

# Escoamentos Compressíveis

## Capítulo 09

### Escoamentos linearizados

# 9.1 Equação linearizada do potencial de velocidade

- Considere um escoamento bidimensional, isentrópico e irrotacional sobre um corpo imerso em um escoamento uniforme com velocidade  $V_\infty$ , orientado na direção  $x$ .

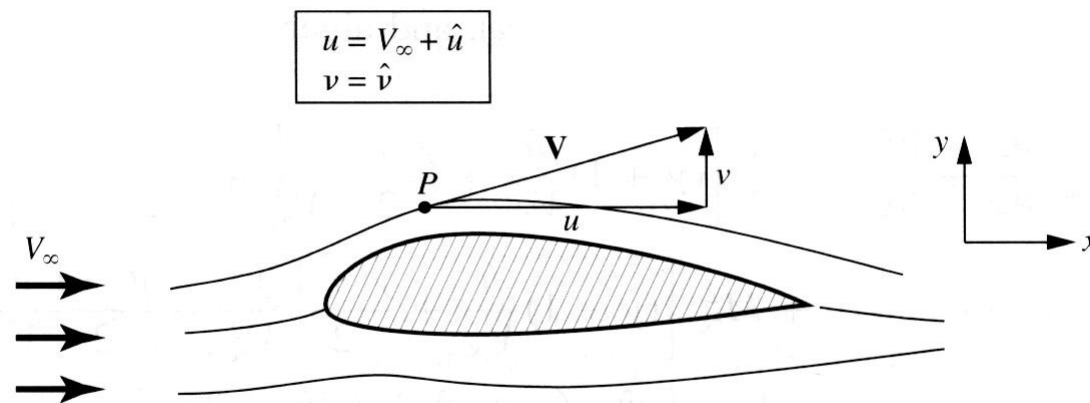


Figure 11.2 Uniform flow and perturbed flow.

## 9.1 Equação linearizada do potencial de velocidade

- Em um ponto P no escoamento, a velocidade pode ser decomposta em suas três componentes,  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Pode-se visualizar tais componentes como a soma de uma velocidade constante e um incremento, na forma:

$$u = V_{\infty} + u'; \quad v = v'; \quad w = w'$$

$u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  são chamadas de perturbações de velocidade.

## 9.1 Equação linearizada do potencial de velocidade

- Definindo-se uma perturbação do potencial de velocidade:

$$\Phi = V_{\infty} \cdot x + \varphi(x, y, z)$$

- Neste caso,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u'; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v'; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = w'$$

## 9.1 Equação linearizada do potencial de velocidade

- Obtém-se, assim, a equação da perturbação do potencial de velocidade:

$$\begin{aligned} & \left[ a^2 - \left( V_\infty + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left[ a^2 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \left[ a^2 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \\ & - 2 \cdot \left( V_\infty + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - 2 \cdot \left( V_\infty + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - 2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} = 0 \end{aligned}$$

# 9.1 Equação linearizada do potencial de velocidade

- Reescrevendo a equação anterior em termos das perturbações de velocidade:

$$\begin{aligned}
 & (1 - M_\infty^2) \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \\
 &= M_\infty^2 \cdot \left[ (\gamma + 1) \frac{u'}{V_\infty} + \left( \frac{\gamma + 1}{2} \right) \frac{u'^2}{V_\infty^2} + \left( \frac{\gamma - 1}{2} \right) \left( \frac{v'^2 + w'^2}{V_\infty^2} \right) \right] \frac{\partial u'}{\partial x} \\
 &+ M_\infty^2 \cdot \left[ (\gamma - 1) \frac{u'}{V_\infty} + \left( \frac{\gamma + 1}{2} \right) \frac{v'^2}{V_\infty^2} + \left( \frac{\gamma - 1}{2} \right) \left( \frac{w'^2 + u'^2}{V_\infty^2} \right) \right] \frac{\partial v'}{\partial y} \\
 &+ M_\infty^2 \cdot \left[ (\gamma - 1) \frac{u'}{V_\infty} + \left( \frac{\gamma + 1}{2} \right) \frac{w'^2}{V_\infty^2} + \left( \frac{\gamma - 1}{2} \right) \left( \frac{u'^2 + v'^2}{V_\infty^2} \right) \right] \frac{\partial w'}{\partial z} \\
 &+ M_\infty^2 \cdot \left[ \frac{v'}{V_\infty} \left( 1 + \frac{u'}{V_\infty} \right) \left( \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) + \frac{w'}{V_\infty} \left( 1 + \frac{u'}{V_\infty} \right) \left( \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right) + \frac{u' w'}{V_\infty^2} \left( \frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z} \right) \right]
 \end{aligned}$$

## 9.1 Equação linearizada do potencial de velocidade

- Para pequenas perturbações, causadas por pequenos ângulos de ataque, tem-se

$$\frac{u'}{V_\infty}, \frac{v'}{V_\infty}, \frac{w'}{V_\infty} \ll 1; \quad \frac{u'^2}{V_\infty^2}, \frac{v'^2}{V_\infty^2}, \frac{w'^2}{V_\infty^2} \lll 1$$

- Levando-se em consideração as desigualdades acima e comparando-se os termos à esquerda e à direita para a equação anterior, encontra-se que:

## 9.1 Equação linearizada do potencial de velocidade

- Para  $0 \leq M_\infty \leq 0,8$  ou  $M_\infty \geq 1,2$  a magnitude do termo

$$M_\infty^2 \left[ (\gamma + 1) \frac{u'}{V_\infty} + \dots \right] \frac{\partial u'}{\partial x}$$

é pequena em relação à magnitude de

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial u'}{\partial x}$$

Assim, o primeiro termo é desprezado.



# 9.1 Equação linearizada do potencial de velocidade

- Para  $M_\infty < 5$  (aproximadamente):

$$M_\infty^2 \left[ (\gamma - 1) \frac{u'}{V_\infty} + \dots \right] \frac{\partial v'}{\partial y}$$

é pequeno em comparação com

$$\frac{\partial v'}{\partial y}$$

Assim, o primeiro termo é desprezado.

# 9.1 Equação linearizada do potencial de velocidade

Também o termo:

$$M_{\infty}^2 \left[ (\gamma - 1) \frac{u'}{V_{\infty}} + \dots \right] \frac{\partial w'}{\partial y}$$

é pequeno em comparação com

$$\frac{\partial w'}{\partial z}$$

Assim, também ele é desprezado.

# 9.1 Equação linearizada do potencial de velocidade

Além disso:

$$M_{\infty}^2 \left[ \frac{v'}{V_{\infty}} \left( 1 + \frac{u'}{V_{\infty}} \right) \left( \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) + \dots \right] \approx 0$$

A partir das comparações de ordens de magnitude, a equação original é reduzida a

$$(1 - M_{\infty}^2) \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$$

## 9.1 Equação linearizada do potencial de velocidade

- Em termos de perturbações do potencial de velocidade, obtém-se:

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

- A relação anterior é uma aproximação da física do escoamento, apresentando resultados razoáveis (mas não exatos) para as seguintes situações combinadas:

## 9.1 Equação linearizada do potencial de velocidade

- Pequenas perturbações, ou seja, corpos finos com pequeno ângulo de ataque.
- Números de Mach sub e supersônicos.
- Ressalta-se que a equação anterior não deve ser utilizada para corpos espessos e para grandes ângulos de ataque. A equação não deve ser empregada, também, para escoamentos transônicos e hipersônicos.

# 9.1 Equação linearizada do potencial de velocidade

- Coeficiente de pressão:

$$C_p \equiv \frac{p - p_\infty}{q_\infty}$$

onde  $q_\infty = \frac{1}{2} \rho_\infty \cdot V_\infty^2$  é a pressão dinâmica.

- Tal relação pode ser reescrita como:

$$C_p = \frac{2}{\gamma \cdot M_\infty^2} \left( \frac{p}{p_\infty} - 1 \right)$$

## 9.1 Equação linearizada do potencial de velocidade

- A expressão anterior ainda é uma representação exata da definição de  $C_p$ .
- Para obter uma forma linearizada do coeficiente de pressão, considera-se:
  - escoamento adiabático.
  - gás caloricamente perfeito.
  - Pequenas perturbações das componentes do vetor velocidade.

## 9.1 Equação linearizada do potencial de velocidade

- Análise das ordens de grandeza dos termos envolvidos.
  - Expansão binomial, desprezando-se os termos de ordem superior.
- Obtém-se, então, a seguinte expressão:

$$C_p = -\frac{2 \cdot u'}{V_\infty}$$



## 9.2 Correção de Prandtl-Glauert para compressibilidade

- Durante o período de 1903 a 1940, a teoria de escoamentos incompressíveis sobre aerofólios finos para pequenos ângulos de ataque eram suficientemente adequados para prever as propriedades dos aerofólios.

## 9.2 Correção de Prandtl-Glauert para compressibilidade

- Com a rápida evolução dos mecanismos recíprocos durante a Segunda Guerra Mundial, os aviões militares começaram a atingir velocidades próximas a 450 mph (720 km/h).

## 9.2 Correção de Prandtl-Glauert para compressibilidade

- Com o advento dos motores a jato em 1944 (Me 262, alemão), as velocidades alcançadas chegaram a 550 mph (880 km/h). Deste modo, a teoria de escoamentos incompressíveis não era mais válida.

## 9.2 Correção de Prandtl-Glauert para compressibilidade

- Por causa da grande quantidade de dados e da experiência adquirida durante os anos da “aerodinâmica de baixa velocidade”, buscou-se inicialmente métodos que empregassem correções simples para os dados incompressíveis que levassem em consideração os efeitos de compressibilidade. Tais métodos são conhecidos como métodos de correção para a compressibilidade.

## 9.2 Correção de Prandtl-Glauert para compressibilidade

- Considere inicialmente o escoamento subsônico sobre um aerofólio fino. Neste caso, a condição de contorno usual para a superfície precisa ser satisfeita, isto é, a velocidade do escoamento precisa ser tangente à superfície. Seja  $\theta$  o ângulo entre a tangente à superfície e o escoamento livre. Assim:

## 9.2 Correção de Prandtl-Glauert para compressibilidade

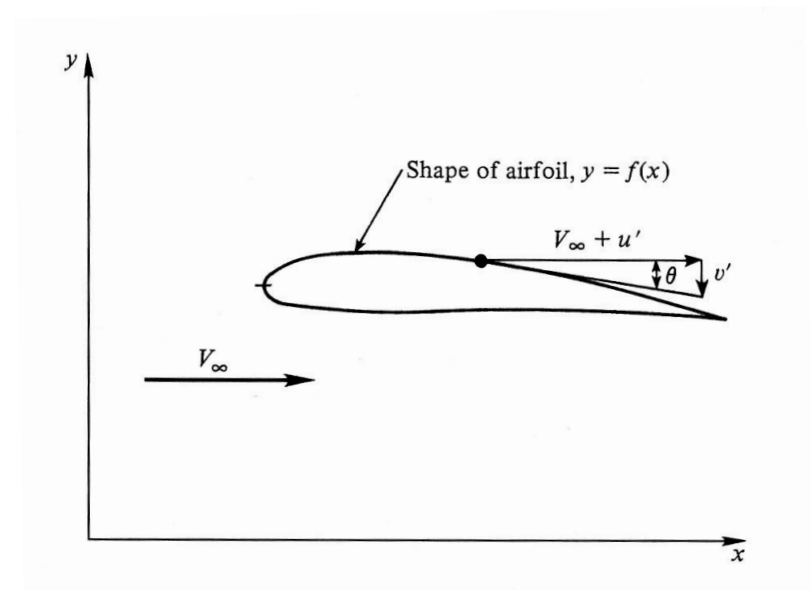
$$\frac{df}{dx} = \frac{v'}{V_\infty + u'} = \tan \theta$$

- Para pequenas perturbações:

$$u' \ll V_\infty \quad \tan \theta \approx \theta$$

- Deste modo:

$$\frac{df}{dx} = \frac{v'}{V_\infty} = \theta \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = V_\infty \frac{df}{dx}$$



## 9.2 Correção de Prandtl-Glauert para compressibilidade

- Considere um escoamento subsônico, compressível, invíscido sobre um aerofólio, cujo formato é dado por  $y = f(x)$ . Se o aerofólio for fino e o ângulo de ataque pequeno, pode-se empregar a expressão para escoamentos linearizados. Nesse caso, define-se:

$$\beta^2 \equiv 1 - M_\infty^2$$

## 9.2 Correção de Prandtl-Glauert para compressibilidade

- Tem-se desse modo, para 2D:

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

- Realizando-se uma transformação de variáveis tal que:

$$\xi = x$$

$$\eta = \beta \cdot y$$

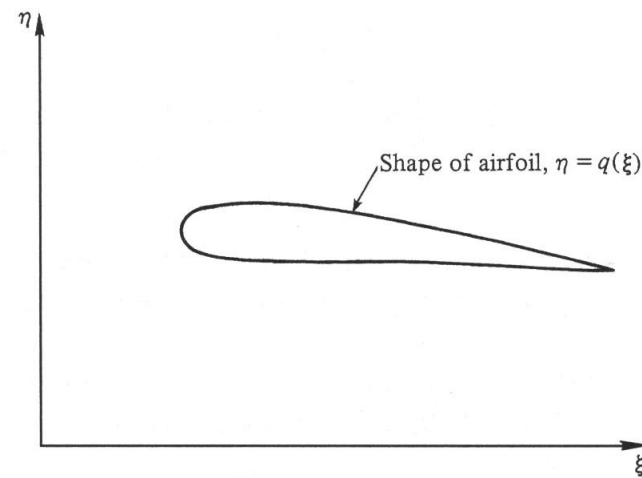


Figure 9.4 | Airfoil in transformed space.



## 9.2 Correção de Prandtl-Glauert para compressibilidade

- Para o espaço transformado, uma perturbação do potencial de velocidades é definido como

$$\bar{\varphi}(\xi, \eta) = \beta \cdot \varphi(x, y)$$

- Em termos das variáveis transformadas, tem-se:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \beta$$

## 9.2 Correção de Prandtl-Glauert para compressibilidade

- Após algumas manipulações, tem-se:

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \eta^2} = 0$$

- A expressão anterior é uma equação de Laplace, que governa um escoamento incompressível. Assim,  $\bar{\varphi}$  representa o escoamento incompressível em um espaço  $(\xi, \eta)$  que está relacionado a um escoamento compressível  $\varphi$  no espaço  $(x, y)$ .

## 9.2 Correção de Prandtl-Glauert para compressibilidade

- O formato do aerofólio é dado por

$$y = f(x), \quad em \quad (x, y)$$

$$\eta = q(\xi), \quad em \quad (\xi, \eta)$$

- Tem-se assim:

$$V_{\infty} \frac{df}{dx} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \eta}$$

ou nas coordenadas  $(\xi, \eta)$ :

$$V_{\infty} \frac{dq}{d\xi} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \eta}$$

## 9.2 Correção de Prandtl-Glauert para compressibilidade

- Desta forma, tem-se a igualdade:

$$\frac{df}{dx} = \frac{dq}{d\xi}$$

- Observa-se, assim, que o formato do aerofólio permanece inalterado, apesar da mudança do sistema de coordenadas.
- A praticidade desse desenvolvimento recai sobre o coeficiente de pressão.

## 9.2 Correção de Prandtl-Glauert para compressibilidade

- O coeficiente de pressão para fluidos compressíveis é dado por

$$C_p = -\frac{2 \cdot u'}{V_\infty} = -\frac{2}{V_\infty} \frac{1}{\beta} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \xi}$$

- Aplicando-se as perturbações, obtém-se:

$$C_p = \frac{C_{p_0}}{\sqrt{1-M_\infty^2}}; \quad C_{p_0} = -\frac{2 \cdot \bar{u}}{V_\infty}$$

conhecida como regra de Prandtl-Glauert.

## 9.2 Correção de Prandtl-Glauert para compressibilidade

- A regra de Prandtl-Glauert é uma regra de similaridade que relaciona o escoamento incompressível sobre um dado perfil bidimensional ao escoamento subsônico compressível sobre o mesmo perfil.
- Essa mesma regra é válida para outras grandezas, como os coeficientes de empuxo e de momento.

## 9.2 Correção de Prandtl-Glauert para compressibilidade

- Coeficiente de empuxo:

$$C_L = \frac{C_{L0}}{\sqrt{1-M_\infty^2}}$$

- Coeficiente de momento:

$$C_M = \frac{C_{M0}}{\sqrt{1-M_\infty^2}}$$

## 9.2 Correção de Prandtl-Glauert para compressibilidade

- Já em 1922 Prandtl empregava as correções em trabalhos, mas sem prova formal. Esta só foi apresentada em 1928 pelo aerodinamicista britânico Hermann Glauert. A regra de Prandtl-Glauert foi exclusivamente empregada até 1939, quando uma correção melhorada foi desenvolvida. Contudo, devido à sua simplicidade, ainda é empregada para estimativas iniciais de efeitos de compressibilidade.



## 9.2 Correção de Prandtl-Glauert para compressibilidade

- Os resultados da teoria de linearização indicam que as forças aerodinâmicas tendem ao infinito à medida que o número de Mach tende à unidade, o que é um resultado impossível.
- Deve-se recordar, neste ponto, que a teoria não tem validade para o regime sônico (Mach próximo à unidade).

## 9.2 Correção de Prandtl-Glauert para compressibilidade

- A regra de Prandtl-Glauert, deste modo, é válida para números de Mach até aproximadamente 0,7. Outros coeficientes de correção mais acurados serão apresentados na sequência.

## 9.2 Correção de Prandtl-Glauert para compressibilidade

- Um importante efeito da compressibilidade em campos de escoamento subsônicos pode ser visto notando-se que

$$u' = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \xi} = \frac{\bar{u}}{\beta} = \frac{\bar{u}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$$

- Comparando-se os extremos esquerdo e direito da equação, para uma dada localização do escoamento, tem-se que quando  $M_\infty$  aumenta, a perturbação da velocidade  $u'$  aumenta.

## 9.2 Correção de Prandtl-Glauert para compressibilidade

- Tem-se então que a compressibilidade fortalece os distúrbios no escoamento introduzidos por um corpo sólido. De um outro ponto de vista, tem-se que uma perturbação causada por uma superfície possui efeitos em pontos mais distantes da mesma em um escoamento compressível em comparação a um incompressível.

## 9.3 Correções melhoradas para compressibilidade

- As soluções para problemas linearizados são influenciadas especialmente pelas condições de escoamento livre, não levando em consideração variações locais do escoamento.
- Com o rápido crescimento da velocidade das aeronaves durante a Segunda Guerra Mundial, novas correções foram propostas a fim de melhorar os resultados apresentados pela de Prandtl-Glauert.

## 9.3 Correções melhoradas para compressibilidade

- Laitone aplicou a regra de Prandtl-Glauert localmente ao escoamento, obtendo

$$C_p = \frac{C_{p_0}}{\sqrt{1-M_\infty^2} + \left[ M_\infty^2 \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \right) / 2\sqrt{1-M_\infty^2} \right]} \cdot C_{p_0}$$

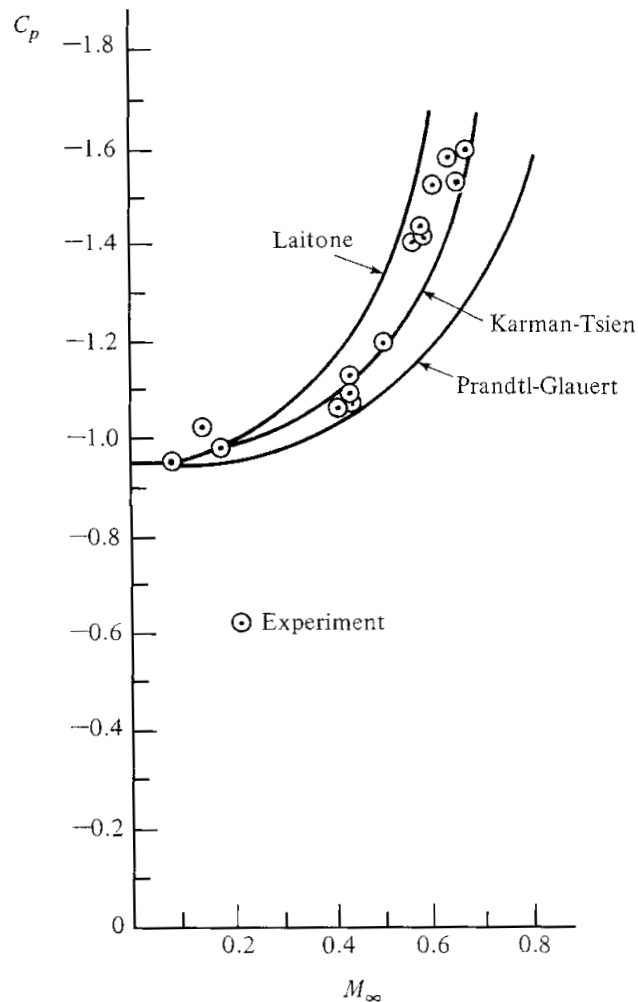
- Outra expressão largamente empregada é a obtida por von Karman e Tsien, dada por:

## 9.3 Correções melhoradas para compressibilidade

$$C_p = \frac{C_{p_0}}{\sqrt{1-M_\infty^2} + \left( \frac{M_\infty^2}{1 + \sqrt{1-M_\infty^2}} \right) \cdot \frac{C_{p_0}}{2}}$$

- Tal relação tem sido largamente adotada pela indústria aeronáutica desde a Segunda Guerra Mundial.

## 9.3 Correções melhoradas para compressibilidade



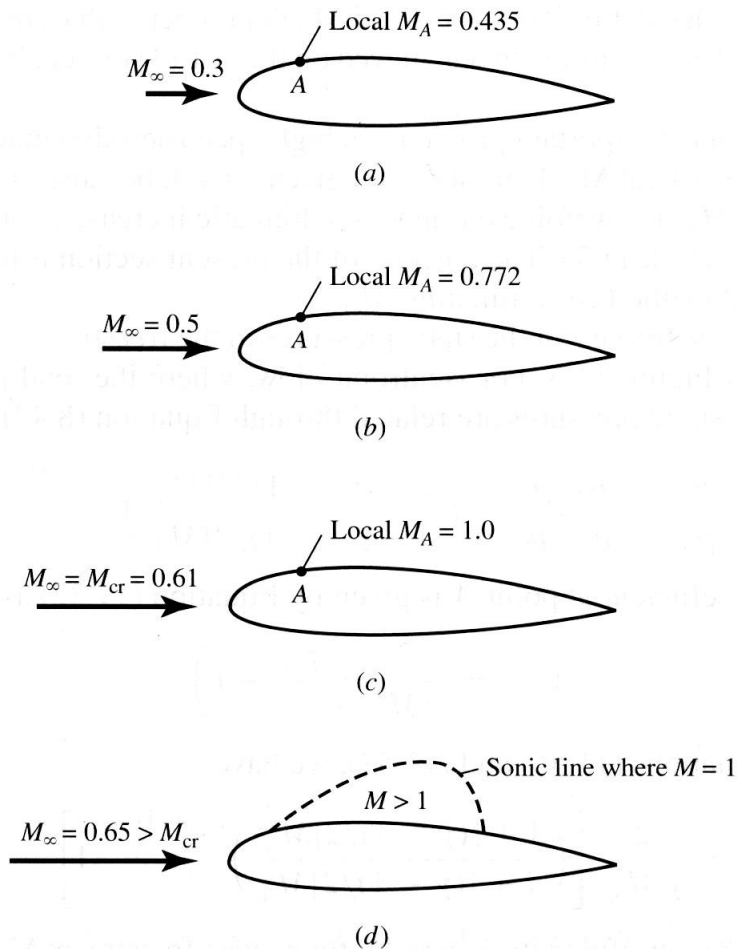
Comparação entre os resultados experimentais e os gerados das correções para compressibilidade para um aerofólio NACA 4412 com ângulo de ataque de  $1^\circ 53'$ . Os dados experimentais foram escolhidos por sua importância histórica. Nota-se que a regra de Prandtl-Glauert subestima os valores experimentais, enquanto as regras de Laitone e Karman-Tsien são mais acuradas, devido à consideração dos efeitos não-lineares do escoamento.



## 9.4 Número de Mach crítico

- O escoamento transônico é altamente não-linear e a teoria de escoamentos transônicos aplicada à aerodinâmica é um assunto sofisticado e desafiador.
- Considere um aerofólio a uma velocidade subsônica baixa, com número de Mach de escoamento livre igual a 0,3. Observa-se que, localmente sobre o aerofólio, o número de Mach aumentará.

## 9.4 Número de Mach crítico



- À medida que o número de Mach cresce, localmente tem-se valores se aproximando da unidade. Em um dado momento, o número de Mach sobre o aerofólio é unitário. Neste ponto, tem-se o chamado “número de Mach crítico”, denotado por  $M_{cr}$ . Se a velocidade do escoamento for aumentada ainda mais, há a formação de uma linha sônica sobre o aerofólio.

## 9.4 Número de Mach crítico

- Um dos mais importantes problemas na aerodinâmica de altas velocidades é a determinação do número de Mach crítico para um dado aerofólio. Isto ocorre pois, para números de Mach ligeiramente superiores ao crítico, o aerofólio experimenta um dramático aumento no coeficiente de arrasto.

## 9.4 Número de Mach crítico

- Sejam  $p_\infty$  e  $p_A$  as pressões estáticas do escoamento livre e do ponto A, respectivamente. Para um escoamento isentrópico, a pressão total é constante e nesse caso,

$$\frac{p_A}{p_\infty} = \frac{p_A/p_0}{p_\infty/p_0} = \left\{ \frac{1 + [(\gamma-1)/2] \cdot M_\infty^2}{1 + [(\gamma-1)/2] \cdot M_A^2} \right\}^{\gamma/(\gamma-1)}$$

- Obs: o ponto A corresponde ao local de mínima pressão no aerofólio.

## 9.4 Número de Mach crítico

- O coeficiente de pressão no ponto A é definido como

$$Cp_A = \frac{2}{\gamma \cdot M_\infty^2} \left( \frac{p_A}{p_\infty} - 1 \right)$$

- Combinando-se as equações anteriores, obtém-se:

$$Cp_A = \frac{2}{\gamma \cdot M_\infty^2} \left[ \left( \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_A^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right]$$

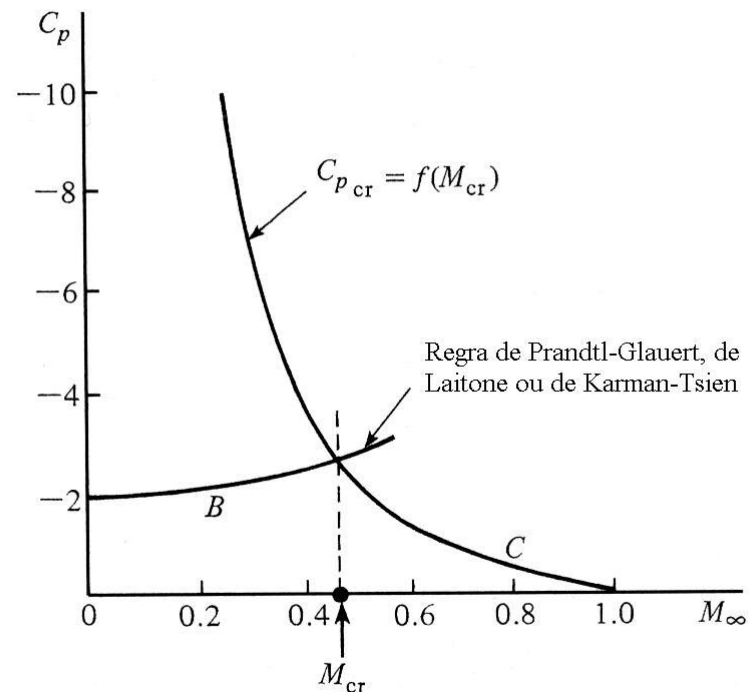
## 9.4 Número de Mach crítico

- No caso em que se tenha no ponto A número de Mach unitário, o coeficiente de pressão é chamado de coeficiente crítico de pressão e nesse caso:

$$Cp_{cr} = \frac{2}{\gamma \cdot M_{cr}^2} \left[ \left( \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{cr}^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right]$$

## 9.4 Número de Mach crítico

- Nota-se, assim, que o coeficiente crítico de pressão é uma função do número de Mach crítico.



## 9.4 Número de Mach crítico

- Estimativa do número de Mach crítico para um dado aerofólio:
  - Por algum método, seja experimental ou teórico, obtenha um valor para o coeficiente de pressão  $C_{p_0}$  no ponto de mínima pressão de um dado aerofólio.
  - Utilize alguma das correções para compressibilidade (regra de Prandtl-Glauert, de Laitone ou de Karman-Tsien).



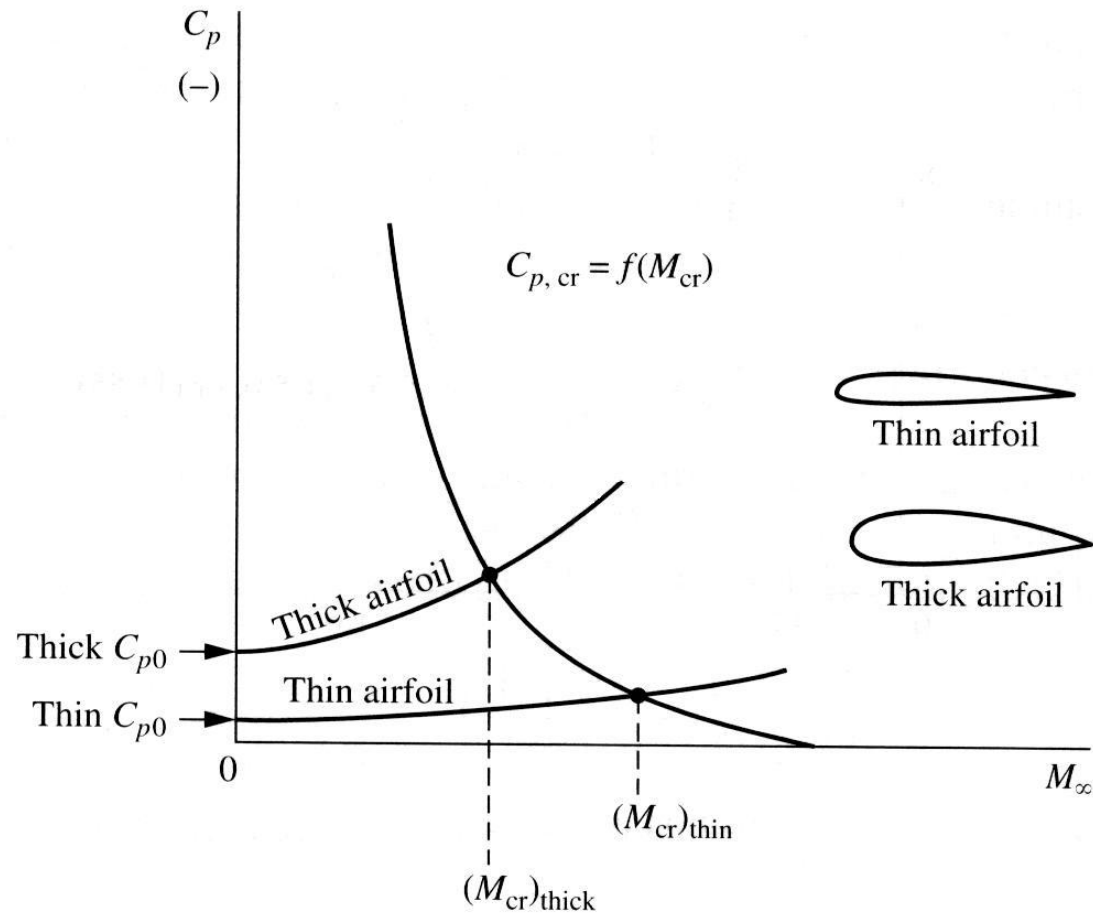
## 9.4 Número de Mach crítico

- Em algum ponto da curva B, ocorrerá um único ponto no qual o coeficiente de pressão corresponde a um escoamento localmente sônico. Além disso, tal ponto deve coincidir com a equação para o coeficiente crítico de pressão, representada pela curva C. Desse modo, a intersecção entre as curvas B e C representa o ponto para o qual tem-se a mínima pressão sobre o aerofólio. O número de Mach  $M_\infty$  nesse ponto é o número de Mach crítico.

## 9.4 Número de Mach crítico

- Deve-se notar que a construção gráfica não corresponde à determinação exata do número de Mach crítico.
- Isso se deve ao fato de que a curva B é representa uma correção do coeficiente de pressão (que leva em consideração a compressibilidade).
- Contudo os resultados obtidos são acurados o suficiente para a maioria das aplicações de projeto.

# 9.4 Número de Mach crítico



**Figure 11.7** Effect of airfoil thickness on critical Mach number.

## 9.4 Número de Mach crítico

- O escoamento sobre um aerofólio fino é pouco perturbado em relação ao escoamento livre. Assim, a expansão na superfície superior é suave e o valor do coef. de pressão é um valor de pequena magnitude.
- Ao contrário, no caso de um escoamento sobre aerofólio espesso, a perturbação em relação ao escoamento livre é maior.

## 9.4 Número de Mach crítico

- Neste caso, a expansão sobre a superfície superior é pronunciada e o coef. de pressão apresenta um valor absoluto mais elevado.
- Do esquema anterior, nota-se que um número de Mach crítico maior está relacionado a um coef. de pressão menor.
- Assim, para aviões de alta velocidade, é desejável possuir um número de Mach crítico o mais elevado possível.

## 9.4 Número de Mach crítico

- Deve-se atentar, também, que a posição do ponto de mínima pressão sobre um aerofólio não corresponde necessariamente ao ponto de máxima espessura do mesmo. O ponto de máxima velocidade é definido a partir das características de todo o campo de escoamento, empregando-se o formato do aerofólio como um todo.

## 9.5 O número de Mach de divergência: a barreira do som

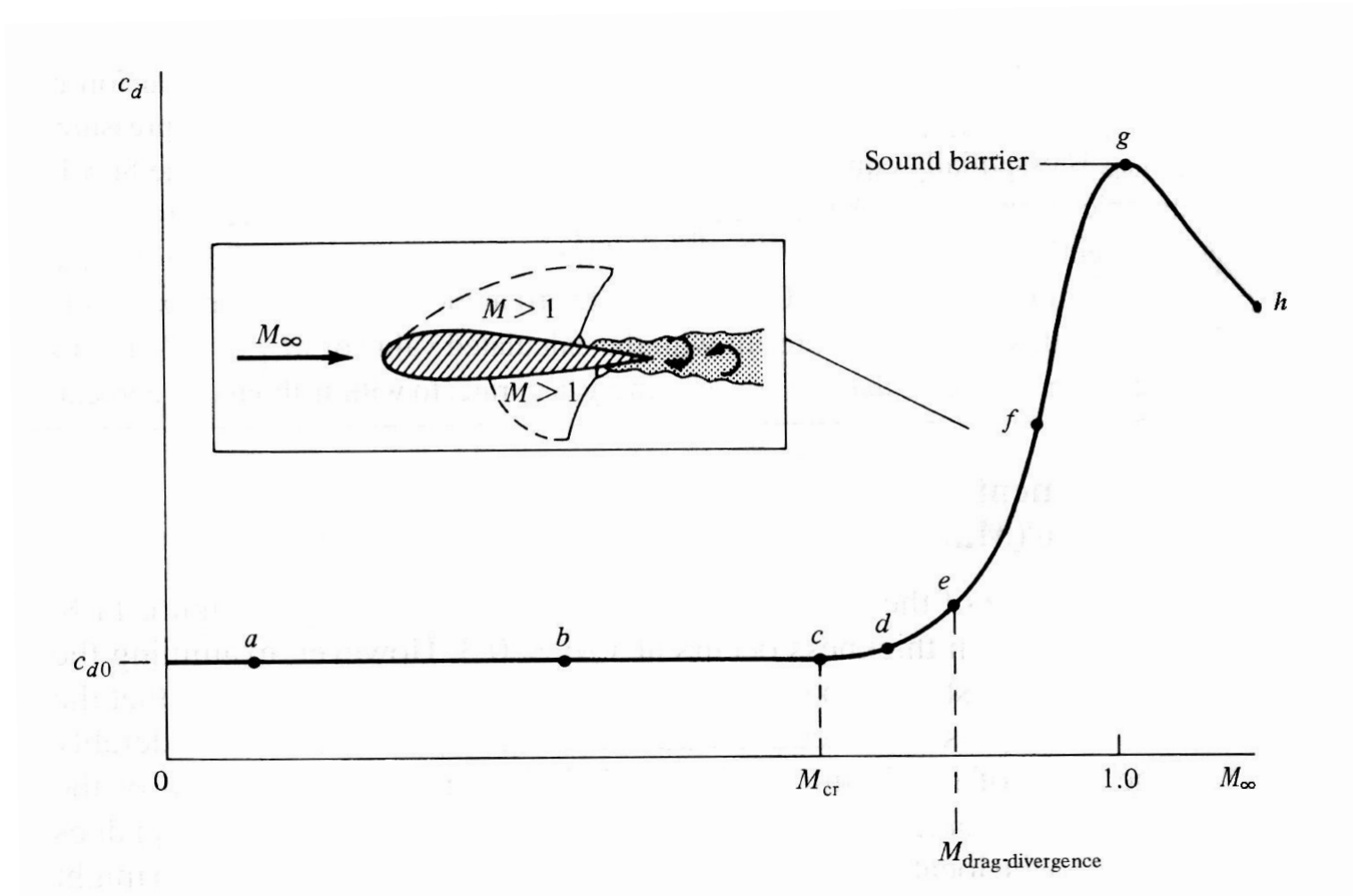
- escoamentos subsônicos compressíveis de baixa velocidade apresentam o coeficiente de arrasto praticamente constante, até aproximadamente o número de Mach crítico.
- Acima do Mach crítico, uma porção do aerofólio passa a apresentar escoamento localmente supersônico e o coeficiente de arrasto começa a aumentar.

## 9.5 O número de Mach de divergência: a barreira do som

- Se a velocidade do escoamento livre for aumentada, contudo, observa-se um ponto a partir do qual o coeficiente de arrasto aumenta subitamente. O valor do número de Mach do escoamento livre associado a esse fenômeno recebe o nome de número de Mach de divergência.



# 9.5 O número de Mach de divergência: a barreira do som



## 9.5 O número de Mach de divergência: a barreira do som

- Para números de Mach entre o valor de divergência e o unitário, o coef. de arrasto aumenta rapidamente, associado com o crescimento da porção de escoamento supersônico sobre o aerofólio, que culmina em uma onda de choque. Quando se atinge a formação de tal onda de choque, tem-se a chamada “quebra da barreira do som”.

## 9.5 O número de Mach de divergência: a barreira do som

- O termo “barreira do som” surgiu na década de 1930, com base na regra de Prandtl-Glauert e em dados experimentais que apontavam para o aumento do coef. de arrasto com o aumento do número de Mach do escoamento livre.
- Nessa época, a crença era de que nenhum avião pudesse ultrapassar a barreira imposta pelo aumento do arrasto.

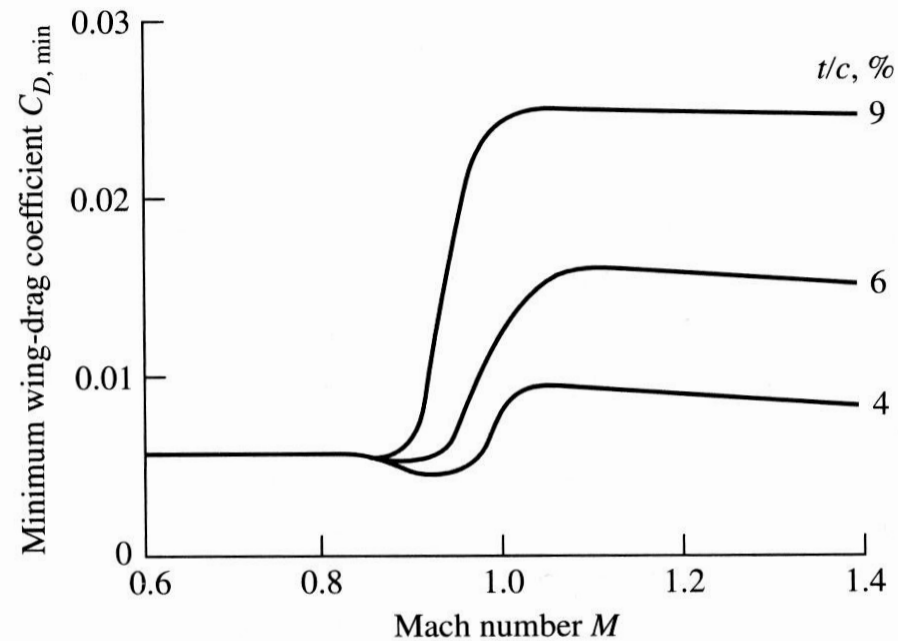
## 9.5 O número de Mach de divergência: a barreira do som

- Com o advento dos testes feitos em túneis de vento no final da década de 1940, notou-se que os picos para o coef. de arrasto ocorriam em condições de número de Mach próximo ao unitário, decaindo posteriormente no regime supersônico. Desse modo, era necessário apenas o projeto de um avião que suportasse o aumento do arrasto verificado em escoamentos transônicos.

## 9.5 O número de Mach de divergência: a barreira do som

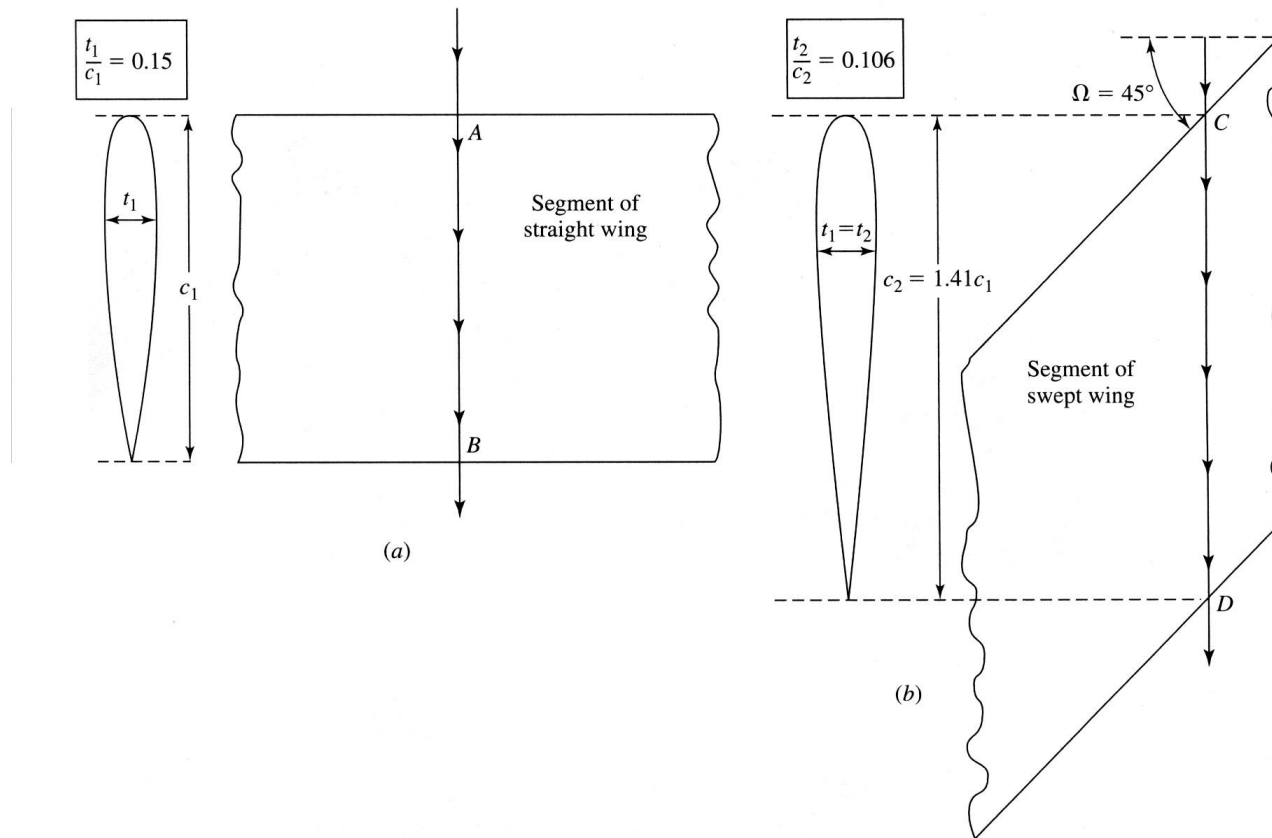
- Duas propostas clássicas são feitas de modo a aumentar o valor do número de Mach crítico (e, conseqüentemente, o número de Mach de divergência):
  - Reduzir a espessura do aerofólio.
  - Rotacionar a asa.
- Em ambos os casos, como conseqüência tem-se a redução da razão espessura/corda para a asa.

## 9.5 O número de Mach de divergência: a barreira do som



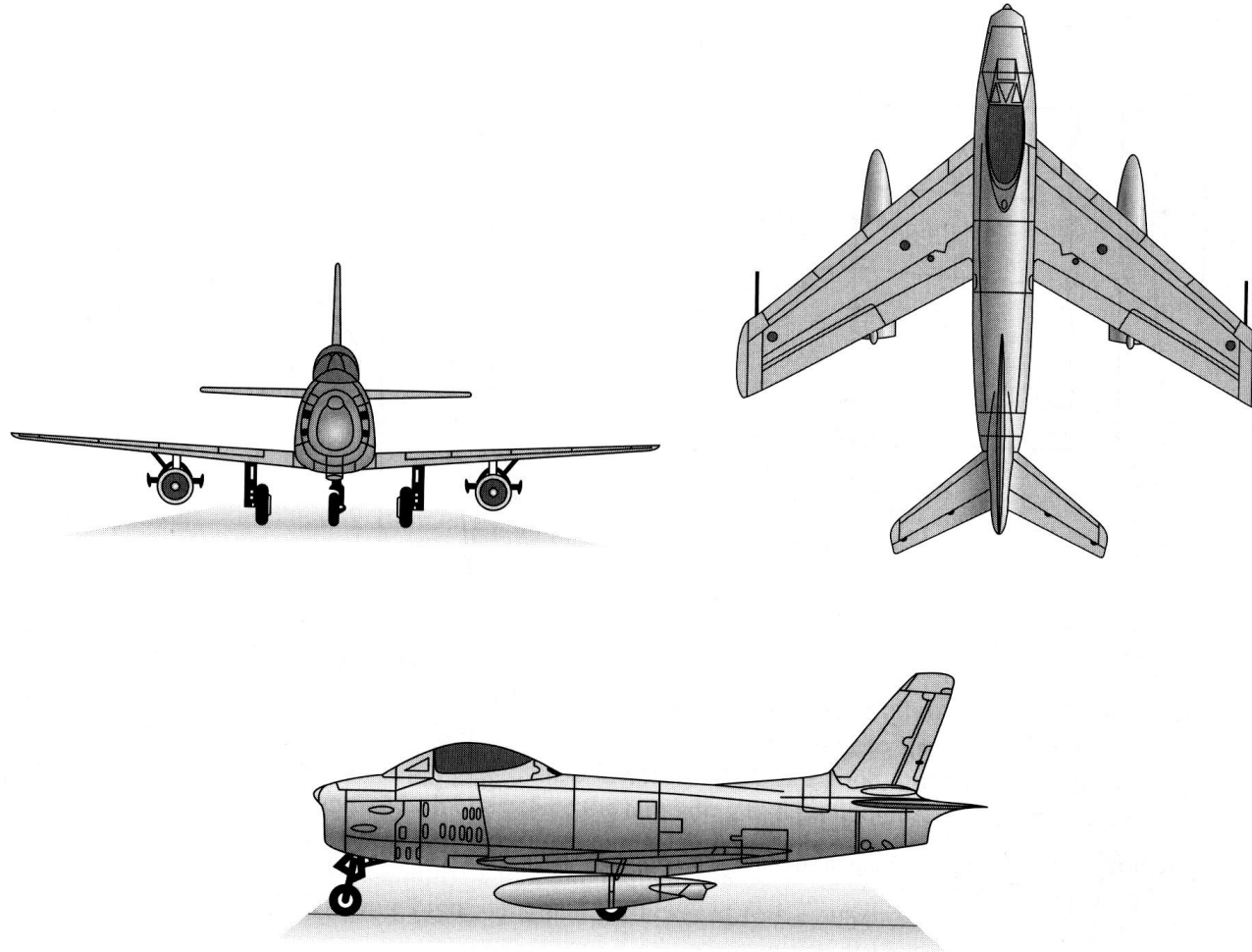
**Figure 9.17** | Variation of minimum wing drag coefficient versus Mach number with airfoil thickness ratio as a parameter. The wing is swept, with a sweep angle of 47 degrees. (From Loftin, *Quest for Performance*, NASA SP 468, 1985.)

# 9.5 O número de Mach de divergência: a barreira do som



**Figure 9.18** | By sweeping the wing, a streamline effectively sees a thinner airfoil, hence increasing the critical Mach number of the wing.

# 9.5 O número de Mach de divergência: a barreira do som



**Figure 9.19** | A typical example of a swept-wing aircraft. The North American F-86 Sabre of Korean War fame.



## 9.6 Aplicações em CFD: aerofólios e asas transônicas

- Embora a teoria clássica de correções para compressibilidade (como a regra de Prandtl-Glauert) seja ao mesmo tempo útil e elegante, ela é restrita aos casos de:
  - Aerofólios finos com pequenos ângulos de ataque.
  - Números de Mach subsônicos que não estejam muito próximos à unidade (valores típicos são inferiores a 0,7).
  - escoamentos invíscidos e irrotacionais.

## 9.6 Aplicações em CFD: aerofólios e asas transônicas

- Tanto aviões civis modernos (exemplos: Boeing 747 e 777, com Mach de 0,85) quanto aviões militares (Mach próximo ao unitário) são concebidos fora dos limites de emprego das regras de correção.
- Neste caso, a única abordagem que fornece acuradamente as características do escoamento sobre aerofólios e asas em regime transônico é a Dinâmica de Fluidos Computacional (CFD).

## **9.6 Aplicações em CFD: aerofólios e asas transônicas**

- A partir das décadas de 1960 e 1970, com o advento dos jatos civis de alta velocidade, a obtenção de resultados acurados para escoamentos transônicos se tornou imperativo e apenas empregando-se CFD foi possível obter tais soluções.

## 9.6 Aplicações em CFD: aerofólios e asas transônicas

- Historicamente, as ferramentas de CFD foram empregadas para quatro diferentes classes de problemas em escoamentos transônicos:
  - Solução numérica da equação potencial não-linear para pequenas perturbações. Neste caso, os resultados são limitados às hipóteses de pequenas perturbações e de aerofólios finos com pequenos ângulos de ataque.

## 9.6 Aplicações em CFD: aerofólios e asas transônicas

- Solução da equação de potencial completa. Neste caso, as aplicações incluem aerofólios de qualquer formato e com qualquer ângulo de ataque. O escoamento, contudo, continua a ser modelado como isentrópico e, mesmo no caso de serem obtidos resultados para ondas de choque, estas não eram sempre acuradamente previstas.
- Solução das equações de Euler. Neste caso, as ondas de choque já puderam ser corretamente previstas.

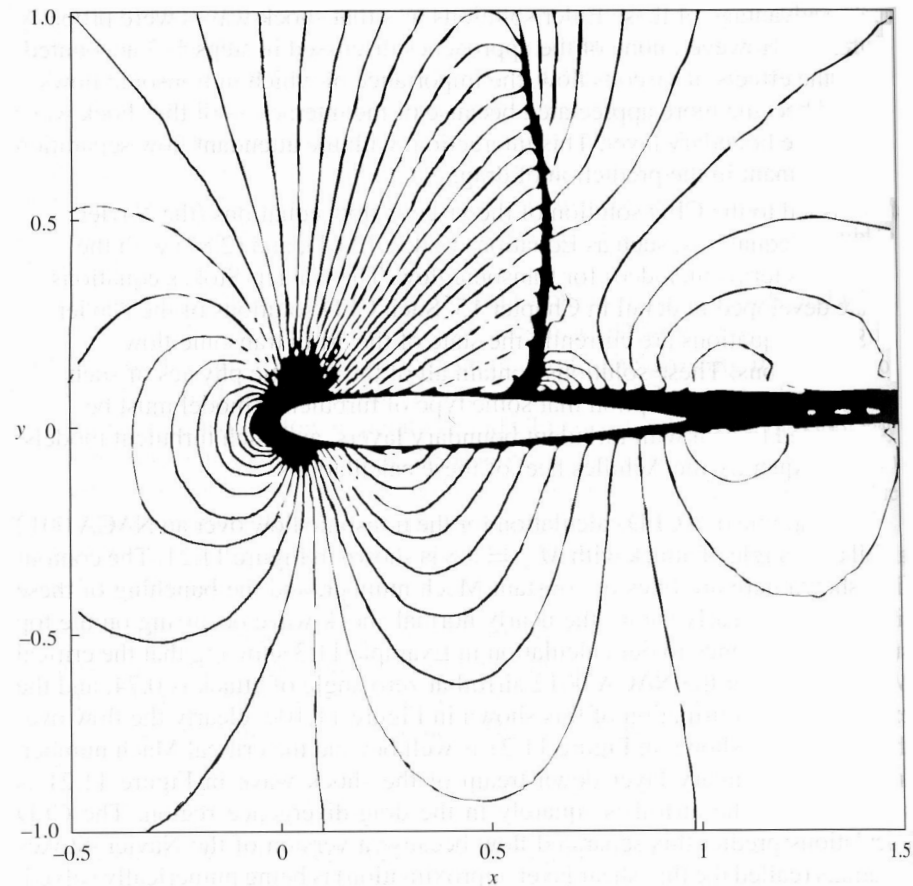
## **9.6 Aplicações em CFD: aerofólios e asas transônicas**

- Solução de escoamentos viscosos (equações de Navier-Stokes com inclusão de termos viscosos). Estas soluções contém todo o realismo físico dos escoamentos, com exceção de efeitos de turbulência. Tais efeitos são importantes para o estudo de certas camadas-limite turbulentas, o que é feito pela inclusão de algum modelo de turbulência. Tais modelos, contudo, são o ponto fraco da solução obtida.

## 9.6 Aplicações em CFD: aerofólios e asas transônicas

- escoamento transônico sobre um aerofólio NACA 0012 com ângulo de ataque de  $2^\circ$  e Mach de 0,8.
- Nota-se a formação de uma onda de choque quase normal sobre a superfície superior (região do encontro de isolinhas de números de Mach).
- Os resultados da simulação levam em consideração efeitos viscosos.

## 9.6 Aplicações em CFD: aerofólios e asas transônicas



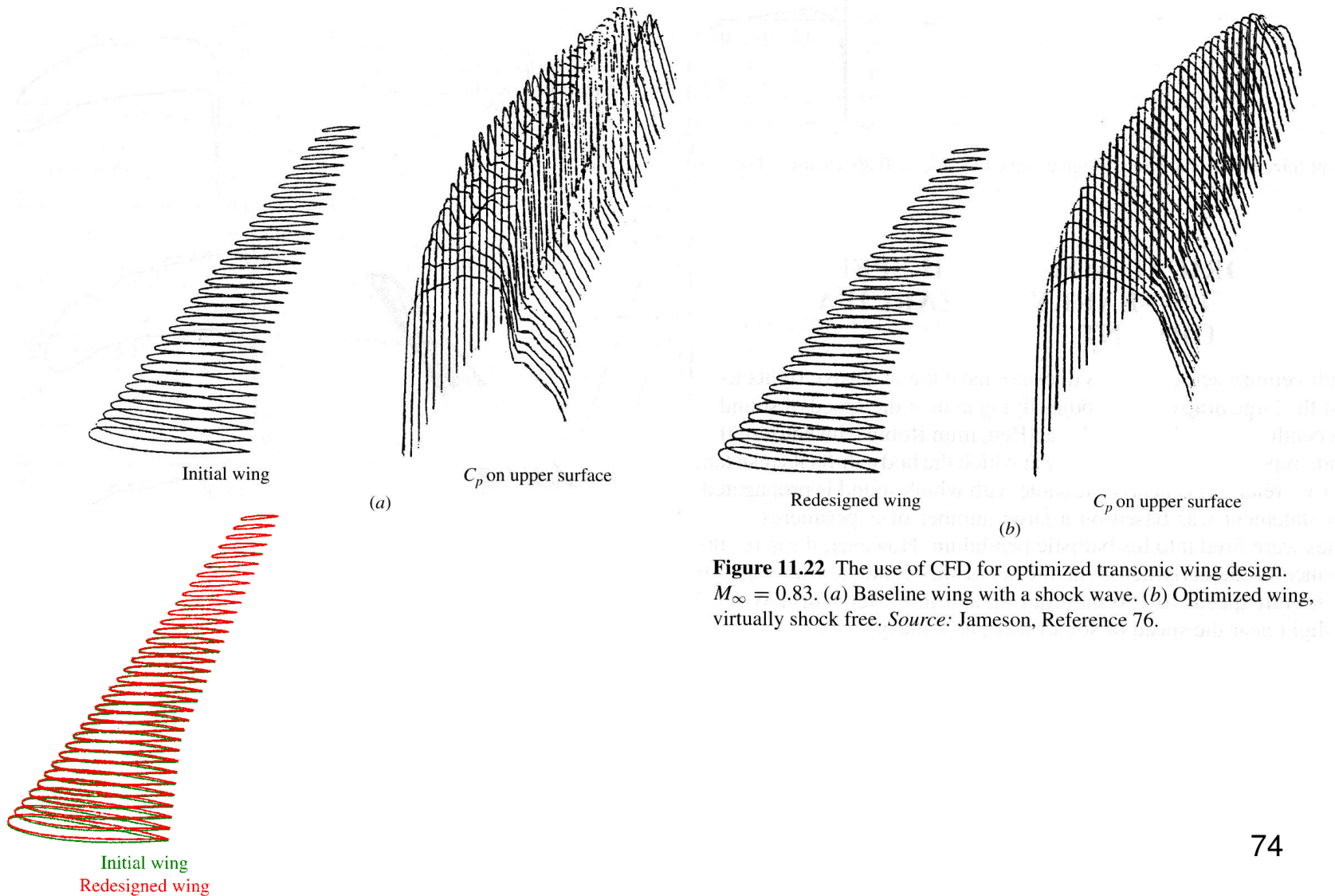
**Figure 11.21** Mach number contours in the transonic flow over an NACA 0012 airfoil at  $M_\infty = 0.8$  and at  $2^\circ$  angle of attack. (Source: Nakahashi and Deiwert, Reference 74.)



## 9.6 Aplicações em CFD: aerofólios e asas transônicas

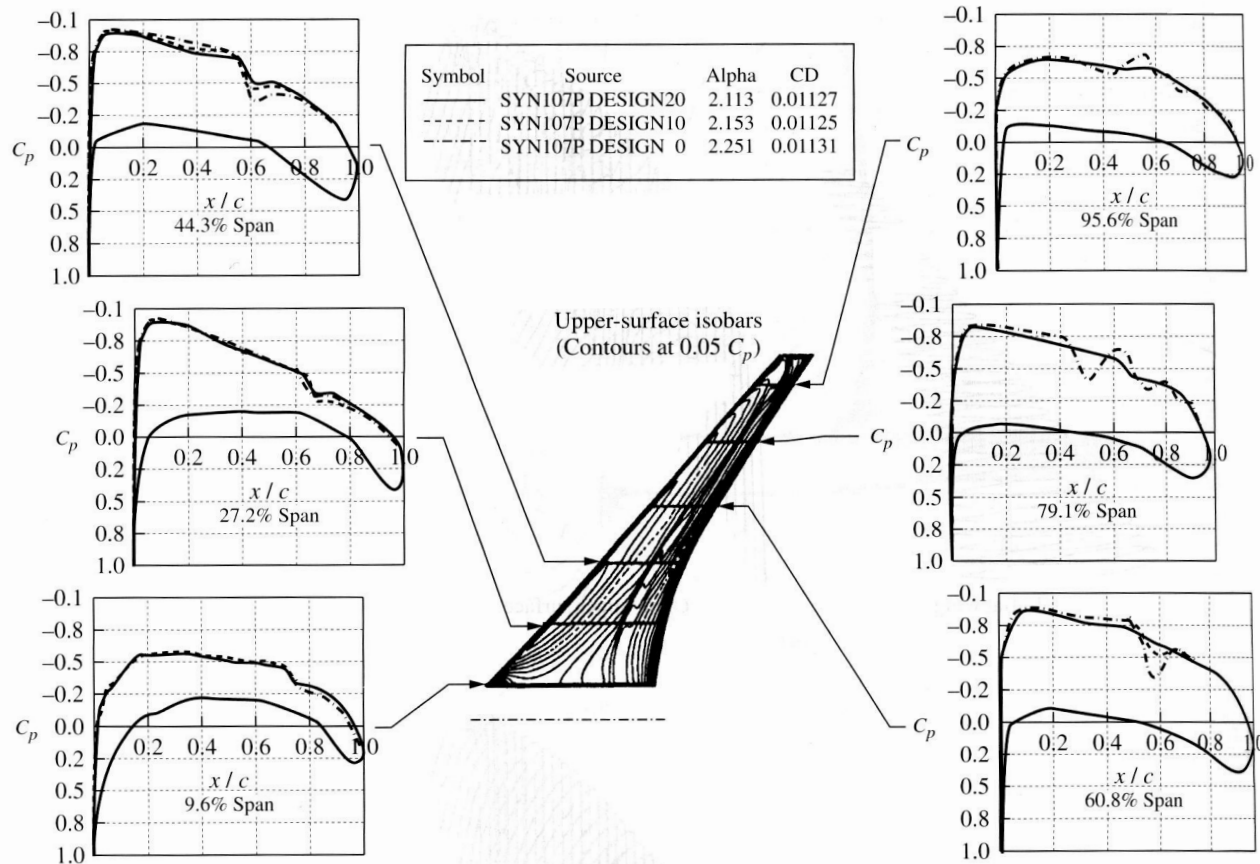
- Atualmente ferramentas de CFD são combinadas a técnicas de otimização de projetos para o projeto de asas transônicas completas.
- Para esses casos, procura-se diminuir o coeficiente de pressão e/ou suavizar sua distribuição sobre a asa, bem como evitar a formação de ondas de choque.

# 9.6 Aplicações em CFD: aerofólios e asas transônicas



**Figure 11.22** The use of CFD for optimized transonic wing design.  $M_\infty = 0.83$ . (a) Baseline wing with a shock wave. (b) Optimized wing, virtually shock free. *Source:* Jameson, Reference 76.

# 9.6 Aplicações em CFD: aerofólios e asas transônicas



**Figure 11.23** Another example of optimized transonic wing design using CFD.  $M_\infty = 0.86$ . (Source: Jameson, Reference 76.)

## 9.7 Escoamentos supersônicos linearizados

- A equação do potencial de velocidade linearizada para pequenas perturbações apresenta as seguintes formas:
  - Para escoamentos subsônicos,

$$\beta^2 \cdot \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$$

$$\beta = \sqrt{1 - M_\infty^2}$$

## 9.7 Escoamentos supersônicos linearizados

– Para escoamentos supersônicos,

$$\lambda^2 \cdot \varphi_{xx} - \varphi_{yy} = 0$$

$$\lambda = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$$

- A diferença básica entre as equações anteriores consiste no fato de que no caso subsônico as equações são elípticas enquanto para o caso supersônico, hiperbólicas.

# 9.7 Escoamentos supersônicos linearizados

- Considere um escoamento supersônico sobre um corpo ou superfície que introduza pequenas mudanças no campo de escoamento.

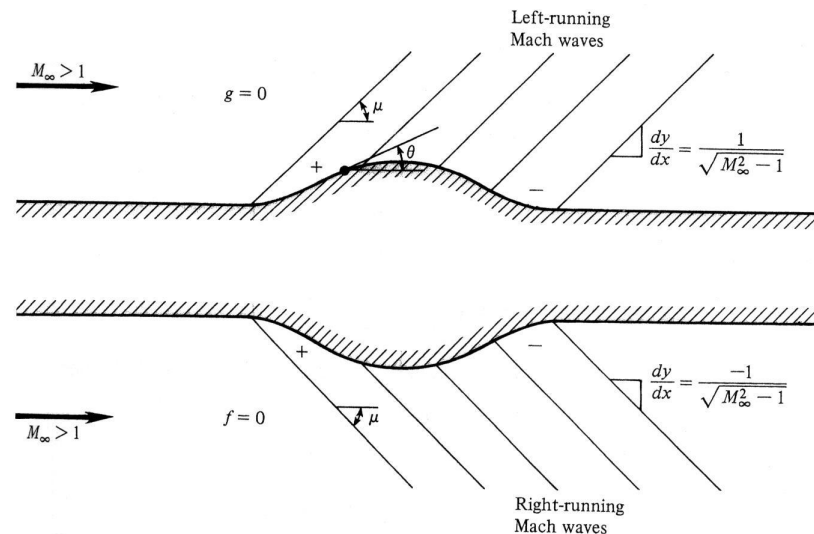


Figure 9.9 | Linearized supersonic flow over a bump.

## 9.7 Escoamentos supersônicos linearizados

- A solução analítica para a equação linearizada para os escoamentos supersônicos é obtida empregando-se a equação clássica da onda e a teoria acústica, resultando na expressão

$$\varphi = f(x - \lambda \cdot y) + g(x + \lambda \cdot y)$$

## 9.7 Escoamentos supersônicos linearizados

- Examinando-se a solução particular onde  $g = 0$ , e  $\varphi = f(x - \lambda \cdot y)$ , tem-se que as linhas de  $\varphi$  constantes correspondem a

$$x - \lambda \cdot y = \text{const}$$

ou seja,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

lembrando-se que

$$\mu = \sin^{-1}\left(\frac{1}{M_\infty}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\right)$$



## 9.7 Escoamentos supersônicos linearizados

- Se  $f = 0$ , tem-se a família de linhas de Mach à direita, como esquematizado na porção inferior da última figura.
- Retornando-se à equação geral e considerando-se o caso de  $g = 0$ . Tem-se assim:

$$\varphi = f(x - \lambda \cdot y)$$

de modo que:

$$u' = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = f' \quad v' = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\lambda \cdot f'$$

## 9.7 Escoamentos supersônicos linearizados

- Das relações anteriores obtém-se:

$$u' = -\frac{v'}{\lambda}$$

- A condição de contorno na superfície é dada por

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{v'}{V_\infty - u'}$$

- Para pequenas perturbações:

$$u' \ll V_\infty; \quad \tan \theta \approx \theta$$

## 9.7 Escoamentos supersônicos linearizados

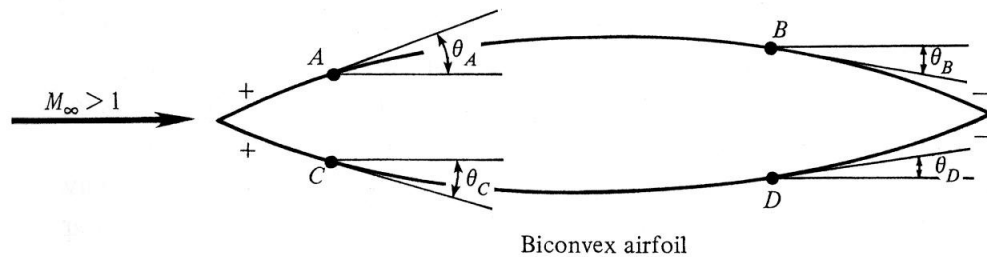
- Tem-se assim que

$$v' = V_{\infty} \cdot \theta \quad u' = -\frac{V_{\infty} \cdot \theta}{\lambda}$$

- E o coeficiente de pressão na superfície pode ser avaliado como

$$C_p = -\frac{2 \cdot u'}{V_{\infty}} = \frac{2 \cdot \theta}{\lambda} = \frac{2 \cdot \theta}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}}$$

# 9.7 Escoamentos supersônicos linearizados



$$Cp_A = \frac{2 \cdot \theta_A}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

$$Cp_B = \frac{2 \cdot \theta_B}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

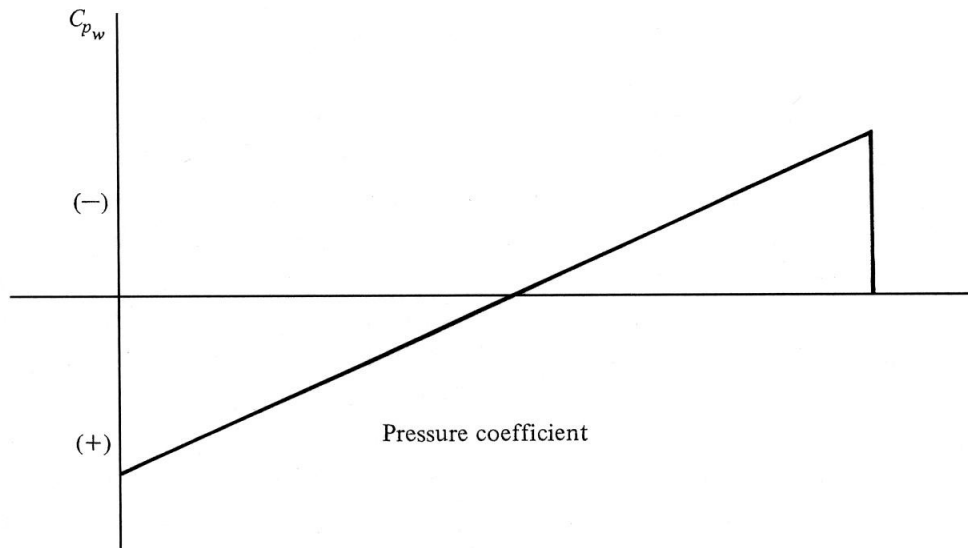


Figure 9.10 | Schematic of the linearized pressure coefficient over a biconvex airfoil.

## 9.7 Escoamentos supersônicos linearizados

- As expressões anteriores foram obtidas ao se tomar  $g = 0$ , sendo válidas para a família de ondas à esquerda (superfície superior). No caso de se tomar  $f = 0$ , o coeficiente de pressão será dado por

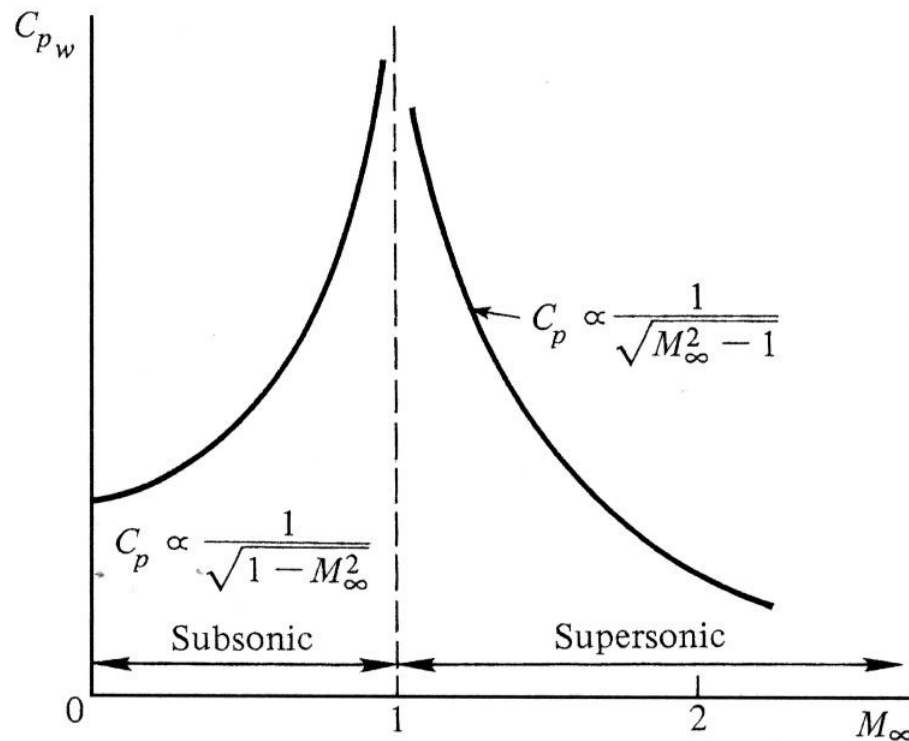
$$C_p = -\frac{2 \cdot \theta}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

e a solução é válida para a família de ondas à direita (superfície inferior).

## 9.7 Escoamentos supersônicos linearizados

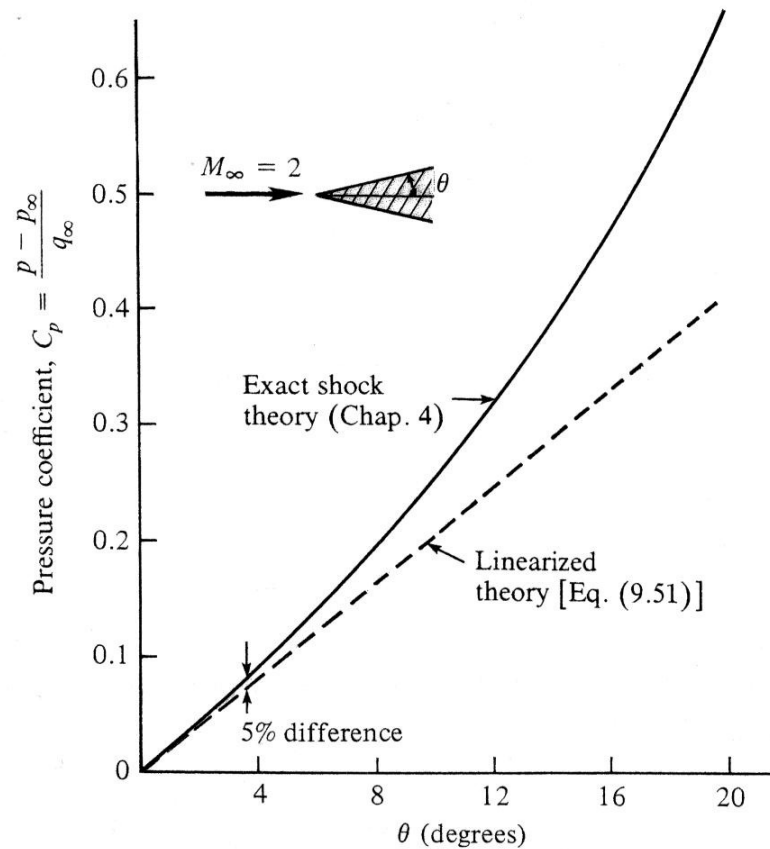
- Uma diferença básica entre escoamentos sub e supersônicos está relacionada à força de arrasto: enquanto em um campo subsônico um corpo bidimensional não experimenta arrasto algum, se o mesmo corpo for posto em um campo supersônico, o mesmo experimentará uma força de arrasto, uma vez que as forças sobre o corpo não se anulam.

# 9.7 Escoamentos supersônicos linearizados



**Figure 9.11** | Variation of the linearized pressure coefficient with Mach number.

# 9.7 Escoamentos supersônicos linearizados



**Figure 9.12** | Comparison between linearized theory and exact shock results for the pressure on a wedge in supersonic flow.

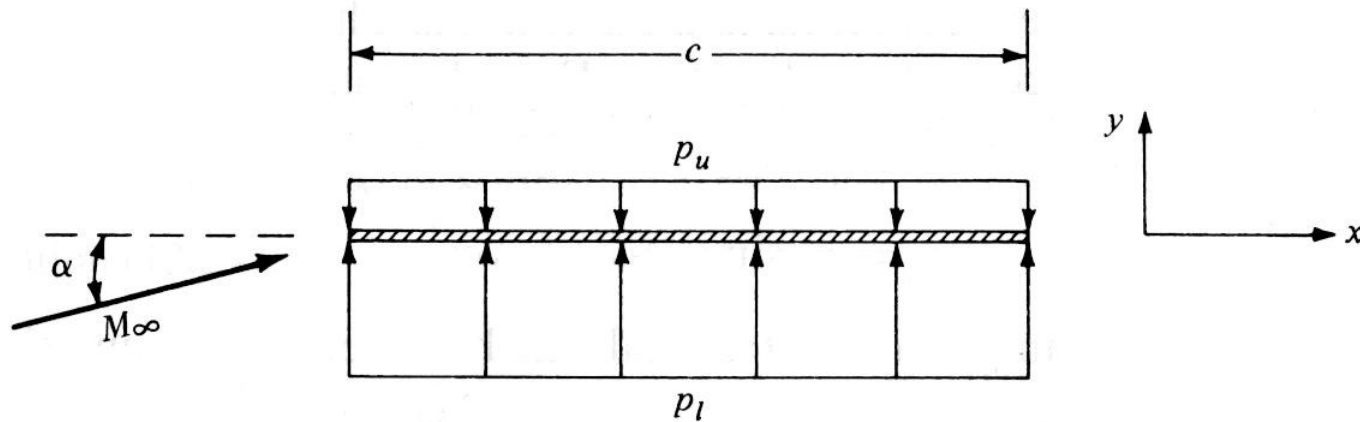


## 9.7 Escoamentos supersônicos linearizados

- Embora a acurácia da teoria de linearização é garantida para apenas pequenos ângulos de deflexão, os resultados para os coeficientes de arrasto e de sustentação são acurados para ângulos de deflexão maiores que os esperados inicialmente, uma vez que há uma tendência dos erros nas superfícies superior e inferior se anularem durante o processo de integração.

# 9.7 Escoamentos supersônicos linearizados

- Escoamento sobre uma placa plana:



**Figure 12.4** A flat plate at angle of attack in a supersonic flow.

$$Cp_l = \frac{2 \cdot \alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \quad Cp_u = -\frac{2 \cdot \alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

## 9.7 Escoamentos supersônicos linearizados

- Coeficiente de força normal sobre a placa:

$$C_n = \frac{1}{c} \int_0^c (C_{p_l} - C_{p_u}) dx$$

$$C_n = \frac{4 \cdot \alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{1}{c} \int_0^c dx = \frac{4 \cdot \alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

- Coeficiente de força axial sobre a placa:

$$C_a = \frac{1}{c} \int_{LE}^{TE} (C_{p_l} - C_{p_u}) dy$$

## 9.7 Escoamentos supersônicos linearizados

- Como a placa plana teoricamente possui espessura nula, tanto  $dy$  quanto  $Ca$  são nulos. Deste modo, os coeficientes de sustentação e de arrasto serão dados por

$$C_L = Cn \cdot \cos \alpha - Ca \cdot \sin \alpha \quad C_D = Cn \cdot \sin \alpha + Ca \cdot \cos \alpha$$

$$C_L = \frac{4 \cdot \alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

$$C_D = \frac{4 \cdot \alpha^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

## 9.7 Escoamentos supersônicos linearizados

- Deve-se atentar que as expressões anteriores foram obtidas pela teoria de linearização, sendo válidas, por isso, apenas para pequenos ângulos de ataque.
- Para um aerofólio fino de geometria arbitrária o coeficiente de sustentação para pequenos valores de  $\alpha$  é dado por:

$$C_L = \frac{4 \cdot \alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

## 9.7 Escoamentos supersônicos linearizados

- No caso do coeficiente de arrasto, tem-se

$$C_D = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} (\alpha^2 + g_c^2 + g_t^2)$$

sendo  $g_c$  e  $g_t$  funções da curvatura e da espessura do aerofólio, respectivamente.