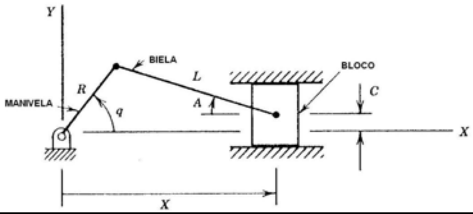
Mecanismos

Mecanismos com 1 GL
Análise geral
de velocidade e aceleração

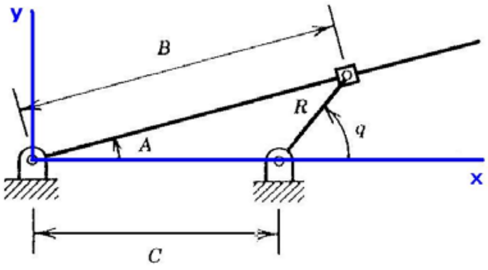
Prof. Jorge Luiz Erthal
jorgeerthal@gmail.com



Conteúdo

- Equações de velocidade
  - Matriz jacobiana
  - Singularidades
  - Coeficientes de velocidade
- Equações de aceleração
  - Derivadas dos coeficientes de velocidade

2



Equações de posição

$$B.\cos(A) - R.\cos(q) - C = 0 \quad (1)$$

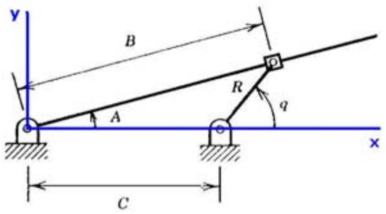
$$B.\sin(A) - R.\sin(q) = 0 \quad (2)$$

B ≠ 0

7-Solução do sistema de equações

$$B.\cos(A) - R.\cos(q) - C = 0 \quad (1)$$

$$B.\sin(A) - R.\sin(q) = 0 \quad (2)$$



Considerando $B \neq 0$ e dividindo (2) por (1) ...

$$\mathrm{A} = \mathrm{atan}\left(\frac{\mathrm{R.sin(q)}}{\mathrm{R.cos(q)+C}}\right)$$

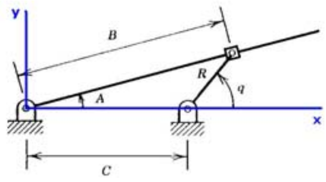
Solução **algébrica**
(as variáveis secundárias são obtidas de forma explícita)

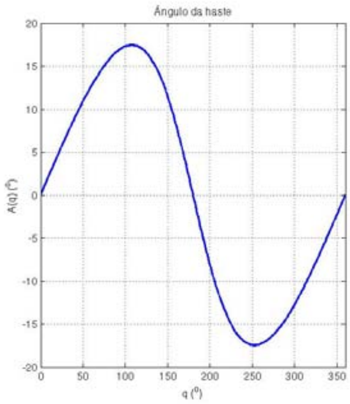
$$B = \frac{R.\cos(q) + C}{\cos(A)} \quad \text{ou} \quad B = \frac{R.\sin(q)}{\sin(A)}$$

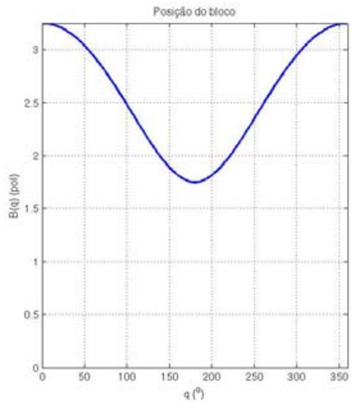
7-Solução do sistema de equações

$$A = \operatorname{atan}\left(\frac{R.\sin(q)}{R.\cos(q)+C}\right)$$

$$B = \frac{R.\cos(q)+C}{\cos(A)} \quad \text{ou} \quad B = \frac{R.\sin(q)}{\sin(A)}$$







Equações de velocidade

Obtidas através das derivadas das equações de posição em relação ao tempo:

Equações cinemáticas de posição:

$$B.\cos(A) - R.\cos(q) - C = 0$$
$$B.\sin(A) - R.\sin(q) = 0$$

Derivando em ralação ao tempo:

$$\dot{B}.\cos(A) - B.\sin(A).\dot{A} + R.\sin(q).\dot{q} = 0$$
$$\dot{B}.\sin(A) + B.\cos(A).\dot{A} - R.\cos(q).\dot{q} = 0$$

6

$$\dot{B}.\cos(A) - B.\sin(A).\dot{A} + R.\sin(q).\dot{q} = 0$$

$$\dot{B}.\sin(A) + B.\cos(A).\dot{A} - R.\cos(q).\dot{q} = 0$$

Representação do sistema na forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -B.\sin(A) & \cos(A) \\ B.\cos(A) & \sin(A) \end{bmatrix}}_{\text{Matriz jacobiana}} . \underbrace{\begin{Bmatrix} \dot{A} \\ \dot{B} \end{Bmatrix}}_{\text{Vetor das velocidades secundárias}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} R.\sin(q) \\ -R.\cos(q) \end{Bmatrix}}_{\text{Vetor dos coeficientes constantes}} . \underbrace{\dot{q}}_{\text{Velocidade primária}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

FORMA GERAL: $\boxed{J.\dot{S} + Q.\dot{q} = 0}$

Solução para as velocidades secundárias

$$J.\dot{S} + Q.\dot{q} = 0$$

Isolando $\dot{S}$:

$$\dot{S} = -J^{-1}.Q.\dot{q}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{A} \\ \dot{B} \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} -B.\sin(A) & \cos(A) \\ B.\cos(A) & \sin(A) \end{bmatrix}^{-1} . \begin{Bmatrix} R.\sin(q) \\ -R.\cos(q) \end{Bmatrix} . \dot{q}$$

Inversão de uma matriz 2 x 2 ➔ $\boxed{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a.d - b.c} . \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}$

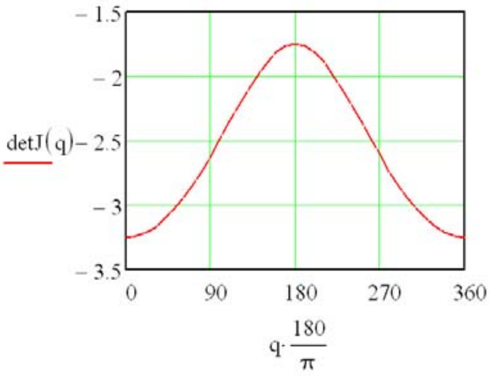
$$J^{-1} = \begin{bmatrix} -B.\sin(A) & \cos(A) \\ B.\cos(A) & \sin(A) \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-B.\sin(A).\sin(A) - B.\cos(A).\cos(A)} . \begin{bmatrix} \sin(A) & -\cos(A) \\ -B.\cos(A) & -B.\sin(A) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{J^{-1} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\sin(A)}{B} & \dfrac{\cos(A)}{B} \\ \cos(A) & \sin(A) \end{bmatrix}}$$

Determinante da matriz jacobiana

$$J = \begin{bmatrix} -B.\sin(A) & \cos(A) \\ B.\cos(A) & \sin(A) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\det J = -B}$$



9

Solução para as velocidades secundárias

$$\begin{Bmatrix} \dot{A} \\ \dot{B} \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} -\dfrac{\sin(A)}{B} & \dfrac{\cos(A)}{B} \\ \cos(A) & \sin(A) \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} R.\sin(q) \\ -R.\cos(q) \end{Bmatrix} . \dot{q}$$

$$\boxed{\dot{S} = -J^{-1}.Q.\dot{q}}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{A} \\ \dot{B} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{R}{B}.\cos(A-q) \\ R.\sin(A-q) \end{Bmatrix} . \dot{q}$$

$$\dot{S} = K.\dot{q}$$

$$\dot{A} = \boxed{\frac{R}{B}.\cos(A-q)}.\dot{q}$$

$$\dot{B} = \boxed{R.\sin(A-q)}.\dot{q}$$

$$\dot{A} = \boxed{K_a}.\dot{q}$$

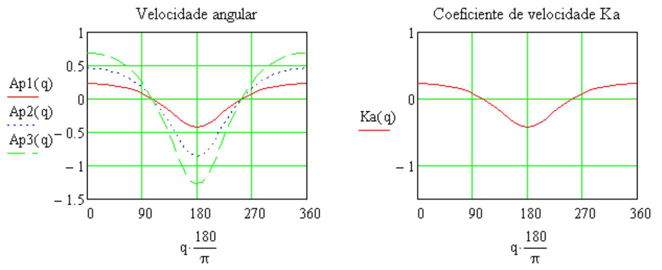
$$\dot{B} = \boxed{K_b}.\dot{q}$$

Coeficientes de velocidade

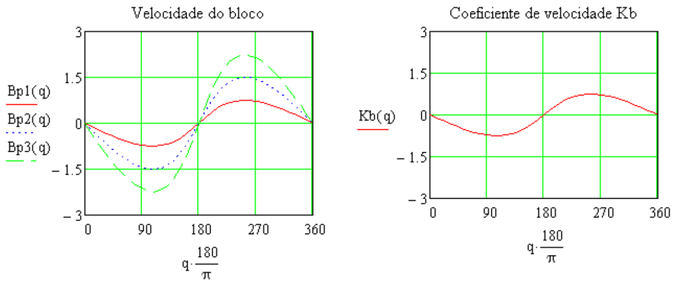
10

Velocidades e Coeficientes de Velocidades

$$\dot{A} = \frac{R}{B}.\cos(A-q).\dot{q}$$
$$\dot{A} = K_a.\dot{q}$$



$$\dot{B} = R.\sin(A-q).\dot{q}$$
$$\dot{B} = K_b.\dot{q}$$



11

Equações das acelerações

$$\dot{B}.\cos(A) - B.\sin(A).\dot{A} + R.\sin(q).\dot{q} = 0$$
$$\dot{B}.\sin(A) + B.\cos(A).\dot{A} - R.\cos(q).\dot{q} = 0$$

Derivando as equações de velocidade em relação ao tempo

$$\ddot{B}.\cos(A) - \dot{B}.\sin(A).\dot{A} - \dot{B}.\sin(A).\dot{A} - B.\cos(A).\dot{A}.\dot{A} - B.\sin(A).\ddot{A} + R.\cos(q).\dot{q}.\dot{q} + R.\sin(q).\ddot{q} = 0$$
$$\ddot{B}.\sin(A) + \dot{B}.\cos(A).\dot{A} + \dot{B}.\cos(A).\dot{A} - B.\sin(A).\dot{A}.\dot{A} + B.\cos(A).\ddot{A} + R.\sin(q).\dot{q}.\dot{q} - R.\cos(q).\ddot{q} = 0$$

Agrupando as parcelas :

$$\ddot{B}.\cos(A) - 2.\dot{A}.\dot{B}.\sin(A) - B.\cos(A).\dot{A}^2 - B.\sin(A).\ddot{A} + R.\cos(q).\dot{q}^2 + R.\sin(q).\ddot{q} = 0$$
$$\ddot{B}.\sin(A) + 2.\dot{A}.\dot{B}.\cos(A) - B.\sin(A).\dot{A}^2 + B.\cos(A).\ddot{A} + R.\sin(q).\dot{q}^2 - R.\cos(q).\ddot{q} = 0$$

12

Equações das acelerações

$$\ddot{B}.\cos(A) - 2.\dot{A}.\dot{B}.\sin(A) - B.\cos(A).\dot{A}^2 - B.\sin(A).\ddot{A} + R.\cos(q).\dot{q}^2 + R.\sin(q).\ddot{q} = 0$$
$$\ddot{B}.\sin(A) + 2.\dot{A}.\dot{B}.\cos(A) - B.\sin(A).\dot{A}^2 + B.\cos(A).\ddot{A} + R.\sin(q).\dot{q}^2 - R.\cos(q).\ddot{q} = 0$$

na forma matricial :

$$\begin{bmatrix} -B.\sin(A) & \cos(A) \\ B.\cos(A). & \sin(A) \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} \ddot{A} \\ \ddot{B} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.\dot{A}.\dot{B}.\sin(A) + B.\dot{A}^2.\cos(A) - R.\sin(q).\ddot{q} - R.\cos(q).\dot{q}^2 \\ -2.\dot{A}.\dot{B}.\cos(A) + B.\dot{A}^2.\sin(A) + R.\cos(q).\ddot{q} - R.\sin(q).\dot{q}^2 \end{Bmatrix}$$

Substituindo $\dot{A} = K_a.\dot{q}$ e $\dot{B} = K_b.\dot{q}$, tem - se :

$$\begin{Bmatrix} \ddot{A} \\ \ddot{B} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{R}{B}.\cos(A-q) \\ R.\sin(A-q) \end{Bmatrix} .\ddot{q} + \begin{Bmatrix} -\frac{2.K_a.K_b}{B} + \frac{R}{B}.\sin(A-q) \\ K_a^2.B - R.\cos(A-q) \end{Bmatrix} .\dot{q}^2$$

$$\ddot{A} = \frac{R}{B}.\cos(A-q).\ddot{q} + \left[-\frac{2.K_a.K_b}{B} + \frac{R}{B}.\sin(A-q) \right] .\dot{q}^2$$
$$\ddot{B} = R.\sin(A-q).\ddot{q} + \left[K_a^2.B - R.\cos(A-q) \right] .\dot{q}^2$$

Equações das acelerações

$$\begin{Bmatrix} \ddot{A} \\ \ddot{B} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{R}{B}.\cos(A-q) \\ R.\sin(A-q) \end{Bmatrix} .\ddot{q} + \begin{Bmatrix} -\frac{2.K_a.K_b}{B} + \frac{R}{B}.\sin(A-q) \\ K_a^2.B - R.\cos(A-q) \end{Bmatrix} .\dot{q}^2$$

$$\begin{Bmatrix} \ddot{A} \\ \ddot{B} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_a \\ K_b \end{Bmatrix} .\ddot{q} + \begin{Bmatrix} L_a \\ L_b \end{Bmatrix} .\dot{q}^2 \qquad \ddot{S} = K.\ddot{q} + L.\dot{q}^2$$

$$\ddot{A} = \frac{R}{B}.\cos(A-q).\ddot{q} + \left[-\frac{2.K_a.K_b}{B} + \frac{R}{B}.\sin(A-q) \right] .\dot{q}^2$$
$$\ddot{B} = R.\sin(A-q).\ddot{q} + \left[K_a^2.B - R.\cos(A-q) \right] .\dot{q}^2$$

Análise das expressões

Velocidades

$$\dot{A} = \frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = K_a . \dot{q} \quad \Rightarrow \quad \boxed{K_a = \frac{dA}{dq}}$$

$$\dot{B} = \frac{dB}{dt} = \frac{dB}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = K_b . \dot{q} \quad \Rightarrow \quad \boxed{K_b = \frac{dB}{dq}}$$

Acelerações

$$\dot{A} = K_a . \dot{q}$$

$$\ddot{A} = K_a . \frac{d\dot{q}}{dt} + \frac{dK_a}{dt} . \dot{q} = K_a . \ddot{q} + \frac{dK_a}{dq} . \frac{dq}{dt} . \dot{q} = K_a . \ddot{q} + L_a . \dot{q}^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{L_a = \frac{dK_a}{dq}}$$

$$\dot{B} = K_b . \dot{q}$$

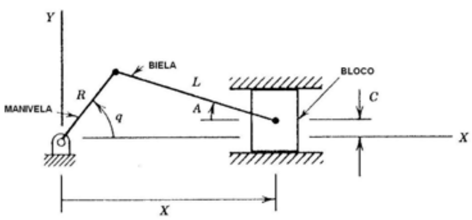
$$\ddot{B} = K_b . \frac{d\dot{q}}{dt} + \frac{dK_b}{dt} . \dot{q} = K_b . \ddot{q} + \frac{dK_b}{dq} . \frac{dq}{dt} . \dot{q} = K_b . \ddot{q} + L_b . \dot{q}^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{L_b = \frac{dK_b}{dq}}$$

15

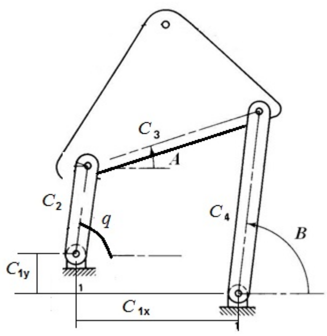
Exercícios

Obter as equações para o cálculo das velocidades e das acelerações dos mecanismos:

a) biela-manivela



b) de 4 barras



16