

# Escoamentos Compressíveis

## Capítulo 05

### Escoamentos quase- unidimensionais

## 5.1 Introdução

- No escoamento quase-unidimensional, a área da seção transversal do escoamento é uma função da posição somente:  $A=A(x)$ .
- Soluções aproximadas para problemas tridimensionais.
- Estudos preliminares para túneis de vento e motores-foguete podem ser feitos empregando-se o modelo quase-unidimensional.

## 5.2 Equações governantes

- Equação da continuidade:

$$-\oiint_S \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV$$

$$\rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2$$

- Equação do momentum:

$$\oiint_S (\rho \vec{V} \cdot d\vec{S}) \vec{V} + \iiint_V \frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} dV = \oiint_V \rho \vec{f} dV - \oiint_S p d\vec{S}$$

## 5.2 Equações governantes

- Equação do momentum:
  - Considerando-se regime permanente e ausência de forças de corpo.

$$p_1 A_1 + \rho_1 u_1^2 A_1 + \int_{A_1}^{A_2} p dA = p_2 A_2 + \rho_2 u_2^2 A_2$$

- Equação da energia:

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{V}} \dot{q} \rho d\mathcal{V} - \iint_S p \vec{V} \cdot d\vec{S} + \iiint_{\mathcal{V}} \rho (\vec{f} \cdot \vec{V}) d\mathcal{V} = \\ = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathcal{V}} \left[ \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \right] d\mathcal{V} + \iint_S \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \vec{V} \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

## 5.2 Equações governantes

- Equação da energia:
  - Considerando-se regime permanente e ausência de forças de corpo.

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

$$h_0 = \text{const.}$$

## 5.2 Equações governantes

- Forma diferencial das equações:
  - Em geral, as leis de conservação são expressas na forma diferencial ao invés da forma integral ou algébrica no caso de escoamentos quase-unidimensionais.

$$d(\rho u A) = 0$$

$$dp = -\rho u du$$

$$dh + u du = 0$$

## 5.3 Relação área-velocidade

- Da equação da continuidade:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0$$

- Da equação do momentum:

$$\frac{dp}{\rho} = \frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{\rho} = -u du$$

## 5.3 Relação área-velocidade

- Lembrando-se que o escoamento é isentrópico:

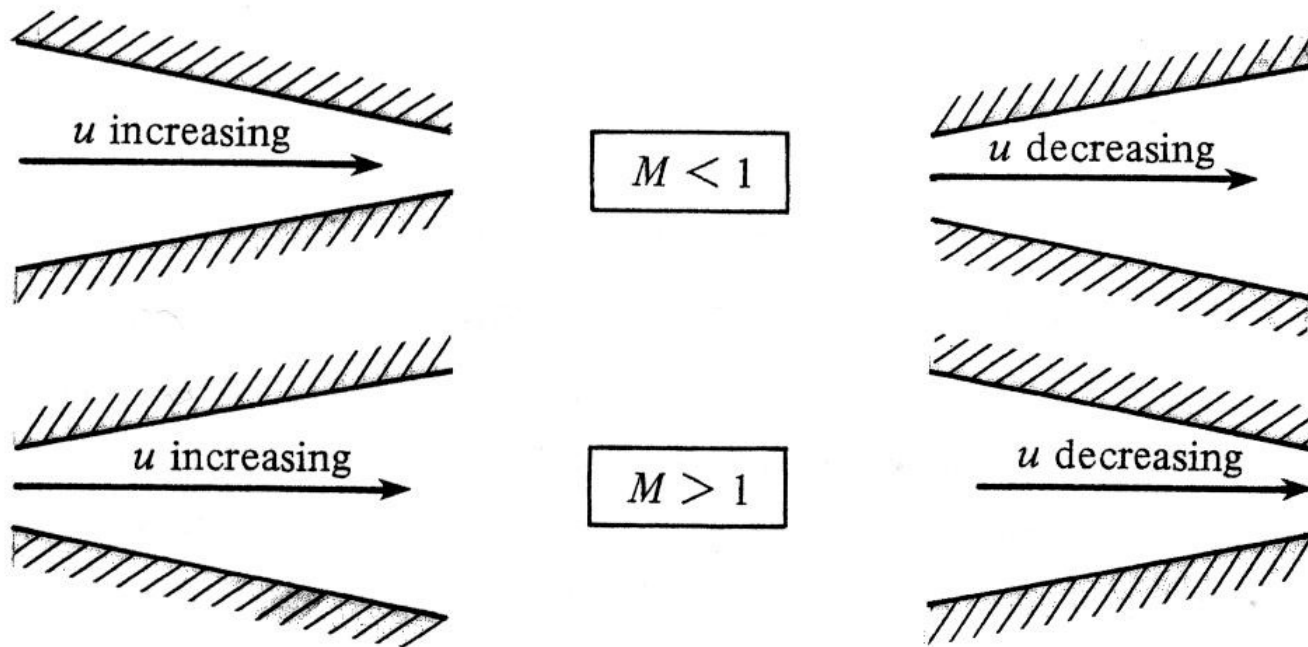
$$\frac{dp}{d\rho} = \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_s = a^2$$

- Combinando as relações anteriores:

$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{du}{u}$$



# 5.3 Relação área-velocidade



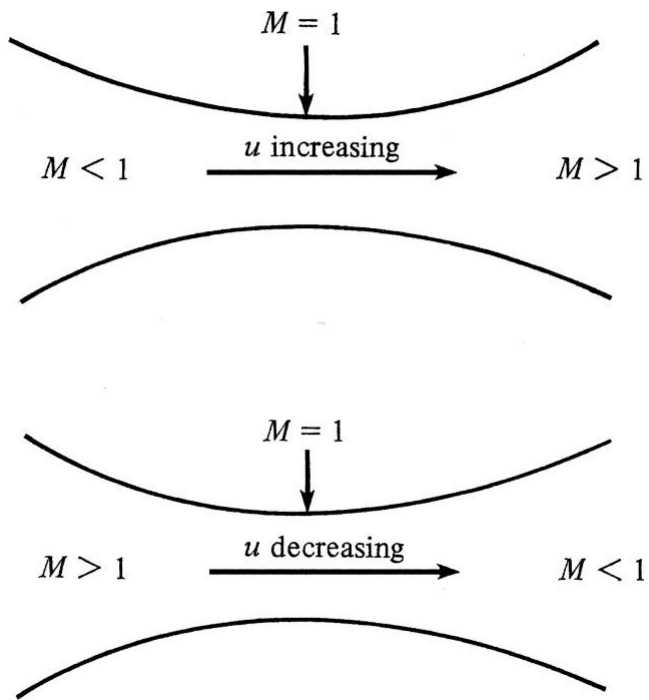
## 5.3 Relação área-velocidade

- Para  $M \rightarrow 0$ , que no limite corresponde ao escoamento incompressível, a equação anterior mostra que  $A \cdot u = \text{const}$ , o que é familiar à equação da continuidade para escoamentos incompressíveis.
- Para  $0 \leq M < 1$  (escoamento subsônico), um aumento na velocidade é associado a um decréscimo da área (e vice-versa).

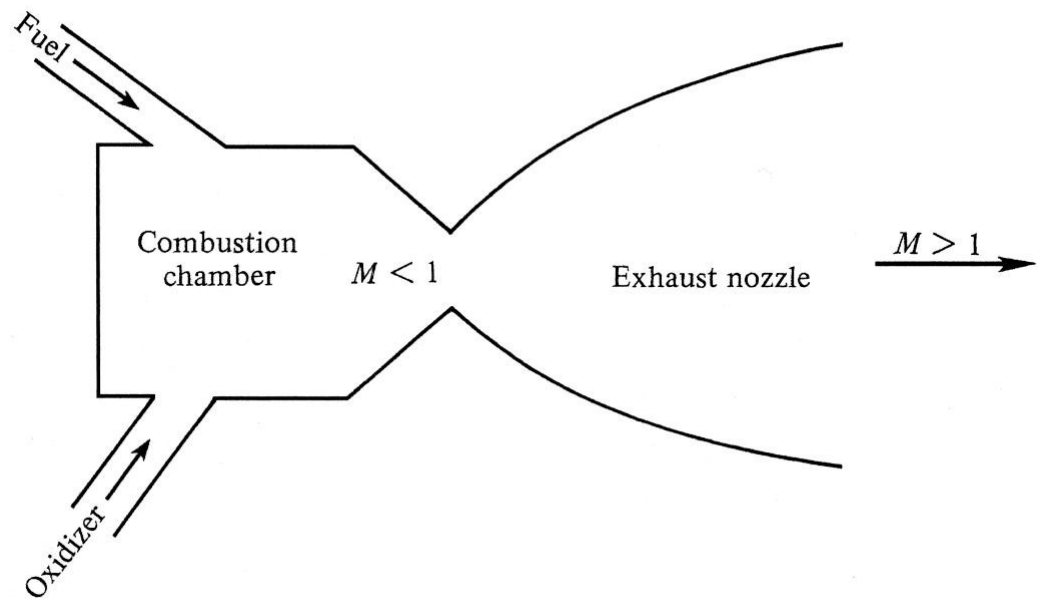
## 5.3 Relação área-velocidade

- Para  $M > 1$  (escoamento supersônico), um aumento na velocidade está associado a um aumento da área e vice-versa.
- Para  $M = 1$  (escoamento sônico), tem-se  $dA/A = 0$ , o que matematicamente corresponde a um mínimo ou máximo na distribuição de área. A área mínima é a única solução fisicamente realista.

# 5.3 Relação área-velocidade



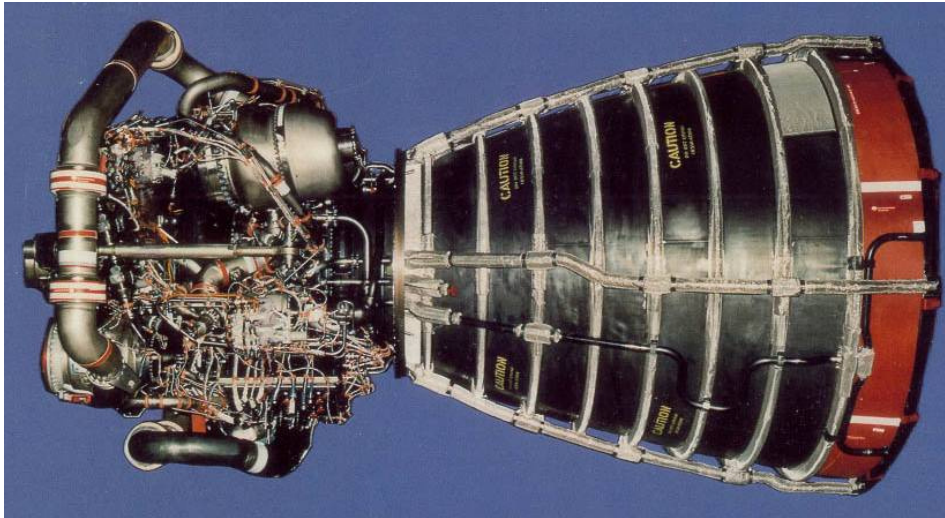
Bocais e difusores



Motor-foguete (tubeira)

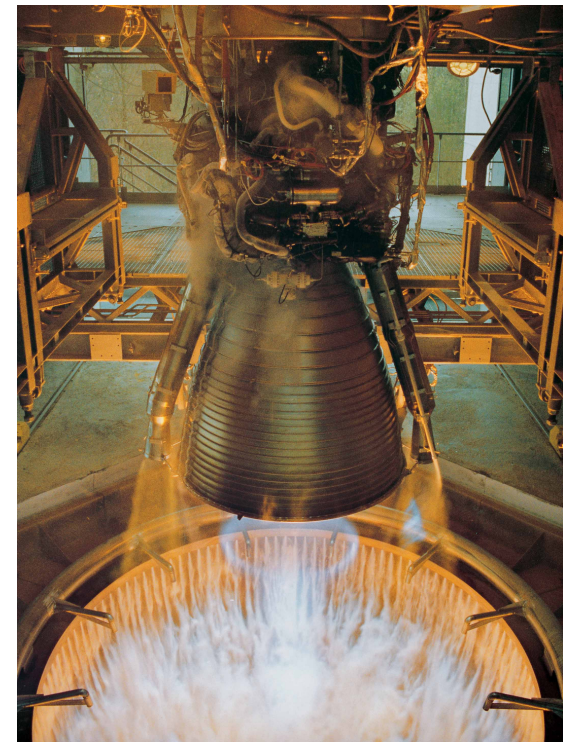
## 5.3 Relação área-velocidade

- Motor-foguete: formato de sino.



Fonte:

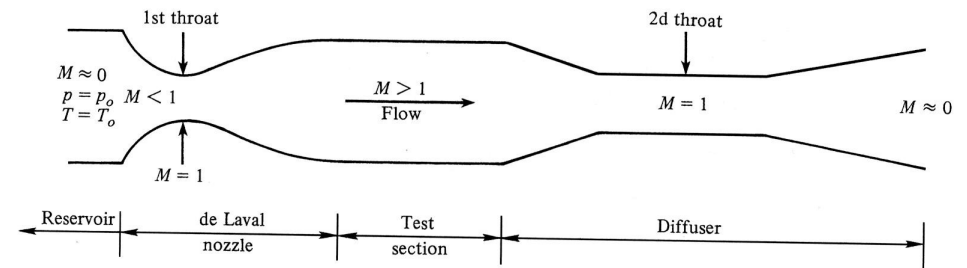
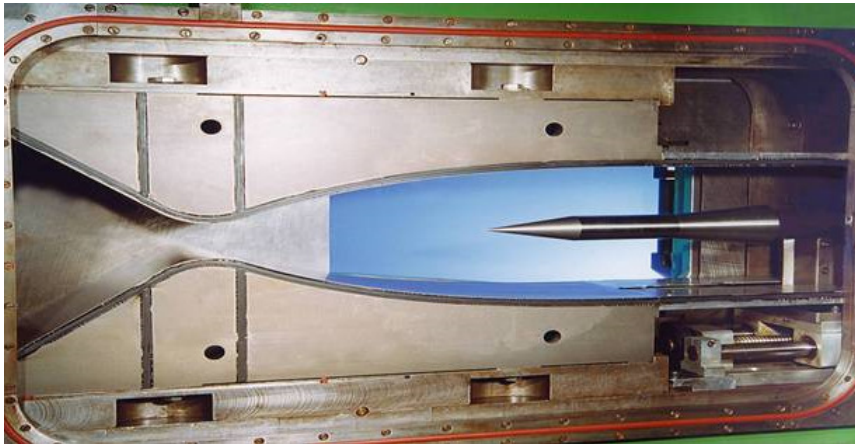
<http://cobweb.ecn.purdue.edu/~propulsi/propulsion/rockets/liquids/ssme.html>



Fonte: <http://bilddb.rb.kp.dlr.de>

# 5.3 Relação área-velocidade

- Túnel de vento supersônico:



Fonte: <http://www.isl.eu/en/Content/aerodynamic-testing.aspx>

## 5.4 Bocais

- Hipótese:
  - Gás caloricamente perfeito.
- Estudos realizados:
  - escoamento puramente isentrópico em regimes subsônico e supersônico através de bocais.
  - Efeito de diferentes razões entre pressões através de bocais.

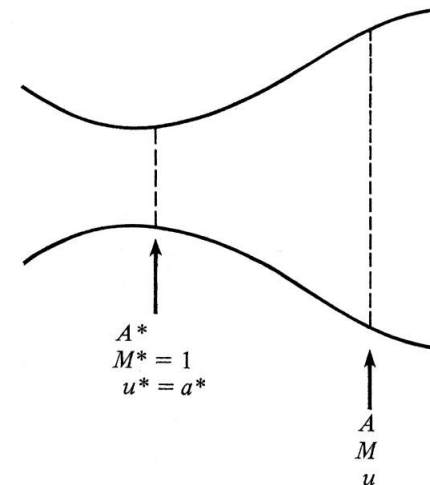
## 5.4 Bocais

- Estudo puramente isentrópico.
  - Para a garganta do bocal tem-se:

$$M^* = 1 \qquad u^* = a^*$$

$$\rho^* u^* A^* = \rho u A$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{\rho^*}{\rho} \frac{a^*}{u} = \frac{\rho^*}{\rho_0} \frac{\rho_0}{\rho} \frac{a^*}{u}$$



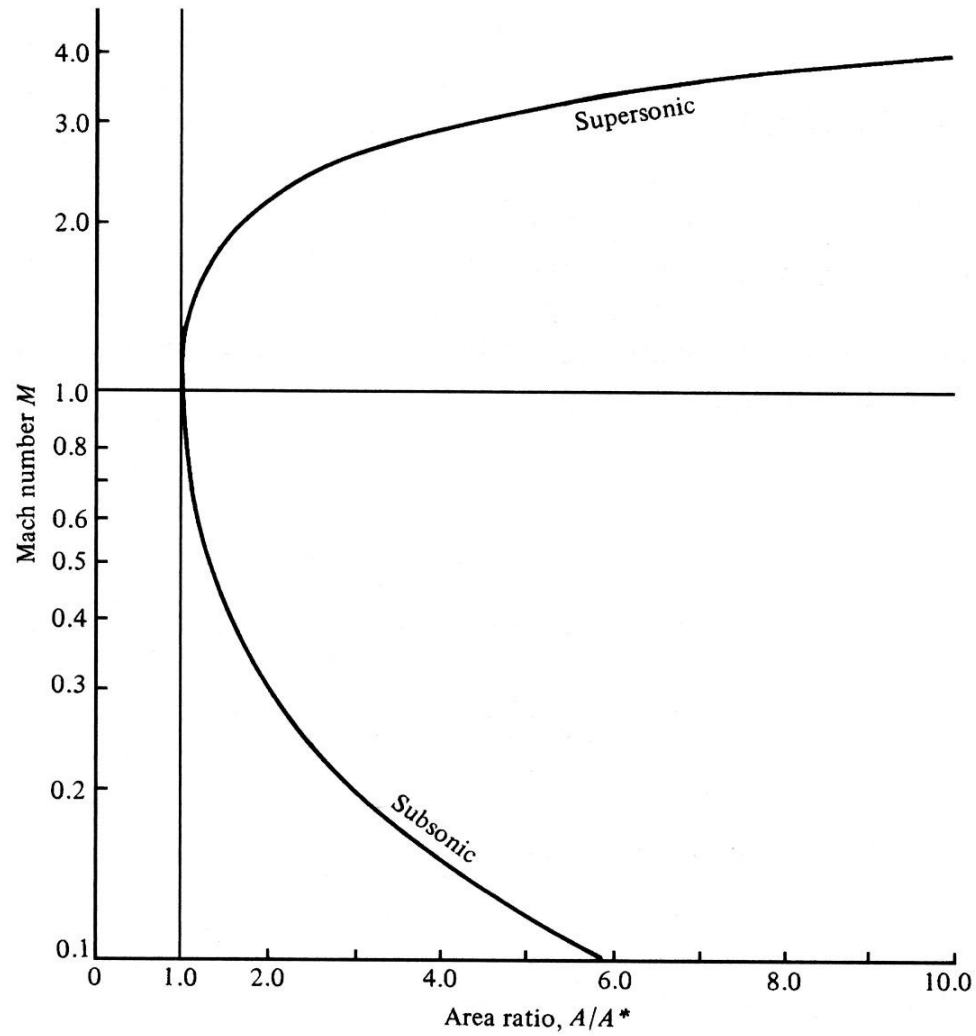


## 5.4 Bocais

- Relação número de Mach-área:

$$\left(\frac{A}{A^*}\right)^2 = \frac{1}{M^2} \left[ \frac{2}{\gamma+1} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}$$

# 5.4 Bocais



# 5.4 Bocais

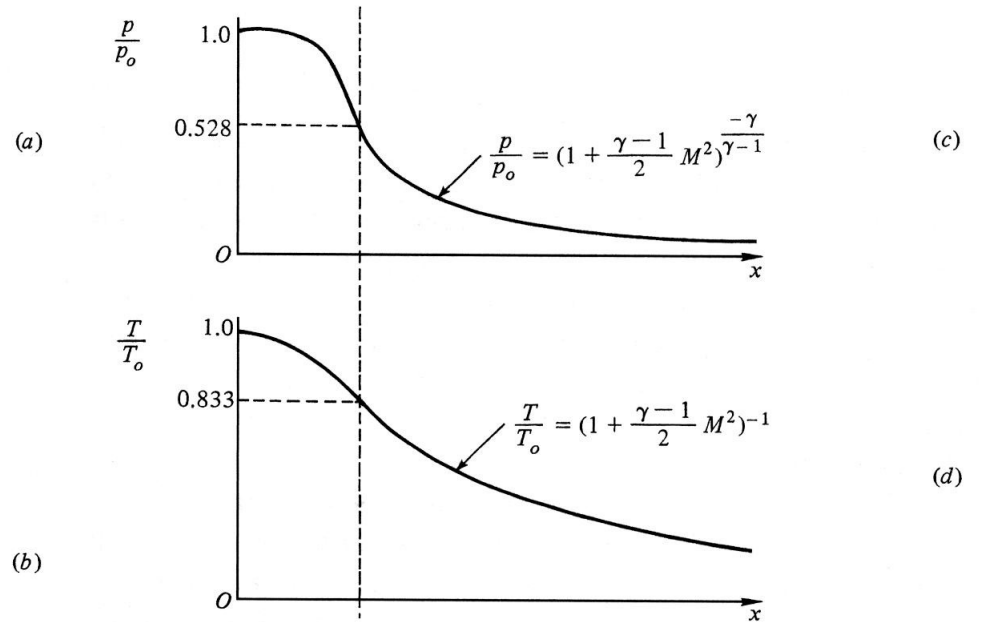
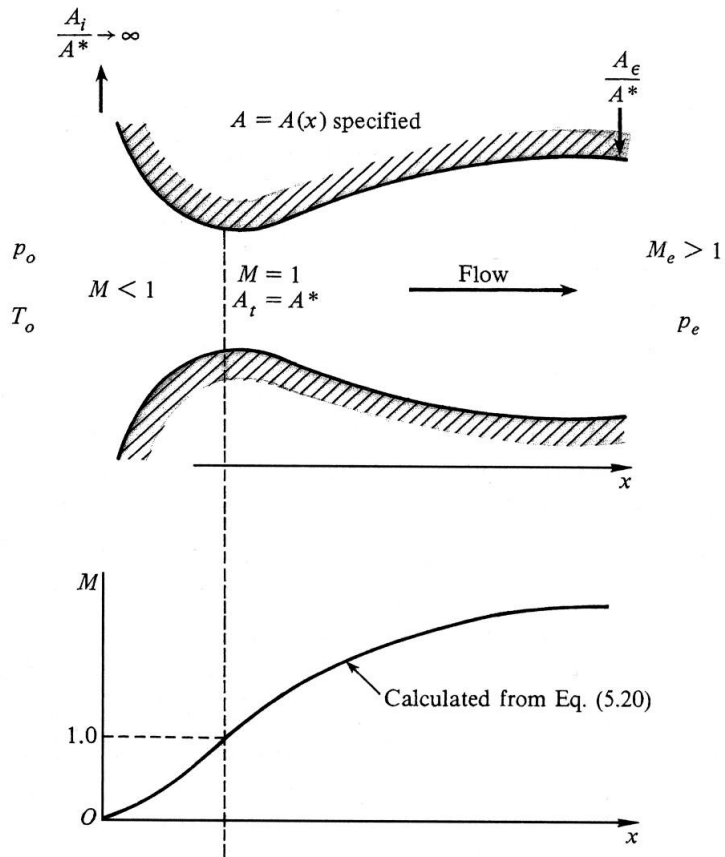


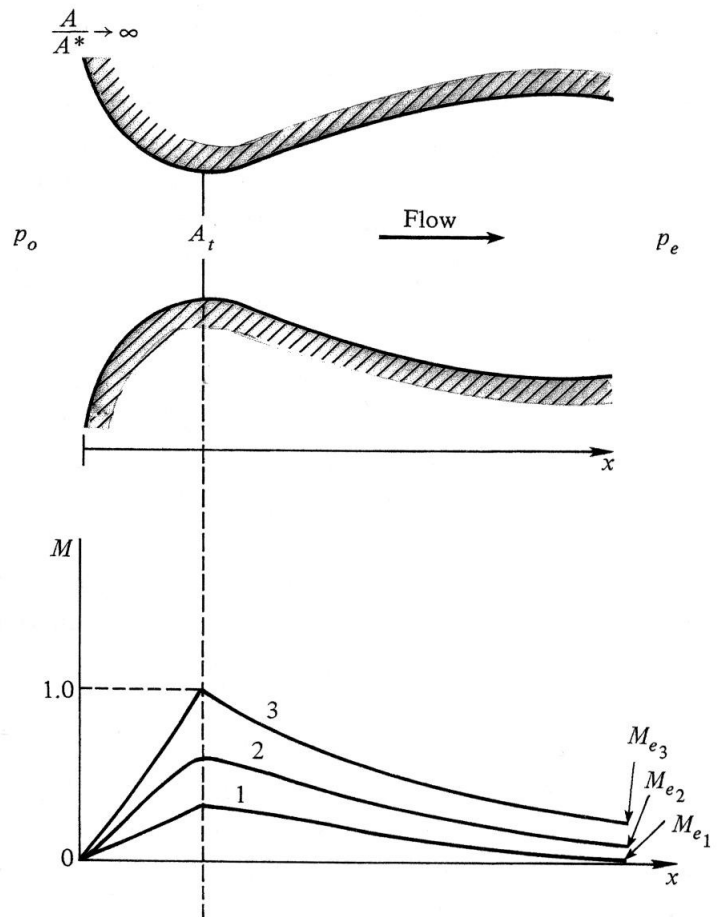
Figure 5.14 | Isentropic supersonic nozzle flow.

## 5.4 Bocais

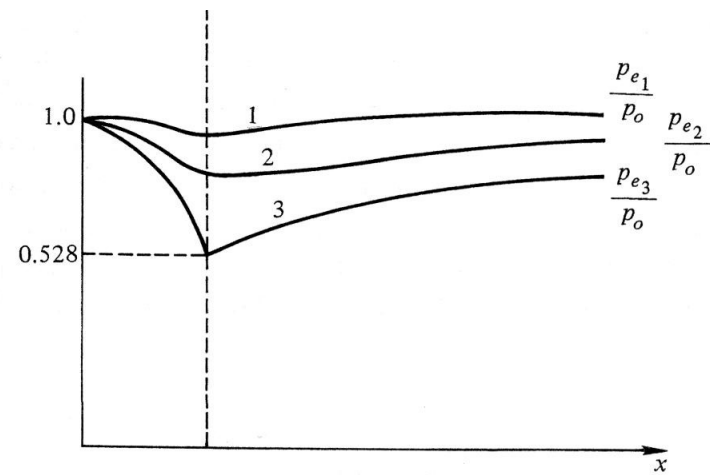
- Efeitos de diferentes razões de pressões:
  - Para que um escoamento supersônico isentrópico isento de qualquer choque ocorra, é necessário que  $p_e / p_0$  atenda à relação isentrópica.
  - O que ocorre, então, se a razão  $p_e / p_0$  não for igual ao valor isentrópico, ou seja, a pressão a jusante da saída do bocal for controlada por algum mecanismo alheio ao escoamento?

# 5.4 Bocais

- Aumentando-se gradualmente a diferença entre as pressões de saída e de entrada:



(a)



(b)

(c)

## 5.4 Bocais

- Para escoamentos completamente subsônicos, existem infinitas soluções isentrópicas para o bocal convergente-divergente, onde  $p_e / p_0$  e  $A / A_t$  são os fatores controladores das propriedades locais do escoamento para qualquer seção. Isto contrasta diretamente com o caso supersônico, para o qual existe apenas uma solução isentrópica.

## 5.4 Bocais

- Para todos os casos anteriores, o fluxo de massa aumenta com o aumento da pressão de saída ( $p_e$ ).
- Quando  $p_e$  é reduzido para  $p_{e3}$ , atinge-se o escoamento sônico na garganta do bocal. Neste ponto, se  $p_e$  for reduzido para  $p_{e3}$ , o número de Mach na garganta não se modificará: na garganta, o número de Mach não pode ser superior a 1.

## 5.4 Bocais

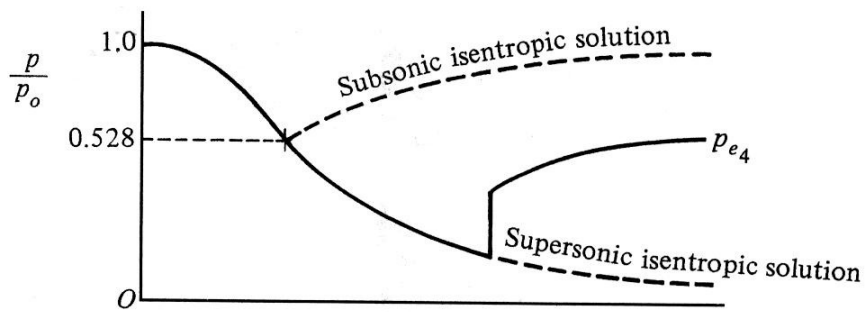
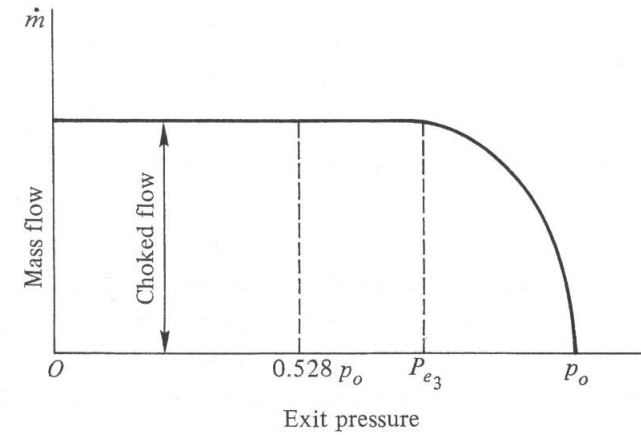
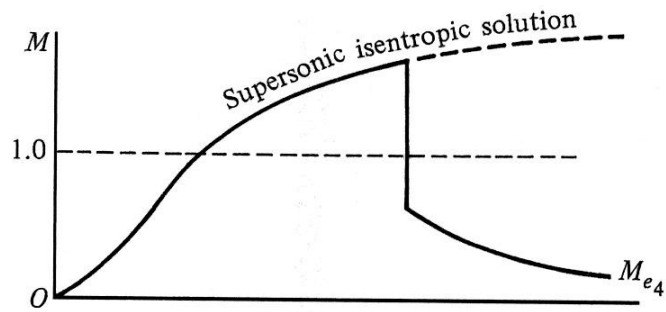
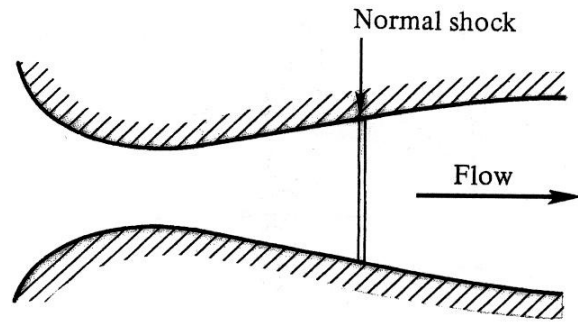
- Assim, o escoamento isentrópico na parte convergente do bocal não será mais afetado por variações na pressão de saída. Não importa quão pequena seja a pressão na saída, se  $p_e < p_{e3}$  o fluxo de massa não é alterado, condição esta chamada de escoamento bloqueado.



## 5.4 Bocais

- O que ocorre se a pressão de saída for reduzida a um valor abaixo de  $p_{e3}$ ? Com relação à parte convergente do bocal, nenhuma mudança é observada; na parte divergente, o escoamento inicia-se supersônico. Contudo, como uma única solução isentrópica é possível, ocorrerá uma onda de choque normal.

# 5.4 Bocais



## 5.4 Bocais

- A posição da onda de choque é determinada pela necessidade de que o aumento de pressão provocado pela onda de choque, associado ao aumento proveniente do escoamento subsônico na parte divergente do bocal seja igual à pressão de saída do bocal.

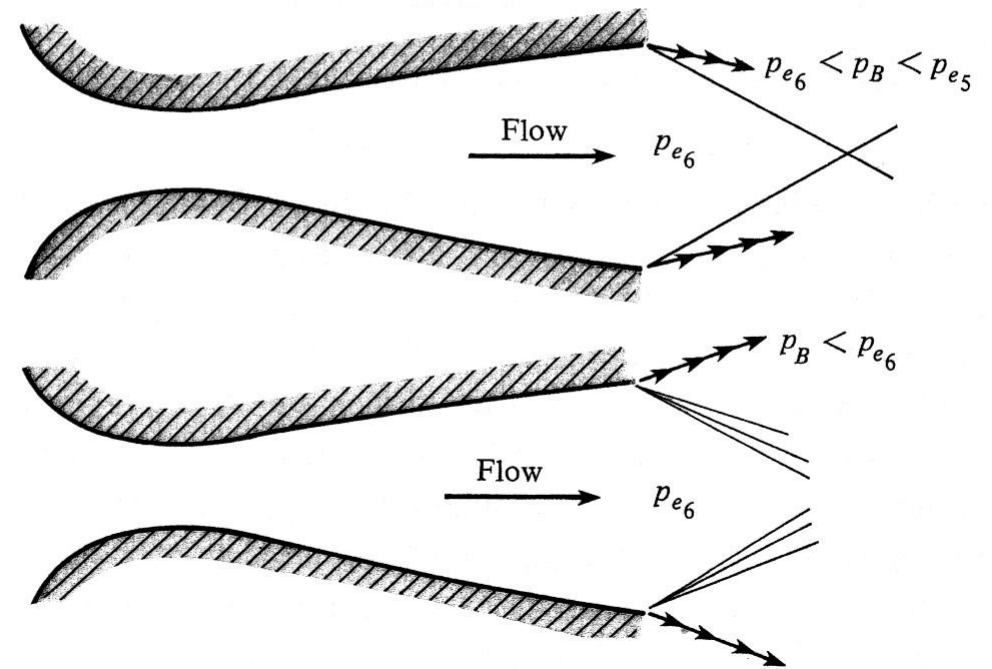
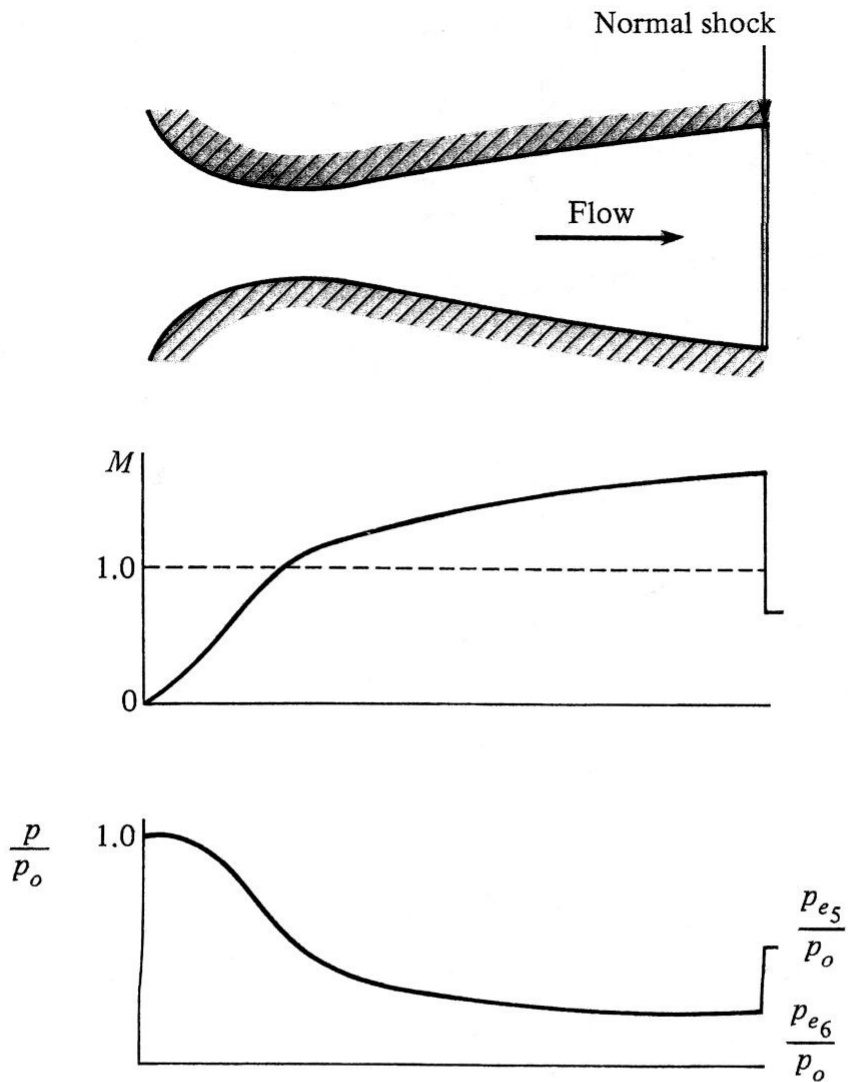
## 5.4 Bocais

- À medida que a pressão de saída é reduzida, o choque se move em direção à saída do bocal.
- Para um determinado valor de pressão,  $p_{e5}$ , o choque ocorrerá exatamente na saída do bocal. A pressão que representa a solução isentrópica, contudo, é um valor  $p_{e6}$ , inferior a  $p_{e5}$ .

## 5.4 Bocais

- Se a pressão de saída (ambiente) for reduzida, de modo que fique entre os valores de  $p_{e5}$  e  $p_{e6}$ , tem-se um bocal superexpandido, com a formação de ondas de choque oblíquas, após a saída do bocal.
- Se a pressão ambiente for reduzida abaixo de  $p_{e6}$ , então o bocal é dito subexpandido, havendo a formação de ondas de expansão após a saída do bocal.

# 5.4 Bocais

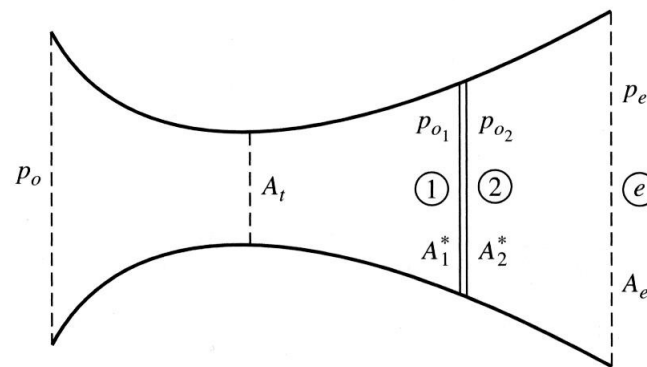


## 5.4 Bocais

- A localização da onda de choque normal no interior de um bocal pode ser feita de duas formas: método iterativo ou método direto (porém, mais elaborado).
- No método iterativo, assume-se o valor para a razão de áreas ( $A/A_t$ ) para o qual o choque ocorre. Obtém-se, então, o valor de  $(p_e/p_0)$ , verificando se o valor obtido é compatível com o valor especificado; se não for, uma nova posição do choque deve ser considerada.

## 5.4 Bocais

- No método direto, deve-se seguir o procedimento:
  - Considere que o gás em repouso apresente uma pressão igual a  $p_0$  no reservatório (pressão de estagnação) e que a pressão na saída do bocal seja  $p_e$ .



**Figure 5.19** | Conditions associated with a normal shock standing inside a nozzle.



## 5.4 Bocais

- Para um escoamento bloqueado:

$$\dot{m} = \frac{p_0 A^*}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{\gamma}{R} \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}}$$

- Como o fluxo de massa e a temperatura de estagnação são constantes através de uma onda de choque:

$$p_0 A^* = \text{const}$$

$$p_{01} A_1^* = p_{02} A_2^* = p_{0e} A_e^*$$

## 5.4 Bocais

– Deste modo, obtém-se:

$$\frac{p_e A_e}{p_{0e} A_e^*} = \frac{p_e A_e}{p_{01} A_1^*} = \left( \frac{p_e}{p_{01}} \right) \left( \frac{A_e}{A_1^*} \right)$$

– Das formulações alternativas para a equação da energia tem-se:

$$\frac{p_e}{p_{0e}} = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2 \right)^{-\gamma/(\gamma-1)}$$

## 5.4 Bocais

– Da relação entre áreas:

$$\frac{A_e}{A_e^*} = \frac{1}{M_e} \left[ \left( \frac{2}{\gamma+1} \right) \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 \right) \right]^{(\gamma+1)/[2(\gamma-1)]}$$

– Combinando-se as duas últimas expressões:

$$M_e^2 = -\frac{1}{\gamma-1} + \sqrt{\frac{1}{(\gamma-1)^2} + \left( \frac{2}{\gamma-1} \right) \left( \frac{2}{\gamma-1} \right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} \left( \frac{p_{0e} A_e^*}{p_e A_e} \right)^2}$$

## 5.4 Bocais

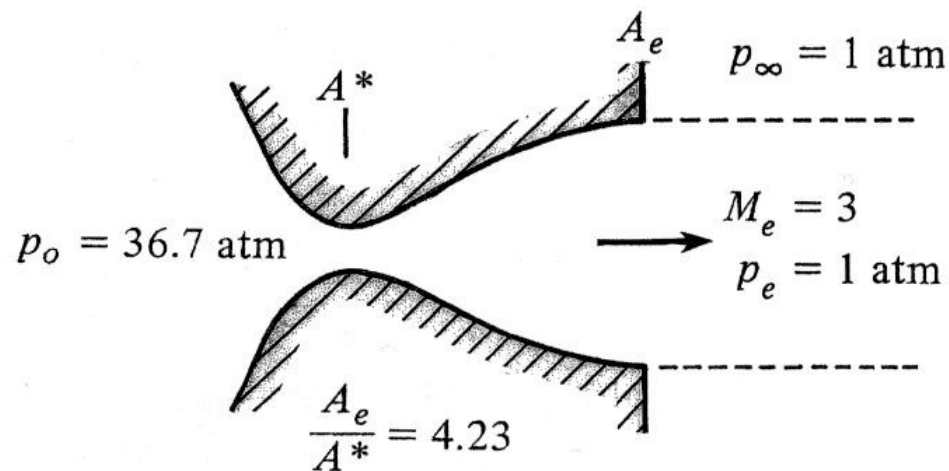
- Passos seguintes:
  - Obter  $p_{0e}/p_e$  a partir do número de Mach  $M_e$ .
  - Calcular a razão entre as pressões totais (de estagnação) através do choque:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_{0e}}{p_{01}} = \frac{p_{0e}}{p_e} \frac{p_e}{p_{01}}$$

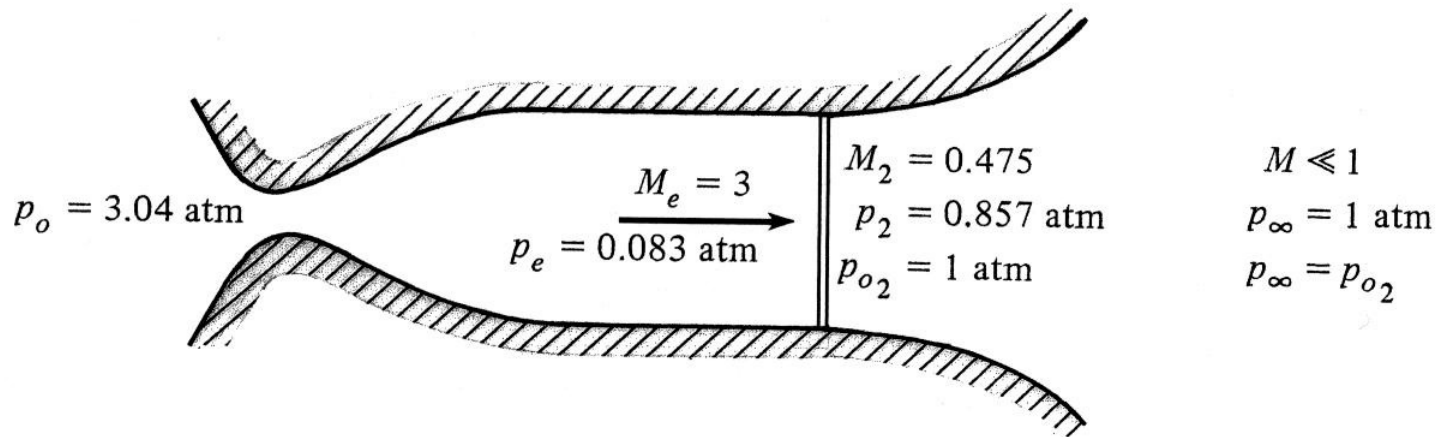
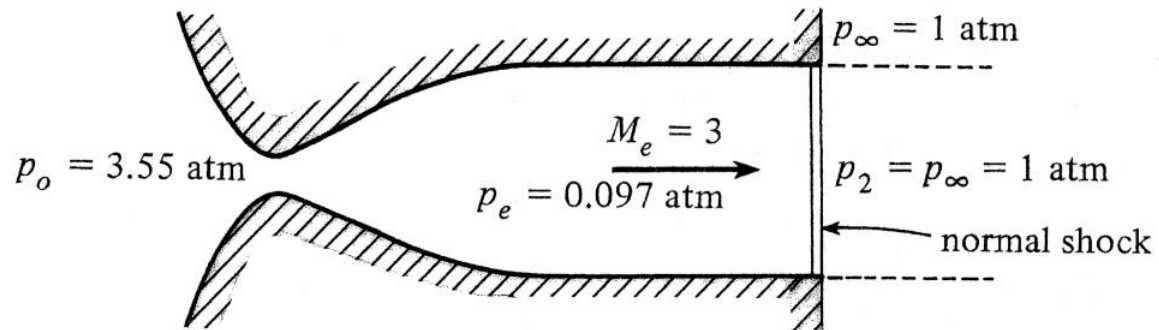
- A partir de  $p_{02}/p_{01}$ , obter o valor de  $M_1$ .
- Com o valor de  $M_1$ , calcular  $A_1/A_1^*$ .
- Uma vez que  $A_1/A_1^* = A_1/A_t$ , pode-se obter a localização da onda de choque no interior do bocal.

## 5.5 Difusores

- Considere a situação em que se deseja construir um túnel de vento supersônico, que deva operar a Mach 3 e cuja pressão de saída seja igual à atmosférica. Quais são as soluções possíveis?



# 5.5 Difusores



## 5.5 Difusores

- Função dos difusores: desacelerar um escoamento com a menor perda de pressão total (ou de estagnação) possível.
- Condição ideal: comprimir o escoamento isentropicamente.
- Na prática, é extremamente difícil prevenir a ocorrência de choques oblíquos no interior de dutos.

## 5.5 Difusores

- Além dos choques, existem os efeitos de atrito e de trocas térmicas, que tornam o projeto de um difusor isentrópico perfeito fisicamente impossível.
- Existe teoricamente, contudo, a possibilidade de reduzir as perdas de pressão através de uma sequência de choques oblíquos, com um choque normal ao final ao invés de um único choque normal.



# 5.5 Difusores

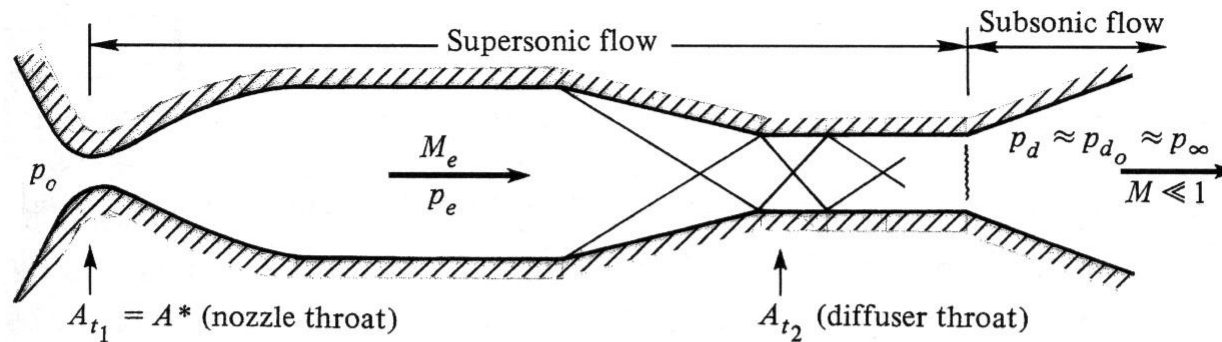


Figure 5.23 | Nozzle with a conventional supersonic diffuser.

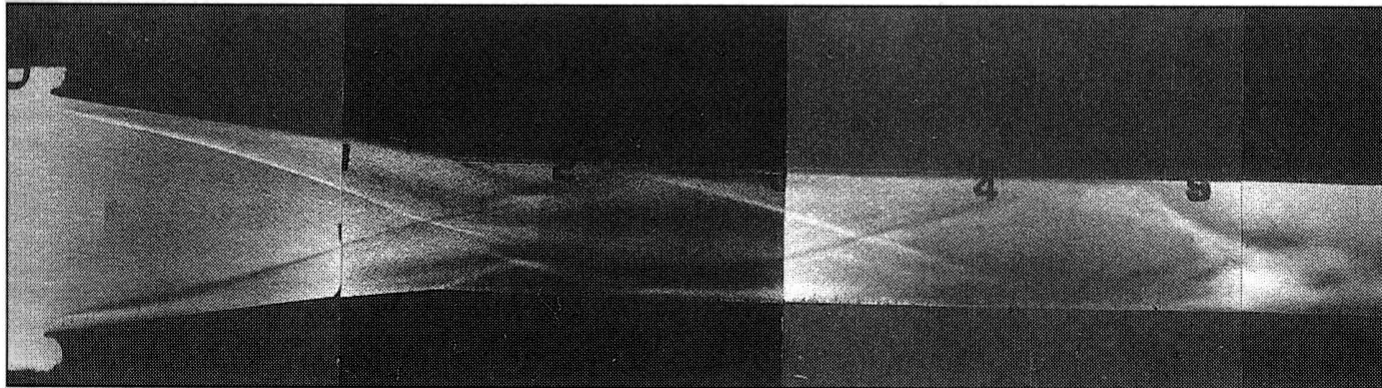


Figure 5.24 | Oblique shock pattern in a two-dimensional supersonic diffuser. The flow is from left to right, and the inlet Mach number is 5.

## 5.5 Difusores

- A redução das perdas com relação à pressão total, no entanto, é menor que a esperada devido à interação existente entre as ondas de choque e a camada limite viscosa nas paredes do difusor, que cria novas perdas de pressão.
- Assim, o potencial total de um difusor via choques oblíquos nunca é plenamente atingido.

## 5.5 Difusores

- Existem diversos modelos para se obter a eficiência de difusores. No caso de um túnel de vento supersônico, a definição mais usual compara a razão da pressão total real no difusor ( $p_{do} / p_0$ ) com a razão da pressão total no caso de uma onda de choque normal hipotética ( $p_{02} / p_{01}$ ).

$$\eta_D = \frac{(p_{do} / p_0)_{real}}{(p_{02} / p_{01})_{choque\ normal\ em\ M_e}}$$

## 5.5 Difusores

- Se  $\eta_D = 1$ , o difusor real possui desempenho semelhante ao de um difusor de choque normal. Para escoamentos supersônicos com número de Mach baixo, difusores apresentam desempenho ligeiramente superior ao de ondas de choque normais ( $\eta_D > 1$ ); no caso de condições hipersônicas, a recuperação através de choques normais é a melhor condição esperada e  $\eta_D < 1$ .

## 5.5 Difusores

- Na nomenclatura de túneis de vento, a estreicção do bocal é chamada de primeira garganta e a do difusor, de segunda garganta. Devido ao aumento de entropia no difusor,  $A_{t2} > A_{t1}$ . Pode-se mostrar que:

$$\frac{A_{t2}}{A_{t1}} = \frac{p_{01}}{p_{02}}$$

## 5.5 Difusores

- Caso a área da segunda garganta seja menor que a necessária pela relação anterior, o fluxo de massa do túnel não pode ser tratado pelo difusor, que fica “bloqueado” e impede o escoamento supersônico no bocal.
- Apenas no caso de um difusor perfeito a área da segunda garganta é igual à da primeira.

# 5.5 Difusores

- Para difusores supersônicos típicos,  $\eta_D$  é muito sensível a  $A_{t2}$ .

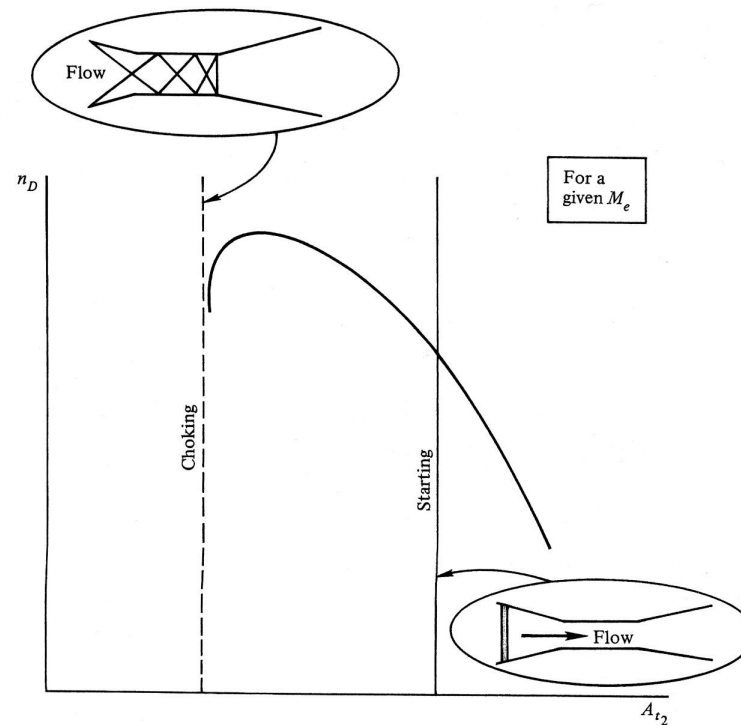


Figure 5.25 | Schematic of the variation of diffuser efficiency with second throat area.

## 5.5 Difusores

- O problema mais sério com difusores, no entanto, está relacionado à inicialização do funcionamento do equipamento. No período transiente, a configuração do escoamento é complexa e não perfeitamente entendida.
- Geralmente ocorre uma onda de choque normal, que percorre todo do duto do bocal ao difusor.



## 5.5 Difusores

- Quando a onda de choque atinge a entrada do difusor, a garganta do mesmo deve ser suficientemente grande para que o fluxo de massa atravesse o difusor sem problemas.
- A área da garganta, nesse momento, contudo, deve ser maior que o valor que garante o máximo desempenho do difusor.

## 5.5 Difusores

- Há a possibilidade de construção de difusores com área de garganta variável, mas são normalmente complexos e de elevado custo.
- As discussões apresentadas para túneis de vento podem ser estendidas para tomadas e saída de ar de motores a jato.

## 5.5 Difusores

- Ressalta-se que o escoamento real em difusores é uma interação complexa entre ondas de choque e camadas-limite que ainda não é completamente entendida.
- Um grande número de parâmetros deve ser considerado para o projeto de difusores, de modo que o mesmo se baseia em dados empíricos e inspiração.

## 5.6 Reflexão de onda a partir de um contorno livre

- Considere um jato de exaustão de um bocal em um ambiente atmosférico. Nesta situação haverá uma interface entre o jato e o ar quiescente ao redor.

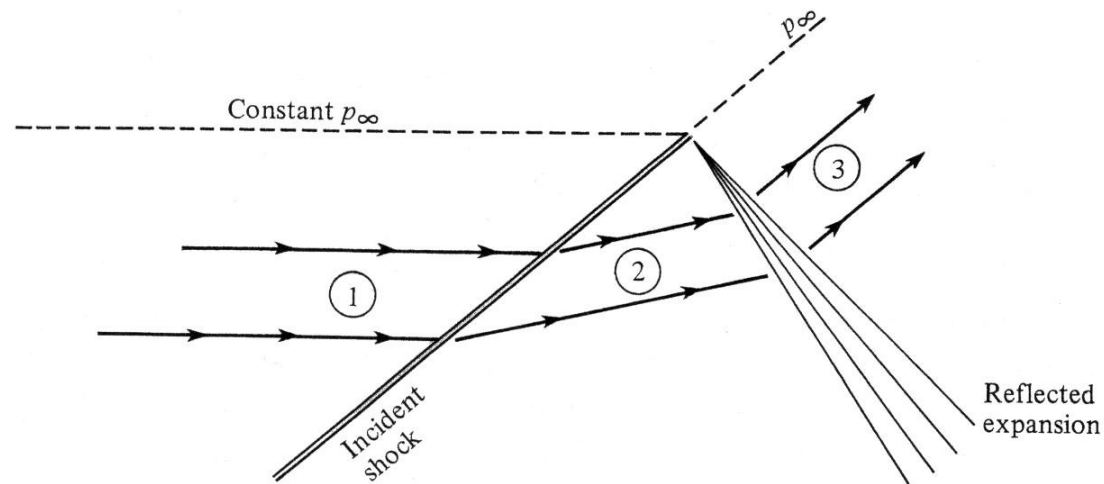
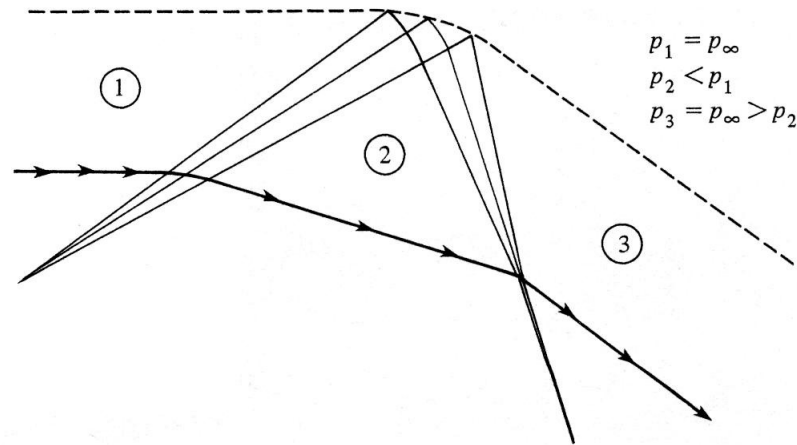


Figure 5.26 | Shock wave incident on a constant-pressure boundary.

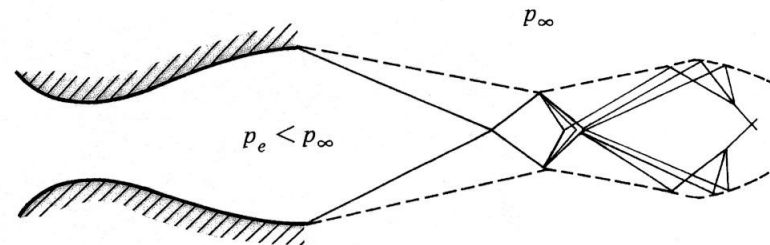
## 5.6 Reflexão de onda a partir de um contorno livre

- A variação da pressão através do contorno deve ser preservada, ainda que não se tenha uma fronteira sólida.
- Por não se constituir em uma fronteira sólida, tanto o tamanho quanto a direção da fronteira podem ser alterados por agentes externos, como uma onda de choque oblíqua.

# 5.6 Reflexão de onda a partir de um contorno livre



**Figure 5.27** | Reflection of an expansion wave incident on a constant-pressure boundary.



**Figure 5.28** | Schematic of the diamond wave pattern in the exhaust from a supersonic nozzle.

## 5.6 Reflexão de onda a partir de um contorno livre

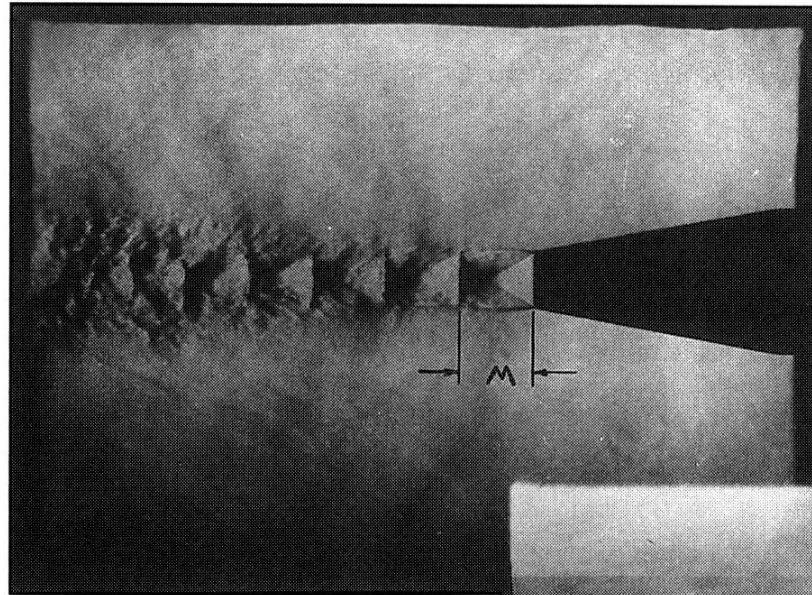
- Como resultado do capítulo 4, tem-se que:
- Ondas incidentes sobre um contorno sólido são refletidas do mesmo modo, ou seja, uma onda de compressão é refletida como onda de compressão e uma onda de expansão é mantida como onda de expansão.

## 5.6 Reflexão de onda a partir de um contorno livre

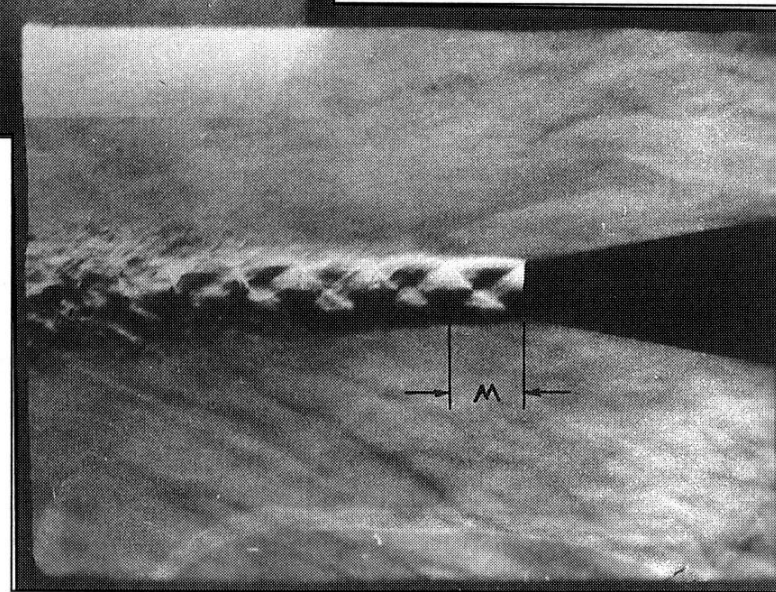
- Como consequência do estudo de contornos livres, tem-se que:
- Ondas incidentes sobre um contorno livre são refletidas de modo oposto, ou seja, uma onda de compressão é refletida como onda de expansão e uma onda de expansão, como de compressão.



## 5.6 Reflexão de onda a partir de um contorno livre

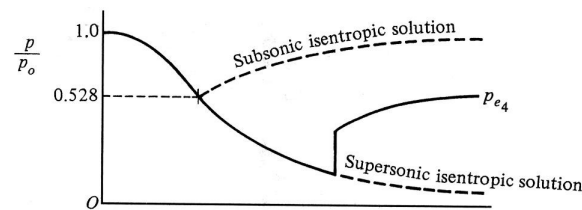
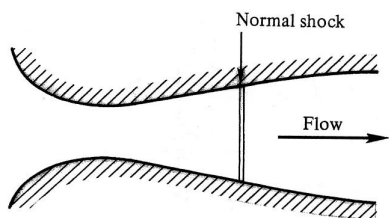


Padrão de onda em diamante de um jato livre axissimétrico (similar à exaustão de um motor-foguete).  $M$  é o comprimento de onda do primeiro diamante.



# 5.7 Escoamentos viscosos: interação entre camadas-limite e ondas de choque

- O modelo invíscido unidimensional prevê que, para uma pressão de saída de um bocal menor que a pressão ambiente haja a formação de uma onda de choque normal no interior do bocal, conforme visto anteriormente.

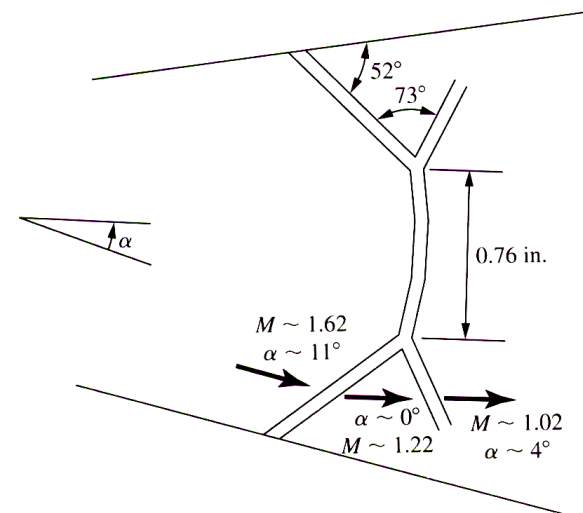
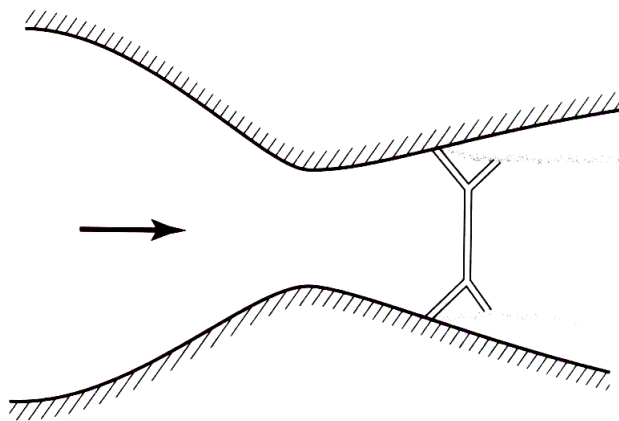


## **5.7 escoamentos viscosos: interação entre camadas-limite e ondas de choque**

- Na realidade, existe uma camada-limite que se desenvolve ao longo das paredes do bocal. No caso de uma onda de choque, existe a interação entre o choque e a camada-limite, resultando em uma configuração de choque tipo lambda.

# 5.7 escoamentos viscosos: interação entre camadas-limite e ondas de choque

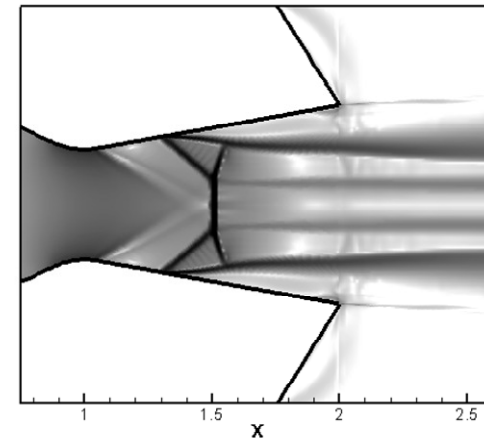
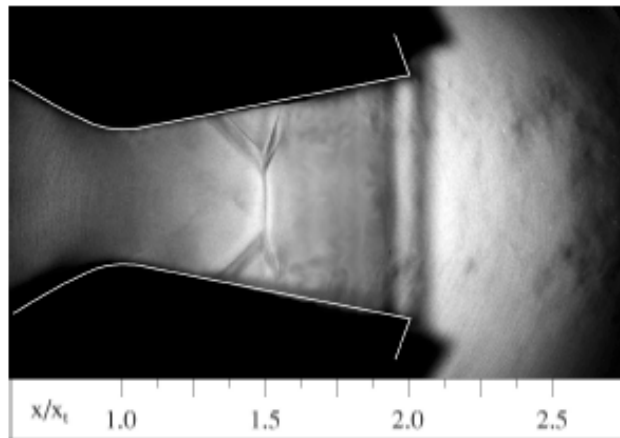
- O núcleo do escoamento se separa da parede e movimentada-se praticamente com área constante.



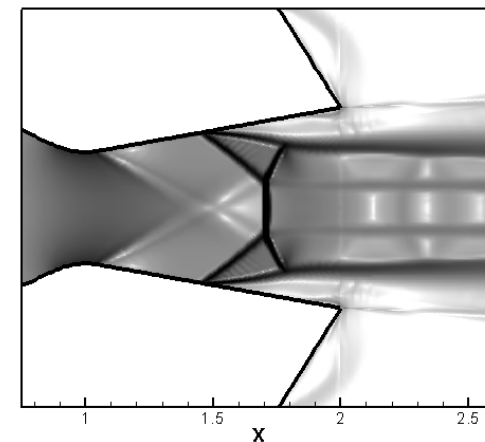
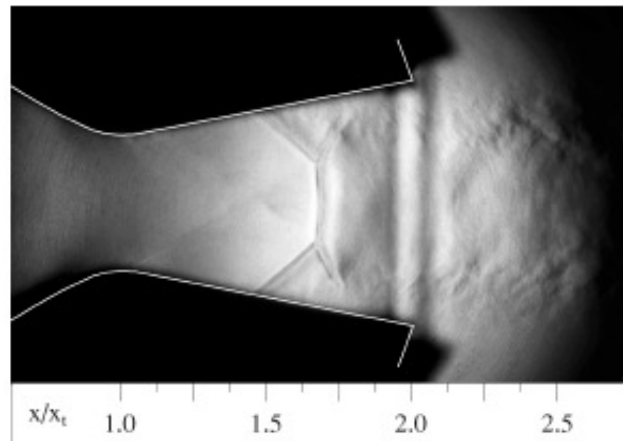
Razão entre  
pressões de 0,417

# 5.7 Escoamentos viscosos: interação entre camadas-limite e ondas de choque

Razão entre  
pressões: 0,5

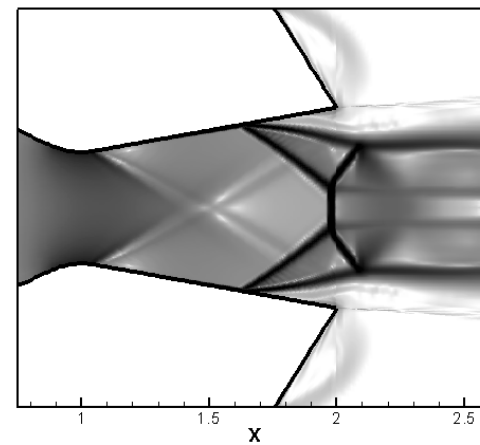
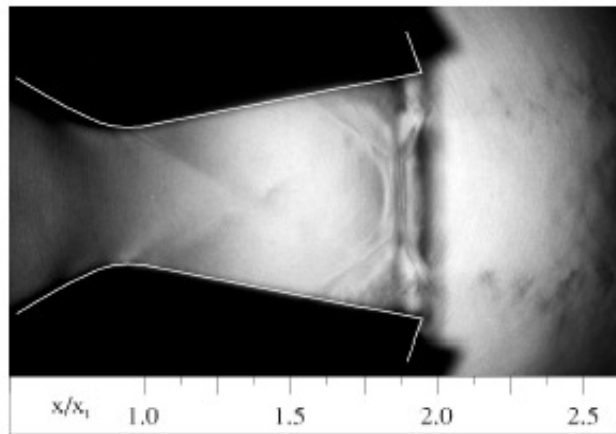


Razão entre  
pressões: 0,417

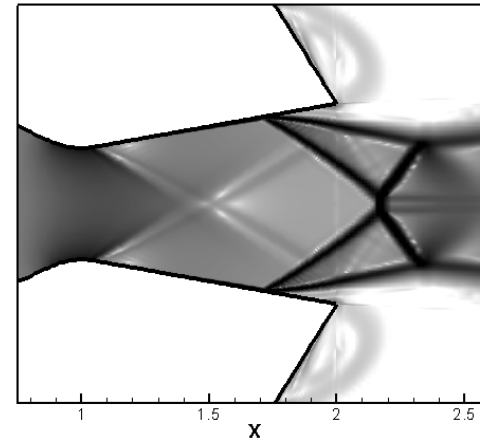
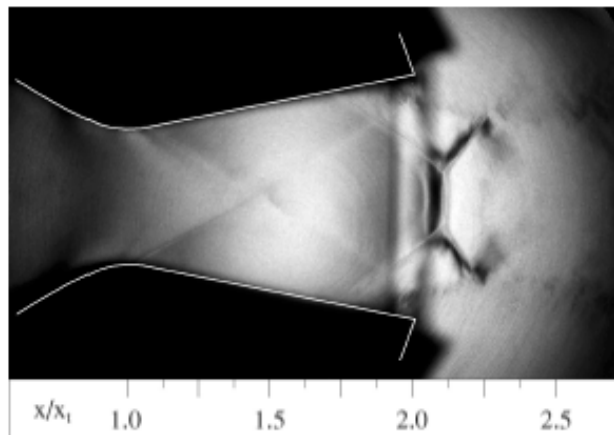


# 5.7 Escoamentos viscosos: interação entre camadas-limite e ondas de choque

Razão entre  
pressões: 0,333



Razão entre  
pressões: 0,294



## 5.8 Os primeiros experimentos definitivamente supersônicos

- Em 1882 o engenheiro sueco Carl G. P. de Laval construiu sua primeira turbina a vapor usando bocais convencionais (convergentes), de modo que a razão entre as pressões de saída e de entrada era próxima a 0,5 – uma vez que o escoamento se encontrava bloqueado.

## **5.8 Os primeiros experimentos definitivamente supersônicos**

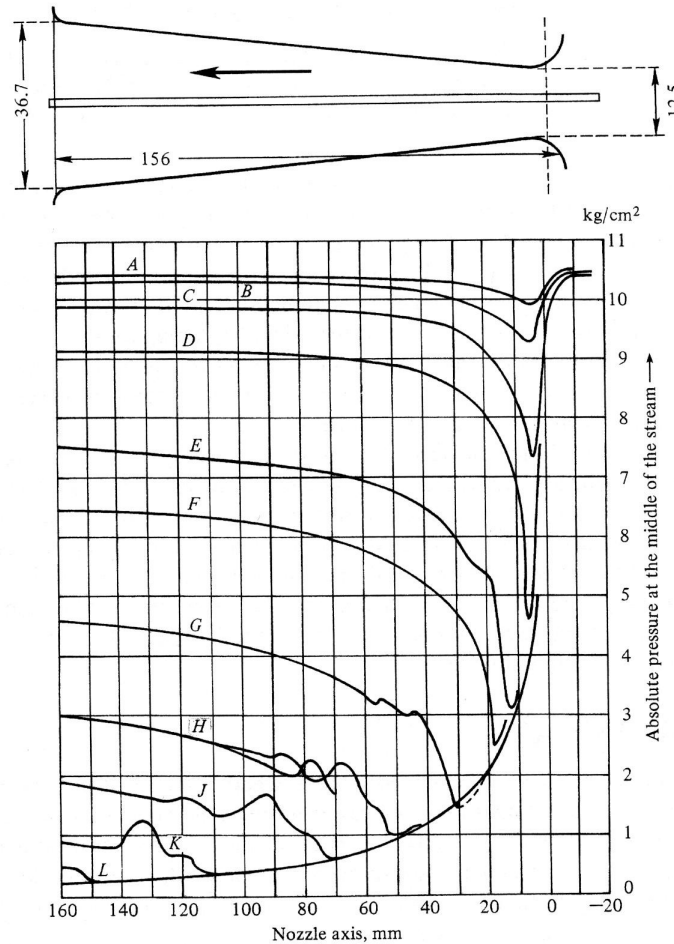
- Em 1888 foi produzido por de Laval o primeiro bocal convergente-divergente, garantindo uma velocidade acima de 30.000 rpm. Seu invento foi apresentado no “World Columbian Exposition” em Chicago em 1893.
- Nota-se, contudo, que nem de Laval nem outros engenheiros contemporâneos estavam certos de que o escoamento obtido era supersônico.



## 5.8 Os primeiros experimentos definitivamente supersônicos

- Coube, assim, ao cientista húngaro Stodola, no início do séc. XX, os primeiros estudos comprobatórios de escoamentos supersônicos. Para tanto, Stodola construiu um bocal convergente-divergente e estudou o escoamento variando a pressão na saída do mesmo.

# 5.8 Os primeiros experimentos definitivamente supersônicos



**Figure 5.30** | Stodola's original supersonic nozzle data, 1903. The curves are pressure distributions for different backpressures.