neste caso,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u'; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v'; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = w'$$

9.1 Equação linearizada do potencial de velocidade

- Obtém-se, assim, a equação da perturbação do potencial de velocidade:

$$\left[a^2-\left(V_\infty+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\left[a^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\left[a^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

$$-2\cdot\left(V_\infty+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}-2\cdot\left(V_\infty+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}-2\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}=0$$

9.1 Equação linearizada do potencial de velocidade

- Reescrevendo a equação anterior em termos das perturbações de velocidade:

$$
\begin{aligned}
&\left(1-M_\infty^2\right)\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z} \\
&= M_\infty^2\cdot\left[(\gamma+1)\frac{u'}{V_\infty}+\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\frac{u'^2}{V_\infty^2}+\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)\left(\frac{v'^2+w'^2}{V_\infty^2}\right)\right]\frac{\partial u'}{\partial x} \\
&+ M_\infty^2\cdot\left[(\gamma-1)\frac{u'}{V_\infty}+\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\frac{v'^2}{V_\infty^2}+\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)\left(\frac{w'^2+u'^2}{V_\infty^2}\right)\right]\frac{\partial v'}{\partial y} \\
&+ M_\infty^2\cdot\left[(\gamma-1)\frac{u'}{V_\infty}+\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\frac{w'^2}{V_\infty^2}+\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)\left(\frac{u'^2+v'^2}{V_\infty^2}\right)\right]\frac{\partial w'}{\partial z} \\
&+ M_\infty^2\cdot\left[\frac{v'}{V_\infty}\left(1+\frac{u'}{V_\infty}\right)\left(\frac{\partial u'}{\partial y}+\frac{\partial v'}{\partial x}\right)+\frac{w'}{V_\infty}\left(1+\frac{u'}{V_\infty}\right)\left(\frac{\partial u'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial x}\right)+\frac{u'w'}{V_\infty^2}\left(\frac{\partial w'}{\partial y}+\frac{\partial v'}{\partial z}\right)\right]
\end{aligned}
$$

9.1 Equação linearizada do potencial de velocidade

- Para pequenas perturbações, causadas por pequenos ângulos de ataque, tem-se

$$\frac{u'}{V_\infty}, \frac{v'}{V_\infty}, \frac{w'}{V_\infty} << 1; \quad \frac{u'^2}{V_\infty^2}, \frac{v'^2}{V_\infty^2}, \frac{w'^2}{V_\infty^2} <<< 1$$

- Levando-se em consideração as desigualdades acima e comparando-se os termos à esquerda e à direita para a equação anterior, encontra-se que:

9.1 Equação linearizada do potencial de velocidade

- Para $0 \leq M_\infty \leq 0{,}8$ ou $M_\infty \geq 1{,}2$ a magnitude do termo

$$M_\infty^2\left[(\gamma+1)\frac{u'}{V_\infty}+\ldots\right]\frac{\partial u'}{\partial x}$$

é pequena em relação à magnitude de

$$\left(1-M_\infty^2\right)\frac{\partial u'}{\partial x}$$

Assim, o primeiro termo é desprezado.

9.1 Equação linearizada do potencial de velocidade

- Para $M_\infty < 5$ (aproximadamente):

$$M_\infty^2\left[(\gamma-1)\frac{u'}{V_\infty}+\ldots\right]\frac{\partial v'}{\partial y}$$

é pequeno em comparação com

$$\frac{\partial v'}{\partial y}$$

Assim, o primeiro termo é desprezado.

9.1 Equação linearizada do potencial de velocidade

Também o termo:

$$M_\infty^2\left[(\gamma-1)\frac{u'}{V_\infty}+\ldots\right]\frac{\partial w'}{\partial y}$$

é pequeno em comparação com

$$\frac{\partial w'}{\partial z}$$

Assim, também ele é desprezado.

9.1 Equação linearizada do potencial de velocidade

Além disso:

$$M_\infty^2\left[\frac{v'}{V_\infty}\left(1+\frac{u'}{V_\infty}\right)\left(\frac{\partial u'}{\partial y}+\frac{\partial v'}{\partial x}\right)+\ldots\right]\approx 0$$

A partir das comparações de ordens de magnitude, a equação original é reduzida a

$$\left(1-M_\infty^2\right)\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}=0$$

9.1 Equação linearizada do potencial de velocidade

- Em termos de perturbações do potencial de velocidade, obtém-se:

$$\boxed{\left(1-M_\infty^2\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0}$$

- A relação anterior é uma aproximação da física do escoamento, apresentando resultados razoáveis (mas não exatos) para as seguintes situações combinadas:

9.1 Equação linearizada do potencial de velocidade

– Pequenas perturbações, ou seja, corpos finos com pequeno ângulo de ataque.
– Números de Mach sub ou supersônicos.

- Ressalta-se que a equação anterior não deve ser utilizada para corpos espessos e para grandes ângulos de ataque. A equação não deve ser empregada, também, para escoamentos transônicos e hipersônicos.

9.1 Equação linearizada do potencial de velocidade

- Coeficiente de pressão:

$$Cp \equiv \frac{p - p_\infty}{q_\infty}$$

onde $q_\infty = \frac{1}{2}\rho_\infty \cdot V_\infty^2$ é a pressão dinâmica.

- Tal relação pode ser reescrita como:

$$Cp = \frac{2}{\gamma \cdot M_\infty^2}\left(\frac{p}{p_\infty} - 1\right)$$

9.1 Equação linearizada do potencial de velocidade

- A expressão anterior ainda é uma representação exata da definição de Cp.
- Para obter uma forma linearizada do coeficiente de pressão, considera-se:
  - Escoamento adiabático.
  - Gás caloricamente perfeito.
  - Pequenas perturbações das componentes do vetor velocidade.

9.1 Equação linearizada do potencial de velocidade

- Análise das ordens de grandeza dos termos envolvidos.
- Expansão binomial, desprezando-se os termos de ordem superior.

• Obtém-se, então, a seguinte expressão:

$$\boxed{Cp = -\frac{2 \cdot u'}{V_\infty}}$$

9.2 Correção de Prandtl-Glauert para compressibilidade

- Durante o período de 1903 a 1940, a teoria de escoamentos incompressíveis sobre aerofólios finos para pequenos ângulos de ataque eram suficientemente adequados para prever as propriedades dos aerofólios.

9.2 Correção de Prandtl-Glauert para compressibilidade

- Com a rápida evolução dos mecanismos recíprocos durante a Segunda Guerra Mundial, os aviões militares começaram a atingir velocidades próximas a 450 mph (720 km/h).

9.2 Correção de Prandtl-Glauert para compressibilidade

- Com o advento dos motores a jato em 1944 (Me 262, alemão), as velocidades alcançadas chegaram a 550 mph (880 km/h). Deste modo, a teoria de escoamentos incompressíveis não era mais válida.

9.2 Correção de Prandtl-Glauert para compressibilidade

- Por causa da grande quantidade de dados e da experiência adquirida durante os anos da "aerodinâmica de baixa velocidade", buscou-se inicialmente métodos que empregassem correções simples para os dados incompressíveis que levassem em consideração os efeitos de compressibilidade. Tais métodos são conhecidos como métodos de correção para a compressibilidade.

9.2 Correção de Prandtl-Glauert para compressibilidade

- Considere inicialmente o escoamento subsônico sobre um aerofólio fino. Neste caso, a condição de contorno usual para a superfície precisa ser satisfeita, isto é, a velocidade do escoamento precisa ser tangente à superfície. Seja θ o ângulo entre a tangente à superfície e o escoamento livre. Assim:

9.2 Correção de Prandtl-Glauert para compressibilidade

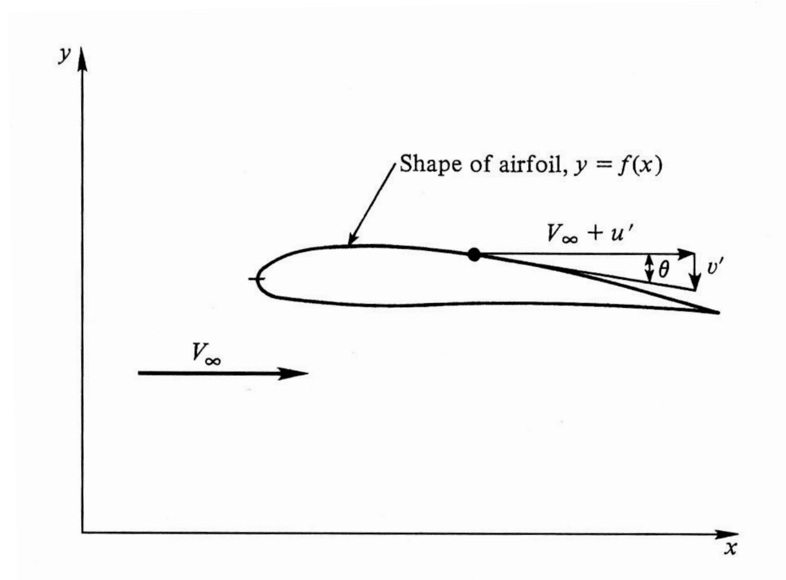
$$\frac{df}{dx} = \frac{v'}{V_\infty + u'} = \tan\theta$$

- Para pequenas perturbações:

$$u' << V_\infty \qquad \tan\theta \approx \theta$$

- Deste modo:

$$\frac{df}{dx} = \frac{v'}{V_\infty} = \theta \quad ou \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = V_\infty \frac{df}{dx}$$



9.2 Correção de Prandtl-Glauert para compressibilidade

- Considere um escoamento subsônico, compressível, invíscido sobre um aerofólio, cujo formato é dado por $y = f(x)$. Se o aerofólio for fino e o ângulo de ataque pequeno, pode-se empregar a expressão para escoamentos linearizados. Nesse caso, define-se:

$$\beta^2 \equiv 1 - M_\infty^2$$

9.2 Correção de Prandtl-Glauert para compressibilidade

- Tem-se desse modo, para 2D:

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

- Realizando-se uma transformação de variáveis tal que:

$$\xi = x$$
$$\eta = \beta \cdot y$$

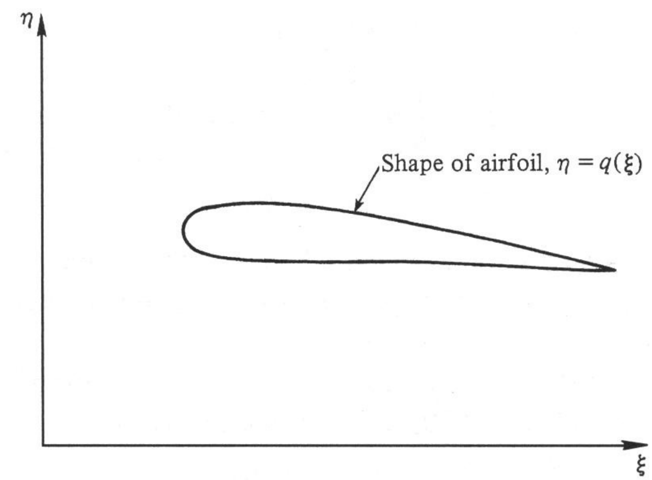


Figure 9.4 | Airfoil in transformed space.

9.2 Correção de Prandtl-Glauert para compressibilidade

- Para o espaço transformado, uma perturbação do potencial de velocidades é definido como

$$\overline{\varphi}(\xi, \eta) = \beta \cdot \varphi(x, y)$$

- Em termos das variáveis transformadas, tem-se:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \beta$$

9.2 Correção de Prandtl-Glauert para compressibilidade

- Após algumas manipulações, tem-se:

$$\frac{\partial^2 \overline{\varphi}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \overline{\varphi}}{\partial \eta^2} = 0$$

- A expressão anterior é uma equação de Laplace, que governa um escoamento incompressível. Assim, $\overline{\varphi}$ representa o escoamento incompressível em um espaço (ξ,η) que está relacionado a um escoamento compressível φ no espaço (x, y).

9.2 Correção de Prandtl-Glauert para compressibilidade

- O formato do aerofólio é dado por

$$y = f(x), \quad em \quad (x, y)$$

$$\eta = q(\xi), \quad em \quad (\xi, \eta)$$

- Tem-se assim:

$$V_\infty \frac{df}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial y} = \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \eta}$$

ou nas coordenas (ξ,η):

$$V_\infty \frac{dq}{d\xi} = \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \eta}$$

9.2 Correção de Prandtl-Glauert para compressibilidade

- Desta forma, tem-se a igualdade:

$$\frac{df}{dx} = \frac{dq}{d\xi}$$

- Observa-se, assim, que o formato do aerofólio permanece inalterado, apesar da mudança do sistema de coordenadas.
- A praticidade desse desenvolvimento recai sobre o coeficiente de pressão.

9.2 Correção de Prandtl-Glauert para compressibilidade

- O coeficiente de pressão para fluidos compressíveis é dado por

$$Cp = -\frac{2 \cdot u'}{V_\infty} = -\frac{2}{V_\infty}\frac{1}{\beta}\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \xi}$$

- Aplicando-se as perturbações, obtém-se:

$$Cp = \frac{Cp_0}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}; \quad Cp_0 = -\frac{2 \cdot \overline{u}}{V_\infty}$$

conhecida como regra de Prandtl-Glauert.

9.2 Correção de Prandtl-Glauert para compressibilidade

- A regra de Prandtl-Glauert é uma regra de similaridade que relaciona o escoamento incompressível sobre um dado perfil bidimensional ao escoamento subsônico compressível sobre o mesmo perfil.
- Essa mesma regra é válida para outras grandezas, como os coeficientes de empuxo e de momento.

9.2 Correção de Prandtl-Glauert para compressibilidade

- Coeficiente de empuxo:

$$C_L = \frac{C_{L0}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$$

- Coeficiente de momento:

$$C_M = \frac{C_{M0}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$$

9.2 Correção de Prandtl-Glauert para compressibilidade

- Já em 1922 Prandtl empregava as correções em trabalhos, mas sem prova formal. Esta só foi apresentada em 1928 pelo aerodinamicista britânico Hermann Glauert. A regra de Prandtl-Glauert foi exclusivamente empregada até 1939, quando uma correção melhorada foi desenvolvida. Contudo, devido à sua simplicidade, ainda é empregada para estimativas iniciais de efeitos de compressibilidade.

9.2 Correção de Prandtl-Glauert para compressibilidade

- Os resultados da teoria de linearização indicam que as forças aerodinâmicas tendem ao infinito à medida que o número de Mach tende à unidade, o que é um resultado impossível.
- Deve-se recordar, neste ponto, que a teoria não tem validade para o regime sônico (Mach próximo à unidade).

9.2 Correção de Prandtl-Glauert para compressibilidade

- A regra de Prandtl-Glauert, deste modo, é válida para números de Mach até aproximadamente 0,7. Outros coeficientes de correção mais acurados serão apresentados na sequência.

9.2 Correção de Prandtl-Glauert para compressibilidade

- Um importante efeito da compressibilidade em campos de escoamento subsônicos pode ser visto notando-se que

$$u' = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \xi} = \frac{\overline{u}}{\beta} = \frac{\overline{u}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$$

- Comparando-se os extremos esquerdo e direito da equação, para uma dada localização do escoamento, tem-se que quando M_∞ aumenta, a perturbação da velocidade u' aumenta.

9.2 Correção de Prandtl-Glauert para compressibilidade

- Tem-se então que a compressibilidade fortalece os distúrbios no escoamento introduzidos por um corpo sólido. De um outro ponto de vista, tem-se que uma perturbação causada por uma superfície possui efeitos em pontos mais distantes da mesma em um escoamento compressível em comparação a um incompressível.

9.3 Correções melhoradas para compressibilidade

- As soluções para problemas linearizados são influenciadas especialmente pelas condições de escoamento livre, não levando em consideração variações locais do escoamento.
- Com o rápido crescimento da velocidade das aeronaves durante a Segunda Guerra Mundial, novas correções foram propostas a fim de melhorar os resultados apresentados pela de Prandtl-Glauert.

9.3 Correções melhoradas para compressibilidade

- Laitone aplicou a regra de Prandtl-Glauert localmente ao escoamento, obtendo

$$Cp = \frac{Cp_0}{\sqrt{1-M_\infty^2} + \left[M_\infty^2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \right) \Big/ 2\sqrt{1-M_\infty^2} \right] \cdot Cp_0}$$

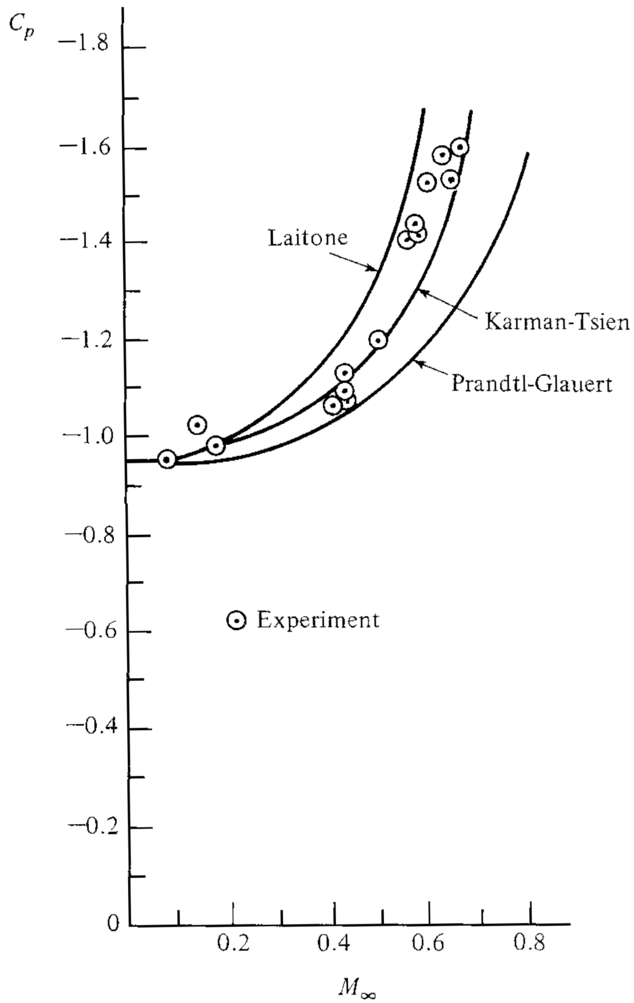
- Outra expressão largamente empregada é a obtida por von Karman e Tsien, dada por:

9.3 Correções melhoradas para compressibilidade

$$Cp = \frac{Cp_0}{\sqrt{1-M_\infty^2} + \left(\frac{M_\infty^2}{1+\sqrt{1-M_\infty^2}}\right)\cdot\frac{Cp_0}{2}}$$

- Tal relação tem sido largamente adotada pela indústria aeronáutica desde a Segunda Guerra Mundial.

9.3 Correções melhoradas para compressibilidade

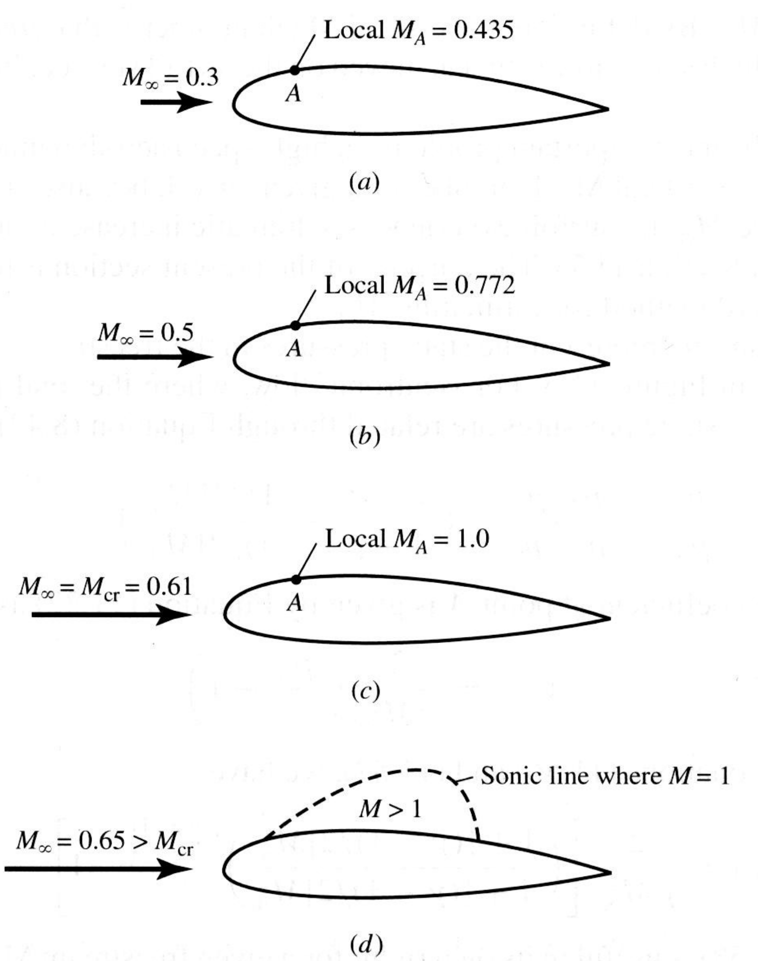


Comparação entre os resultados experimentais e os gerados das correções para compressibilidade para um aerofólio NACA 4412 com ângulo de ataque de 1º53'. Os dados experimentais foram escolhidos por sua importância histórica. Nota-se que a regra de Prandtl-Glauert subestima os valores experimentais, enquanto as regras de Laitone e Karman-Tsien são mais acuradas, devido à consideração dos efeitos não-lineares do escoamento.

9.4 Número de Mach crítico

- O escoamento transônico é altamente não-linear e a teoria de escoamentos transônicos aplicada à aerodinâmica é um assunto sofisticado e desafiador.
- Considere um aerofólio a uma velocidade subsônica baixa, com número de Mach de escoamento livre igual a 0,3. Observa-se que, localmente sobre o aerofólio, o número de Mach aumentará.

9.4 Número de Mach crítico



- À medida que o número de Mach cresce, localmente tem-se valores se aproximando da unidade. Em um dado momento, o número de Mach sobre o aerofólio é unitário. Neste ponto, tem-se o chamado “número de Mach crítico”, denotado por M_{cr}. Se a velocidade do escoamento for aumentada ainda mais, há a formação de uma linha sônica sobre o aerofólio.

9.4 Número de Mach crítico

- Um dos mais importantes problemas na aerodinâmica de altas velocidades é a determinação do número de Mach crítico para um dado aerofólio. Isto ocorre pois, para números de Mach ligeiramente superiores ao crítico, o aerofólio experimenta um dramático aumento no coeficiente de arrasto.

9.4 Número de Mach crítico

- Sejam p_∞ e p_A as pressões estáticas do escoamento livre e do ponto A, respectivamente. Para um escoamento isentrópico, a pressão total é constante e nesse caso,

$$\frac{p_A}{p_\infty} = \frac{p_A/p_0}{p_\infty/p_0} = \left\{\frac{1+[(\gamma-1)/2]\cdot M_\infty^2}{1+[(\gamma-1)/2]\cdot M_A^2}\right\}^{\gamma/(\gamma)}$$

- Obs: o ponto A corresponde ao local de mínima pressão no aerofólio.

9.4 Número de Mach crítico

- O coeficiente de pressão no ponto A é definido como

$$Cp_A = \frac{2}{\gamma \cdot M_\infty^2}\left(\frac{p_A}{p_\infty} - 1\right)$$

- Combinando-se as equações anteriores, obtém-se:

$$Cp_A = \frac{2}{\gamma \cdot M_\infty^2}\left[\left(\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}M_A^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1\right]$$

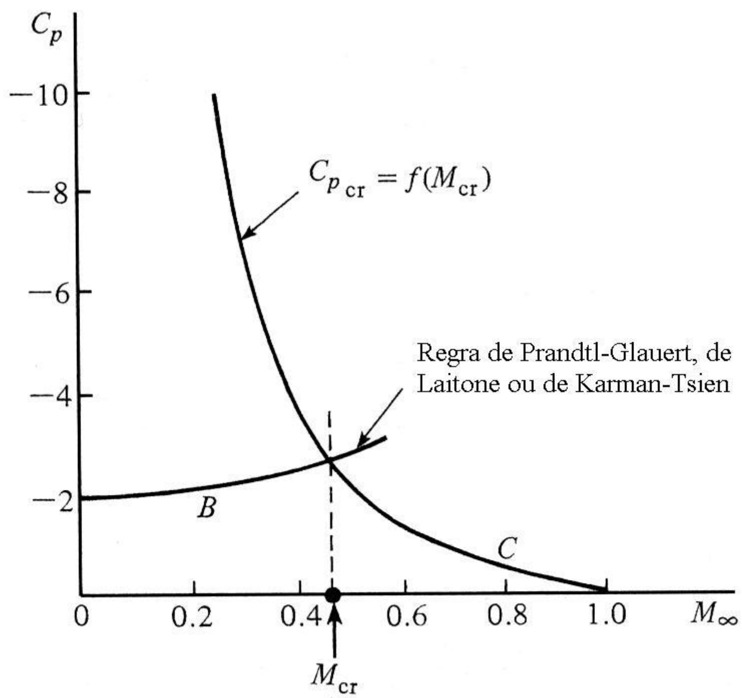
9.4 Número de Mach crítico

- No caso em que se tenha no ponto A número de Mach unitário, o coeficiente de pressão é chamado de coeficiente crítico de pressão e nesse caso:

$$Cp_{cr} = \frac{2}{\gamma \cdot M_{cr}^2}\left[\left(\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_{cr}^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1\right]$$

9.4 Número de Mach crítico

- Nota-se, assim, que o coeficiente crítico de pressão é uma função do número de Mach crítico.



9.4 Número de Mach crítico

- Estimativa do número de Mach crítico para um dado aerofólio:
  - Por algum método, seja experimental ou teórico, obtenha um valor para o coeficiente de pressão Cp_0 no ponto de mínima pressão de um dado aerofólio.
  - Utilize alguma das correções para compressibilidade (regra de Prandtl-Glauert, de Laitone ou de Karman-Tsien).

9.4 Número de Mach crítico

– Em algum ponto da curva B, ocorrerá um único ponto no qual o coeficiente de pressão corresponde a um escoamento localmente sônico. Além disso, tal ponto deve coincidir com a equação para o coeficiente crítico de pressão, representada pela curva C. Desse modo, a intersecção entre as curvas B e C representa o ponto para o qual tem-se a mínima pressão sobre o aerofólio. O número de Mach M_∞ nesse ponto é o número de Mach crítico.

9.4 Número de Mach crítico

- Deve-se notar que a construção gráfica não corresponde à determinação exata do número de Mach crítico.
- Isso se deve ao fato de que a curva B é representa uma correção do coeficiente de pressão (que leva em consideração a compressibilidade).
- Contudo os resultados obtidos são acurados o suficiente para a maioria das aplicações de projeto.

9.4 Número de Mach crítico

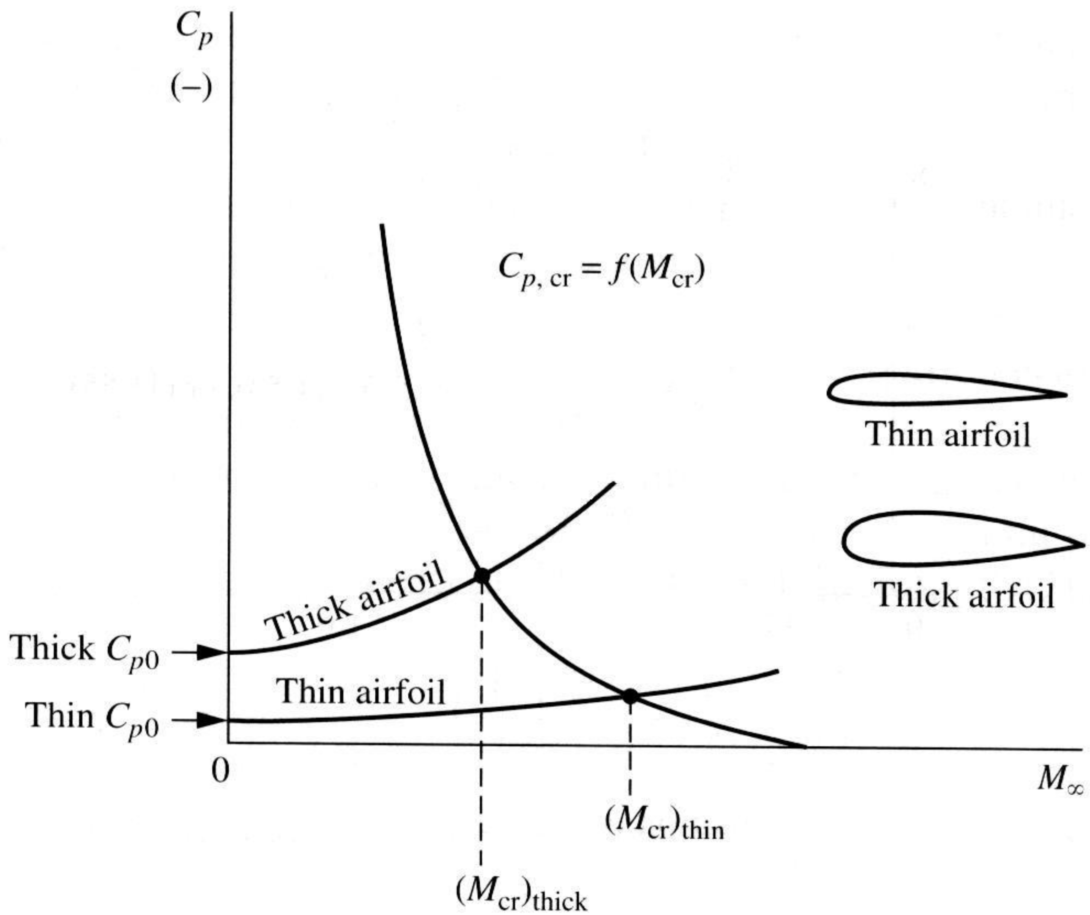


Figure 11.7 Effect of airfoil thickness on critical Mach number.

9.4 Número de Mach crítico

- O escoamento sobre um aerofólio fino é pouco perturbado em relação ao escoamento livre. Assim, a expansão na superfície superior é suave e o valor do coef. de pressão é um valor de pequena magnitude.
- Ao contrário, no caso de um escoamento sobre aerofólio espesso, a perturbação em relação ao escoamento livre é maior.

9.4 Número de Mach crítico

- Neste caso, a expansão sobre a superfície superior é pronunciada e o coef. de pressão apresenta um valor absoluto mais elevado.
- Do esquema anterior, nota-se que um número de Mach crítico maior está relacionado a um coef. de pressão menor.
- Assim, para aviões de alta velocidade, é desejável possuir um número de Mach crítico o mais elevado possível.

9.4 Número de Mach crítico

- Deve-se atentar, também, que a posição do ponto de mínima pressão sobre um aerofólio não corresponde necessariamente ao ponto de máxima espessura do mesmo. O ponto de máxima velocidade é definido a partir das características de todo o campo de escoamento, empregando-se o formato do aerofólio como um todo.

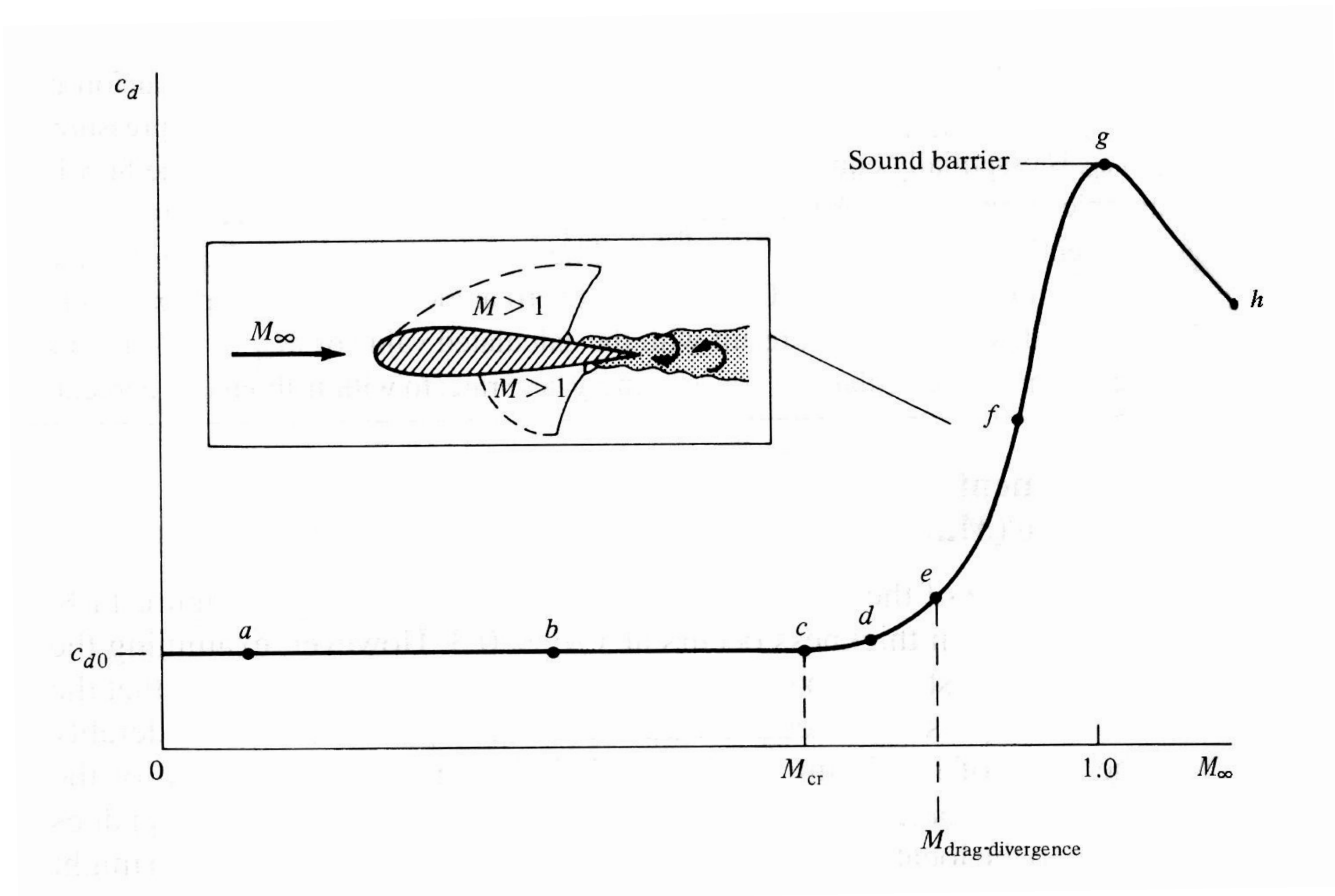
9.5 O número de Mach de divergência: a barreira do som

- Escoamentos subsônicos compressíveis de baixa velocidade apresentam o coeficiente de arrasto praticamente constante, até aproximadamente o número de Mach crítico.
- Acima do Mach crítico, uma porção do aerofólio passa a apresentar escoamento localmente supersônico e o coeficiente de arrasto começa a aumentar.

9.5 O número de Mach de divergência: a barreira do som

- Se a velocidade do escoamento livre for aumentada, contudo, observa-se um ponto a partir do qual o coeficiente de arrasto aumenta subitamente. O valor do número de Mach do escoamento livre associado a esse fenômeno recebe o nome de número de Mach de divergência.

9.5 O número de Mach de divergência: a barreira do som



9.5 O número de Mach de divergência: a barreira do som

- Para números de Mach entre o valor de divergência e o unitário, o coef. de arrasto aumenta rapidamente, associado com o crescimento da porção de escoamento supersônico sobre o aerofólio, que culmina em uma onda de choque. Quando se atinge a formação de tal onda de choque, tem-se a chamada “quebra da barreira do som”.

9.5 O número de Mach de divergência: a barreira do som

- O termo "barreira do som" surgiu na década de 1930, com base na regra de Prandtl-Glauert e em dados experimentais que apontavam para o aumento do coef. de arrasto com o aumento do número de Mach do escoamento livre.
- Nessa época, a crença era de que nenhum avião pudesse ultrapassar a barreira imposta pelo aumento do arrasto.

9.5 O número de Mach de divergência: a barreira do som

- Com o advento dos testes feitos em túneis de vento no final da década de 1940, notou-se que os picos para o coef. de arrasto ocorriam em condições de número de Mach próximo ao unitário, decaindo posteriormente no regime supersônico. Desse modo, era necessário apenas o projeto de um avião que suportasse o aumento do arrasto verificado em escoamentos transônicos.

9.5 O número de Mach de divergência: a barreira do som

- Duas propostas clássicas são feitas de modo a aumentar o valor do número de Mach crítico (e, consequentemente, o número de Mach de divergência):
  - Reduzir a espessura do aerofólio.
  - Rotacionar a asa.
- Em ambos os casos, como consequência tem-se a redução da razão espessura/corda para a asa.

9.5 O número de Mach de divergência: a barreira do som

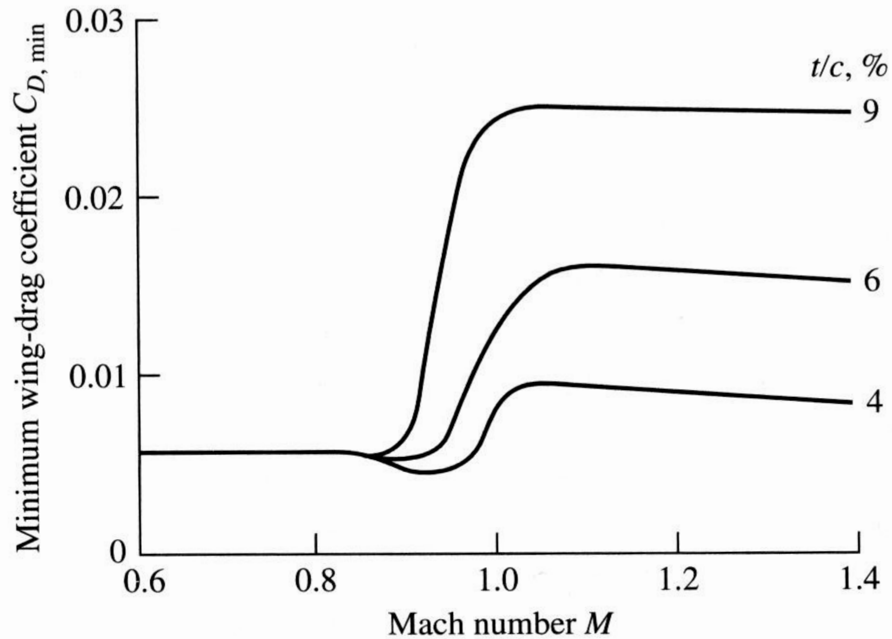


Figure 9.17 | Variation of minimum wing drag coefficient versus Mach number with airfoil thickness ratio as a parameter. The wing is swept, with a sweep angle of 47 degrees. (From Loftin, *Quest for Performance*, NASA SP 468, 1985.)

9.5 O número de Mach de divergência: a barreira do som

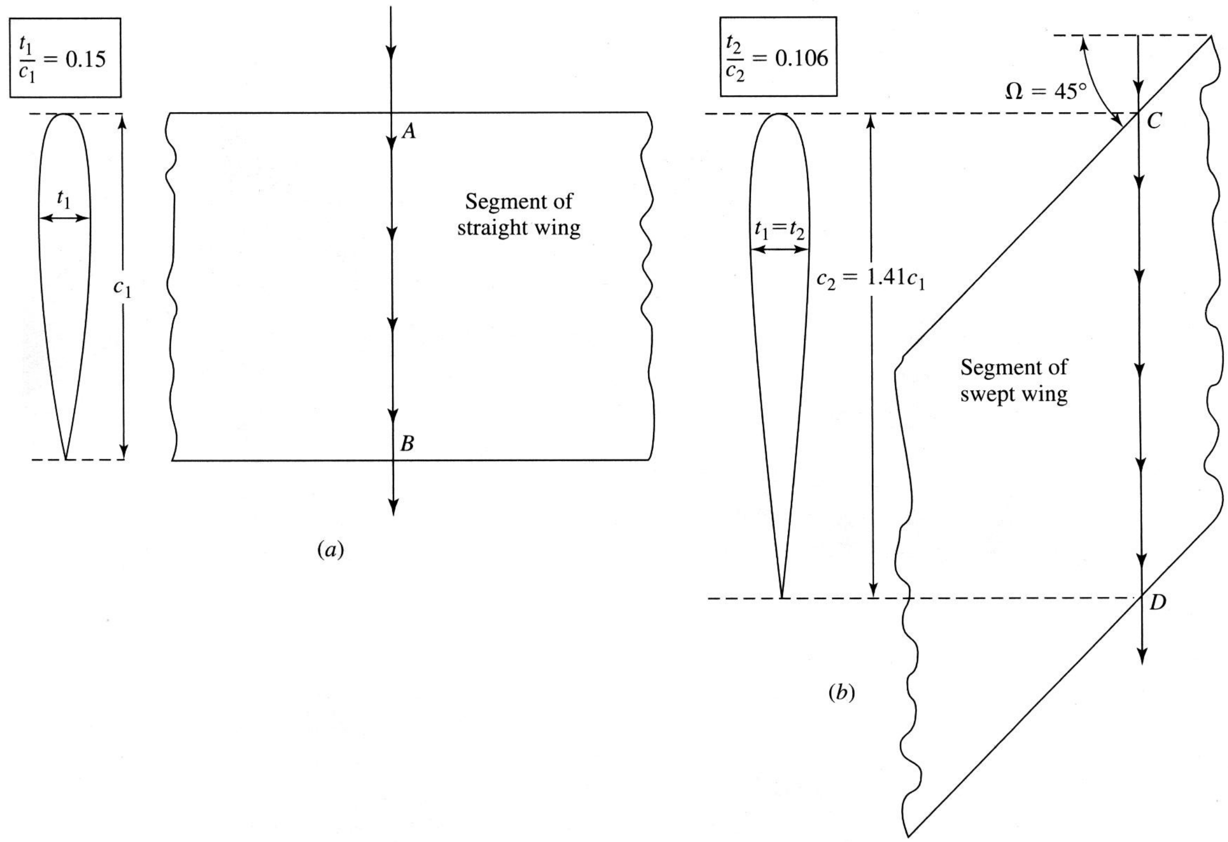


Figure 9.18 | By sweeping the wing, a streamline effectively sees a thinner airfoil, hence increasing the critical Mach number of the wing.

9.5 O número de Mach de divergência: a barreira do som

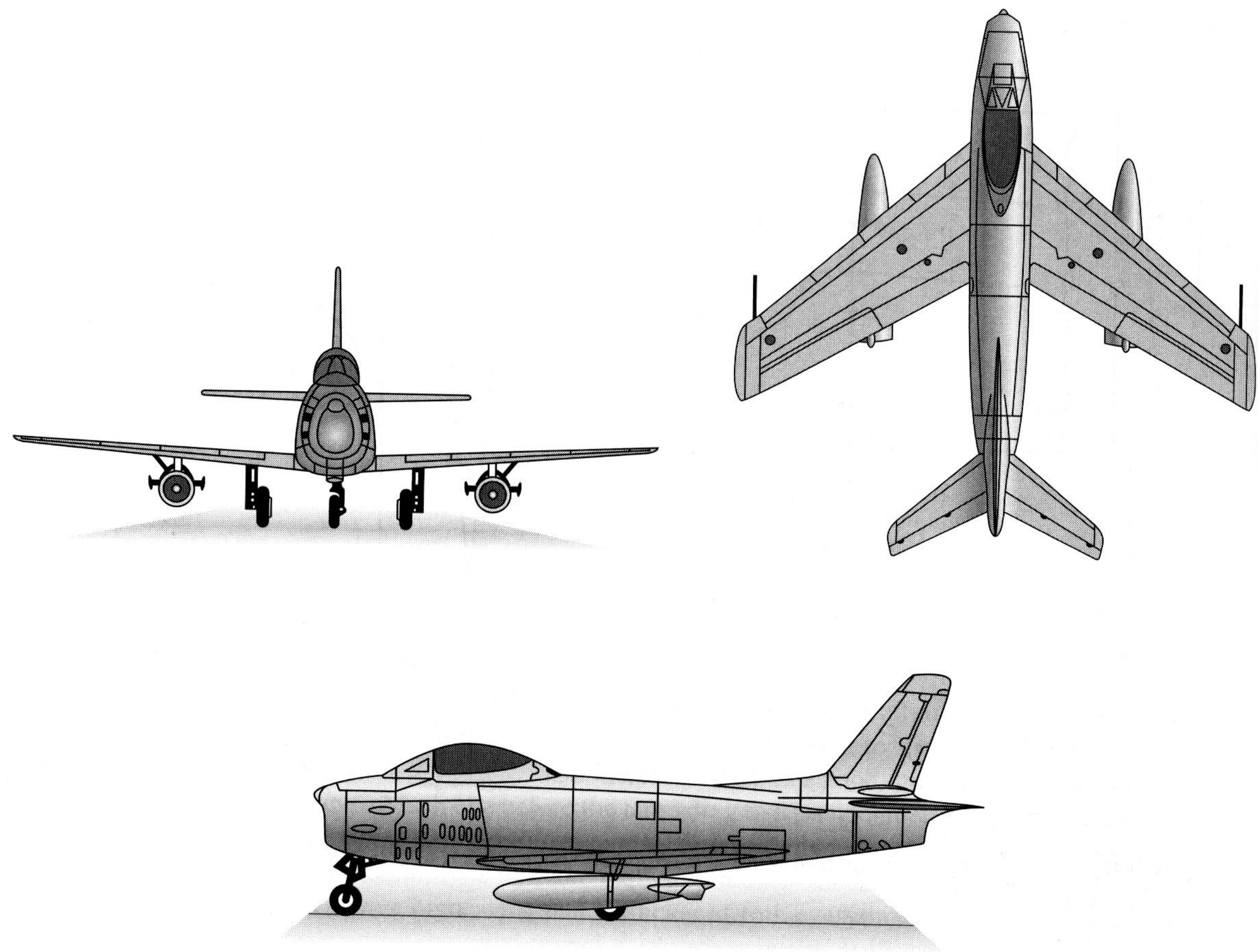


Figure 9.19 | A typical example of a swept-wing aircraft. The North American F-86 Sabre of Korean War fame.

9.6 Aplicações em CFD: aerofólios e asas transônicas

- Embora a teoria clássica de correções para compressibilidade (como a regra de Prandtl-Glauert) seja ao mesmo tempo útil e elegante, ela é restrita aos casos de:
  - Aerofólios finos com pequenos ângulos de ataque.
  - Números de Mach subsônicos que não estejam muito próximos à unidade (valores típicos são inferiores a 0,7).
  - Escoamentos invíscidos e irrotacionais.

9.6 Aplicações em CFD: aerofólios e asas transônicas

- Tanto aviões civis modernos (exemplos: Boeing 747 e 777, com Mach de 0,85) quanto aviões militares (Mach próximo ao unitário) são concebidos fora dos limites de emprego das regras de correção.
- Neste caso, a única abordagem que fornece acuradamente as características do escoamento sobre aerofólios e asas em regime transônico é a Dinâmica de Fluidos Computacional (CFD).

9.6 Aplicações em CFD: aerofólios e asas transônicas

- A partir das décadas de 1960 e 1970, com o advento dos jatos civis de alta velocidade, a obtenção de resultados acurados para escoamentos transônicos se tornou imperativo e apenas empregando-se CFD foi possível obter tais soluções.

9.6 Aplicações em CFD: aerofólios e asas transônicas

- Historicamente, as ferramentas de CFD foram empregadas para quatro diferentes classes de problemas em escoamentos transônicos:
  - Solução numérica da equação potencial não-linear para pequenas perturbações. Neste caso, os resultados são limitados às hipóteses de pequenas perturbações e de aerofólios finos com pequenos ângulos de ataque.

9.6 Aplicações em CFD: aerofólios e asas transônicas

- Solução da equação de potencial completa. Neste caso, as aplicações incluem aerofólios de qualquer formato e com qualquer ângulo de ataque. O escoamento, contudo, continua a ser modelado como isentrópico e, mesmo no caso de serem obtidos resultados para ondas de choque, estas não eram sempre acuradamente previstas.
- Solução das equações de Euler. Neste caso, as ondas de choque já puderam ser corretamente previstas.

9.6 Aplicações em CFD: aerofólios e asas transônicas

– Solução de escoamentos viscosos (equações de Navier-Stokes com inclusão de termos viscosos). Estas soluções contém todo o realismo físico dos escoamentos, com exceção de efeitos de turbulência. Tais efeitos são importantes para o estudo de certas camadas-limite turbulentas, o que é feito pela inclusão de algum modelo de turbulência. Tais modelos, contudo, são o ponto fraco da solução obtida.

9.6 Aplicações em CFD: aerofólios e asas transônicas

- Escoamento transônico sobre um aerofólio NACA 0012 com ângulo de ataque de 2º e Mach de 0,8.
- Nota-se a formação de uma onda de choque quase normal sobre a superfície superior (região do encontro de isolinhas de números de Mach).
- Os resultados da simulação levam em consideração efeitos viscosos.

9.6 Aplicações em CFD: aerofólios e asas transônicas

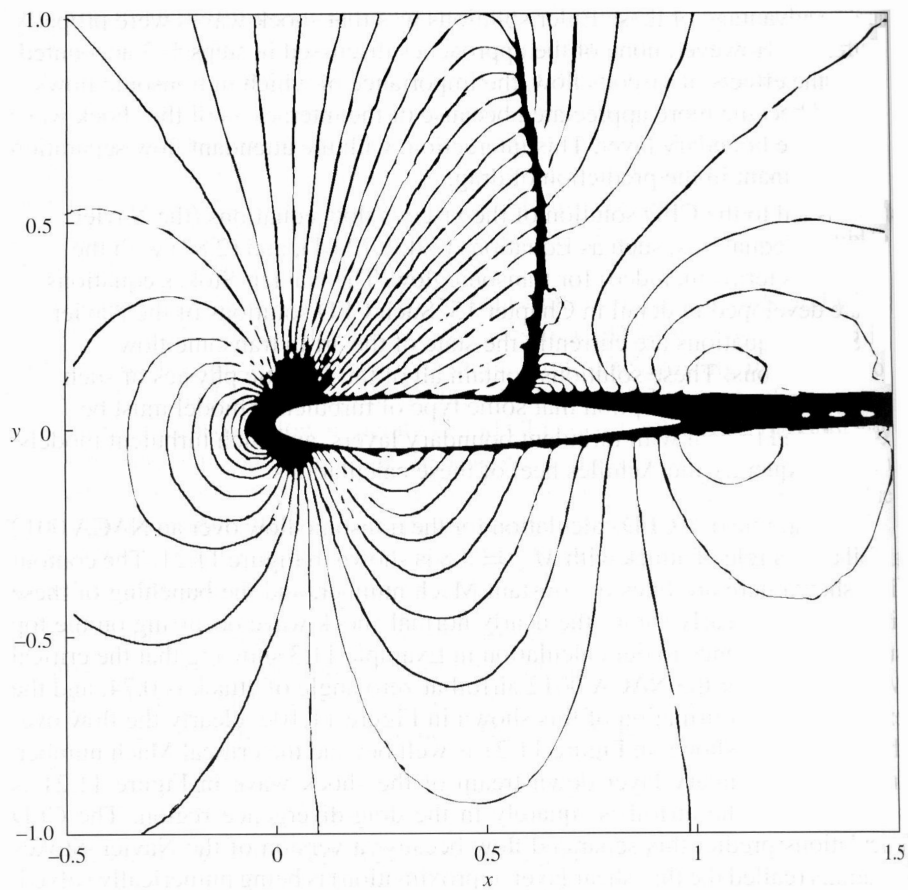


Figure 11.21 Mach number contours in the transonic flow over an NACA 0012 airfoil at $M_\infty = 0.8$ and at 2° angle of attack. (*Source:* Nakahashi and Deiwert, Reference 74.)

9.6 Aplicações em CFD: aerofólios e asas transônicas

- Atualmente ferramentas de CFD são combinadas a técnicas de otimização de projetos para o projeto de asas transônicas completas.
- Para esses casos, procura-se diminuir o coeficiente de pressão e/ou suavizar sua distribuição sobre a asa, bem como evitar a formação de ondas de choque.

9.6 Aplicações em CFD: aerofólios e asas transônicas

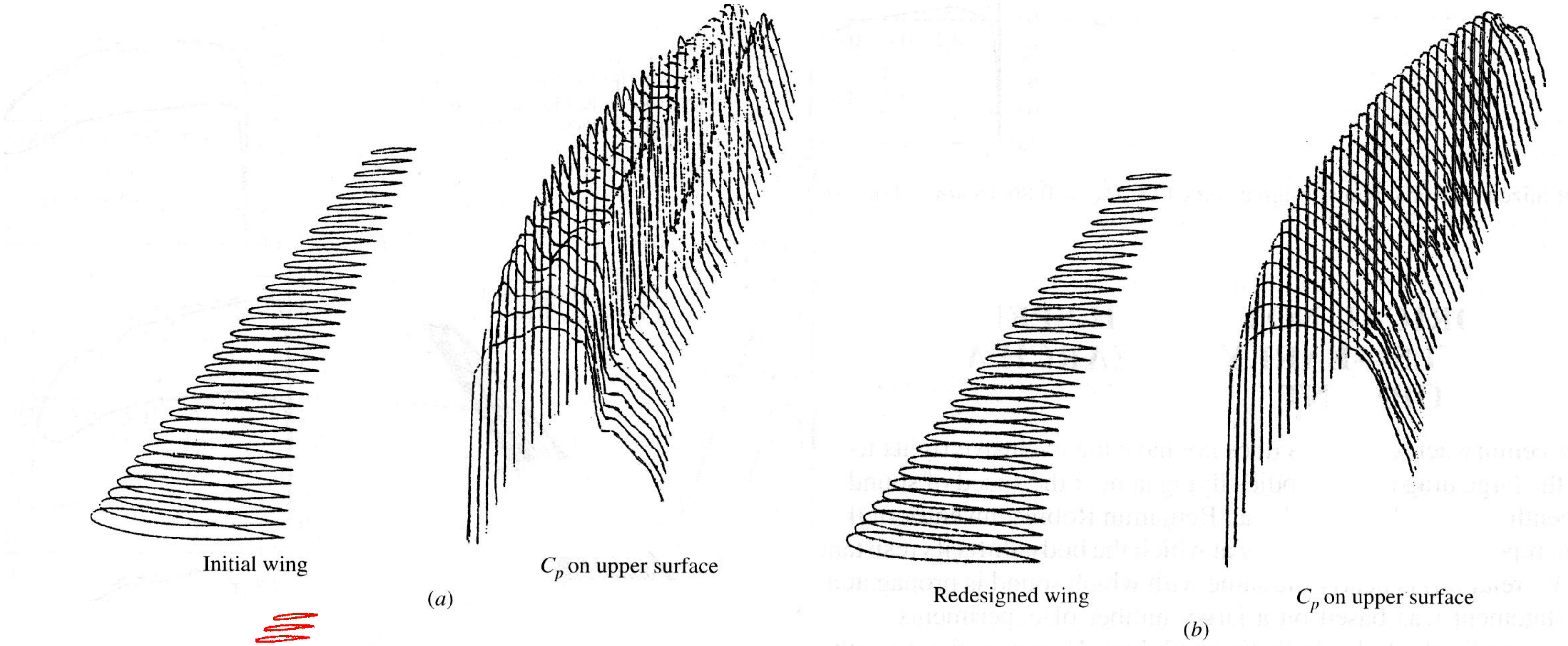
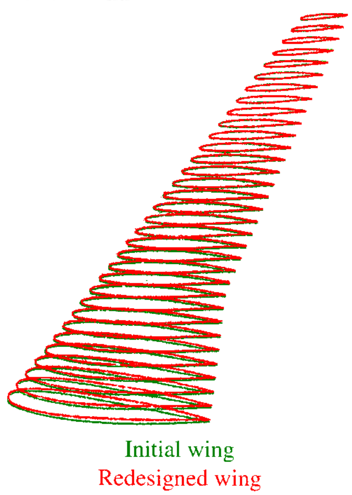


Figure 11.22 The use of CFD for optimized transonic wing design. $M_\infty = 0.83$. (*a*) Baseline wing with a shock wave. (*b*) Optimized wing, virtually shock free. *Source:* Jameson, Reference 76.



9.6 Aplicações em CFD: aerofólios e asas transônicas

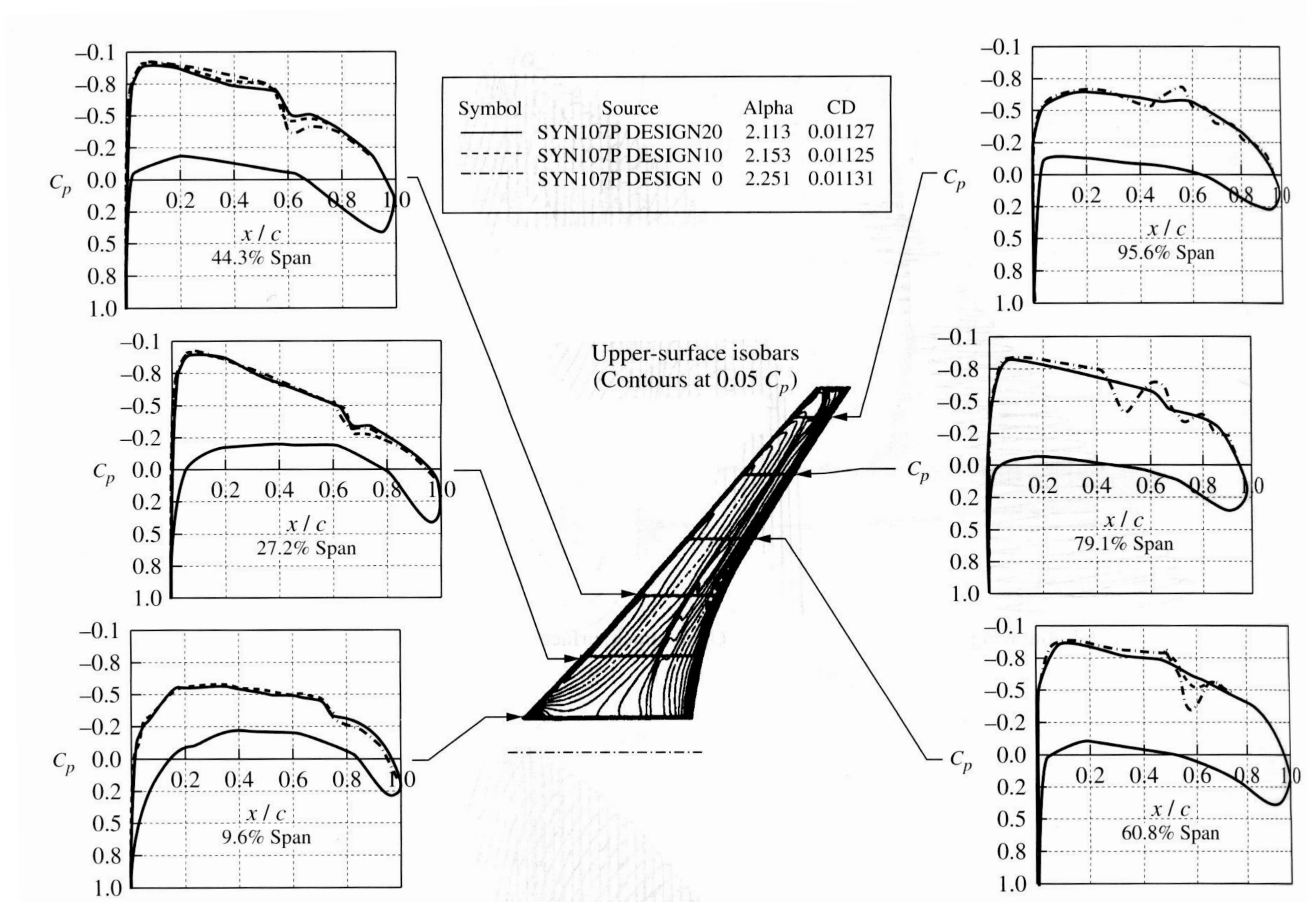


Figure 11.23 Another example of optimized transonic wing design using CFD. $M_\infty = 0.86$. (*Source:* Jameson, Reference 76.)

9.7 Escoamentos supersônicos linearizados

- A equação do potencial de velocidade linearizada para pequenas perturbações apresenta as seguintes formas:
  - Para escoamentos subsônicos,

$$\beta^2 \cdot \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$$

$$\beta = \sqrt{1 - M_\infty^2}$$

9.7 Escoamentos supersônicos linearizados

– Para escoamentos supersônicos,

$$\lambda^2 \cdot \varphi_{xx} - \varphi_{yy} = 0$$

$$\lambda = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$$

- A diferença básica entre as equações anteriores consiste no fato de que no caso subsônico as equações são elípticas enquanto para o caso supersônico, hiperbólicas.

9.7 Escoamentos supersônicos linearizados

- Considere um escoamento supersônico sobre um corpo ou superfície que introduza pequenas mudanças no campo de escoamento.

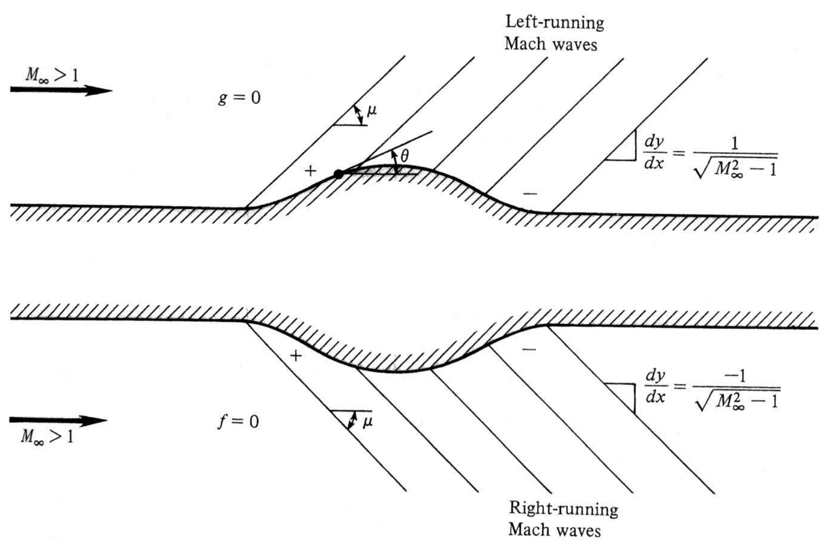


Figure 9.9 | Linearized supersonic flow over a bump.

9.7 Escoamentos supersônicos linearizados

- A solução analítica para a equação linearizada para os escoamentos supersônicos é obtida empregando-se a equação clássica da onda e a teoria acústica, resultando na expressão

$$\varphi = f(x - \lambda \cdot y) + g(x + \lambda \cdot y)$$

9.7 Escoamentos supersônicos linearizados

- Examinando-se a solução particular onde $g = 0$, e $\varphi = f(x - \lambda \cdot y)$, tem-se que as linhas de φ constantes correspondem a

$$x - \lambda \cdot y = const$$

ou seja,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

lembrando-se que

$$\mu = \sin^{-1}\left(\frac{1}{M_\infty}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\right)$$

9.7 Escoamentos supersônicos linearizados

- Se $f = 0$, tem-se a família de linhas de Mach à direita, como esquematizado na porção inferior da última figura.
- Retornando-se à equação geral e considerando-se o caso de $g = 0$. Tem-se assim:

$$\varphi = f\left(x - \lambda \cdot y\right)$$

de modo que:

$$u' = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = f' \qquad v' = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\lambda \cdot f'$$

9.7 Escoamentos supersônicos linearizados

- Das relações anteriores obtém-se:

$$u' = -\frac{v'}{\lambda}$$

- A condição de contorno na superfície é dada por

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{v'}{V_\infty - u'}$$

- Para pequenas perturbações:

$$u' << V_\infty; \quad \tan\theta \approx \theta$$

9.7 Escoamentos supersônicos linearizados

- Tem-se assim que

$$v' = V_\infty \cdot \theta \qquad u' = -\frac{V_\infty \cdot \theta}{\lambda}$$

- E o coeficiente de pressão na superfície pode ser avaliado como

$$Cp = -\frac{2 \cdot u'}{V_\infty} = \frac{2 \cdot \theta}{\lambda} = \frac{2 \cdot \theta}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

9.7 Escoamentos supersônicos linearizados

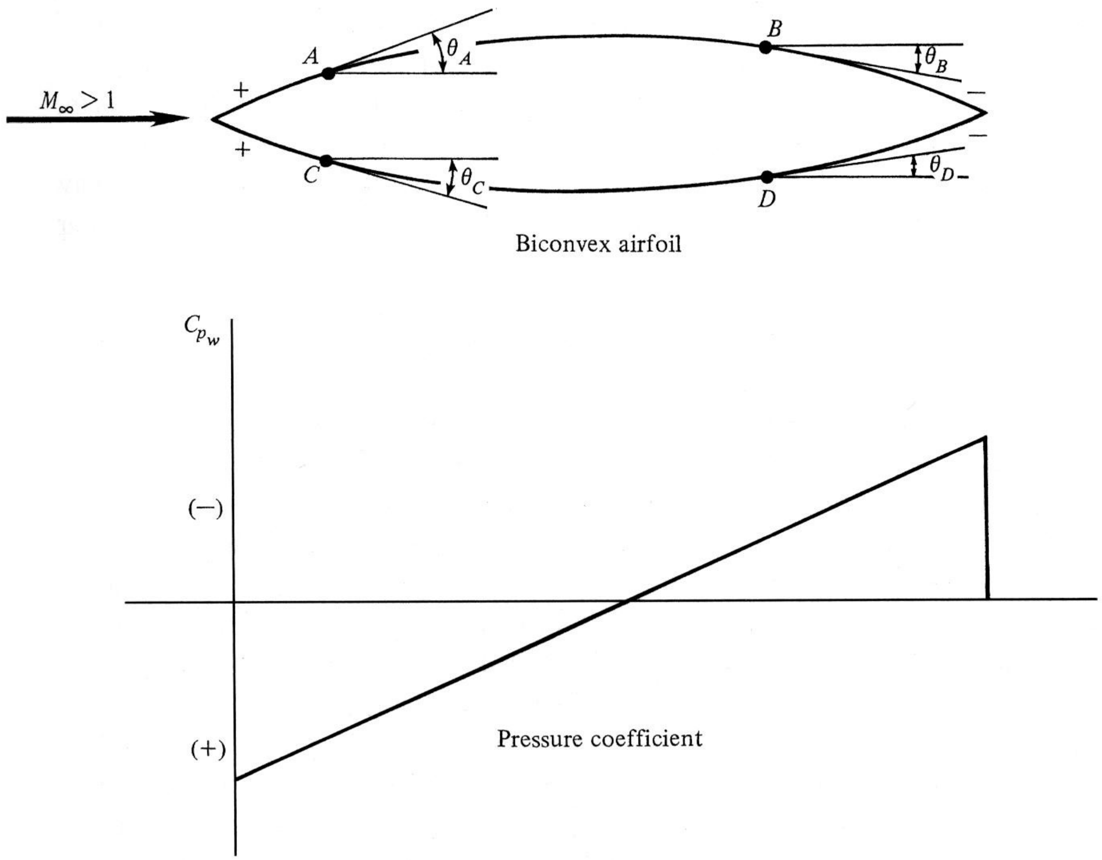


Figure 9.10 | Schematic of the linearized pressure coefficient over a biconvex airfoil.

$$Cp_A = \frac{2 \cdot \theta_A}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

$$Cp_B = \frac{2 \cdot \theta_B}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

9.7 Escoamentos supersônicos linearizados

- As expressões anteriores foram obtidas ao se tomar $g = 0$, sendo válidas para a família de ondas à esquerda (superfície superior). No caso de se tomar $f = 0$, o coeficiente de pressão será dado por

$$Cp = -\frac{2 \cdot \theta}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

e a solução é válida para a família de ondas à direita (superfície inferior).

9.7 Escoamentos supersônicos linearizados

- Uma diferença básica entre escoamentos sub e supersônicos está relacionada à força de arrasto: enquanto em um campo subsônico um corpo bidimensional não experimenta arrasto algum, se o mesmo corpo for posto em um campo supersônico, o mesmo experimentará uma força de arrasto, uma vez que as forças sobre o corpo não se anulam.

9.7 Escoamentos supersônicos linearizados

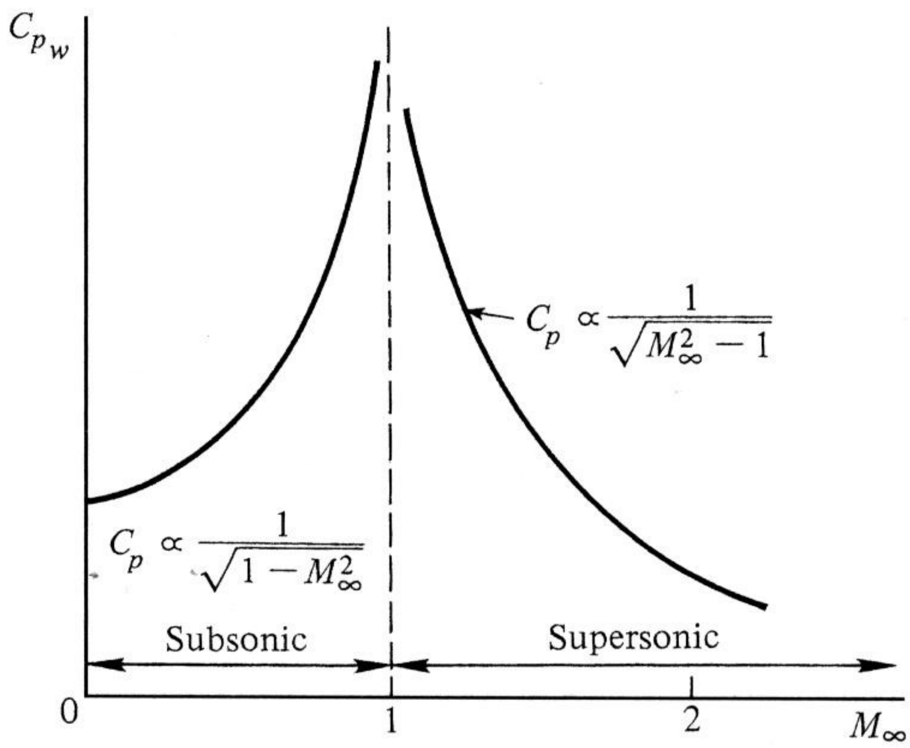


Figure 9.11 | Variation of the linearized pressure coefficient with Mach number.

9.7 Escoamentos supersônicos linearizados

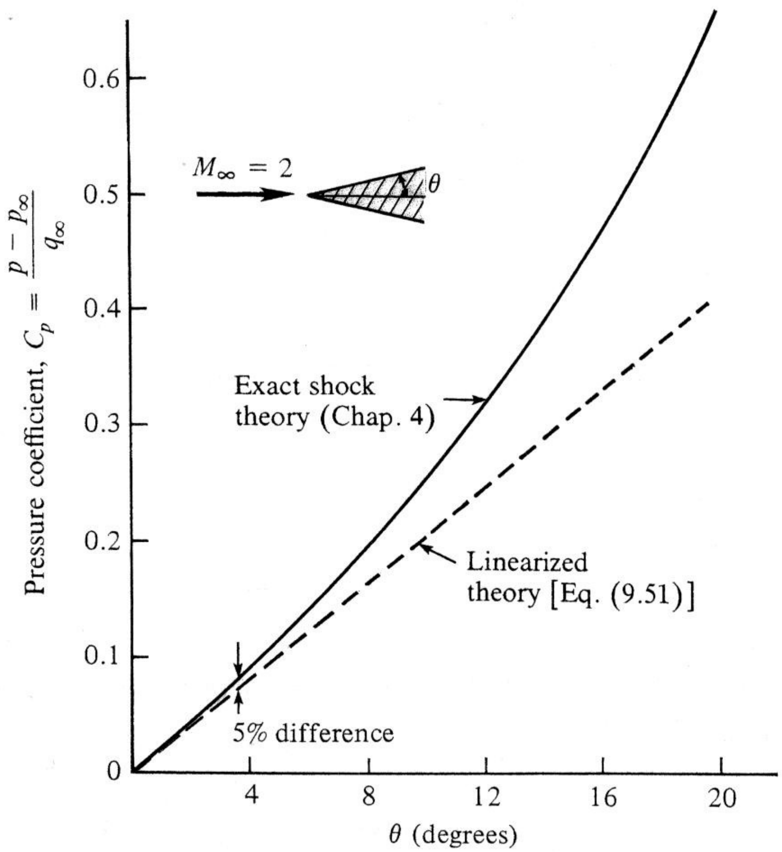


Figure 9.12 | Comparison between linearized theory and exact shock results for the pressure on a wedge in supersonic flow.

9.7 Escoamentos supersônicos linearizados

- Embora a acurácia da teoria de linearização é garantida para apenas pequenos ângulos de deflexão, os resultados para os coeficientes de arrasto e de sustentação são acurados para ângulos de deflexão maiores que os esperados inicialmente, uma vez que há uma tendência dos erros nas superfícies superior e inferior se anularem durante o processo de integração.

9.7 Escoamentos supersônicos linearizados

- Escoamento sobre uma placa plana:

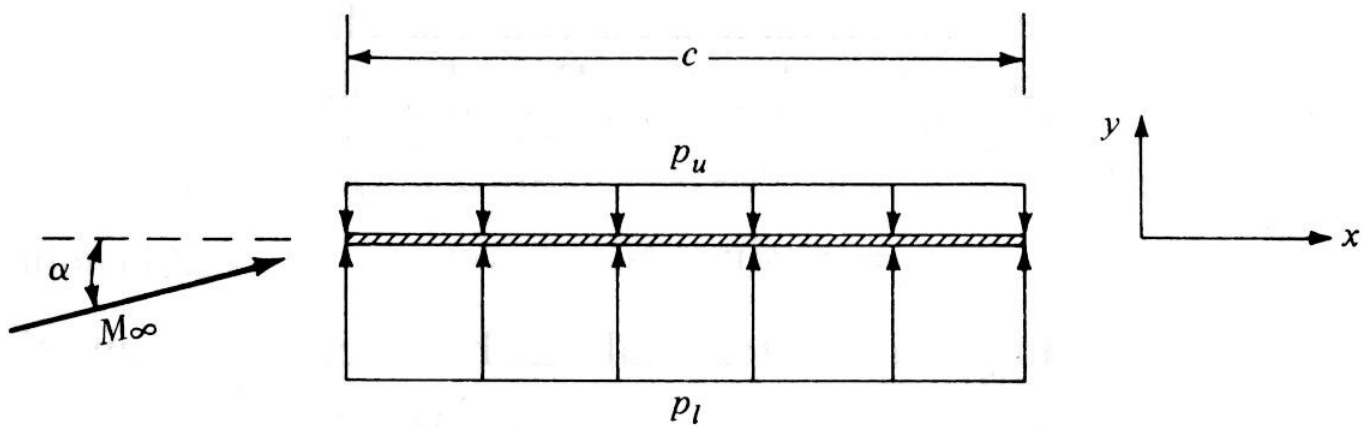


Figure 12.4 A flat plate at angle of attack in a supersonic flow.

$$Cp_l = \frac{2 \cdot \alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \qquad Cp_u = -\frac{2 \cdot \alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

9.7 Escoamentos supersônicos linearizados

- Coeficiente de força normal sobre a placa:

$$Cn = \frac{1}{c}\int_0^c \left(Cp_l - Cp_u\right)dx$$

$$Cn = \frac{4\cdot\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\frac{1}{c}\int_0^c dx = \frac{4\cdot\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

- Coeficiente de força axial sobre a placa:

$$Ca = \frac{1}{c}\int_{LE}^{TE} \left(Cp_l - Cp_u\right)dy$$

9.7 Escoamentos supersônicos linearizados

- Como a placa plana teoricamente possui espessura nula, tanto dy quanto Ca são nulos. Deste modo, os coeficientes de sustentação e de arrasto serão dados por

$$C_L = Cn \cdot \cos\alpha - Ca \cdot \sin\alpha \qquad C_D = Cn \cdot \sin\alpha + Ca \cdot \cos\alpha$$

$$C_L = \frac{4 \cdot \alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \qquad C_D = \frac{4 \cdot \alpha^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

9.7 Escoamentos supersônicos linearizados

- Deve-se atentar que as expressões anteriores foram obtidas pela teoria de linearização, sendo válidas, por isso, apenas para pequenos ângulos de ataque.
- Para um aerofólio fino de geometria arbitrária o coeficiente de sustentação para pequenos valores de α é dado por:

$$C_L = \frac{4 \cdot \alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

9.7 Escoamentos supersônicos linearizados

- No caso do coeficiente de arrasto, tem-se

$$C_D = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\left(\alpha^2 + g_c^2 + g_t^2\right)$$

sendo g_c e g_t funções da curvatura e da espessura do aerofólio, respectivamente.