

Mecanismos

Mecanismos com múltiplos graus de liberdade

Prof. Jorge Luiz Erthal
jorgeerthal@gmail.com

18/08/2016

Mecanismos com múltiplos graus de liberdade



Conteúdo

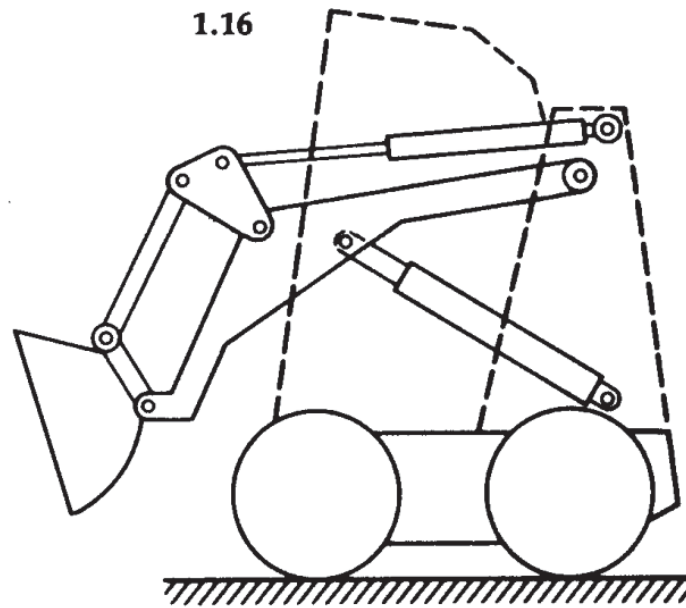
- Mecanismos com 2 graus de liberdade
 - Solução algébrica
 - Solução numérica
- Mecanismos com múltiplos graus de liberdade e com cadeia composta
- Exemplos

18/08/2016

Mecanismos com múltiplos graus de liberdade

2

Exemplo



18/08/2016

Mecanismos com múltiplos graus
de liberdade

3

Exemplo

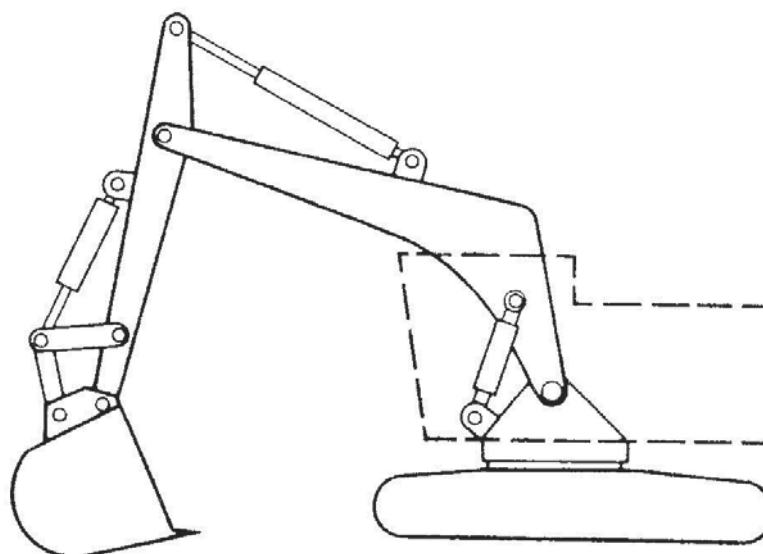


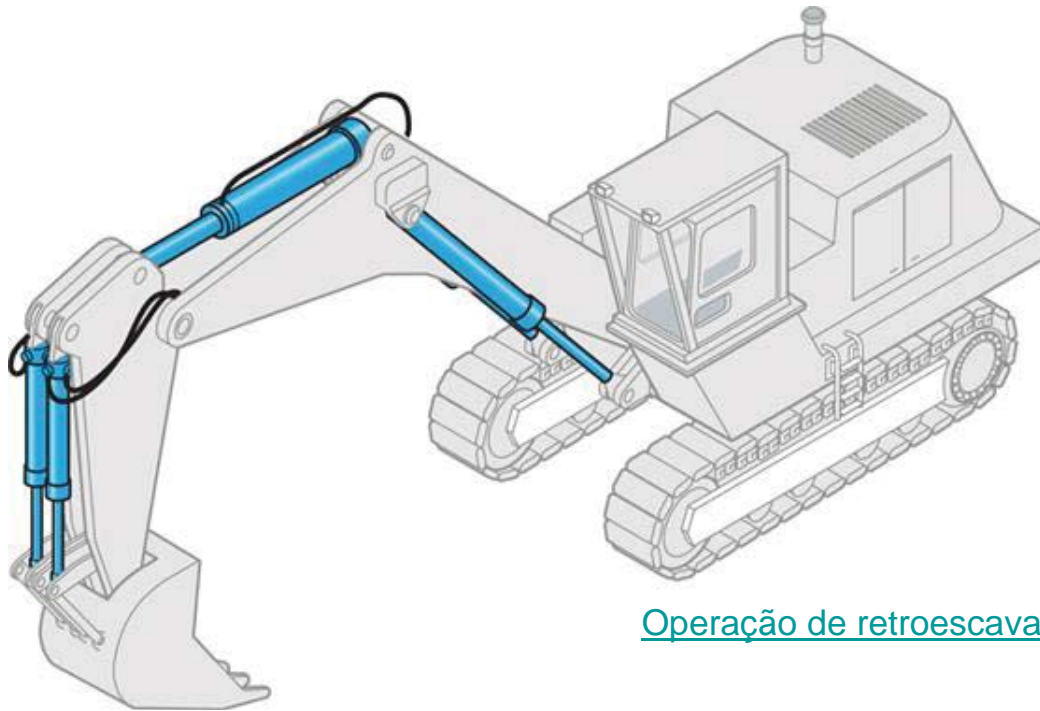
FIGURE 3.4 Pictorial Representation of a Power Shovel

18/08/2016

Mecanismos com múltiplos graus
de liberdade

4

Exemplo



Operação de retroscavadeira 1

18/08/2016

Mecanismos com múltiplos graus de liberdade

5

Exemplo



18/08/2016

Mecanismos com múltiplos graus de liberdade

6

Exemplo



18/08/2016

Mecanismos com múltiplos graus de liberdade

7

Exemplo 1 - Solução algébrica

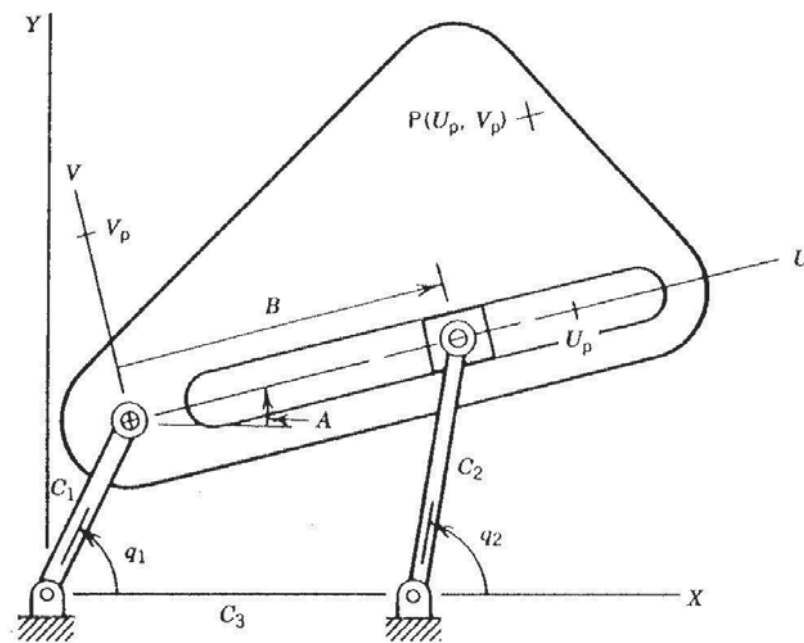


FIGURE 3.1 Sliding Four-Bar Linkage

18/08/2016

Mecanismos com múltiplos graus de liberdade

8

1. Número de graus de liberdade

$$N := 5 \quad P1 := 5 \quad P2 := 0$$

$$F := 3 \cdot (N - 1) - 2 \cdot P1 - P2 \quad \mathbf{F = 2}$$

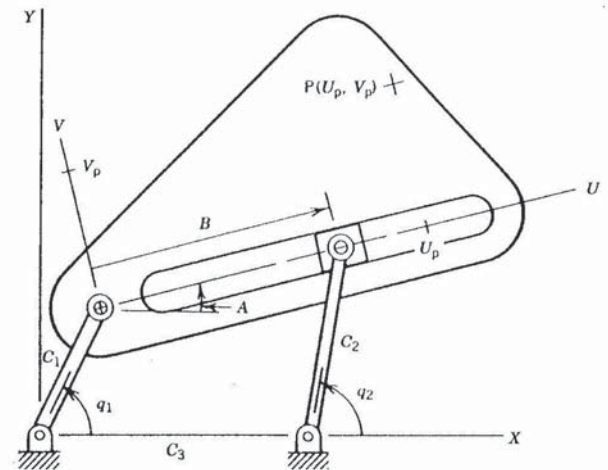


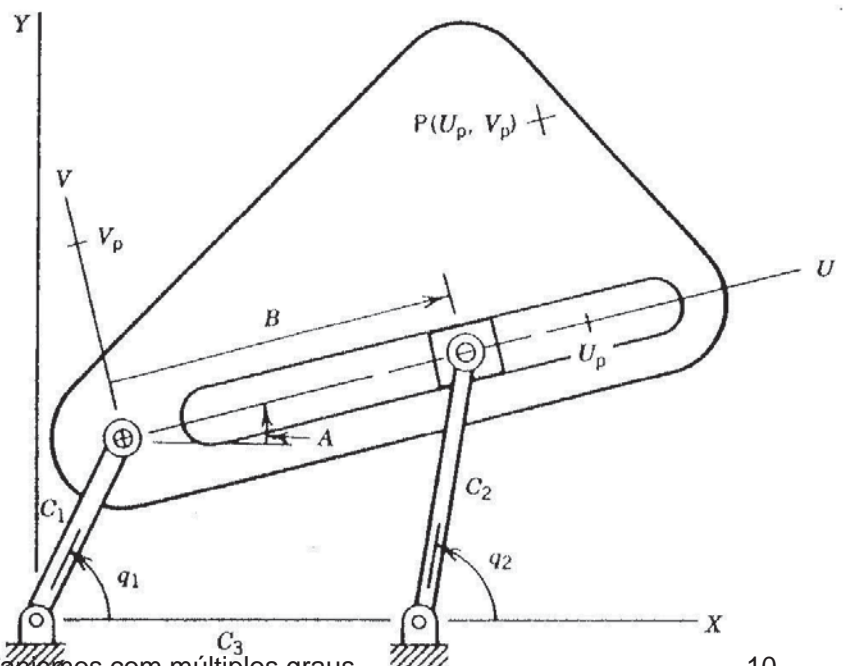
FIGURE 3.1 Sliding Four-Bar Linkage

18/08/2016

Mecanismos com múltiplos graus de liberdade

9

2. Decomposição dos pares superiores
3. Definição do sistema GLOBAL de coordenadas
4. Identificação das medidas constantes
5. Definição das variáveis primárias e secundárias

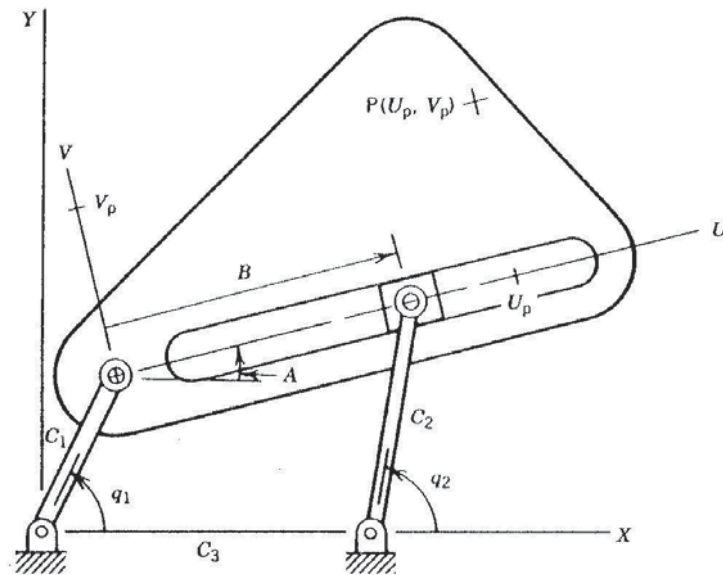


Mecanismos com múltiplos graus de liberdade
FIGURE 3.1 Sliding Four-Bar Linkage

18/08/2016

10

6. Montagem das equações cinemáticas de posição



$$C_1 \cdot \cos(q_1) + B \cdot \cos(A) - C_2 \cdot \cos(q_2) - C_3 = 0$$

$$C_1 \cdot \sin(q_1) + B \cdot \sin(A) - C_2 \cdot \sin(q_2) = 0$$

18/08/2016

Mecanismos com múltiplos graus
de liberdade

11

7-Solução do sistema de equações

$$C_1 \cdot \cos(q_1) + B \cdot \cos(A) - C_2 \cdot \cos(q_2) - C_3 = 0$$

$$C_1 \cdot \sin(q_1) + B \cdot \sin(A) - C_2 \cdot \sin(q_2) = 0$$

$$A = \text{atan} \left(\frac{C_2 \cdot \sin(q_2) - C_1 \cdot \sin(q_1)}{C_3 + C_2 \cdot \cos(q_2) - C_1 \cdot \cos(q_1)} \right)$$

$$B = \frac{C_3 - C_1 \cdot \cos(q_1) + C_2 \cdot \cos(q_2)}{\cos(A)}$$

ou

$$B = \frac{C_2 \cdot \cos(q_2) - C_1 \cdot \sin(q_1)}{\sin(A)}$$

18/08/2016

Mecanismos com múltiplos graus
de liberdade

12

8-Equações das velocidades

$$J \cdot \dot{S} + Q \cdot \dot{q} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial A} & \frac{\partial f_1}{\partial B} \\ \frac{\partial f_2}{\partial A} & \frac{\partial f_2}{\partial B} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{A} \\ \dot{B} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\dot{S} = (-J^{-1} \cdot Q) \cdot \dot{q}$$

$$\dot{S} = (K) \cdot \dot{q}$$

$$K = -J^{-1} \cdot Q.$$

18/08/2016

Mecanismos com múltiplos graus
de liberdade

13

Solução para as velocidades secundárias

$$J(q_1, q_2) = \begin{pmatrix} -B \cdot \sin(A) & \cos(A) \\ B \cdot \cos(A) & \sin(A) \end{pmatrix} \quad Q(q_1, q_2) = \begin{pmatrix} -C_1 \cdot \sin(q_1) & C_2 \cdot \sin(q_2) \\ C_1 \cdot \cos(q_1) & -C_2 \cdot \cos(q_2) \end{pmatrix}$$

$$K = -J^{-1} \cdot Q$$

$$\begin{pmatrix} K_{a1} & K_{a2} \\ K_{b1} & K_{b2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -B \cdot \sin(A) & \cos(A) \\ B \cdot \cos(A) & \sin(A) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -C_1 \cdot \sin(q_1) & C_2 \cdot \sin(q_2) \\ C_1 \cdot \cos(q_1) & -C_2 \cdot \cos(q_2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} K_{a1} & K_{a2} \\ K_{b1} & K_{b2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{C_1 \cdot \cos(A - q_1)}{B} & \frac{C_2 \cdot \cos(A - q_2)}{B} \\ -C_1 \cdot \sin(A - q_1) & C_2 \cdot \sin(A - q_2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{A} \\ \dot{B} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{a1} & K_{a2} \\ K_{b1} & K_{b2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix}$$

18/08/2016

Mecanismos com múltiplos graus
de liberdade

14

Acelerações secundárias

$$\begin{Bmatrix} \ddot{A} \\ \ddot{B} \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \frac{d}{dq_1} [K] \dot{q}_1 \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} + \frac{d}{dq_2} [K] \dot{q}_2 \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \ddot{A} \\ \ddot{B} \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + [L_1] \dot{q}_1 \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} + [L_2] \dot{q}_2 \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix}$$

$$[L_1] = \frac{d}{dq_1} [K]$$

$$[L_2] = \frac{d}{dq_2} [K]$$

18/08/2016

Mecanismos com múltiplos graus
de liberdade

15

Exemplo 2 - Solução numérica

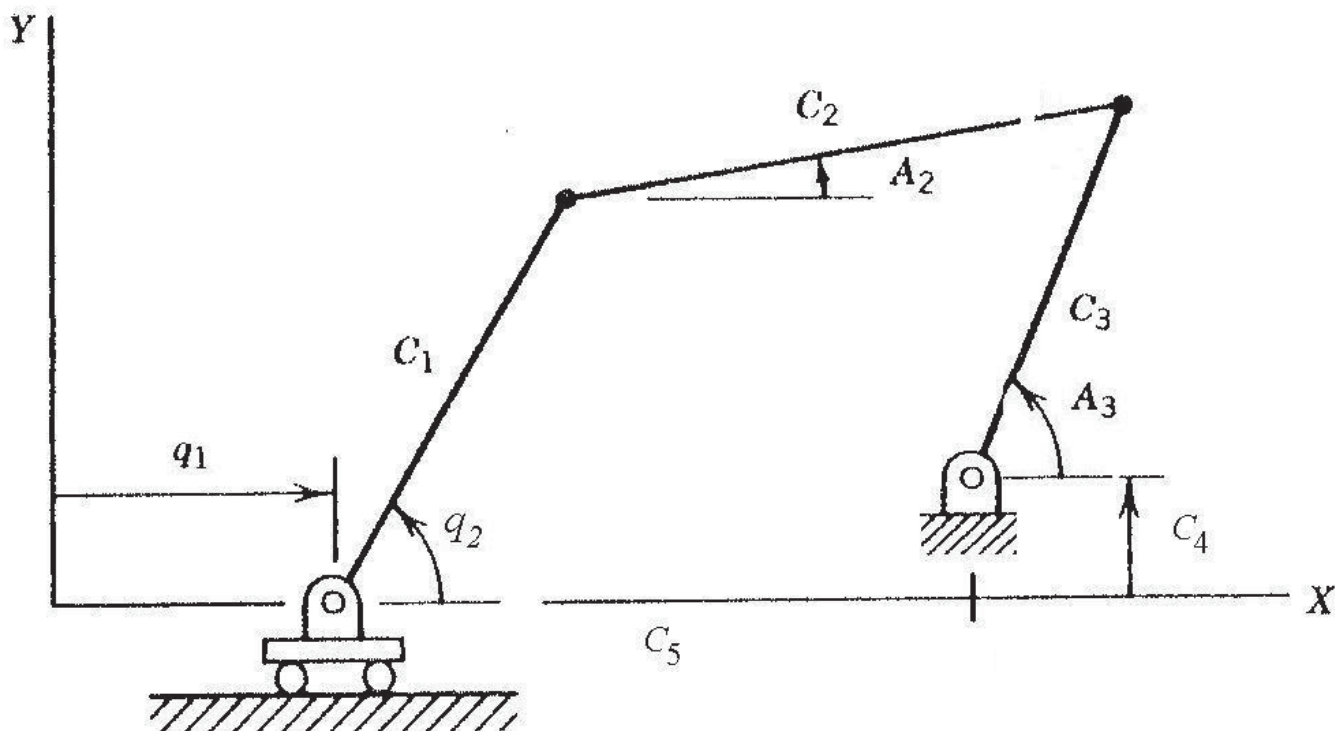


FIGURE 3.2 Kinematic Skeleton Four-Bar Mechanism with Translating Crank Pivot

18/08/2016

Mecanismos com múltiplos graus
de liberdade

16

1. Número de graus de liberdade

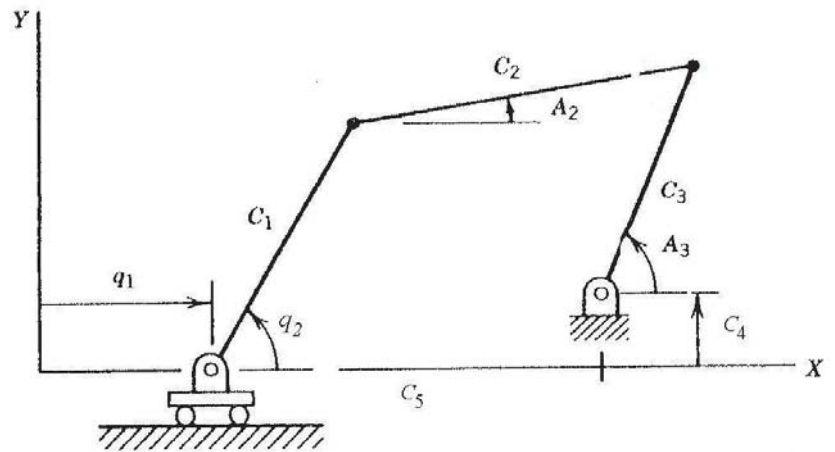


FIGURE 3.2 Kinematic Skeleton Four-Bar Mechanism with Translating Crank Pivot

$$N := 5 \quad P1 := 5 \quad P2 := 0$$

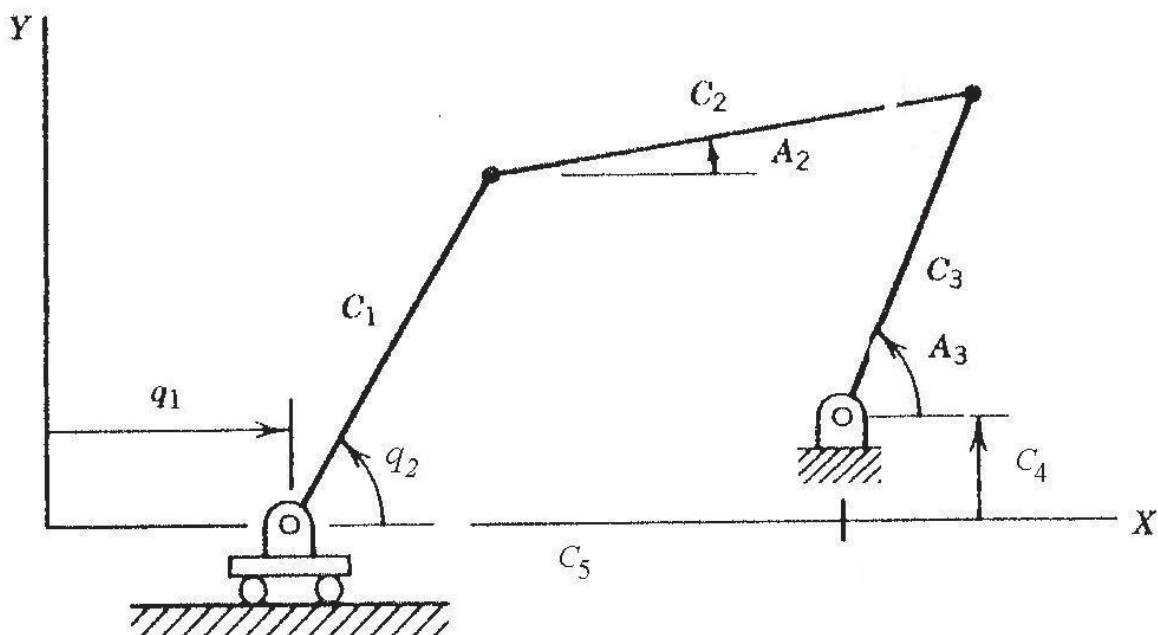
$$F := 3 \cdot (N - 1) - 2 \cdot P1 - P2 \quad F = 2$$

18/08/2016

Mecanismos com múltiplos graus de liberdade

17

2. Decomposição dos pares superiores
3. Definição do sistema GLOBAL de coordenadas
4. Identificação das medidas constantes
5. Definição das variáveis primárias e secundárias



18/08/2016 FIGURE 3.2 Kinematic Skeleton Four-Bar Mechanism with Translating Crank Pivot

18

6. Montagem das equações cinemáticas de posição

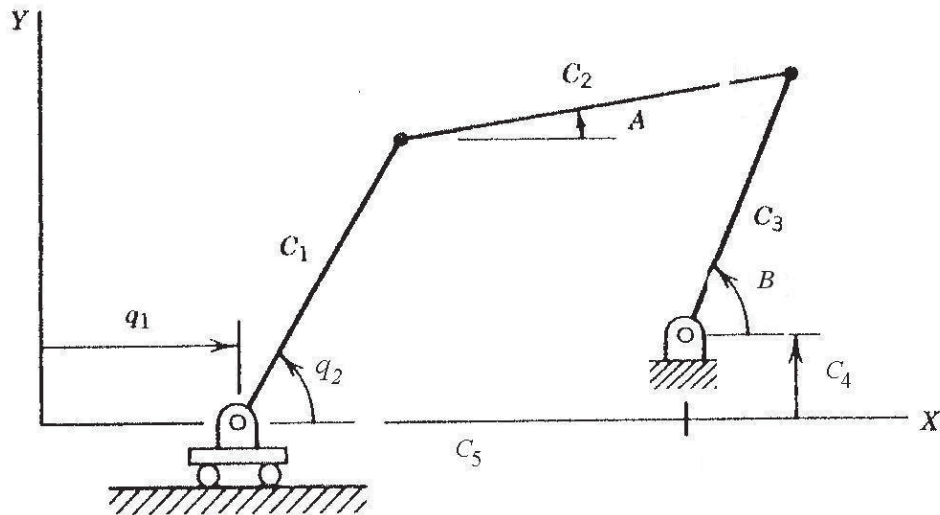


FIGURE 3.2 Kinematic Skeleton Four-Bar Mechanism with Translating Crank Pivot

$$q_1 + C_1 \cdot \cos(q_2) + C_2 \cdot \cos(A) - C_3 \cdot \cos(B) - C_5 = 0$$

$$C_1 \cdot \sin(q_2) + C_2 \cdot \sin(A) - C_3 \cdot \sin(B) - C_4 = 0$$

18/08/2016

Mecanismos com múltiplos graus
de liberdade

19

7-Solução numérica do sistema de equações

Variáveis primárias:

$$q_1 := 40\text{mm}$$

$$q_2 := 60\text{deg}$$

$$q_{1p} := 10 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

$$q_{2p} := 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$q_{1pp} := 0 \frac{\text{mm}}{\text{s}^2}$$

$$q_{2pp} := 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Solução numérica

$$a := 20\text{deg}$$

$$b := 45\text{deg}$$

Given

$$q_1 + C_1 \cdot \cos(q_2) + C_2 \cdot \cos(a) - C_3 \cdot \cos(b) - C_5 = 0$$

$$C_1 \cdot \sin(q_2) + C_2 \cdot \sin(a) - C_3 \cdot \sin(b) - C_4 = 0$$

18/08/2016

$$\begin{pmatrix} A(q_1, q_2) \\ B(q_1, q_2) \end{pmatrix} := \text{Find}(a, b)$$

Mecanismos com múltiplos graus
de liberdade

20

8-Equações das velocidades

$$J \cdot \dot{S} + Q \cdot \dot{q} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial A} & \frac{\partial f_1}{\partial B} \\ \frac{\partial f_2}{\partial A} & \frac{\partial f_2}{\partial B} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{A} \\ \dot{B} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\dot{S} = (-J^{-1} \cdot Q) \cdot \dot{q}$$

$$\dot{S} = (K) \cdot \dot{q}$$

$$K = -J^{-1} \cdot Q.$$

18/08/2016

Mecanismos com múltiplos graus
de liberdade

21

Solução para as velocidades secundárias

$$J(q_1, q_2) = \begin{pmatrix} -C_2 \sin(A) & C_3 \sin(B) \\ C_2 \cos(A) & -C_3 \cos(B) \end{pmatrix} \quad Q(q_1, q_2) = \begin{pmatrix} 1 & -C_2 \sin(q_2) \\ 0 & C_1 \cos(q_2) \end{pmatrix}$$

$$K = -J^{-1} \cdot Q$$

$$\begin{pmatrix} K_{a1} & K_{a2} \\ K_{b1} & K_{b2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -C_2 \sin(A) & C_3 \sin(B) \\ C_2 \cos(A) & -C_3 \cos(B) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -C_2 \sin(q_2) \\ 0 & C_1 \cos(q_2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} K_{a1} & K_{a2} \\ K_{b1} & K_{b2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos(B)}{C_2 \sin(A - B)} & \frac{C_1 \sin(B) \cdot \cos(q_2) - C_2 \cos(B) \cdot \sin(q_2)}{C_2 \sin(A - B)} \\ \frac{\cos(A)}{C_3 \sin(A - B)} & \frac{C_1 \sin(A) \cdot \cos(q_2) - C_2 \cos(A) \cdot \sin(q_2)}{C_3 \sin(A - B)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{A} \\ \dot{B} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{a1} & K_{a2} \\ K_{b1} & K_{b2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix}$$

18/08/2016

Mecanismos com múltiplos graus
de liberdade

22

Acelerações secundárias

$$\begin{Bmatrix} \ddot{A} \\ \ddot{B} \end{Bmatrix} = [K] \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \frac{d}{dq_1} [K] \cdot \dot{q}_1 \cdot \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} + \frac{d}{dq_2} [K] \cdot \dot{q}_2 \cdot \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \ddot{A} \\ \ddot{B} \end{Bmatrix} = [K] \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + [L_1] \cdot \dot{q}_1 \cdot \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} + [L_2] \cdot \dot{q}_2 \cdot \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix}$$

$$[L_1] = \frac{d}{dq_1} [K]$$

$$[L_2] = \frac{d}{dq_2} [K]$$

Acelerações secundárias

(obtenção **numérica** das derivadas dos coeficientes de velocidade)

Equações das velocidades na forma matricial :

$$[J] \cdot \{\dot{S}\} + [Q] \cdot \{\dot{q}\} = \{0\}$$

$$[J] \cdot [K] \cdot \{\dot{q}\} + [Q] \cdot \{\dot{q}\} = \{0\}$$

$$[J] \cdot [K] + [Q] = \{0\}$$

Derivando em relação a q_1 :

$$\frac{d}{dq_1} [J] \cdot [K] + [J] \cdot \frac{d}{dq_1} [K] + \frac{d}{dq_1} [Q] = \{0\}$$

$$[L_1] = \frac{d}{dq_1} [K]$$

$$[L_1] = -[J]^{-1} \cdot \left(\frac{d}{dq_1} [J] \cdot [K] + \frac{d}{dq_1} [Q] \right)$$

Acelerações secundárias

(obtenção **numérica** das derivadas dos coeficientes de velocidade)

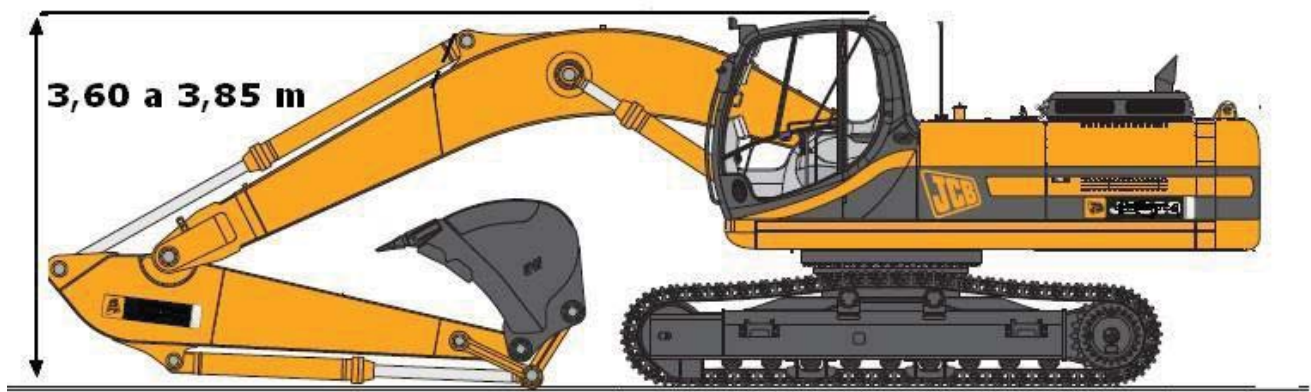
Derivando em relação a q_2 :

$$\frac{d}{dq_2} [J] \cdot [K] + [J] \cdot \frac{d}{dq_2} [K] + \frac{d}{dq_2} [Q] = \{0\}$$

$$[L_2] = \frac{d}{dq_2} [K]$$

$$[L_2] = -[J]^{-1} \cdot \left(\frac{d}{dq_2} [J] \cdot [K] + \frac{d}{dq_2} [Q] \right)$$

Exemplo



Exemplo

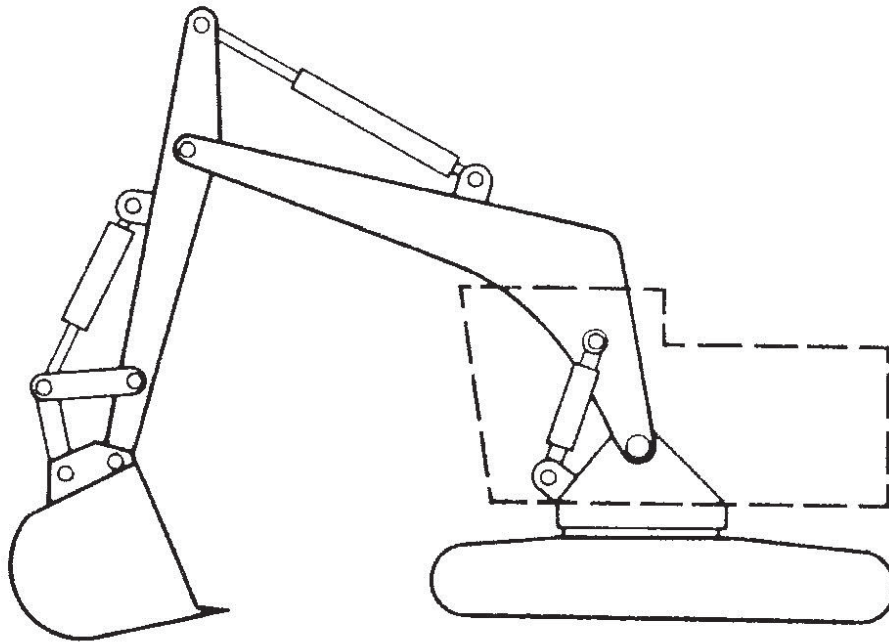


FIGURE 3.4 Pictorial Representation of a Power Shovel

18/08/2016

Mecanismos com múltiplos graus de liberdade

27

Cadeia cinemática

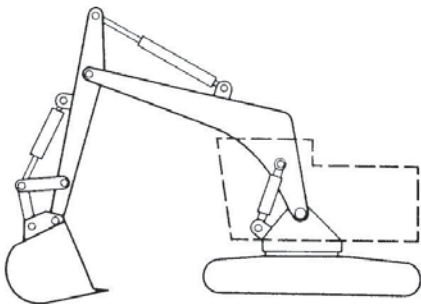


FIGURE 3.4 Pictorial Representation of a Power Shovel

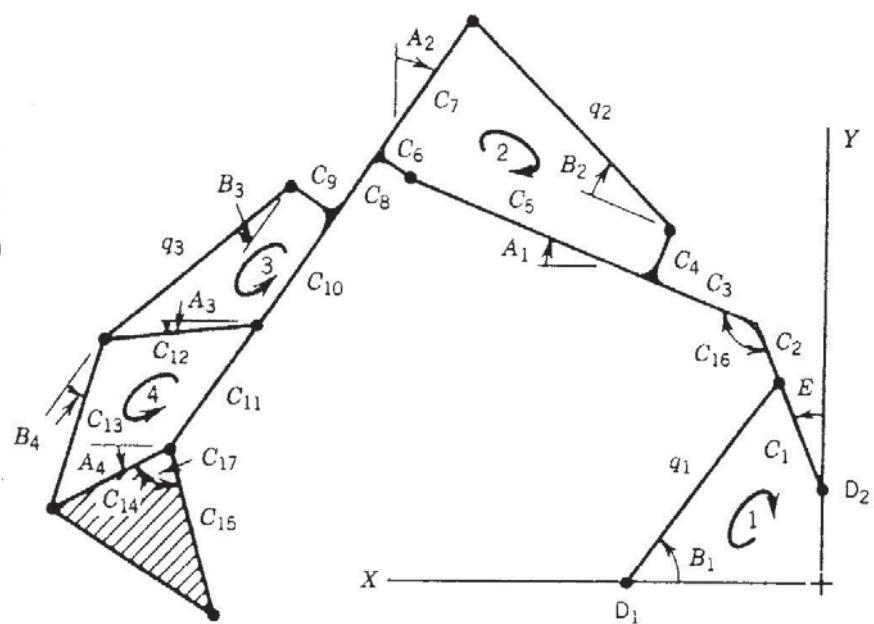


FIGURE 3.5 Kinematic Skeleton for the Power Shovel Showing Segment Lengths, Angles, and Loops

18/08/2016

Mecanismos com múltiplos graus de liberdade

28

Equações cinemáticas de posição

Loop 1

$$D_1 - q_1 \cos B_1 - C_1 \sin E = 0$$

$$D_2 - q_1 \sin B_1 + C_1 \cos E = 0$$

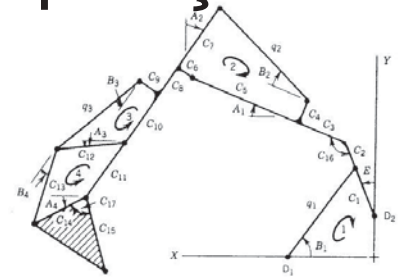


FIGURE 3.5 Kinematic Skeleton for the Power Shovel Showing Segment Lengths, Angles, and Loops

Loop 2

$$C_5 \cos A_1 + C_4 \sin A_1 + C_6 \cos A_2 - C_7 \sin A_2 - q_2 \cos(A_1 + B_2) = 0$$

$$C_5 \sin A_1 - C_4 \cos A_1 + C_6 \sin A_2 + C_7 \cos A_2 - q_2 \sin(A_1 + B_2) = 0$$

Loop 3

$$C_9 \cos A_2 + q_3 \sin(A_2 + B_3) - C_{12} \cos A_3 - C_{10} \sin A_2 = 0$$

$$C_9 \sin A_2 - q_3 \cos(A_2 + B_3) + C_{12} \sin A_3 + C_{10} \cos A_2 = 0$$

Loop 4

$$C_{12} \cos A_3 + C_{13} \sin(A_2 - B_4) - C_{14} \cos A_4 - C_{11} \sin A_2 = 0$$

$$-C_{12} \sin A_3 - C_{13} \cos(A_2 - B_4) + C_{14} \sin A_4 + C_{11} \cos A_2 = 0$$

Coeficientes de velocidade

$$[K] = \begin{bmatrix} 0.053783 & 0.0 & 0.0 \\ -0.027527 & 0.0 & 0.0 \\ 0.053783 & -0.043035 & 0.0 \\ 0.0 & -0.005491 & 0.0 \\ -0.053783 & 0.043035 & 0.062169 \\ 0.0 & 0.0 & -0.010556 \\ -0.053783 & 0.043035 & 0.122606 \\ 0.0 & 0.0 & 0.034016 \end{bmatrix}$$