

TM-045 Fundamentos de Aerodinâmica

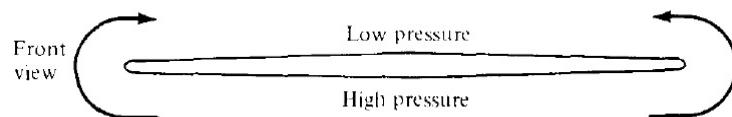
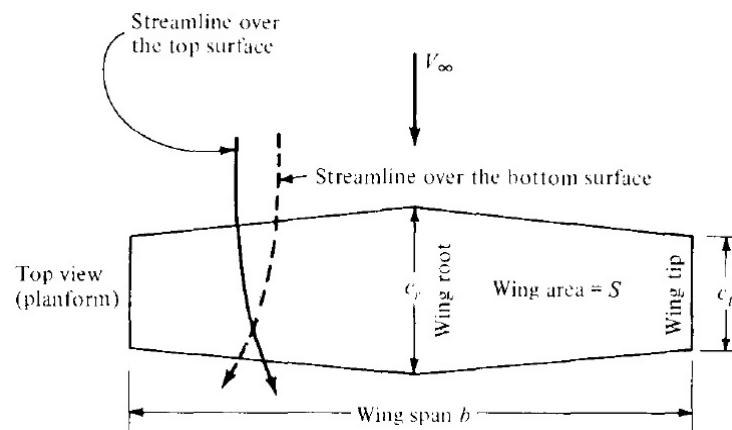
**Cap. 05: Escoamentos
incompressíveis sobre asas finitas**

Introdução: *downwash* e arrasto induzido

- Uma asa finita é um corpo tridimensional, de modo que o escoamento sobre a mesma difere em alguns aspectos do escoamento sobre um aerofólio, mesmo que os perfis de ambos sejam idênticos.
- No caso de uma asa finita, existe um escoamento na direção lateral, o que não ocorre para escoamentos sobre aerofólios.

Introdução: *downwash* e arrasto induzido

- O mecanismo de geração de sustentação em uma asa é baseado na existência de uma alta pressão no intradorso e de baixa pressão no extradorso.



Introdução: *downwash* e arrasto induzido

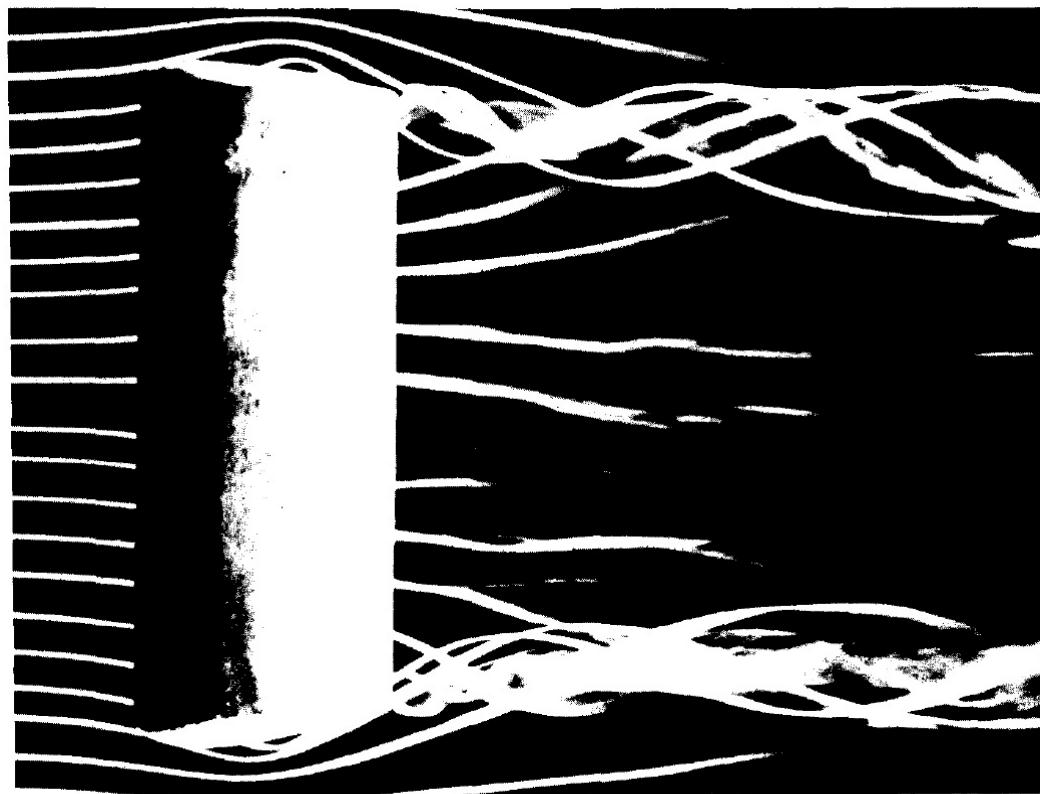
- Além da sustentação, o desbalanço entre as pressões no intra e no extradorso cria condições para que o escoamento se curve junto às bordas da asa. Assim, as linhas de corrente no extradorso tendem a se curvar em direção à fuselagem do avião; já no intradorso, o efeito é o contrário, com as linhas de corrente se afastando da fuselagem.

Introdução: *downwash* e arrasto induzido

- A tendência do escoamento em rotacionar ao redor das bordas das asas gera outro efeito importante na aerodinâmica de asas. Esse escoamento gera uma esteira de vórtices a partir das pontas das asas.
- Os vórtices, por sua vez, induzem a formação de uma pequena componente de velocidade, vertical e para baixo, sobre a asa, chamada de *downwash* ou velocidade normal induzida.

Introdução: *downwash* e arrasto induzido

- Vórtices de ponta de asa



Introdução: *downwash* e arrasto induzido

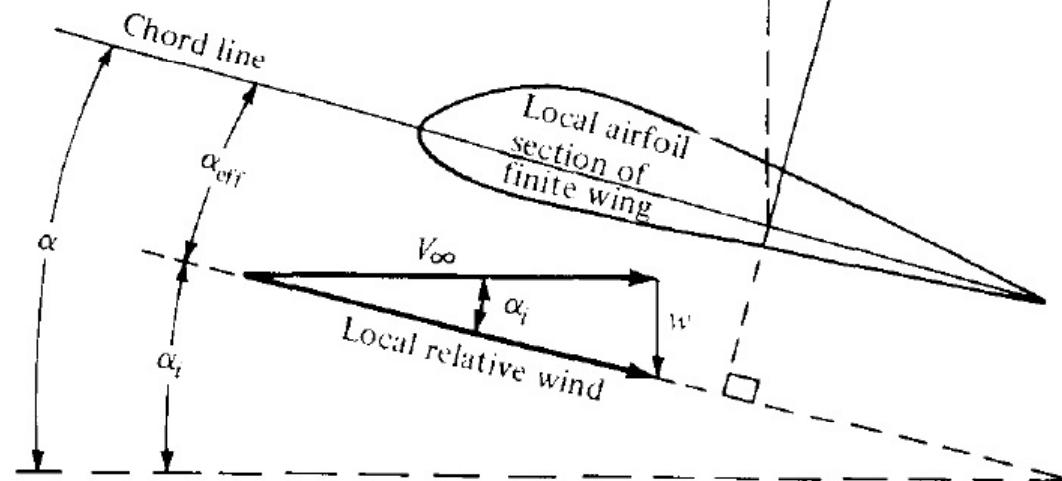
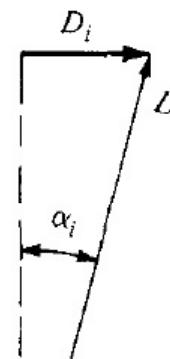
- Efeito da *downwash* sobre o escoamento local

α – Geometric angle of attack

α_i – induced angle of attack

α_{eff} – effective angle of attack

$$\alpha_{\text{eff}} = \alpha - \alpha_i$$



Introdução: *downwash* e arrasto induzido

- No caso de uma asa finita, o ângulo α , formado entre a corda e o vetor velocidade V_∞ é definido como ângulo geométrico de ataque.
- Uma vez que existe a velocidade normal induzida (*downwash*), o vento relativo local apresenta uma direção inclinada, abaixo da direção de V_∞ , formando um ângulo α_i com a mesma, chamado de ângulo de ataque induzido.

Introdução: *downwash* e arrasto induzido

- A presença da velocidade normal induzida (*downwash*) sobre a asa possui dois efeitos principais sobre a aerodinâmica da mesma:
 - O ângulo real de ataque é o que existe entre a corda e o vento relativo local, sendo denominado de ângulo de ataque efetivo (α_{eff}) e apresentando valor inferior ao ângulo de ataque geométrico α :

$$\alpha_{eff} = \alpha - \alpha_i$$

Introdução: *downwash* e arrasto induzido

- O vetor sustentação local é perpendicular à direção do vento relativo local e, por isso, é inclinado em relação à vertical por um ângulo α_i . Desse modo, existe uma componente do vetor sustentação local na direção de V_∞ , criando uma força de arrasto devido à velocidade normal induzida (*downwash*); tal arrasto é denominado arrasto induzido, sendo simbolizado por D_i .

Introdução: *downwash* e arrasto induzido

- Nota-se, assim, que a presença da velocidade normal induzida (*downwash*) sobre uma asa finita reduz o ângulo de ataque real, além de criar uma componente de arrasto (o arrasto induzido, D_i). Verifica-se, desse modo, que o paradoxo de D'Alembert não ocorre para asas finitas.

Introdução: *downwash* e arrasto induzido

- Existem, contudo, outras formas de se explicar a geração do arrasto induzido.
 - Tendo-se como base o escoamento tridimensional induzido pelos vórtices das pontas de asas, observa-se uma modificação do campo de pressões sobre a asa finita, que modo que ocorre um desbalanço entre as pressões na direção de V_∞ , provocando o arrasto induzido.

Introdução: *downwash* e arrasto induzido

- Os vórtices de ponta de asa apresentam elevada quantidade de energia cinética translacional e rotacional. Tal energia é fornecida pelos motores da aeronave e, como não possui nenhuma serventia, é essencialmente perdida. Desse modo, há a necessidade de se gerar uma quantidade extra de energia por parte do motor para superar essa energia perdida, composta essencialmente pelo arrasto induzido.

Introdução: *downwash* e arrasto induzido

- O arrasto total sobre uma asa finita subsônica é composta pela soma do arrasto induzido, D_i , com o arrasto de superfície, D_f , e o arrasto de pressão, D_p , este último devido à separação do escoamento (formação de esteira viscosa).
- Essas duas últimas parcelas se devem aos efeitos viscosos, sendo conhecidos conjuntamente como arrasto de perfil, c_d .

Introdução: *downwash* e arrasto induzido

- Para ângulos de ataque moderados, o coeficiente de arrasto de perfil de uma asa finita é essencialmente o mesmo obtido para aerofólios. Assim, definindo-se o coeficiente de arrasto de perfil como

$$c_d = \frac{D_f + D_p}{q_\infty S}$$

Introdução: *downwash* e arrasto induzido

- E o arrasto induzido como

$$C_{D,i} = \frac{D_i}{q_\infty S}$$

- Tem-se que o coeficiente de arrasto total sobre uma asa finita, C_D , é dado por

$$C_D = c_d + C_{D,i}$$

Introdução: *downwash* e arrasto induzido

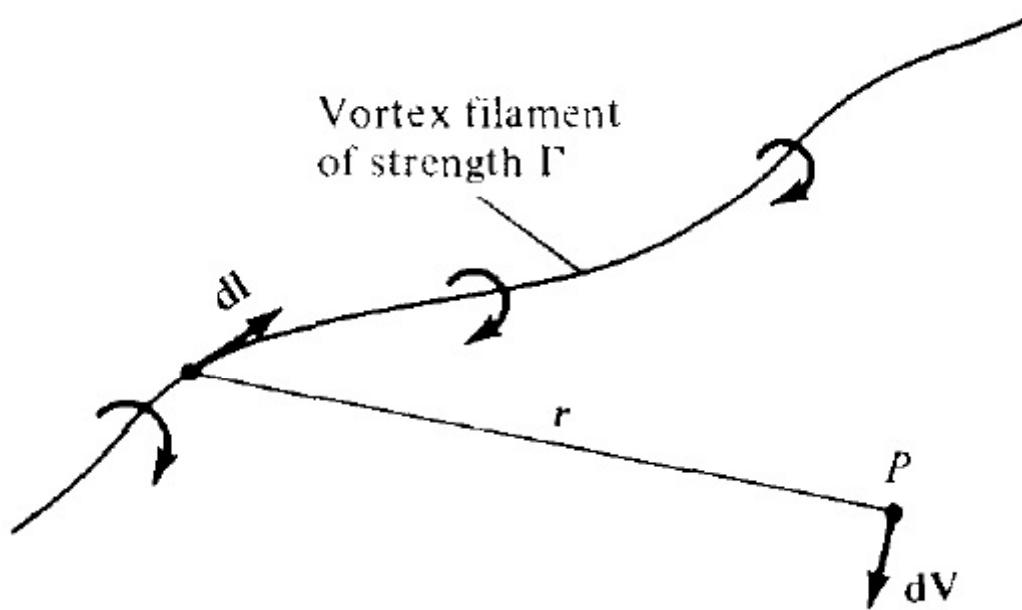
- Os valores de c_d são normalmente obtidos a partir de dados experimentais, enquanto para $C_{D,i}$ emprega-se a teoria de asas finitas, apresentada neste capítulo.

Filamento de vórtices, Lei de Biot-Savart e teoremas de Helmholtz

- Para estabelecer uma teoria aerodinâmica para asas finitas, devem ser introduzidas algumas ferramentas aerodinâmicas adicionais.
- Inicialmente, deve-se estender o conceito de filamento de vórtices, que não necessariamente deve apresentar apenas um perfil reto. De um modo geral, um filamento de vórtices pode ser curvo.

Filamento de vórtices, Lei de Biot-Savart e teoremas de Helmholtz

- Filamento de vórtices:



Filamento de vórtices, Lei de Biot-Savart e teoremas de Helmholtz

- O filamento de vórtices induz um campo de escoamento no espaço ao redor. Se a circulação é tomada sobre um caminho que englobe o filamento, um valor constante Γ é obtido. Assim, a intensidade do filamento de vórtices é definido como Γ .

Filamento de vórtices, Lei de Biot-Savart e teoremas de Helmholtz

- Considerando-se um segmento do filamento dl , sendo o raio do vetor de dl para um ponto arbitrário P no espaço igual a r . O segmento dl induz uma velocidade em P igual a

$$dV = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{dl \times r}{|r|^3}$$

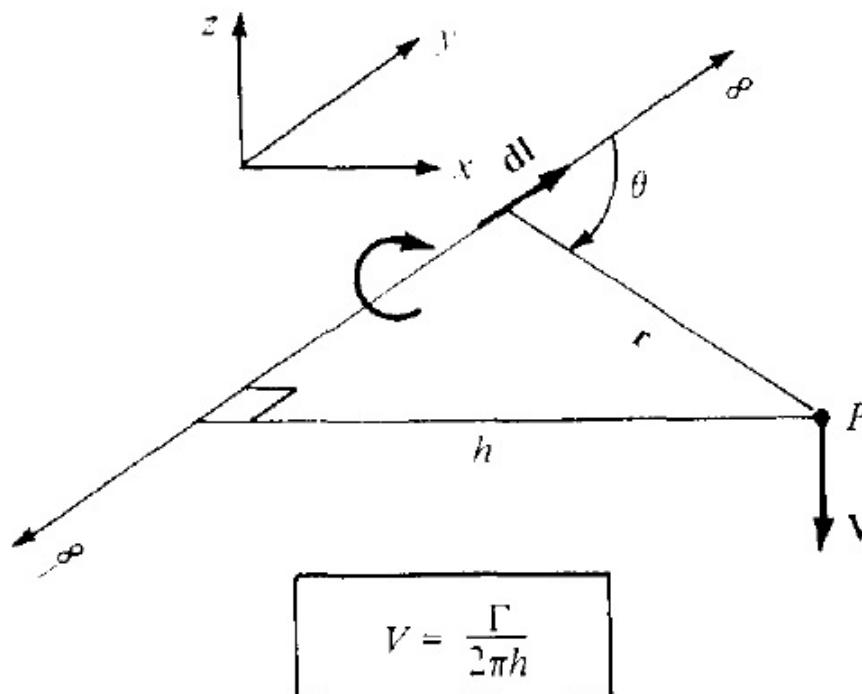
- Tal equação é conhecida como Lei de Biot-Savart, sendo uma das fundamentais relações em escoamentos inviscidos e incompressíveis.

Filamento de vórtices, Lei de Biot-Savart e teoremas de Helmholtz

- A Lei de Biot-Savart é um resultado geral da teoria potencial, que descreve tanto campos eletromagnéticos quanto escoamentos inviscidos e incompressíveis.
- Pode-se, então, aplicar a lei de Biot-Savart para um filamento de vórtices de comprimento infinito, de intensidade Γ .

Filamento de vórtices, Lei de Biot-Savart e teoremas de Helmholtz

- Velocidade induzida em um ponto P por um filamento de vórtices infinito



Filamento de vórtices, Lei de Biot-Savart e teoremas de Helmholtz

- Nesse caso, a velocidade induzida em um ponto P , devido ao segmento de vórtices orientado dl , será dado pela expressão anteriormente apresentada de modo que, a velocidade induzida em P por todo o filamento de vórtices será

$$\mathbf{V} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\mathbf{dl} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

Filamento de vórtices, Lei de Biot-Savart e teoremas de Helmholtz

- A magnitude da velocidade, por sua vez, é dada por

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\theta)}{r^2} dl$$

- Se h for a distância perpendicular do ponto P ao filamento de vórtices, então

$$r = \frac{h}{\sin(\theta)}; \quad l = \frac{h}{\tan(\theta)}; \quad dl = -\frac{h}{\sin^2(\theta)} d\theta$$

Filamento de vórtices, Lei de Biot-Savart e teoremas de Helmholtz

- Dessa forma, obtém-se

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\theta)}{r^2} dl = -\frac{\Gamma}{4\pi h} \int_{\pi}^0 \sin(\theta) d\theta$$

$$V = \frac{\Gamma}{2\pi h}$$

- Nota-se, assim, que a solução obtida é precisamente a mesma obtida para um ponto de vórtice em um escoamento bidimensional.

Filamento de vórtices, Lei de Biot-Savart e teoremas de Helmholtz

- Considerando-se, então, um filamento de vórtices semi-infinito, que se estende de um ponto A até $+\infty$. Seja P um ponto pertencente ao plano que contém A e seja perpendicular ao filamento. Então a velocidade induzida em P pelo filamento de vórtices semi-infinito será

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi h}$$

Filamento de vórtices, Lei de Biot-Savart e teoremas de Helmholtz

- Hermann von Helmholtz (matemático, físico e médico alemão) foi o primeiro a utilizar o conceito de filamentos de vórtices para a análise de escoamentos inviscidos e incompressíveis. Nesse processo, foram estabelecidos os princípios básicos do comportamento de vórtices, conhecidos como Teoremas de Helmholtz.

Filamento de vórtices, Lei de Biot-Savart e teoremas de Helmholtz

- Teoremas de Helmholtz:
 - A intensidade de um filamento de vórtices é constante ao longo de seu comprimento.
 - Um filamento de vórtices não pode se encerrar em um fluido; ele deve se estender até a fronteira do fluido (que pode ser infinita) ou formar um caminho fechado.

Filamento de vórtices, Lei de Biot-Savart e teoremas de Helmholtz

- Considere uma seção de uma asa em uma localização y_1 , na qual a corda local é c , o ângulo de ataque geométrico é α , e a seção do aerofólio tenha um formato definido. Nessa posição, a sustentação por unidade de comprimento é $L'(y_1)$.
- Em um outra seção da asa, localizada em y_2 , na qual c , α e o formato do aerofólio possam ser diferentes, a sustentação será $L'(y_2)$.

Filamento de vórtices, Lei de Biot-Savart e teoremas de Helmholtz

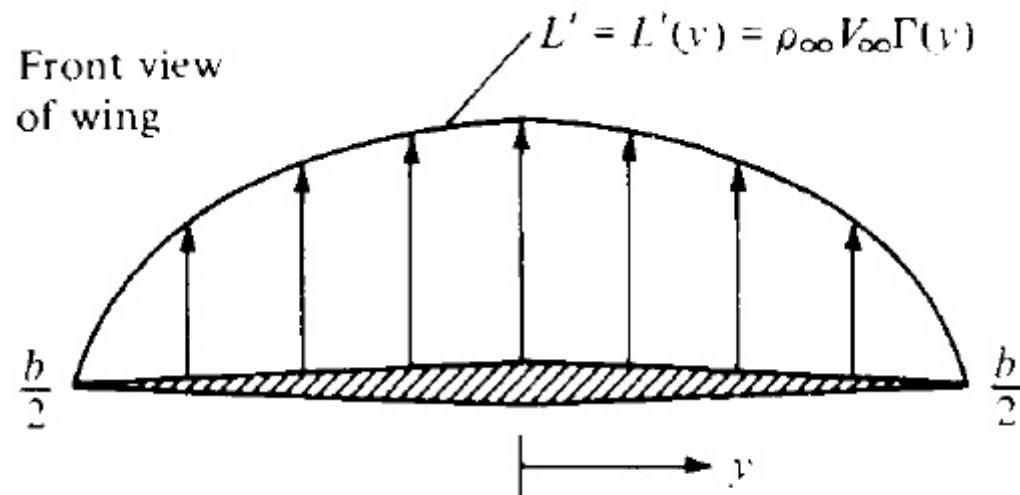
- Nota-se, assim, que haverá uma distribuição de sustentação por unidade de comprimento, dada por $L' = L'(y)$. Por consequência, a circulação também será uma função de y :

$$\Gamma(y) = \frac{L'(y)}{\rho_\infty V_\infty}$$

- Observa-se, também, que a distribuição de sustentação é nula nas pontas das asas.

Filamento de vórtices, Lei de Biot-Savart e teoremas de Helmholtz

- Distribuição da sustentação ao longo de asas finitas:



Filamento de vórtices, Lei de Biot-Savart e teoremas de Helmholtz

- A distribuição de sustentação nula nas pontas de asas ($y = -b/2$ e $y = b/2$) está relacionada à equalização entre as pressões no extradorso e no intradorso para esses pontos e, assim, nenhuma sustentação é gerada.

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- A primeira teoria prática para a previsão das propriedades aerodinâmicas de asas finitas foi desenvolvida por Ludwig Prandtl e seus colegas em Göttingen (Alemanha), entre 1911 e 1918.
- Tal teoria ainda é empregada atualmente para cálculos preliminares das características de asas finitas.

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Considera-se, inicialmente, um filamento de vórtices fixo em uma certa região do escoamento. Tal filamento recebe, então, a denominação de vórtice ligado (“*bounded vortex*”) e, pelo teorema de Kutta-Joukowski, experimenta uma força de sustentação

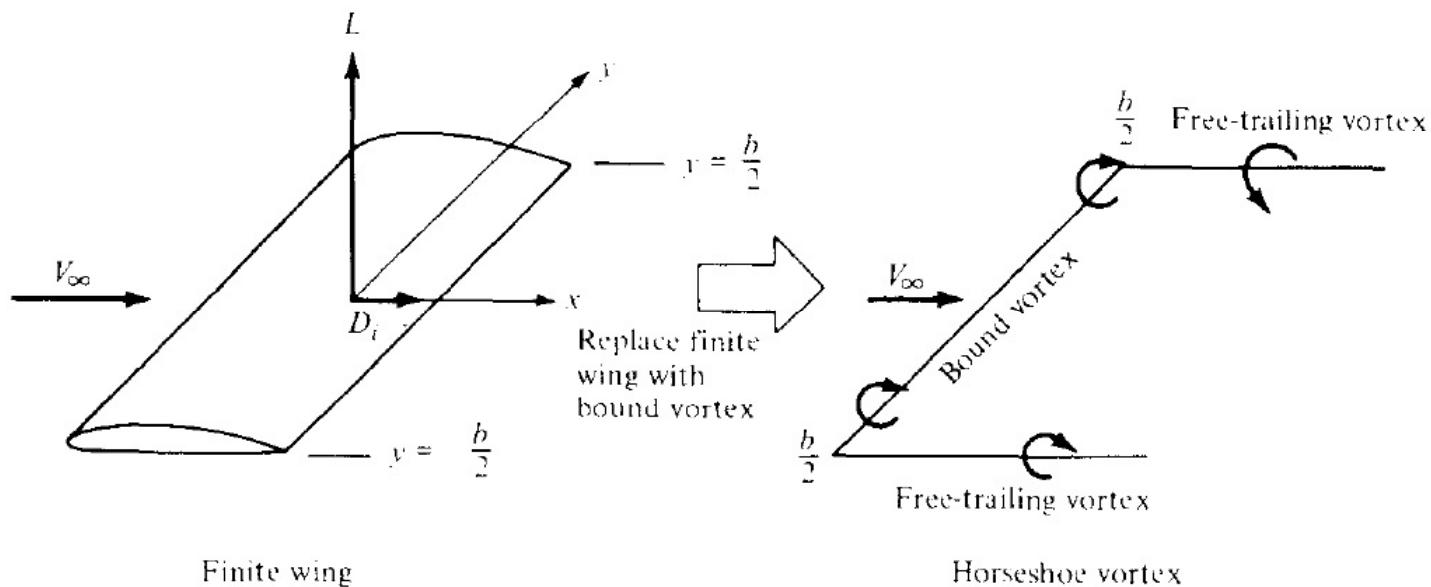
$$L' = \rho_\infty V_\infty \Gamma$$

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- O vórtice ligado se opõe aos vórtices livres, que se movem com os elementos de fluido em escoamento.
- Substitui-se, então, a asa finita de largura b por um vórtice ligado, estendendo-se de $y = -b/2$ até $y = b/2$. No entanto, pelo teorema de Helmholtz, um filamento de vórtices não pode acabar no fluido.

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Substituição de uma asa finita por um vórtice ligado (“*bounded vortex*”).

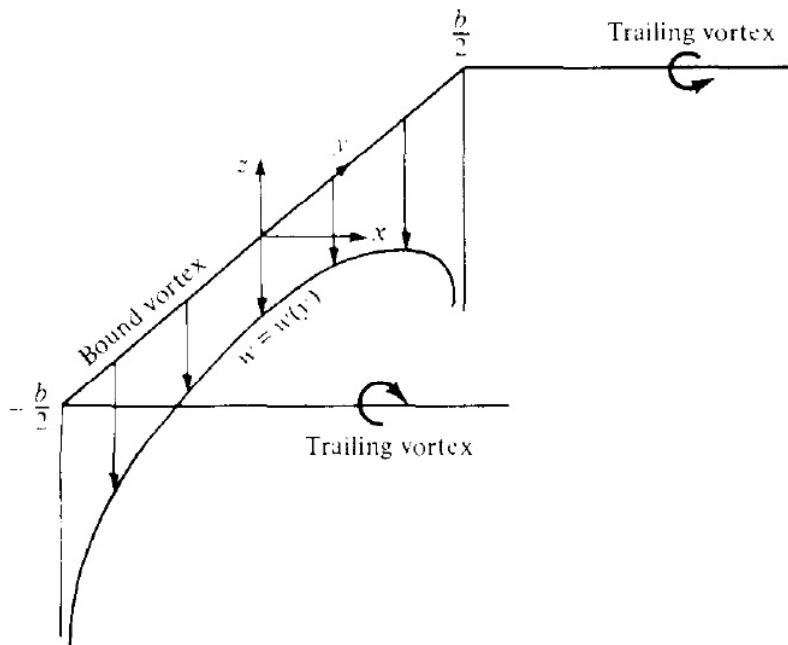


Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Desse modo, são considerados dois vórtices livres chamados de vórtices de ponta de asa (“*free-trailing vortex*”) que se estendem das pontas das asas até o infinito. Ao conjunto dado pelo vórtice ligado (*bounded vortex*) e os dois vórtices de ponta de asa (*free-trailing vortex*) dá-se o nome de vórtice em ferradura (“*horseshoe vortex*”).

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Distribuição da velocidade normal induzida (*downwash*) ao longo do eixo y de um vórtice em ferradura (*horseshoe vortex*).



Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Considere a velocidade normal induzida (*downwash*) w ao longo do vórtice ligado (*bounded vortex*) de $y = -b/2$ até $y = b/2$. Nota-se que o vórtice ligado não induz à nenhuma velocidade ao longo dele mesmo; observa-se, contudo, que os vórtices de ponta de asa contribuem na formação da velocidade normal induzida (*downwash*).

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Essa velocidade pode, então, ser avaliada por

$$w(y) = -\frac{\Gamma}{4\pi(b/2 + y)} - \frac{\Gamma}{4\pi(b/2 - y)}$$

- Na expressão anterior, a primeira parcela se refere ao vórtice de ponta de asa à esquerda (posição $y = -b/2$) e a segunda parcela ao vórtice de ponta de asa à direita ($y = b/2$).

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- A velocidade normal induzida pode então ser avaliada como

$$w(y) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \frac{b}{(b/2)^2 - y^2}$$

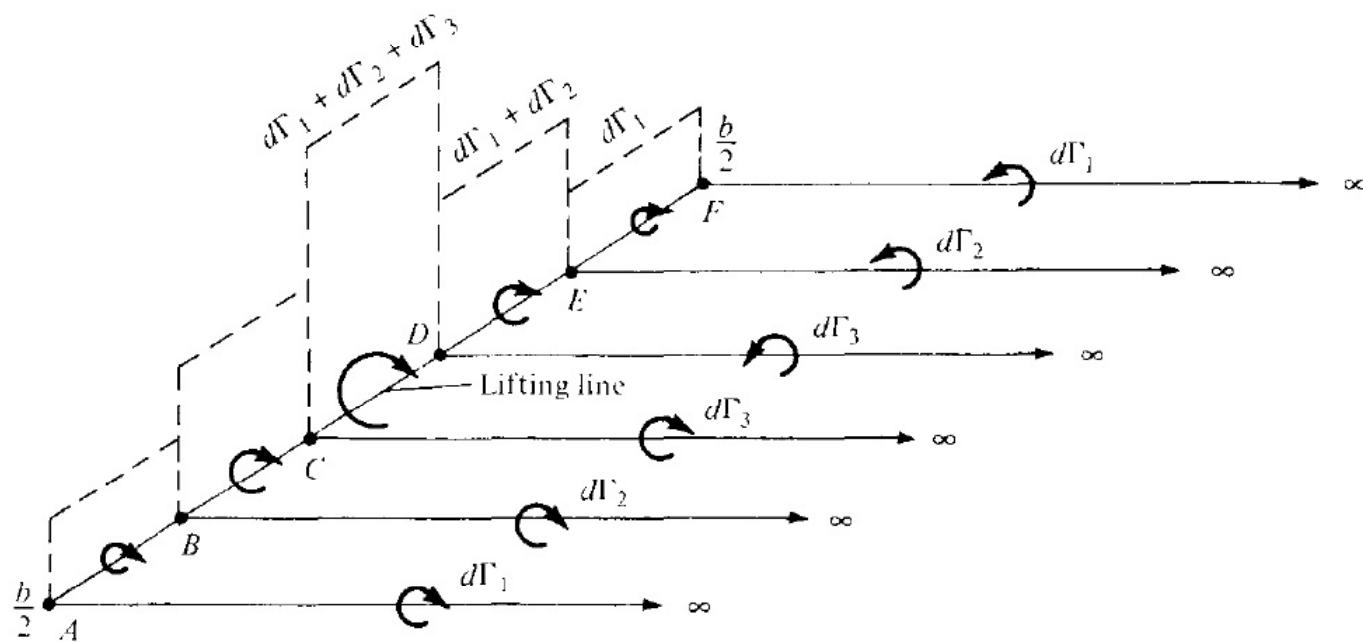
- Observa-se, contudo, que a distribuição da velocidade normal induzida (*downwash*) por um único vórtice em ferradura (*horseshoe vortex*) não reproduz realisticamente uma asa finita.

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Nota-se que, da expressão anterior, tem-se uma velocidade tendendo ao infinito junto a cada ponta de asa. Para solucionar esse problema, ao invés de representar uma asa por um único vórtice em ferradura, substitui-se a mesma por um grande número de vórtices em ferradura, cada qual com um comprimento diferente de vórtice ligado, mas de modo que todos formem uma única linha, chamada de linha sustentadora (“*lifting line*”).

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Superposição de um número finito de vórtices em ferradura ao longo de uma linha sustentadora.



Teoria da linha sustentadora de Prandtl

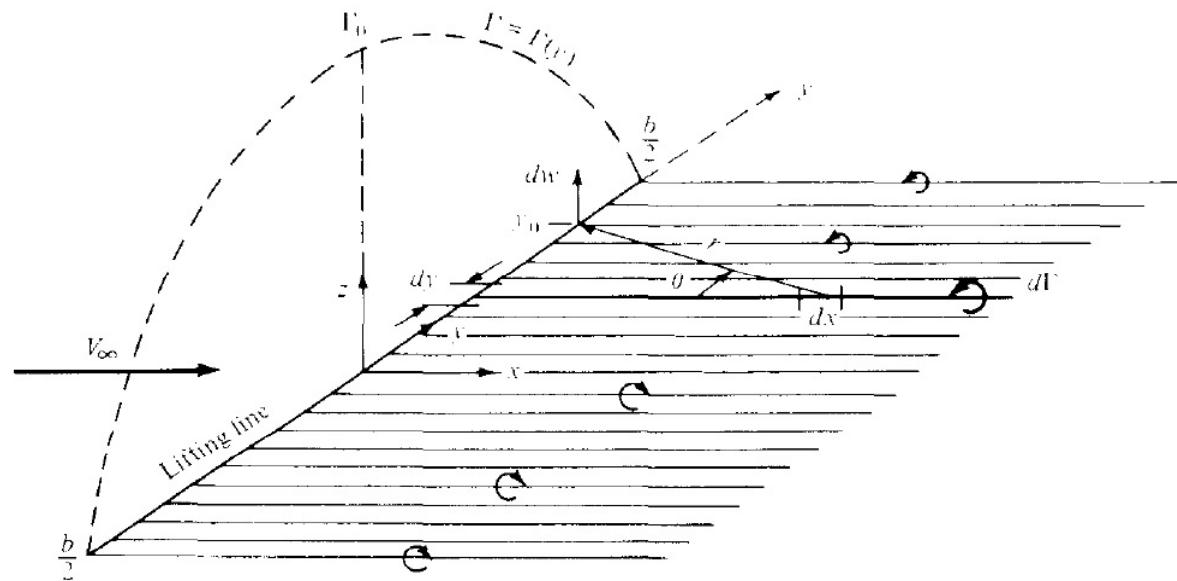
- Considera-se, então, por exemplo, um vórtice em ferradura de intensidade $d\Gamma_1$ cujo vórtice ligado se estenda do ponto A ao ponto F . Um segundo vórtice em ferradura, de intensidade $d\Gamma_2$, é sobreposto ao primeiro, mas se estendendo do ponto B ao ponto E . Pode-se, ainda sobrepor um terceiro vórtice em ferradura, de intensidade $d\Gamma_3$, que se estende de C a D .

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Observa-se, assim, que nos trechos AB e EF , a circulação será dada por $d\Gamma_1$, nos trechos BC e DE , a circulação será $d\Gamma_1 + d\Gamma_2$ e no trecho CD a circulação será $d\Gamma_1 + d\Gamma_2 + d\Gamma_3$.
- Nota-se, também, a formação de diversas linhas de vórtices livres, cuja intensidade é igual à variação de circulação observada na linha sustentadora.

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Pode-se, então, considerar o caso de um número infinito de vórtices em ferradura sobrepostos ao longo da linha sustentadora, cada qual com intensidade $d\Gamma$.



Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Nesse caso, a circulação torna-se uma distribuição contínua de $\Gamma(y)$ ao longo da linha sustentadora, com valor Γ_0 na origem. Nota-se também a formação de uma superfície contínua de vórtices livres a jusante da linha sustentadora.
- Essa superfície é paralela à direção de V_∞ e sua intensidade total é nula, pois consiste em pares de vórtices livres de mesma intensidade, mas de direções opostas.

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Considerando-se um pequeno segmento dy da linha sustentadora, localizado na posição y . A circulação nesse ponto é $\Gamma(y)$ e sua variação no segmento dy é dada por

$$d\Gamma = \left(\frac{d\Gamma}{dy} \right) dy$$

- Além disso, a intensidade do vórtice livre em y precisa ser igual à variação da circulação $d\Gamma$ ao longo da linha sustentadora.

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Considerando-se, então, um ponto y_0 sobre a linha sustentadora; nesse caso, qualquer segmento de linha de vórtice livre dx induz uma velocidade em y_0 com magnitude e direção dadas pela lei de Biot-Savart. Desse modo, a velocidade induzida dw em y_0 pela linha de vórtices semi-infinita em y é dada por

$$dw = -\frac{(d\Gamma/dy)dy}{4\pi(y_0 - y)}$$

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- A velocidade induzida total w por toda a superfície de vórtices livres avaliada em y_0 é dada por

$$w(y_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{(d\Gamma/dy)dy}{y_0 - y}$$

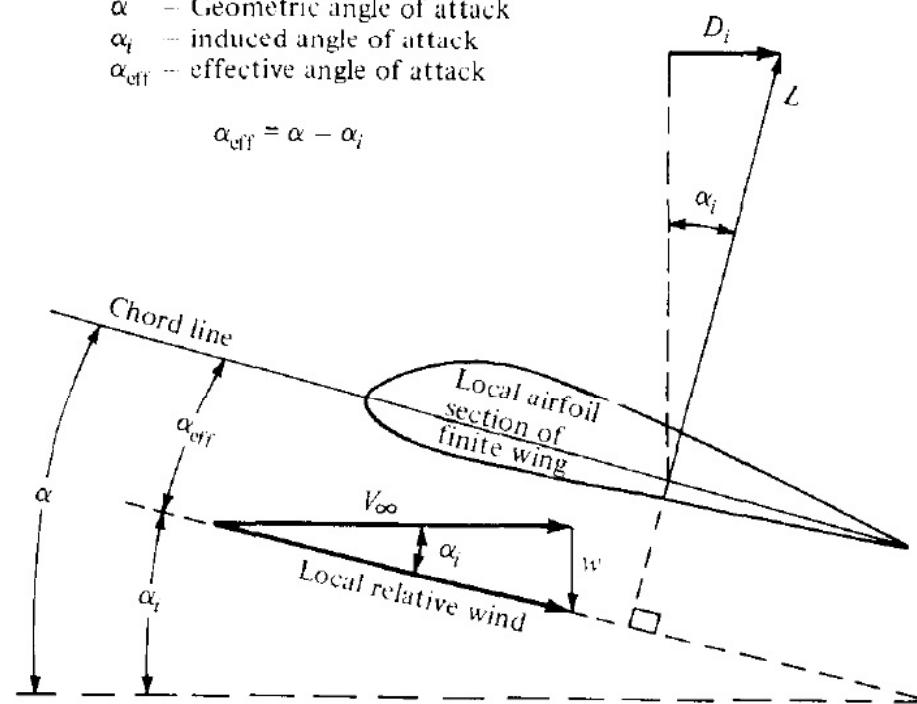
- Tal expressão permite avaliar a velocidade normal induzida (*downwash*) em y_0 devido a todos os vórtices livres.

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Efeito da velocidade normal induzida (*downwash*) sobre o escoamento local de uma asa finita

α – Geometric angle of attack
 α_i – induced angle of attack
 α_{eff} – effective angle of attack

$$\alpha_{\text{eff}} = \alpha - \alpha_i$$



Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Para a posição y_0 , o ângulo de ataque induzido α_i pode ser avaliado como

$$\alpha_i(y_0) = \tan^{-1} \left[\frac{-w(y_0)}{V_\infty} \right]$$

- Que, no caso de ângulos pequenos resulta em

$$\alpha_i(y_0) = -\frac{w(y_0)}{V_\infty}$$

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Pode-se, também, avaliar α_i em termos da distribuição de circulação $\Gamma(y)$ ao longo da asa:

$$\alpha_i(y_0) = \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{(d\Gamma/dy)dy}{y_0 - y}$$

- Considerando-se, então, o ângulo de ataque efetivo α_{eff} , verifica-se que o mesmo pode variar ao longo do comprimento da asa, uma vez que a velocidade normal induzida apresenta esse comportamento.

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Desse modo, tem-se que $\alpha_{eff} = \alpha_{eff}(y)$. Assim, o coeficiente de sustentação da seção da asa localizada em $y = y_0$ será

$$c_l = a_0 [\alpha_{eff}(y_0) - \alpha_{L=0}] = 2\pi [\alpha_{eff}(y_0) - \alpha_{L=0}]$$

- Nota-se que o coeficiente angular de sustentação a_0 foi substituído pelo valor teórico obtido para aerofólios finos (2π).

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Observa-se também que, se a asa apresentar torção, o ângulo de sustentação nula $\alpha_{L=0}$ varia com y_0 . Se não houver torção, $\alpha_{L=0}$ é constante ao longo do comprimento da asa. De todo modo, $\alpha_{L=0}$ é uma propriedade conhecida para as seções transversais da asa.

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Da definição do coeficiente de sustentação e da aplicação do teorema de Kutta-Joukowski, tem-se que

$$L' = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 c(y_0) c_l = \rho_\infty V_\infty \Gamma(y_0)$$

- De onde se obtém

$$c_l = \frac{2\Gamma(y_0)}{V_\infty c(y_0)}$$

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Dessa forma, o ângulo de ataque efetivo será

$$\alpha_{eff} = \frac{\Gamma(y_0)}{\pi V_\infty c(y_0)} + \alpha_{L=0}$$

- E, desse modo, o ângulo de ataque geométrico será dado por

$$\alpha(y_0) = \frac{\Gamma(y_0)}{\pi V_\infty c(y_0)} + \alpha_{L=0}(y_0) + \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{(d\Gamma/dy)dy}{y_0 - y}$$

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- A expressão anterior é a equação fundamental da teoria da linha sustentadora de Prandtl. De tal equação tem-se que o ângulo de ataque geométrico é a soma do ângulo de ataque efetivo com o ângulo de ataque induzido. Nessa expressão, a única incógnita é a circulação $\Gamma = \Gamma(y_0)$, em que y_0 varia de $-b/2$ até $b/2$ (envergadura da asa).

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- A solução de $\Gamma = \Gamma(y_0)$ fornece três características principais de uma asa finita:
 - A distribuição de sustentação, obtida do teorema de Kutta-Joukowski

$$L'(y_0) = \rho_\infty V_\infty \Gamma(y_0)$$

- A sustentação total, obtida ao se integrar a expressão anterior sobre toda a envergadura da asa

$$L = \int_{-b/2}^{b/2} L'(y) dy = \rho_\infty V_\infty \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy$$

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Consequentemente o coeficiente de sustentação será dado por

$$C_L = \frac{L}{q_\infty S} = \frac{2}{V_\infty S} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy$$

- O arrasto induzido por unidade de comprimento é dado por

$$D'_i = L'_i \sin(\alpha_i)$$

- No caso de pequenos ângulos de ataque induzidos

$$D'_i = L'_i \alpha_i$$

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- E, assim, o arrasto induzido total será

$$D_i = \int_{-b/2}^{b/2} L'(y) \alpha_i(y) dy = \rho_\infty V_\infty \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) \alpha_i(y) dy$$

- Consequentemente, o coeficiente de arrasto induzido é dado por

$$C_{D,i} = \frac{D_i}{q_\infty S} = \frac{2}{V_\infty S} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) \alpha_i(y) dy$$

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Distribuição elíptica de sustentação:
 - Considere a distribuição de circulação dada por

$$\Gamma(y) = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2}$$

- Tem-se, nesse caso, as seguintes observações:
 - Γ_0 é a circulação na origem.
 - A circulação varia elipticamente com a distância y ao longo da largura da asa.

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Distribuição elíptica de sustentação:
 - Tem-se, nesse caso, a chamada distribuição elíptica de circulação e, consequentemente:

$$L'(y) = \rho_\infty V_\infty \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2}$$

- De modo que se tem uma distribuição elíptica de sustentação.
- Tanto a circulação quanto a sustentação são nulas nas pontas das asas, ou seja,

$$\Gamma(b/2) = \Gamma(-b/2) = 0$$

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Distribuição elíptica de sustentação:
 - Propriedades aerodinâmicas de uma asa finita com distribuição elíptica de sustentação:
 - Velocidade normal induzida (*downwash*):
 - Derivando-se a distribuição de circulação:

$$\frac{d\Gamma}{dy} = -\frac{4\Gamma_0}{b^2} \frac{y}{(1 - 4y^2/b^2)^{1/2}}$$

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Distribuição elíptica de sustentação:
 - E substituindo-se o resultado na expressão da velocidade induzida w , obtém-se

$$w(y_0) = -\frac{\Gamma_0}{\pi b^2} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{y}{(1 - 4y^2/b^2)^{1/2} (y_0 - y)} dy$$

- Adotando-se, ainda, a seguinte substituição de variáveis:

$$y = \frac{b}{2} \cos(\theta); \quad dy = -\frac{b}{2} \sin(\theta) d\theta$$

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Distribuição elíptica de sustentação:
 - Obtém-se:

$$w(\theta_0) = -\frac{\Gamma_0}{2\pi b} \int_0^\pi \frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)} d\theta$$

- Ou seja,

$$w(\theta_0) = -\frac{\Gamma_0}{2b}$$

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Distribuição elíptica de sustentação:
 - Observa-se, assim, que a velocidade normal induzida (*downwash*) é constante ao longo do comprimento para uma distribuição elíptica de sustentação.
 - De modo semelhante, o ângulo de ataque induzido também é constante ao longo do comprimento e pode ser avaliado pela seguinte expressão:

$$\alpha_i = -\frac{w}{V_\infty} = \frac{\Gamma_0}{2bV_\infty}$$

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Distribuição elíptica de sustentação:
 - Uma forma mais útil para a avaliação de α_i , no entanto, pode ser obtida a partir da seguinte expressão:

$$L = \rho_\infty V_\infty \Gamma_0 \int_{-b/2}^{b/2} \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right)^{1/2} dy$$

- De onde se obtém:

$$L = \rho_\infty V_\infty \Gamma_0 \frac{b}{4} \pi$$

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Distribuição elíptica de sustentação:
 - O que conduz a

$$\Gamma_0 = \frac{2V_\infty S C_L}{b\pi}$$

- E dessa forma,

$$\alpha_i = \frac{S C_L}{b\pi^2}$$

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Distribuição elíptica de sustentação:
 - Uma propriedade geométrica importante para uma asa finita é a razão de aspecto, denotada por AR , e definida por

$$AR \equiv \frac{b^2}{S}$$

- Assim, α_i será avaliado por

$$\alpha_i = \frac{C_L}{\pi AR}$$

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Distribuição elíptica de sustentação:
 - Pode-se obter, também, o coeficiente de arrasto induzido através da seguinte expressão:

$$C_{D,i} = \frac{C_L^2}{\pi AR}$$

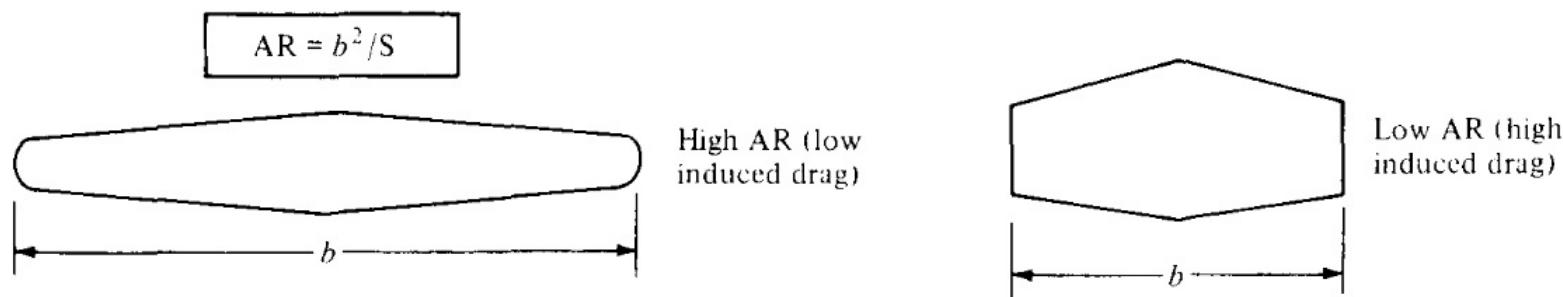
- Tal expressão mostra que o coeficiente de arrasto induzido é diretamente proporcional ao quadrado do coeficiente de sustentação.

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Distribuição elíptica de sustentação:
 - Observa-se, assim, que o coeficiente de arrasto induzido aumenta rapidamente com o crescimento do coeficiente de sustentação, tornando-se uma parcela expressiva do coeficiente de arrasto total quando os valores de C_L são elevados (típicos de baixas velocidades, como a decolagem e a aterrissagem). Mesmo para velocidades de cruzeiro relativamente elevadas, o arrasto induzido representa cerca de 25% do arrasto total.

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Distribuição elíptica de sustentação:
 - Outro aspecto importante é que $C_{D,i}$ é inversamente proporcional à razão de aspecto (AR). Assim, para se reduzir o arrasto induzido, deve-se utilizar asas finitas com o maior valor possível de razão de aspecto.



Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Distribuição elíptica de sustentação:
 - Nota-se, contudo, que o projeto de asas de elevada razão de aspecto com confiabilidade estrutural é difícil. Os valores típicos observados para aeronaves subsônicas convencionais se encontram na faixa de 6 a 8.
 - Um outro aspecto relacionado a uma distribuição elíptica de sustentação é obtido ao se considerar uma asa sem torção geométrica (α constante) e sem torção aerodinâmica ($\alpha_{L=0}$ constante).

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Distribuição elíptica de sustentação:
 - Sob essas condições, tem-se que o ângulo de ataque efetivo também é constante e o coeficiente de sustentação para uma seção local, c_l é
$$c_l = a_0 (\alpha_{eff} - \alpha_{L=0})$$
 - Assumindo-se, também, que a_0 seja constante para cada seção, tem-se que c_l deve ser constante também ao longo da asa.

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Distribuição elíptica de sustentação:
 - A sustentação por unidade de comprimento é

$$L'(y) = q_\infty c c_l$$

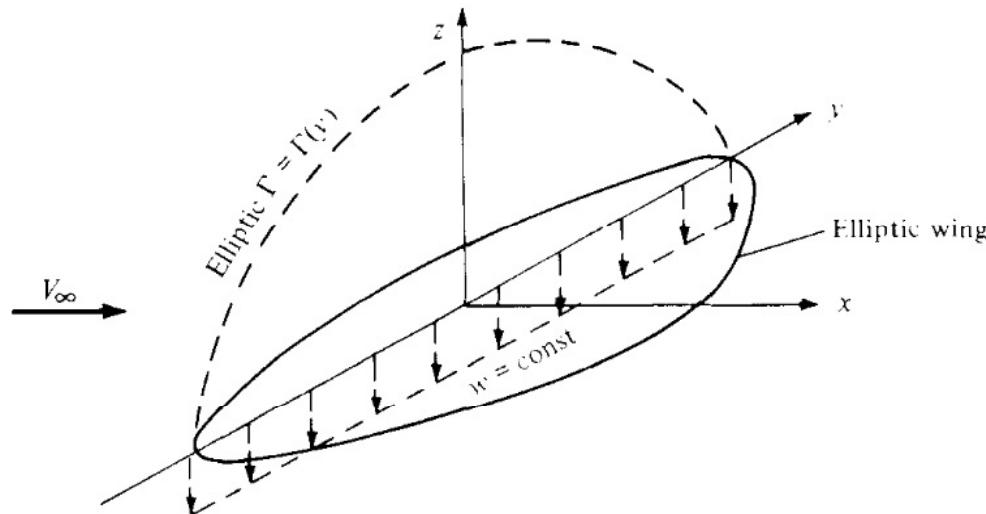
- De onde se obtém, para a corda c :

$$c(y) = \frac{L'(y)}{q_\infty c_l}$$

- Observa-se que q_∞ e c_l são constantes, enquanto L' varia elipticamente ao longo do comprimento.

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Distribuição elíptica de sustentação:
 - Tem-se, assim, que para a distribuição elíptica de sustentação a corda deve variar elipticamente com o comprimento. Desse modo, a planificação da asa deve ser elíptica.



Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Distribuição elíptica de sustentação:
 - Embora uma distribuição elíptica de sustentação possa parecer um caso restritivo e isolado, na realidade fornece uma aproximação confiável do coeficiente de arrasto induzido para uma asa finita arbitrária.

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Distribuição de sustentação geral:
 - Considere a transformação

$$y = -\frac{b}{2} \cos(\theta)$$

- Para a qual a coordenada na direção lateral é dada por θ , com $0 \leq \theta \leq \pi$. Para esse caso, a distribuição elíptica de sustentação é dada por

$$\Gamma(\theta) = \Gamma_0 \sin(\theta)$$

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Distribuição de sustentação geral:
 - Tal expressão indica que a distribuição geral de circulação ao longo de uma asa finita arbitrária possa ser avaliada por uma Série de Fourier de senos. Assumindo-se, então

$$\Gamma(\theta) = 2bV_{\infty} \sum_{n=1}^{N} A_n \sin(n\theta)$$

- Nesse caso, A_n são incógnitas, mas que devem satisfazer à equação fundamental da teoria da linha sustentadora de Prandtl.

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Distribuição de sustentação geral:
 - Diferenciando-se a expressão anterior e aplicando-a na expressão para a determinação do ângulo de ataque, obtém-se

$$\alpha(\theta_0) = \frac{2b}{\pi c(\theta_0)} \sum_1^N A_n \sin(n\theta) + \alpha_{L=0}(\theta_0) + \sum_1^N n A_n \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta_0)}$$

- Nessa expressão, b , $c(\theta_0)$ e $\alpha_{L=0}(\theta_0)$ são conhecidos da geometria e da seção da asa finita (aerofólio).

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Distribuição de sustentação geral:
 - Por sua vez, o coeficiente de sustentação será:

$$C_L = \frac{2}{V_\infty S} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy = \frac{2b^2}{S} \sum_1^N A_n \int_0^\pi \sin(n\theta) \sin(\theta) d\theta$$

- Ao se avaliar a integral, obtém-se:

$$C_L = A_1 \pi \frac{b^2}{S} = A_1 \pi AR$$

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Distribuição de sustentação geral:
 - O coeficiente de arrasto induzido, nesse caso, é dado por

$$\begin{aligned} C_{D,i} &= \frac{2}{V_\infty S} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) \alpha_i(y) dy \\ &= \frac{2b^2}{S} \int_0^\pi \left[\sum_1^N A_n \sin(n\theta) \right] \alpha_i(\theta) \sin(\theta) d\theta \end{aligned}$$

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Distribuição de sustentação geral:
 - O ângulo de ataque $\alpha_i(\theta)$ é:

$$\alpha_i(\theta) = \sum_1^N n A_n \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}$$

- Tem-se, assim, que o coeficiente de arrasto induzido será:

$$C_{D,i} = \frac{C_L^2}{\pi AR} (1 + \delta)$$

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Distribuição de sustentação geral:

- Nota-se que $\delta \geq 0$ e

$$\delta = \sum_2^N n \left(\frac{A_n}{A_1} \right)^2$$

- Definindo-se o fator de eficiência e como

$$e = (1 + \delta)^{-1}$$

- Sendo $e \leq 1$.

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

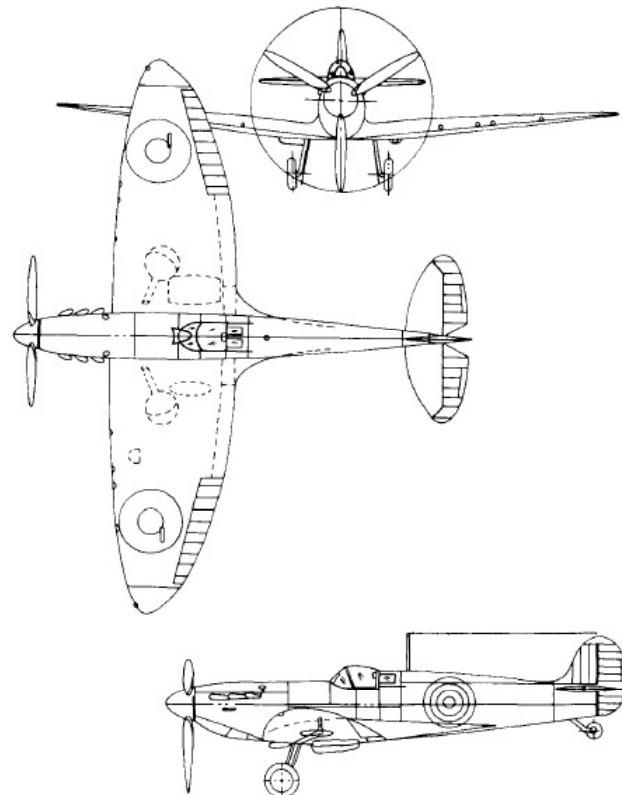
- Distribuição de sustentação geral:
 - Desse modo o coeficiente de arrasto induzido será

$$C_{D,i} = \frac{C_L^2}{\pi e AR}$$

- Lembra-se que para asas sem torção aerodinâmica nem torção geométrica, tem-se uma distribuição de sustentação elíptica para asas planas elípticas, como as que equipavam o British Spitfire, utilizado na Segunda Guerra Mundial.

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Distribuição de sustentação geral:
 - Supermarine Spitfire:



Teoria da linha sustentadora de Prandtl

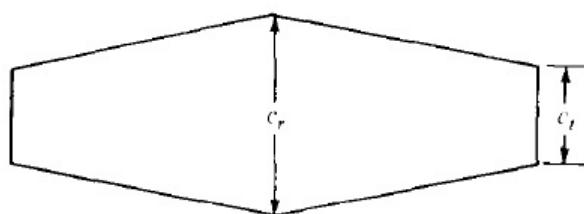
- Distribuição de sustentação geral:
 - Asas retas:



Elliptic wing



Rectangular wing



Tapered wing

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Distribuição de sustentação geral:
 - Asas elípticas apresentam distribuição de sustentação mais próxima da ótima, mas possuem alto custo de manufatura.
 - Asas retangulares geram uma distribuição de sustentação muito distante da ótima.
 - Asas trapezoidais podem ser fabricadas de modo que a razão entre as cordas de ponta e de base apresentem distribuição de sustentação mais próxima das asas elípticas.

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

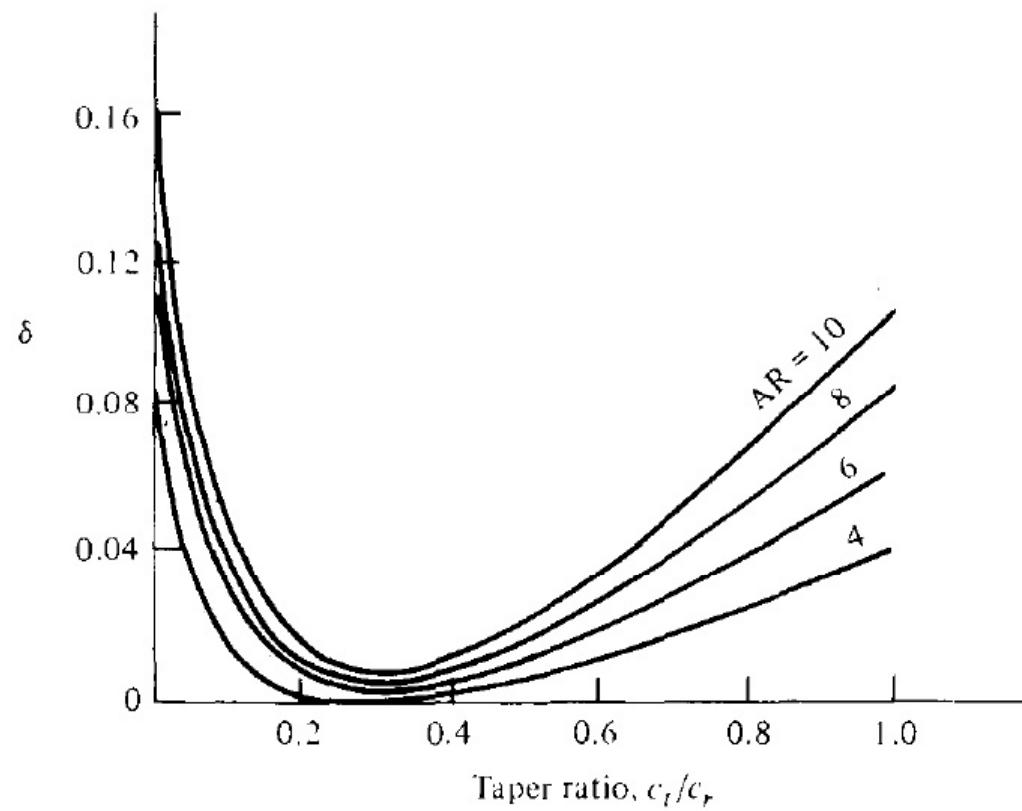
- Distribuição de sustentação geral:
 - Os estudos sobre asas trapezoidais foram realizados inicialmente por Hermann Glauert, sendo publicados em 1926.
 - Uma vez que asas com bordos de ataque e de fuga retos são mais fáceis de serem manufaturados do que asas elípticas, a maioria dos aviões empregam asas trapezoidais ao invés de asas elípticas.

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Efeito da razão de aspecto:
 - O coeficiente de arrasto induzido para uma asa finita com distribuição de sustentação geral é inversamente proporcional à razão de aspecto.
 - Nota-se que o valor de AR , que tipicamente varia entre 6 e 22 para aviões subsônicos e aquáticos, apresenta um efeito muito maior sobre o $C_{D,i}$ que o valor de δ .

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Efeito da razão de aspecto:



Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Efeito da razão de aspecto:
 - Observa-se, assim, que o fator primário de projeto para minimizar o arrasto induzido não é o de se obter uma distribuição de sustentação mais próxima possível da elíptica, mas sim tornar a razão de aspecto a maior possível.
 - A determinação de que $C_{D,i}$ é inversamente proporcional à AR é um dos principais resultados da teoria da linha sustentadora de Prandtl.

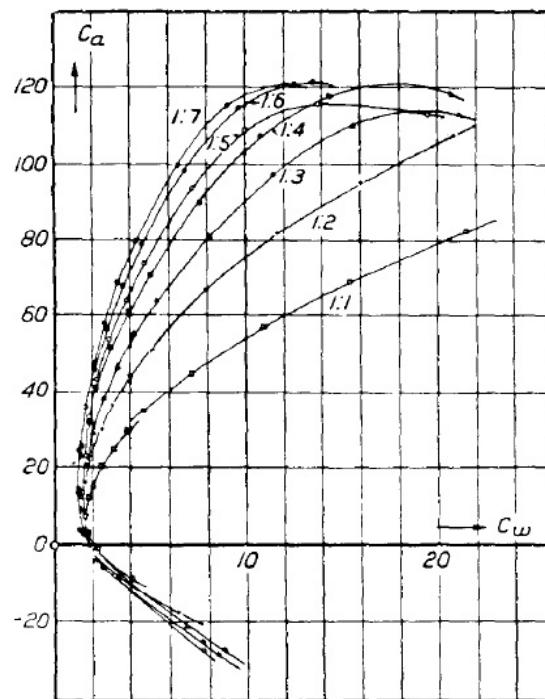
Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Efeito da razão de aspecto:
 - Em 1915, Prandtl verificou tal resultado através de uma série de experimentos clássicos sobre os coeficientes de sustentação e de arrasto para 7 asas retangulares de diferentes razões de aspecto.
 - Arrasto total para asas finitas:

$$C_D = c_d + \frac{C_L^2}{\pi e AR}$$

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Efeito da razão de aspecto:
 - Dados do experimento clássico de Prandtl para asas retangulares



Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Efeito da razão de aspecto:
 - Assumindo-se duas asas de diferentes razões de aspecto AR_1 e AR_2 , tem-se

$$C_{D,1} = c_d + \frac{C_L^2}{\pi e AR_1}; \quad C_{D,2} = c_d + \frac{C_L^2}{\pi e AR_2}$$

- Assumindo-se que as asas tenham o mesmo C_L e que apresentem a mesma seção de aerofólio (mesmo c_d), tem-se então

$$C_{D,1} = C_{D,2} + \frac{C_L^2}{\pi e} \left(\frac{1}{AR_1} - \frac{1}{AR_2} \right)$$

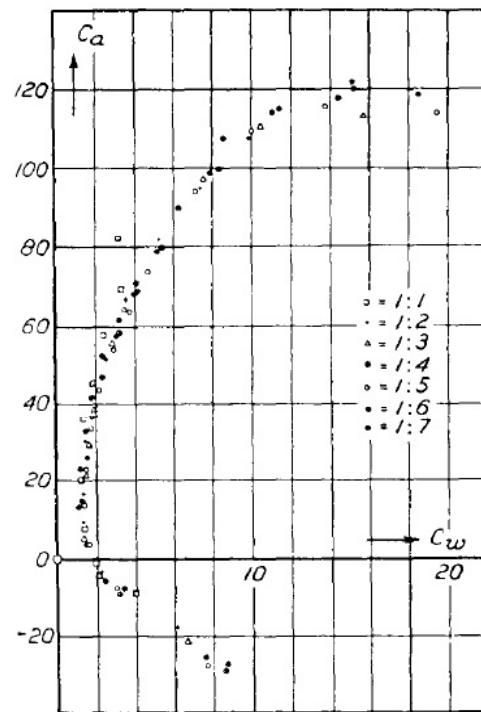
Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Efeito da razão de aspecto:
 - A expressão anterior pode ser utilizada para mudar a escala dos dados de uma asa com uma dada razão de aspecto AR_2 para o caso correspondente para uma razão de aspecto AR_1 .
 - Isso foi realizado por Prandtl para os dados por ele coletados, considerando-se como referência uma asa de razão de aspecto 5:

$$C_{D,1} = C_{D,2} + \frac{C_L^2}{\pi e} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{AR_2} \right)$$

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Efeito da razão de aspecto:
 - Dados dos experimentos de Prandtl reescalados para uma razão de aspecto 5.



Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Efeito da razão de aspecto:
 - Existem duas diferenças essenciais entre as propriedades de um aerofólio e de asas finitas: a primeira se refere à geração do arrasto induzido; a segunda, ao coeficiente angular da sustentação.
 - O coeficiente angular da sustentação, para um aerofólio, é dado por

$$a_0 \equiv \frac{dc_l}{d\alpha}$$

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Efeito da razão de aspecto:
 - No caso de uma asa finita, define-se o coeficiente angular como

$$a \equiv \frac{dC_L}{d\alpha}$$

- Ao se comparar o coeficiente angular de uma asa finita ao de um aerofólio, observa-se que $a < a_0$.

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

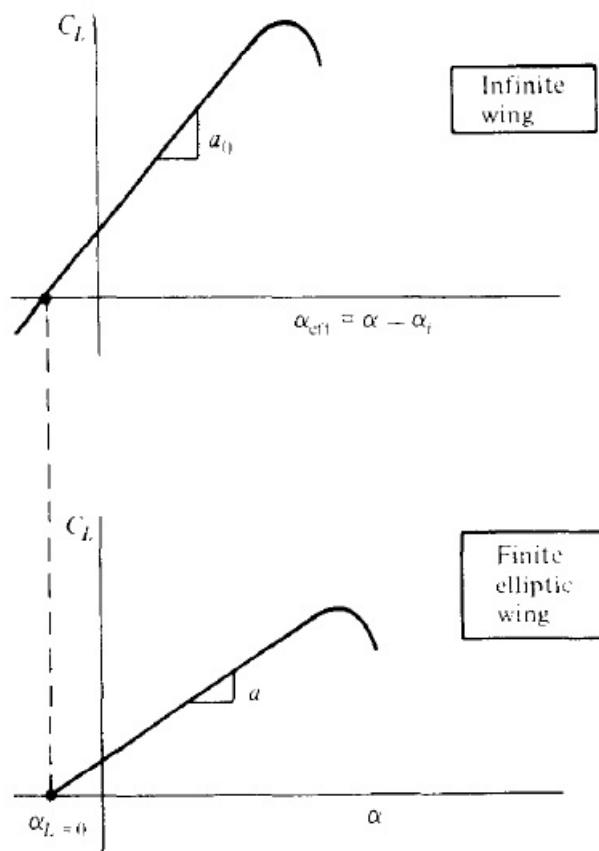
- Efeito da razão de aspecto:
 - Para essa avaliação, deve-se recordar que embora o ângulo de ataque geométrico seja α , no caso de uma asa finita tem-se um ângulo de ataque efetivo α_{eff} , menor que α .
 - Nesse caso, considere uma asa elíptica sem torção; desse modo, tanto α_i quanto α_{eff} serão constantes ao longo da largura da asa e, desse modo $C_L = c_l$.

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Efeito da razão de aspecto:
 - Assumindo-se que seja plotado um gráfico de C_L versus α_{eff} . Nesse caso, como se está empregando o ângulo de ataque efetivo, o coeficiente angular da sustentação coincide com aquele observado para uma asa infinita, sendo designado por a_0 .
 - No entanto, o usual é a plotagem do gráfico levando-se em consideração o ângulo de ataque geométrico, de modo que o coeficiente angular real, a , é menor que a_0 , uma vez que $\alpha_{eff} < \alpha$.

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Efeito da razão de aspecto:



Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Efeito da razão de aspecto:
 - Recordando-se que para sustentação nula não existem efeitos induzidos, tem-se que $\alpha_i = C_{D,i} = 0$. Desse modo, quando $C_L = 0$, tem-se que $\alpha = \alpha_{eff}$. Tem-se, assim, que $\alpha_{L=0}$ é o mesmo para asas finitas ou infinitas.
 - Os valores de a e de a_0 estão relacionados através da seguinte expressão, para asas finitas elípticas:

$$\frac{dC_L}{d\alpha} = a = \frac{a_0}{1 + a_0 / \pi AR}$$

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Efeito da razão de aspecto:
 - No caso de uma asa finita geral, a expressão a ser empregada é:

$$a = \frac{a_0}{1 + (a_0 / \pi AR) (1 + \tau)}$$

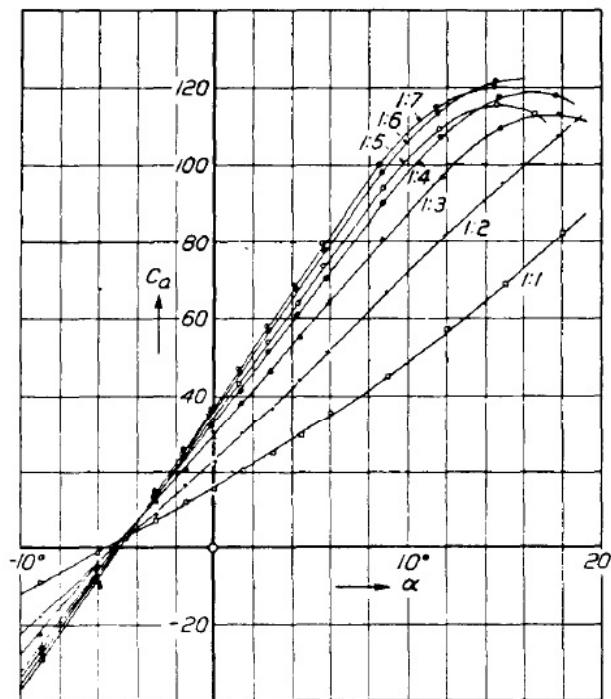
- Nessa expressão, τ é uma função dos coeficientes de Fourier A_n . Os valores de τ foram calculados inicialmente por Glauert nos anos 1920 e apresentam valores, na maioria das vezes, entre 0,05 e 0,25.

Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Efeito da razão de aspecto:
 - Nota-se que para asas de baixa razão de aspecto, pode existir uma diferença significativa entre a_0 e a . Contudo, à medida que $AR \rightarrow \infty$, $a \rightarrow a_0$.
 - Há uma redução no valor de $dC_L/d\alpha$ à medida que AR se reduz. Esse efeito foi observado por Prandtl em 1915, experimentalmente.

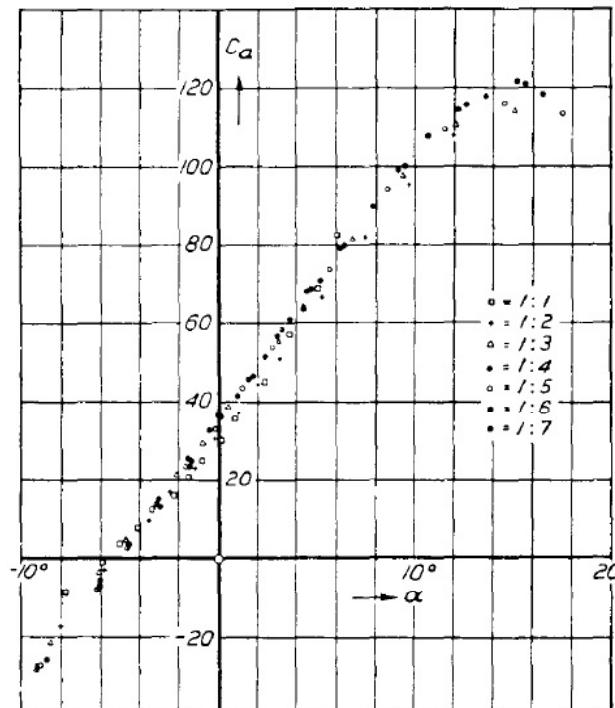
Teoria da linha sustentadora de Prandtl

- Efeito da razão de aspecto:
 - Variação do coeficiente de sustentação com o ângulo de ataque (experimento de Prandtl, 1915).



Teoria da linha sustentadora de Prandtl

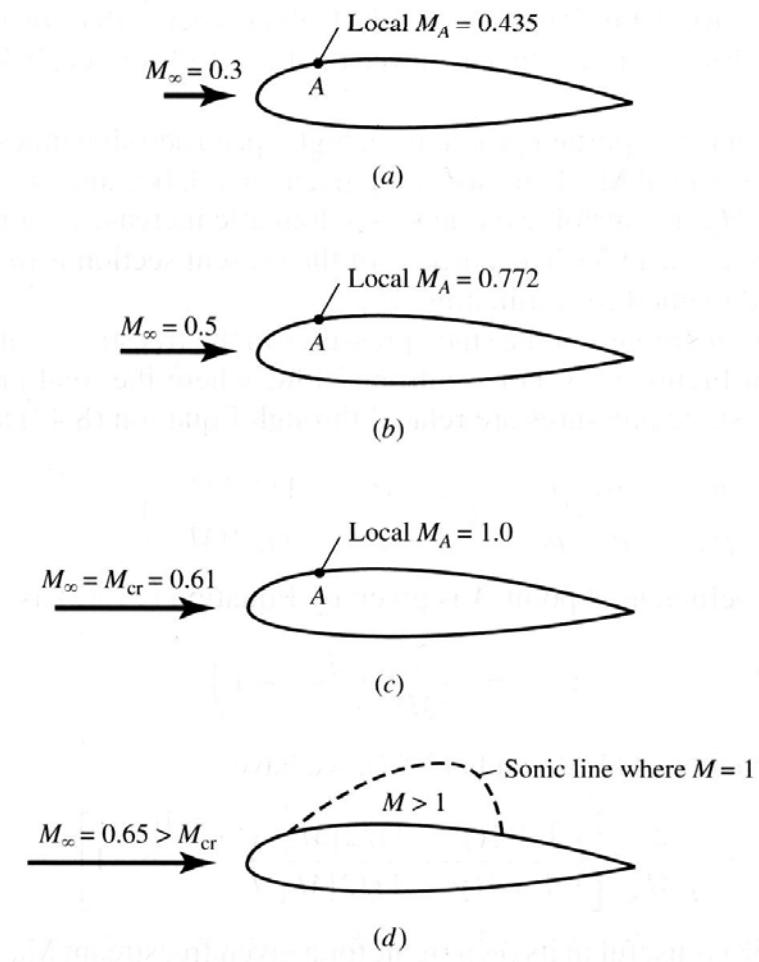
- Efeito da razão de aspecto:
 - Variação do coeficiente de sustentação com o ângulo de ataque (dados reescalados para $AR = 5$).



Asas enflechadas

- A maioria das aeronaves modernas de alta velocidade apresenta asas enflechadas.
- A opção por essa geometria está relacionada com a determinação do chamado número de Mach crítico (M_{cr}). Tal valor está relacionado ao número de Mach do escoamento não perturbado (M_∞) para o qual sobre o aerofólio (ou asa), no ponto de mínima pressão sobre a geometria, o escoamento se torna sônico (atinja Mach unitário).

Asas enflechadas

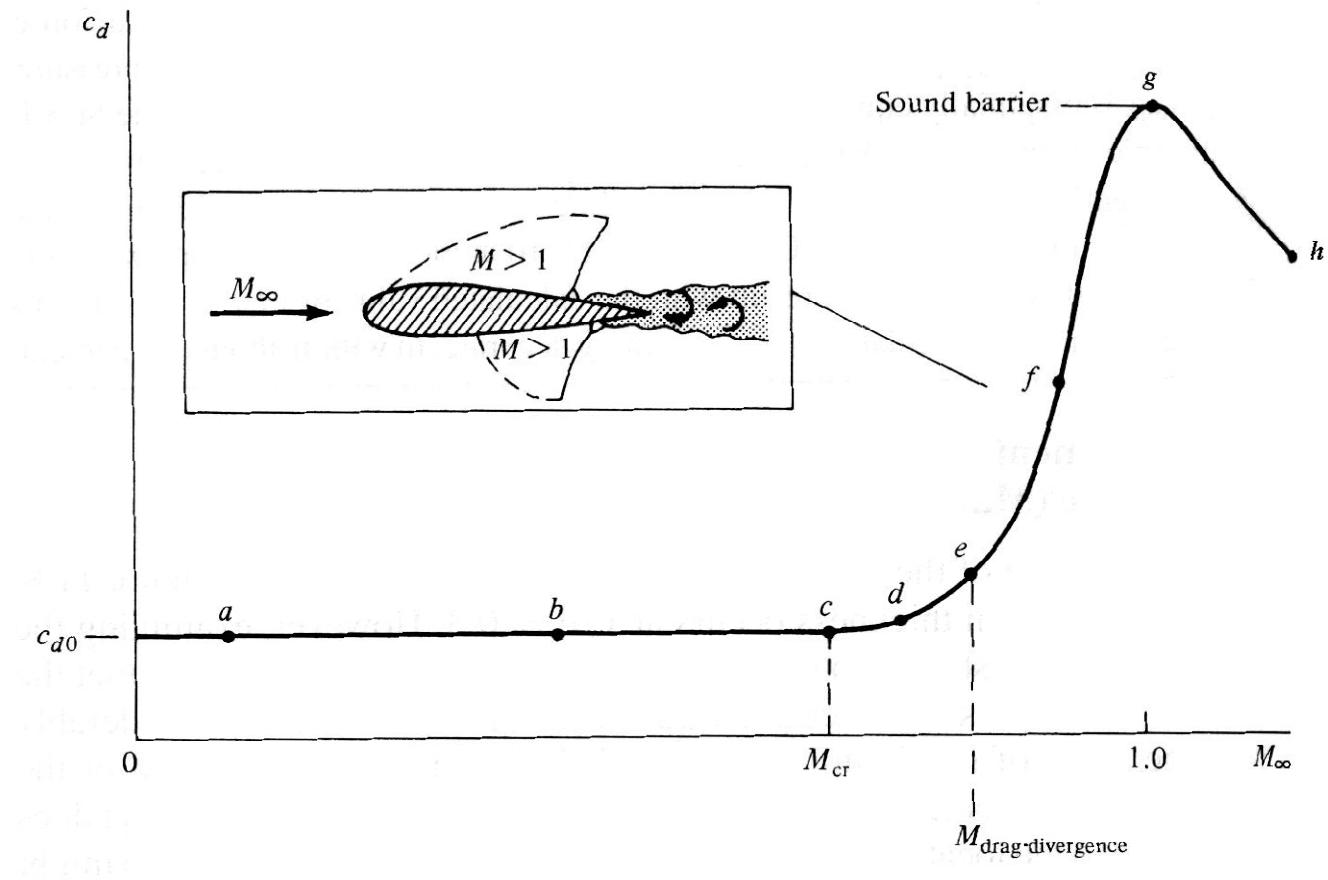


À medida que o número de Mach cresce, localmente tem-se valores se aproximando da unidade. Em um dado momento, o número de Mach sobre o aerofólio é unitário. Neste ponto, tem-se o chamado “número de Mach crítico”, denotado por M_{cr} . Se a velocidade do escoamento for aumentada ainda mais, há a formação de uma linha sônica sobre o aerofólio.

Asas enflechadas

- Um dos mais importantes problemas na aerodinâmica de altas velocidades é a determinação do número de Mach crítico para um dado aerofólio ou asa. Isto ocorre pois, para números de Mach ligeiramente superiores ao crítico, o aerofólio experimenta um dramático aumento no coeficiente de arrasto.

Asas enflechadas



Asas enflechadas

- Sejam p_∞ e p_A as pressões estáticas do escoamento livre e do ponto A (local de mínima pressão sobre o aerofólio ou asa), respectivamente. Para um escoamento isentrópico, a pressão total é constante e nesse caso,

$$\frac{p_A}{p_\infty} = \frac{p_A/p_0}{p_\infty/p_0} = \left\{ \frac{1 + [(\gamma - 1)/2] \cdot M_\infty^2}{1 + [(\gamma - 1)/2] \cdot M_A^2} \right\}^{\gamma/(\gamma-1)}$$

Asas enflechadas

- O coeficiente de pressão no ponto A é definido como

$$Cp_A = \frac{2}{\gamma \cdot M_\infty^2} \left(\frac{p_A}{p_\infty} - 1 \right)$$

- Obtém-se, então:

$$Cp_A = \frac{2}{\gamma \cdot M_\infty^2} \left[\left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_A^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right]$$

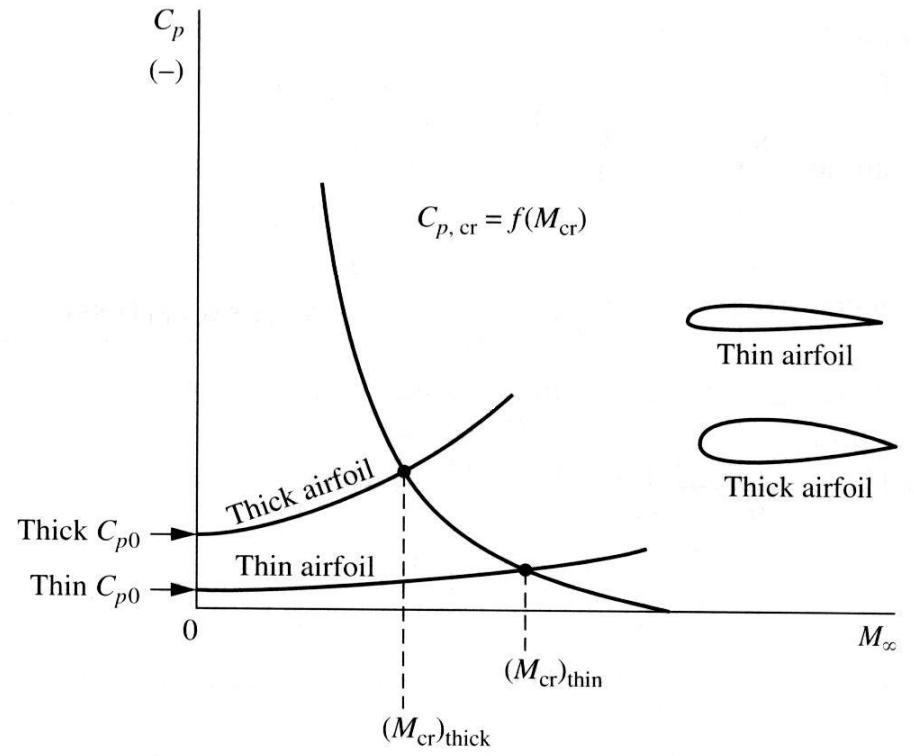
Asas enflechadas

- No caso em que se tenha no ponto A número de Mach unitário, o coeficiente de pressão é chamado de coeficiente crítico de pressão e nesse caso:

$$Cp_{cr} = \frac{2}{\gamma \cdot M_{cr}^2} \left[\left(\frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{cr}^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} - 1 \right]$$

Asas enflechadas

- Nota-se, assim, que o coeficiente crítico de pressão é uma função do número de Mach crítico.



Asas enflechadas

- O escoamento sobre um aerofólio fino é pouco perturbado em relação ao escoamento livre. Assim, a expansão na superfície superior é suave e o valor do coef. de pressão é um valor de pequena magnitude.
- Ao contrário, no caso de um escoamento sobre aerofólio espesso, a perturbação em relação ao escoamento livre é maior.

Asas enflechadas

- Neste caso, a expansão sobre a superfície superior é pronunciada e o coef. de pressão apresenta um valor absoluto mais elevado.
- Do esquema anterior, nota-se que um número de Mach crítico maior está relacionado a um coef. de pressão menor.
- Assim, para aviões de alta velocidade, é desejável possuir um número de Mach crítico o mais elevado possível.

Asas enflechadas

- Duas propostas clássicas são feitas de modo a aumentar o valor do número de Mach crítico (e, consequentemente, o número de Mach de divergência):
 - Reduzir a espessura do aerofólio.
 - Rotacionar a asa (usar asa enflechada).
- Em ambos os casos, como consequência tem-se a redução da razão espessura/corda para a asa.

Asas enflechadas

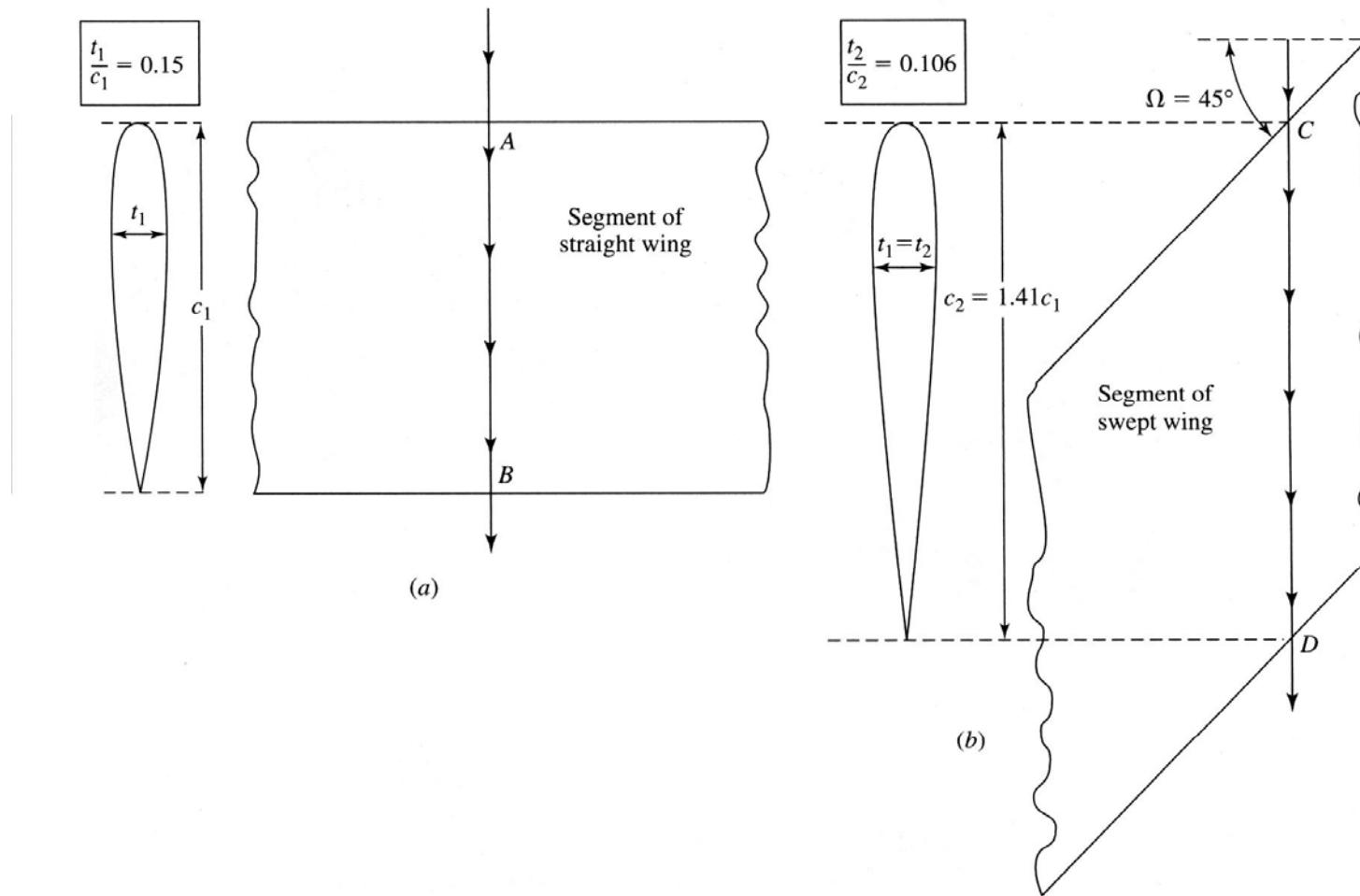


Figure 9.18 | By sweeping the wing, a streamline effectively sees a thinner airfoil, hence increasing the critical Mach number of the wing.

Asas enflechadas

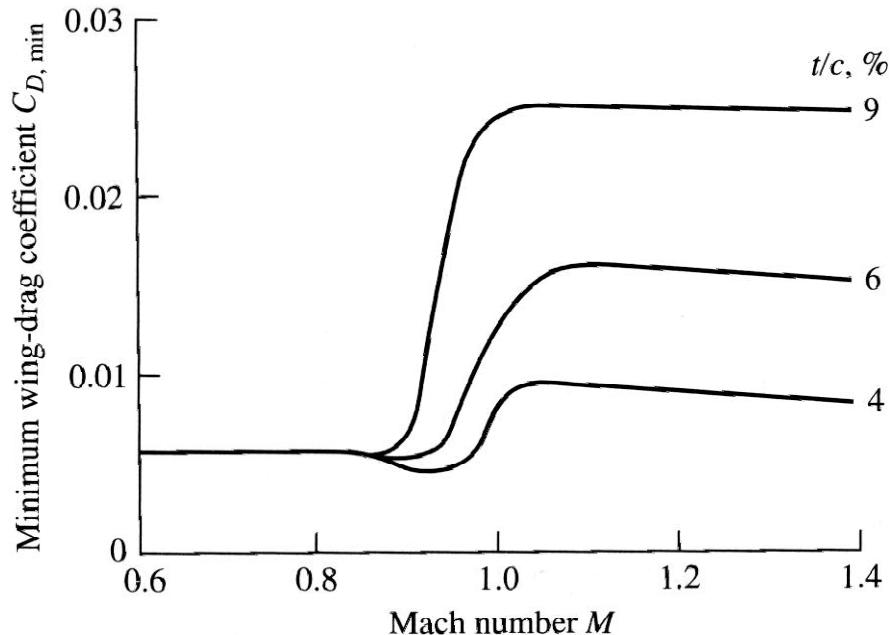


Figure 9.17 | Variation of minimum wing drag coefficient versus Mach number with airfoil thickness ratio as a parameter. The wing is swept, with a sweep angle of 47 degrees. (From Loftin, *Quest for Performance*, NASA SP 468, 1985.)

Asas enflechadas

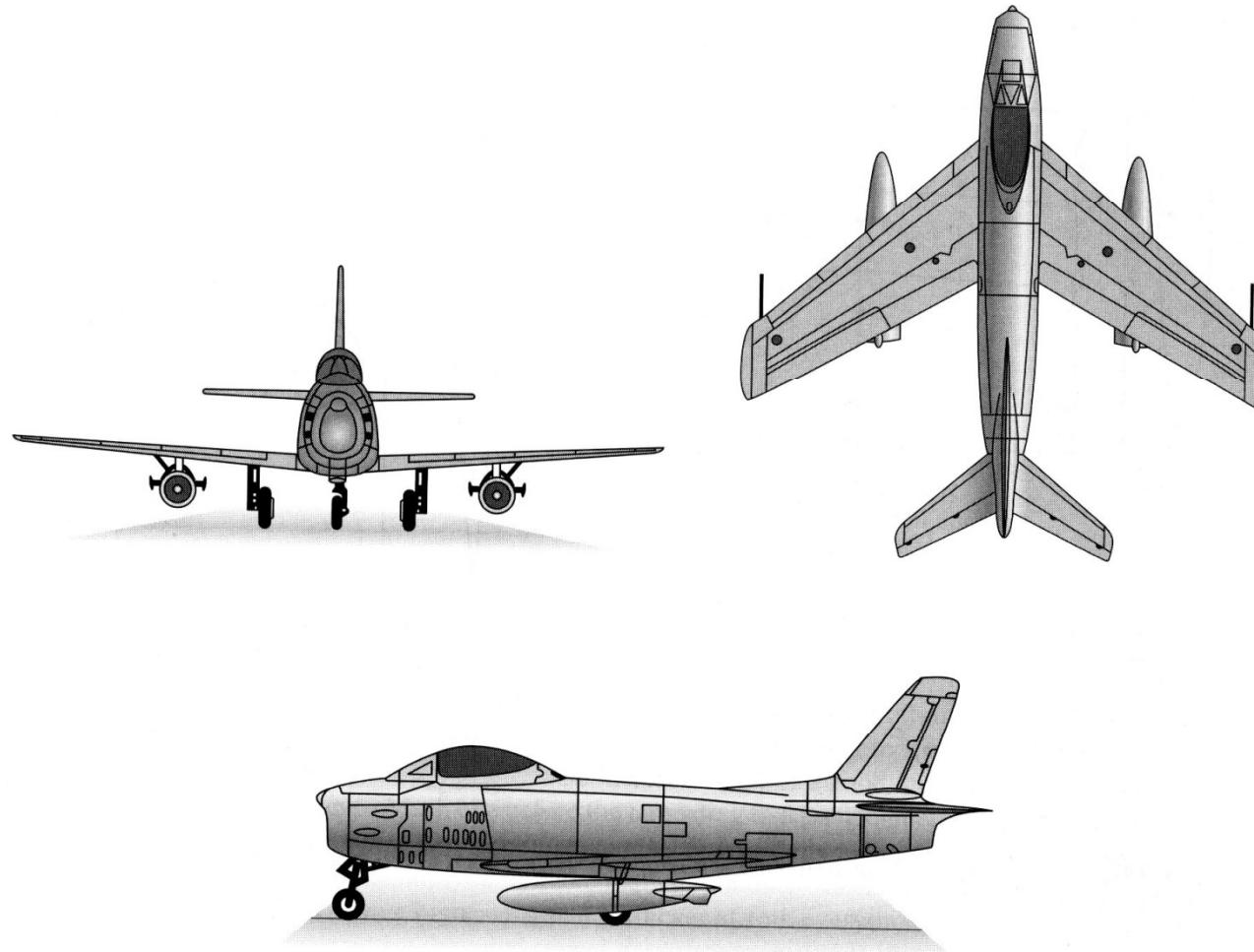


Figure 9.19 | A typical example of a swept-wing aircraft. The North American F-86 Sabre of Korean War fame.