

EIXOS

Prof. Julio César de Almeida
Prof. Jorge Luiz Erthal

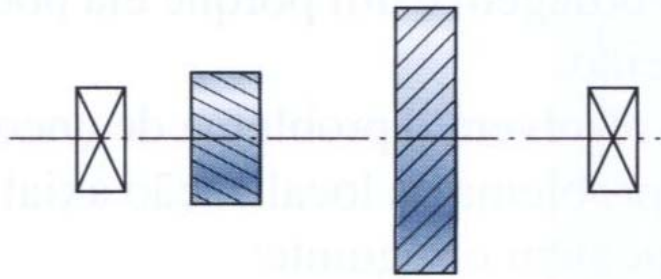
Projeto de Eixos

Definições:

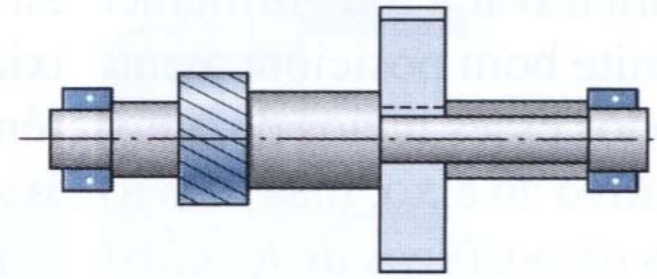
O termo **EIXO** normalmente se refere a um elemento relativamente longo, de secção circular, que gira e transmite potência.

Por outro lado, porém, um eixo pode possuir uma secção não circular e que não precisa, necessariamente, girar, sendo assim um elemento estacionário que serve para suportar um elemento girante (como os eixos de um automóvel, por exemplo).

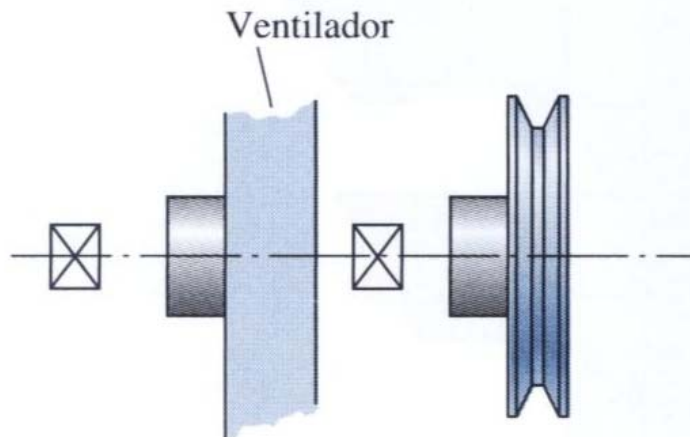
Projeto de Eixos



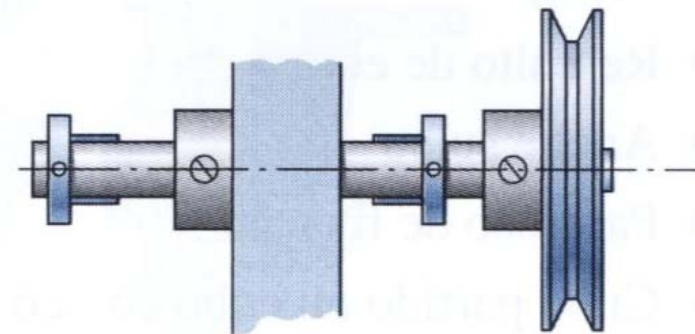
(a)



(b)



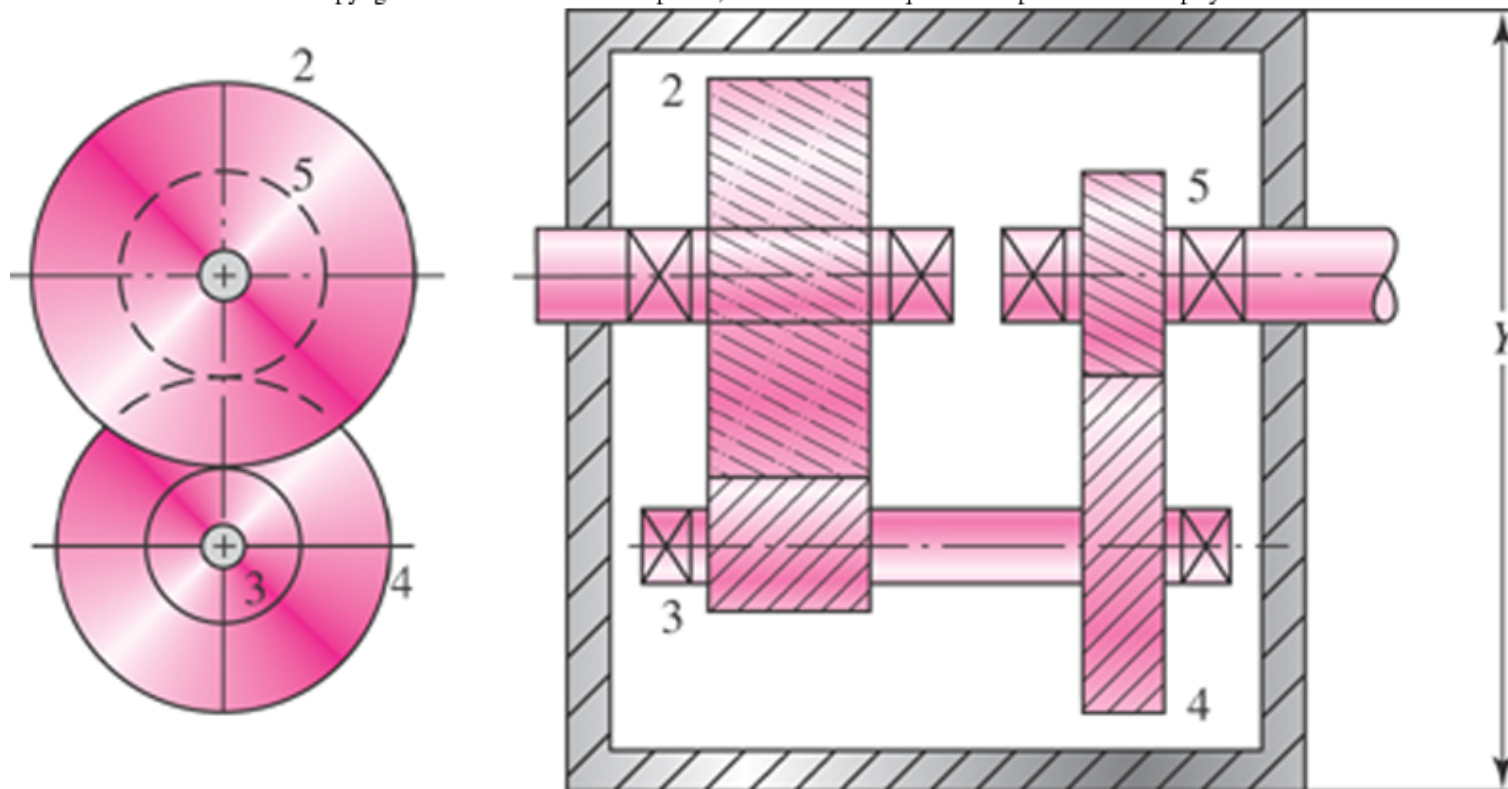
(c)



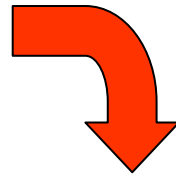
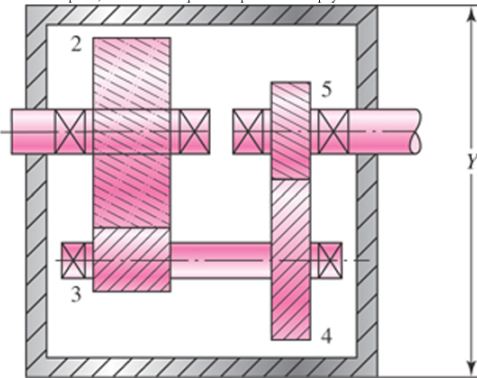
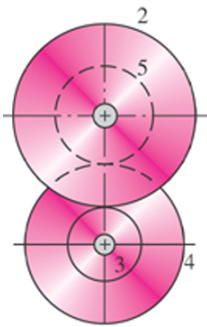
(d)

Projeto de Eixos

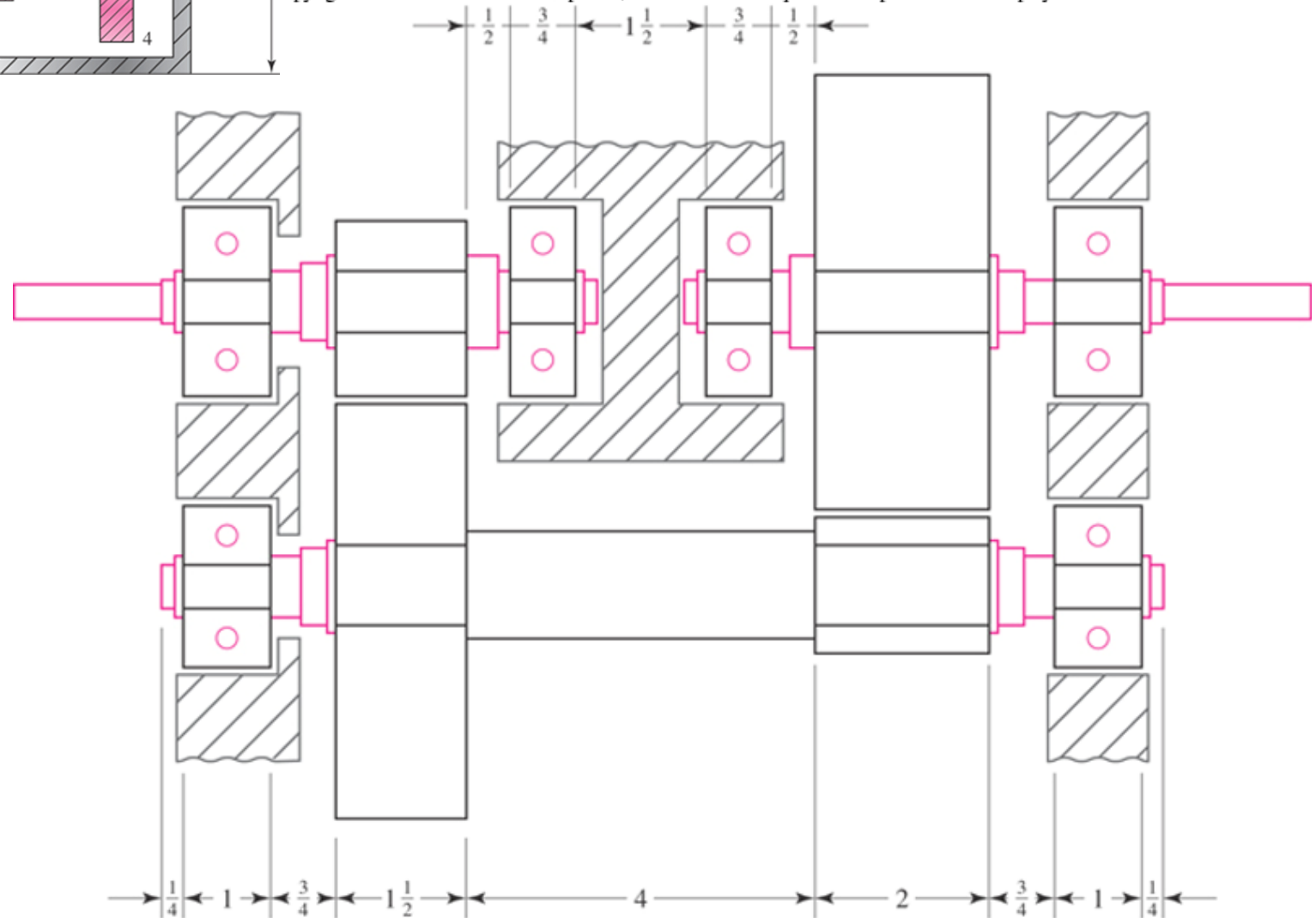
Copyright © The McGraw-Hill Companies, Inc. Permission required for reproduction or display.



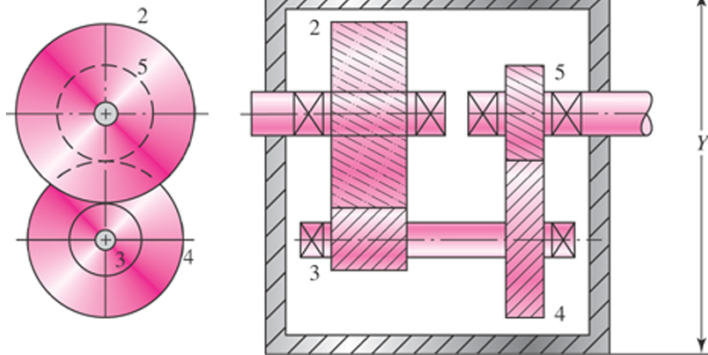
Copyright © The McGraw-Hill Companies, Inc. Permission required for reproduction or display.



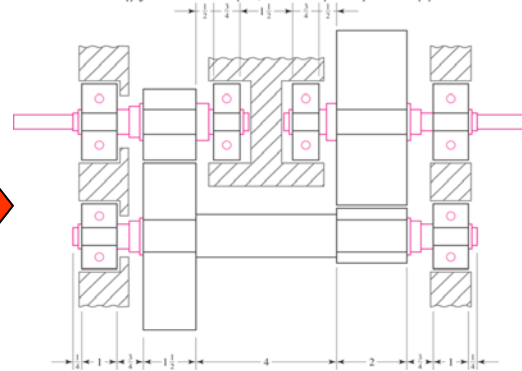
Copyright © The McGraw-Hill Companies, Inc. Permission required for reproduction or display.



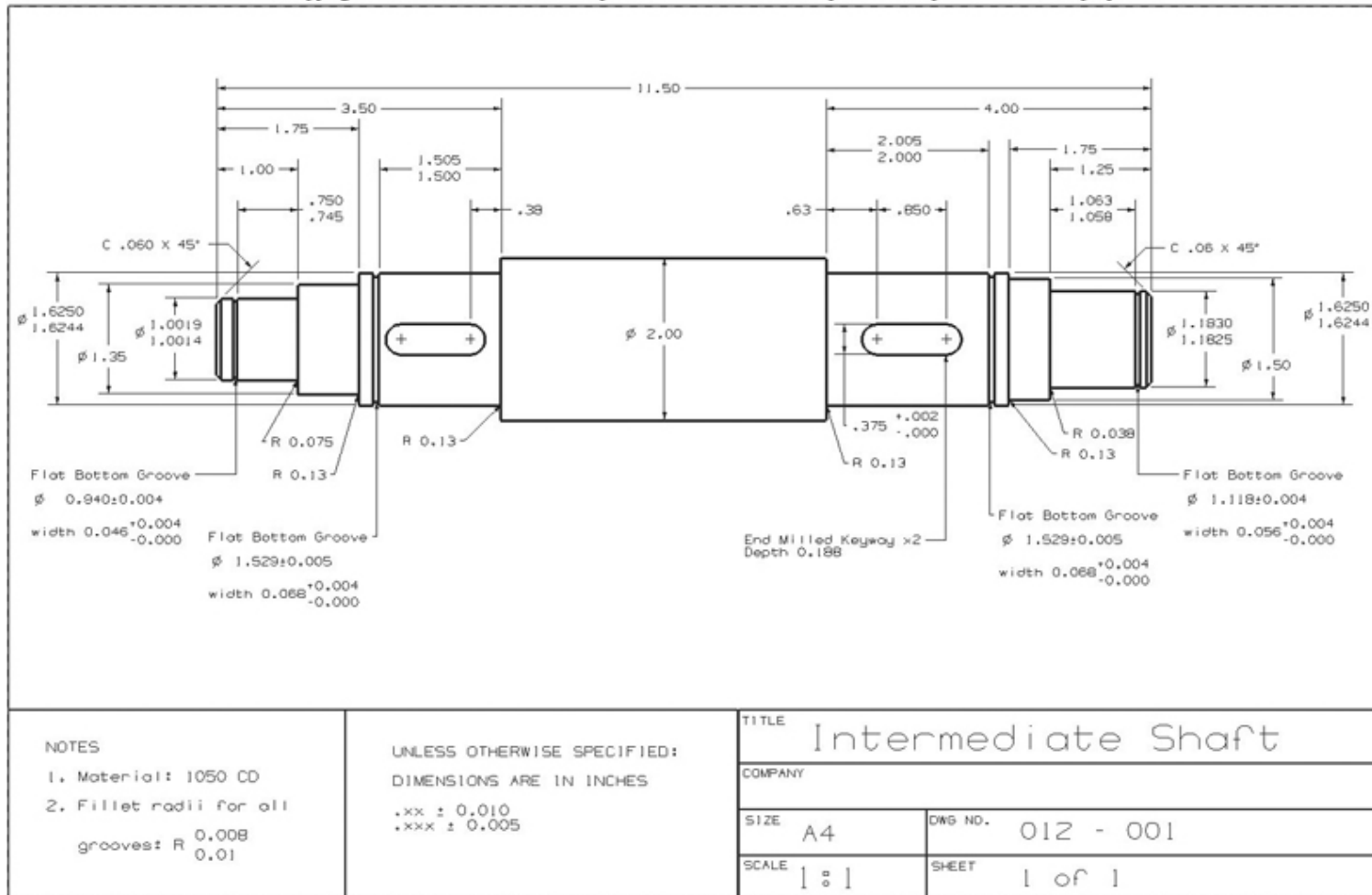
Copyright © The McGraw-Hill Companies, Inc. Permission required for reproduction or display.



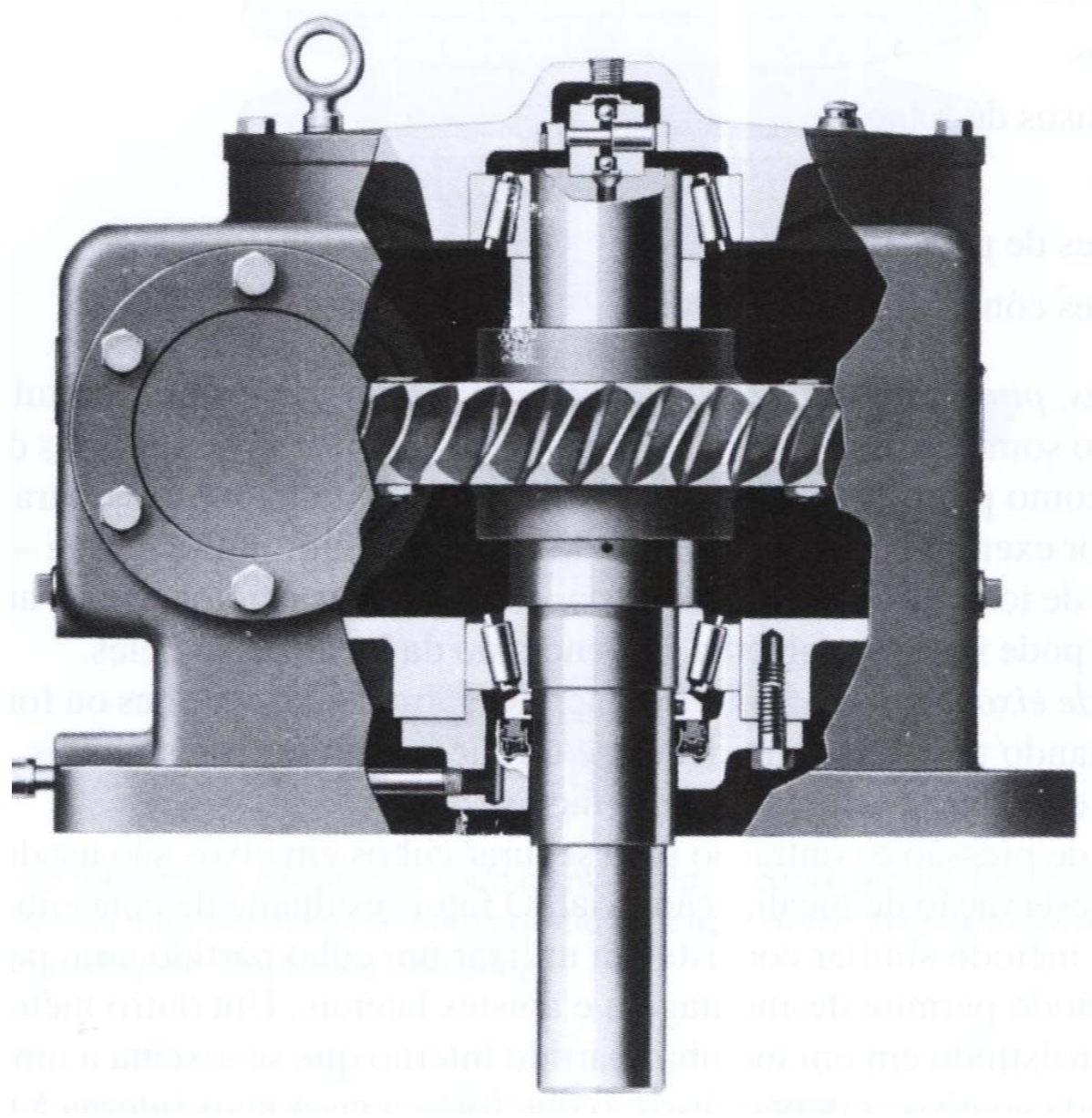
Copyright © The McGraw-Hill Companies, Inc. Permission required for reproduction or display.



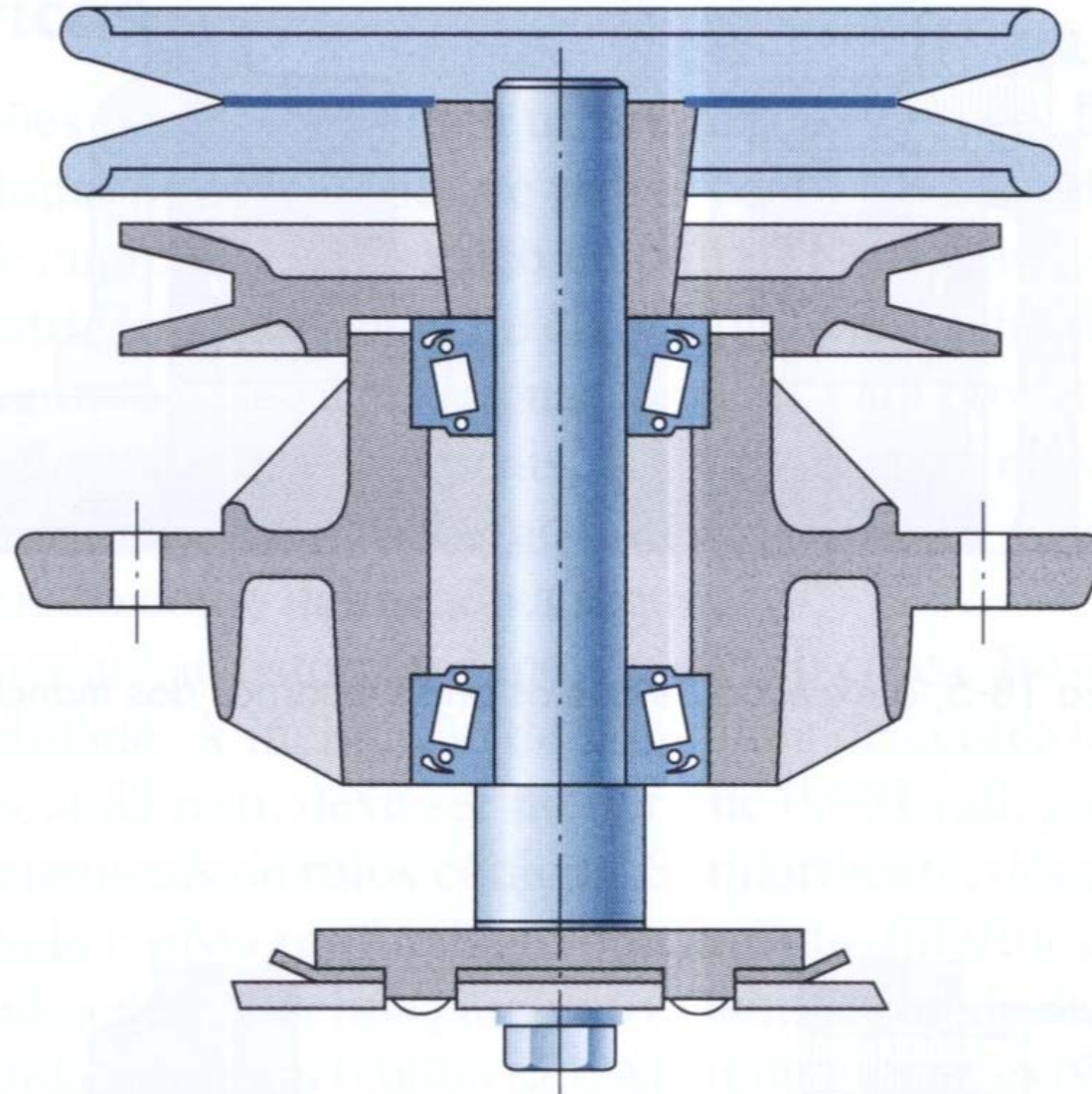
Copyright © The McGraw-Hill Companies, Inc. Permission required for reproduction or display.



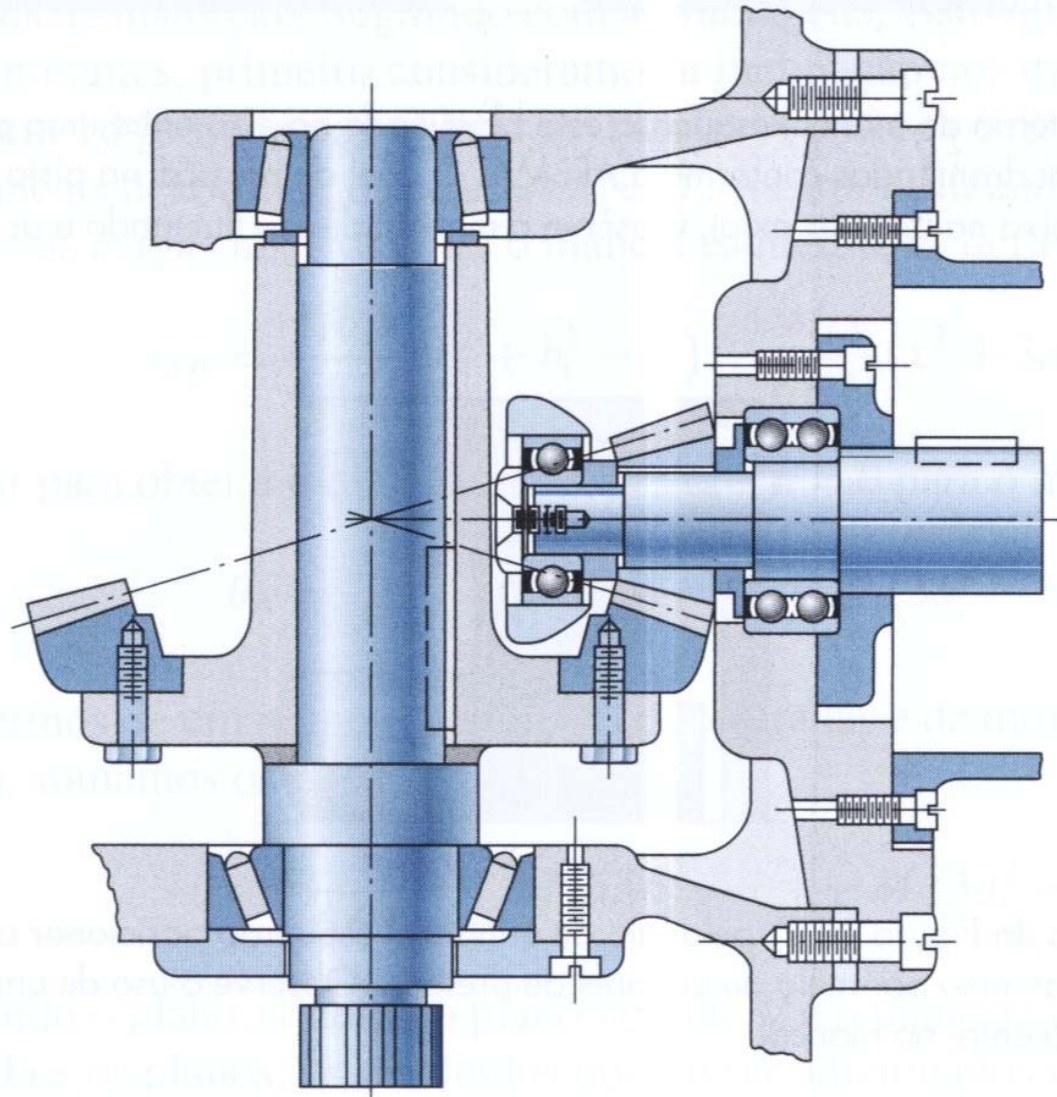
Projeto de Eixos



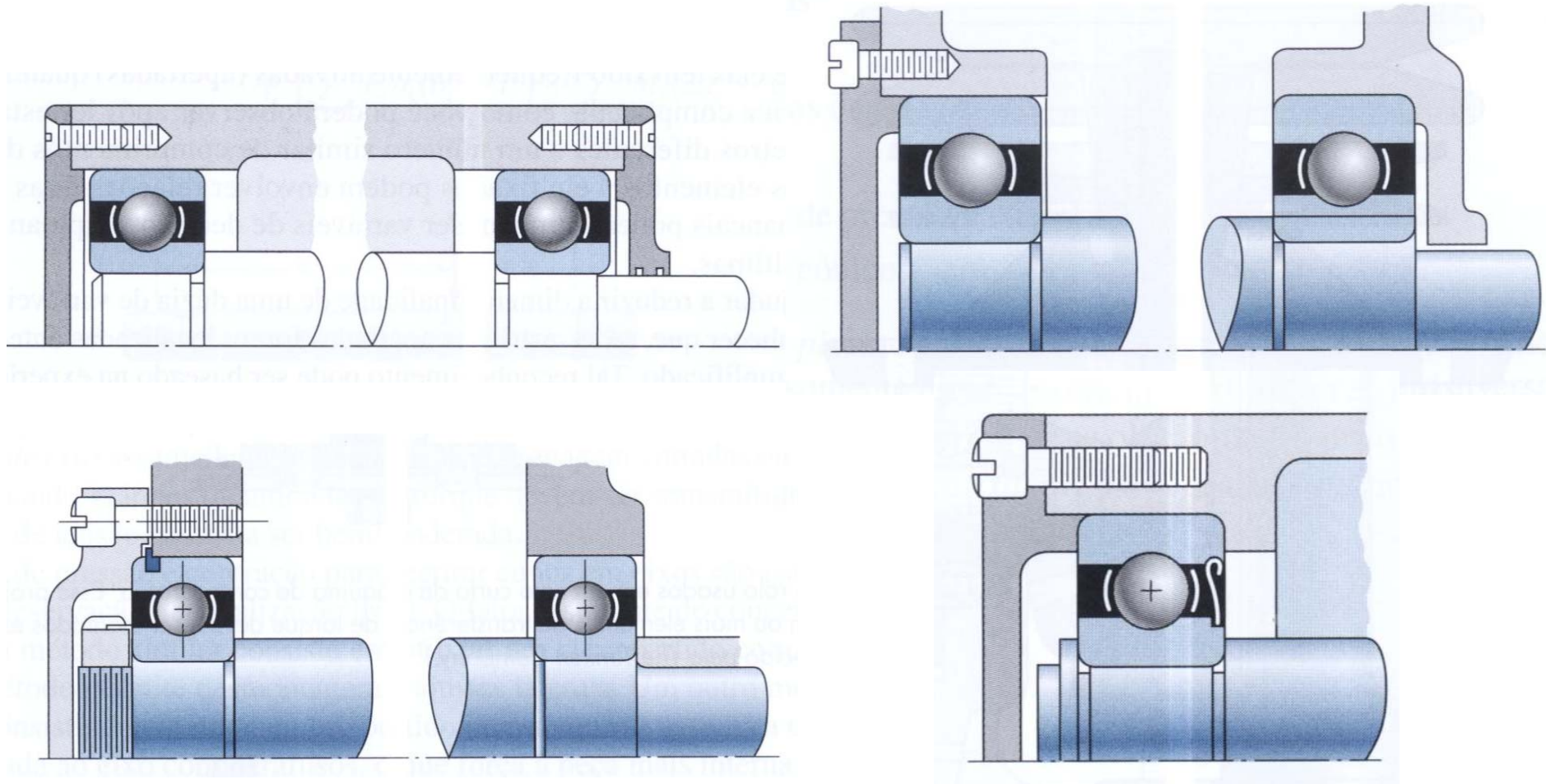
Projeto de Eixos



Projeto de Eixos



Projeto de Eixos



Projeto de Eixos

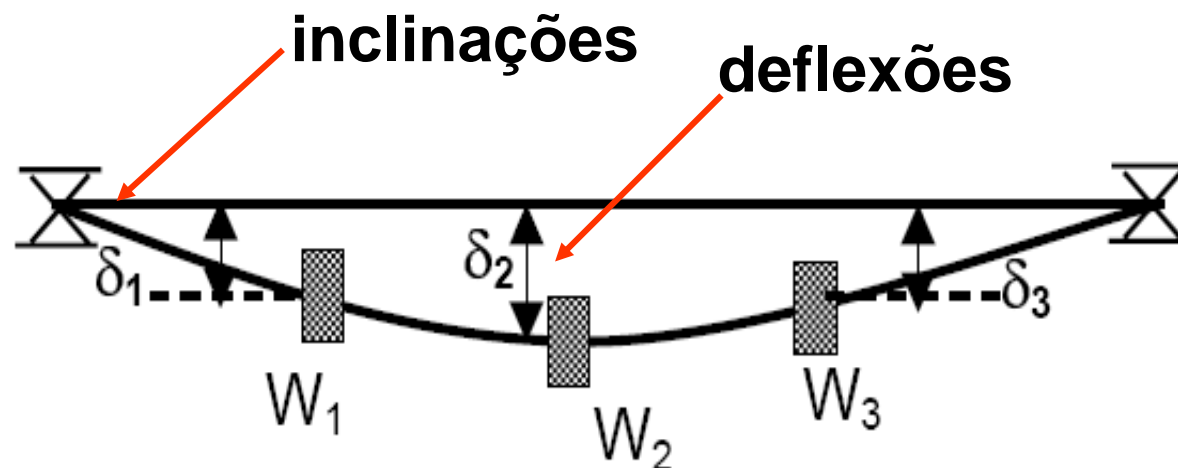
Preliminares:

“o dimensionamento das engrenagens, polias, mancais e demais elementos deverão ter sido preliminarmente analisados, com definições acerca dos seus tamanhos e espaçamentos”

“tais parâmetros permitirão uma análise mediante os critérios de deflexão e rigidez, como também, de tensão e resistência”

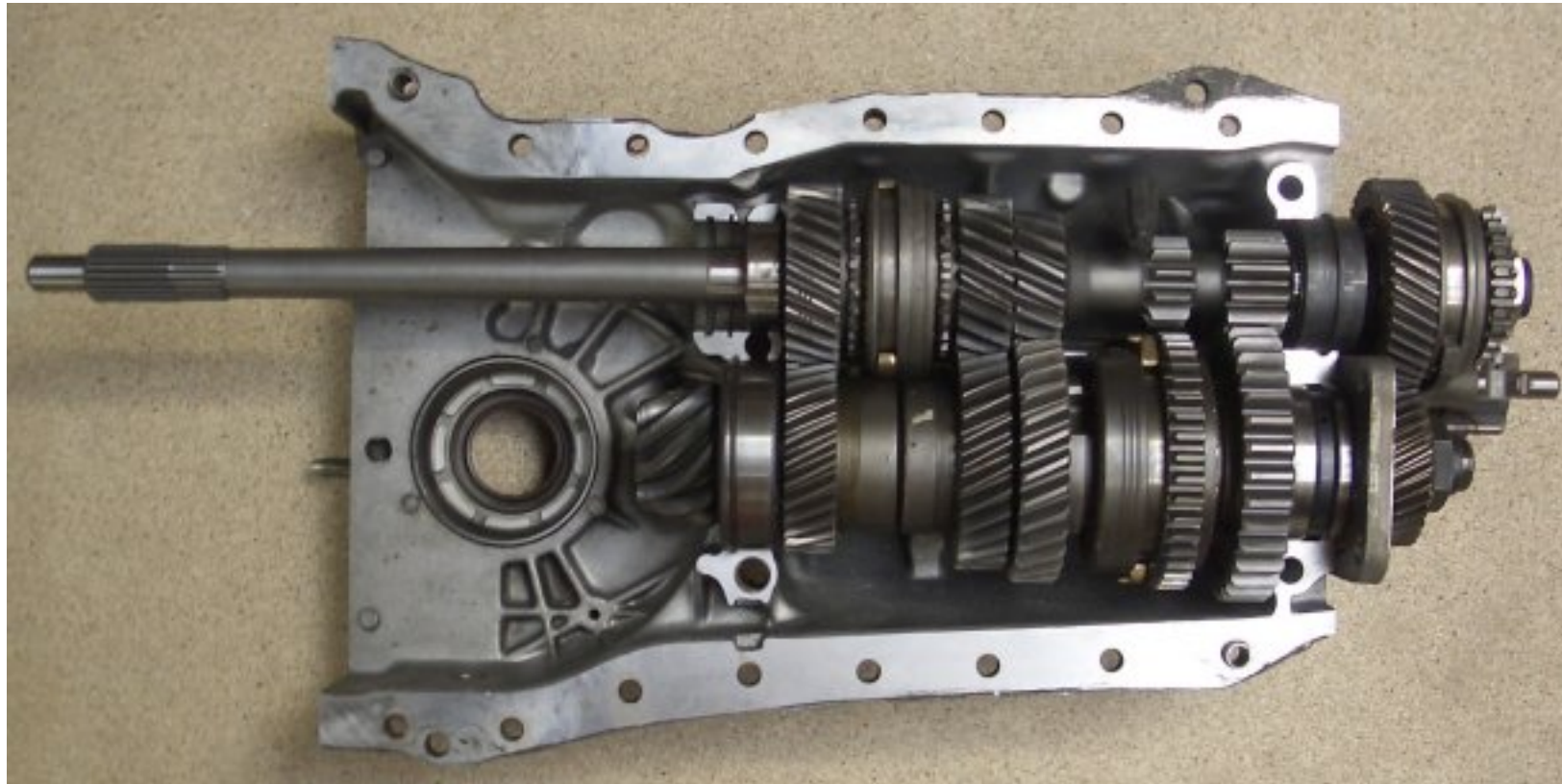
Projeto de Eixos

Deflexões e inclinações – a geometria de um eixo corresponde geralmente a um cilindro escalonado, sendo que as análises referentes as deflexões e inclinações somente poderão ser realizadas após a definição completa da geometria do eixo!!



Projeto de Eixos

Exemplo



Projeto de Eixos por Restrições Geométricas

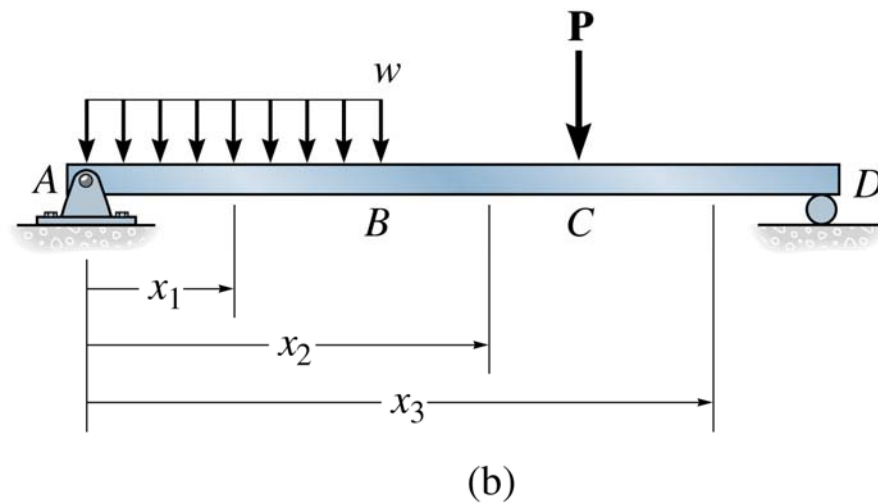
Restrições geométricas x deformações **limites**

Slopes	
Tapered roller	0.0005–0.0012 rad
Cylindrical roller	0.0008–0.0012 rad
Deep-groove ball	0.001–0.003 rad
Spherical ball	0.026–0.052 rad
Self-align ball	0.026–0.052 rad
Uncrowned spur gear	< 0.0005 rad

Transverse deflections	
Spur gears with $P < 10$ teeth/in	0.010 in
Spur gears with $11 < P < 19$	0.005 in
Spur gears with $20 < P < 50$	0.003 in

Premissa – definir um eixo de diâmetro uniforme que satisfaça todas as condições de distorção (condições contorno).

Projeto de Eixos por Restrições Geométricas



Eq.diferencial da linha elástica:

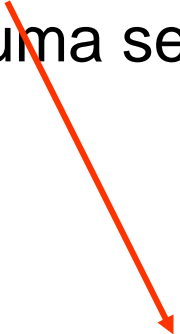
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EJ}$$

Projeto de Eixos por Restrições Geométricas

- cuja integração permite escrever: $\frac{dy}{dx} = \theta = \frac{1}{EJ} \int M$

- possibilitando-se obter um diâmetro preliminar para o eixo pela imposição das condições de contorno e pela substituição do momento de inércia de uma secção circular maciça, visto que:

$$J = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$$



dados do problema!!

Projeto de Eixos por Restrições Geométricas

- uma segunda integração permite ainda escrever:

$$y = \frac{1}{EJ} \iint M$$

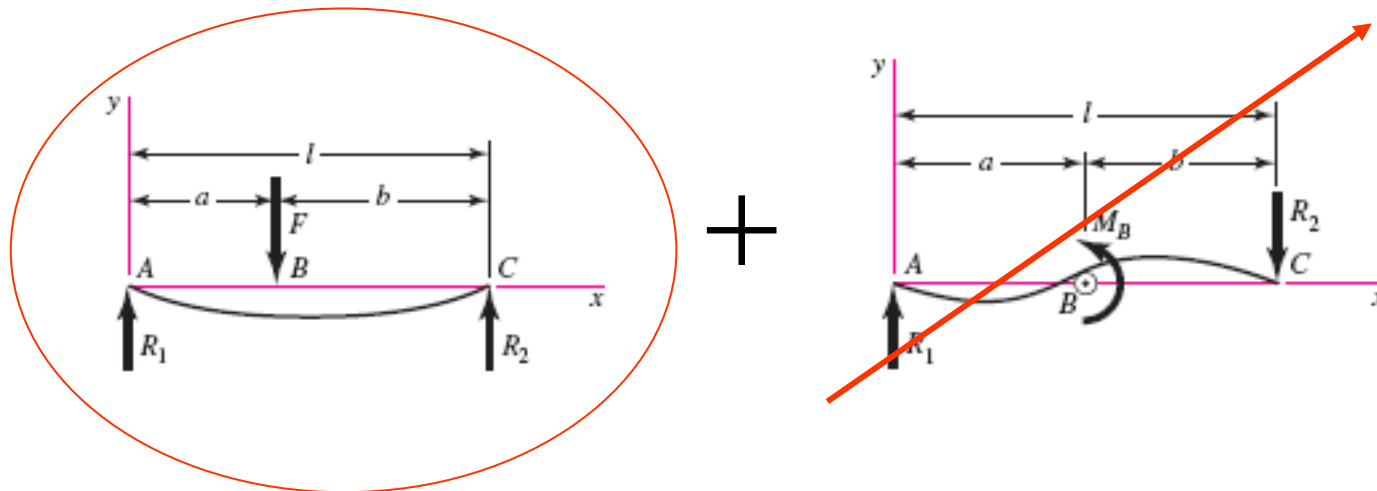
- possibilitando-se verificar ainda alguma restrição de abaixamento para um determinado ponto específico ao longo do comprimento do eixo analisado, efetuando-se (se for o caso) a correção do diâmetro preliminar calculado. Tal correção poderá ser feita a partir de dados de abaixamento ou de inclinação mediante as equações:

$$d_{\text{new}} = d_{\text{old}} \left[\frac{CS \cdot y_{\text{old}}}{y_{\text{lim}}} \right]^{1/4}$$

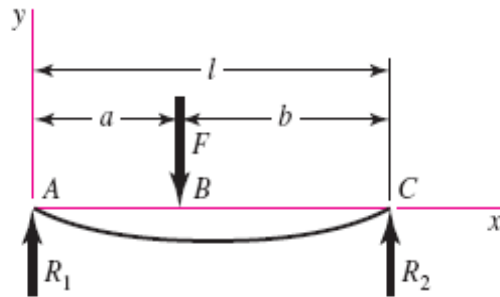
$$d_{\text{new}} = d_{\text{old}} \left[\frac{CS \cdot \theta_{\text{old}}}{\theta_{\text{lim}}} \right]^{1/4}$$

Projeto de Eixos por Restrições Geométricas

Caso mais geral de carregamento – eixo com **cargas concentradas** + momentos aplicados



Projeto de Eixos por Restrições Geométricas



$$R_1 = \frac{Fb}{l} \quad R_2 = \frac{Fa}{l}$$

$$V_{AB} = R_1 \quad V_{BC} = -R_2$$

$$M_{AB} = \frac{Fbx}{l} \quad M_{BC} = \frac{Fa}{l}(l-x)$$

$$y_{AB} = \frac{Fbx}{6EI} (x^2 + b^2 - l^2)$$

$$y_{BC} = \frac{Fa(l-x)}{6EI} (x^2 + a^2 - 2lx)$$

$$y_{AB} = \frac{F_i \cdot b_i \cdot x}{6EJ \cdot L} (x^2 + b_i^2 - L^2)$$

“i” = variável em função do número de cargas atuantes sobre o eixo (princípio da superposição efeitos)

Projeto de Eixos por Restrições Geométricas

- diferenciando e impondo a condição - $x = 0$ (mancal da esquerda):

$$\theta_A = \frac{F_i \cdot b_i}{6EJ.L} (b_i^2 - L^2)$$

- substituindo: $J = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$ e $\theta = \theta_{LIM}$

- e efetuando a inclusão de um coef segurança, obtém-se:

$$d = \left[\frac{32.CS}{3E.L.\pi.\theta_{LIM}} \{F_i \cdot b_i (b_i^2 - L^2)\} \right]^{1/4}$$

Projeto de Eixos por Restrições Geométricas



- extrapolando para planos distintos (H e V):

$$d = \left(\frac{32.CS}{3E.L.\pi.\theta_{LIM}} \left[\sqrt{\left[\sum F_i . b_i (b_i^2 - L^2) \right]^2 \Big|_H + \left[\sum F_i . b_i (b_i^2 - L^2) \right]^2 \Big|_V} \right] \right)^{1/4}$$

- similarmente, considerando o mancal da direita:

$$d = \left(\frac{32.CS}{3E.L.\pi.\theta_{LIM}} \left[\sqrt{\left[\sum F_i . a_i (L^2 - a_i^2) \right]^2 \Big|_H + \left[\sum F_i . a_i (L^2 - a_i^2) \right]^2 \Big|_V} \right] \right)^{1/4}$$

EXEMPLO 18-1

O eixo de aço ilustrado na Figura 18-10 carrega duas engrenagens retas e dispõe de carregamento, como mostrado. Os mancais localizados em *A* e *B* serão mancais de rolos cilíndricos. A inclinação espacial de linha de centro nos mancais está limitada a 0,001 rad, com um fator de projeto de 1,5. Estime o diâmetro de um eixo uniforme que satisfaça às restrições de inclinação impostas pelos mancais.

Solução

A partir da Equação (18-1),

$$d = \left| \frac{32n_d}{3\pi E l \theta_{\text{all}}} \left\{ [F_1 b_1 (b_1^2 - l^2)]_H^2 + [F_2 b_2 (b_2^2 - l^2)]_V^2 \right\}^{1/2} \right|^{1/4}$$

$$= \left| \frac{32(1,5)}{3\pi(30)10^6 16(0,001)} \left\{ [300(6)(6^2 - 16^2)]^2 + [1000(12)(12^2 - 16^2)]^2 \right\}^{1/2} \right|^{1/4}$$

Resposta

= 1,964 in

para a restrição de inclinação do mancal esquerdo. Para a restrição de inclinação do mancal direito, a partir da Equação (18-2),

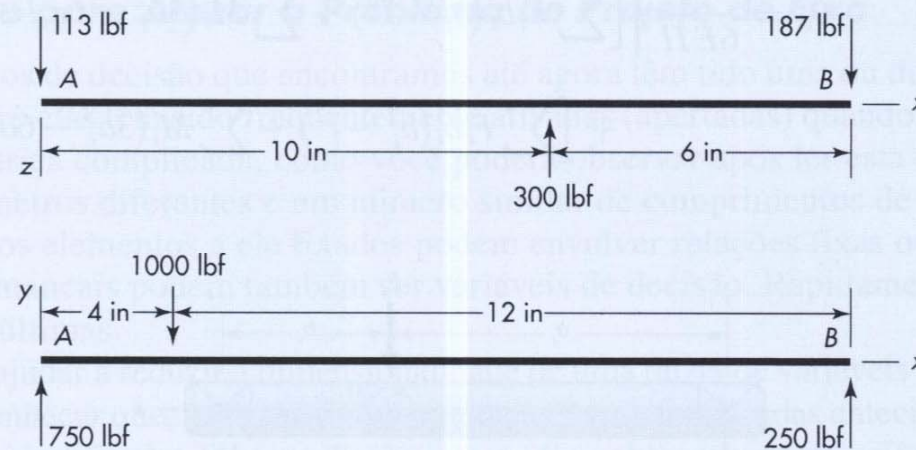


Figura 18-10

Um eixo contemplado deve carregar duas engrenagens cilíndricas de dentes retos entre os mancais *A* e *B*. Reações e carregamentos de engrenagem são mostrados em um plano. O eixo *y* é vertical, os outros dois são horizontais.

$$d = \left| \frac{32n_d}{3\pi E l \theta_{\text{all}}} \left\{ [F_1 a_1 (l^2 - a_1^2)]_H^2 + [F_2 a_2 (l^2 - a_2^2)]_V^2 \right\}^{1/2} \right|^{1/4}$$
$$= \left| \frac{32(1,5)}{3\pi(30)(10)^6 16(0,001)} \left\{ [300(10)(16^2 - 10^2)]^2 + [1000(4)(16^2 - 4^2)]^2 \right\}^{1/2} \right|^{1/4}$$

$$= 1,835 \text{ in}$$

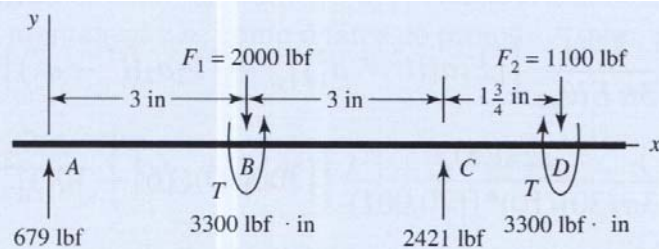
Esse cálculo inicial informa a um projetista que um eixo uniforme de diâmetro 1,964 in satisfará às restrições de inclinação do mancal. Para qualquer diminuição em diâmetro nos munhões de mancal e nos ressaltos, um aumento diametral deve ser realizado em assentos de engrenagem e ressaltos. O projetista tem uma idéia do “peso” do eixo, uma perspectiva útil.

18-2

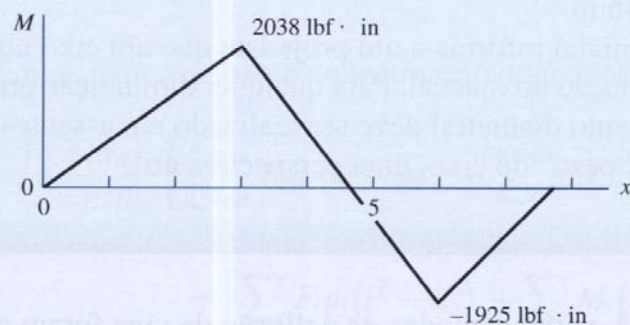
O eixo de aço mostrado na Figura 18-11(a) é sobressalente, em balanço no lado do mancal direito. Ele carrega duas engrenagens retas, uma em B e a outra em D . As forças radiais de 2000 e 1100 lbf situam-se no mesmo plano. O momento flexor M , o cisalhamento transversal V e o torque T apresentam distribuições como mostram as Figuras 18-11(b), 18-11(c) e 18-11(d), respectivamente. Ambas as engrenagens têm um passo diametral de 8; nem suas parceiras em engrenamento, nem detalhes acerca de seus tamanhos são mostrados. Devido ao uso de dentes não-coroados, as inclinações estão limitadas a 0,0005 rad em cada engrenagem. Para um fator de projeto $n_d = 1,5$, encontre o diâmetro de um eixo *uniforme* que evite as restrições nas engrenagens e aquelas decorrentes de mancais de rolo cilíndrico cuja utilização é esperada.

Para um diâmetro uniforme de 1 in,

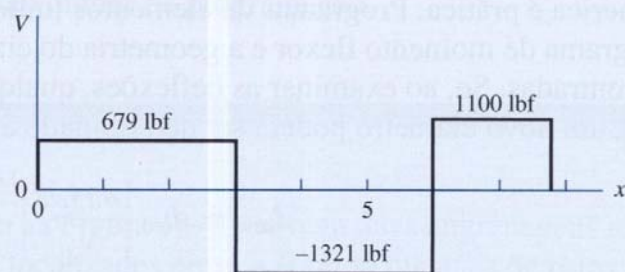
$$6EI\ell = 6(30)10^6 \frac{\pi(1^4)}{64} 6 = 5,3014(10^7) \text{ lbf} \cdot \text{in}^3$$



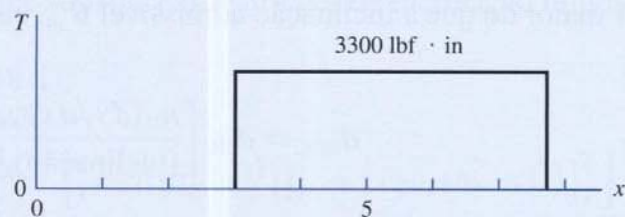
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 18-11 (a) Um eixo contemplado carregando duas engrenagens e transmitindo torque entre elas. As forças situam-se em um plano. (b) Diagrama de momento flexor. (c) Diagrama de cisalhamento transversal. (d) Diagrama de torque.

Como no desenvolvimento das Equações (18-1) e (18-2), à exceção de que as Tabelas A-9-6 e A-9-10 são utilizadas,

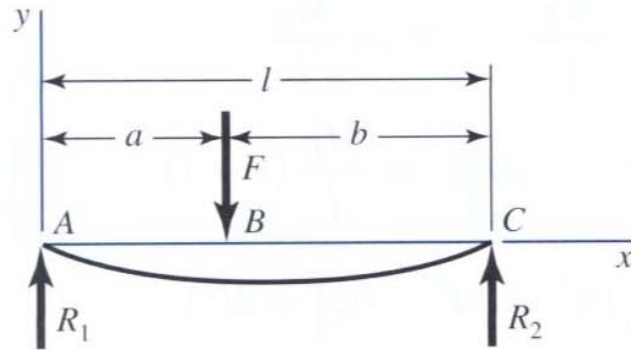
$$y_{AB} = \frac{2000(3)x}{5,3014(10^7)}(x^2 + 3^2 - 6^2) + \frac{1100(1,75)x}{5,3014(10^7)}(6^2 - x^2)$$
$$= 7,6866(10^{-5})x^3 - 1,7486(10^{-3})x \text{ in}$$

$$\theta_{AB} = \frac{2000(3)}{5,3014(10^7)}(3x^2 + 3^2 - 6^2) + \frac{1100(1,75)}{5,3014(10^7)}(6^2 - 3x^2)$$
$$= 2,306(10^{-4})x^2 - 1,7486(10^{-3}) \text{ rad}$$

$$y_{BC} = \frac{2000(3)(6-x)}{5,3014(10^7)}[x^2 + 3^2 - 2(6)x] + \frac{1100(1,75)x}{5,3014(10^7)}(6^2 - x^2)$$
$$= -1,4949(10^{-4})x^3 + 2,0372(10^{-3})x^2 - 7,8601(10^{-3})x + 6,1115(10^{-3}) \text{ in}$$

$$\theta_{BC} = \frac{2000(3)}{5,3014(10^7)}[-3x^2 + 6(6)x - 2(6^2) - 3^2] + \frac{1100(1,75)}{5,3014(10^7)}(6^2 - 3x^2)$$
$$= -4,4846(10^{-4})x^2 + 4,0744(10^{-3})x - 7,8601(10^{-3}) \text{ rad}$$

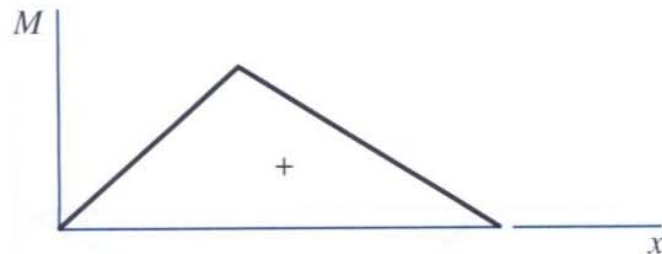
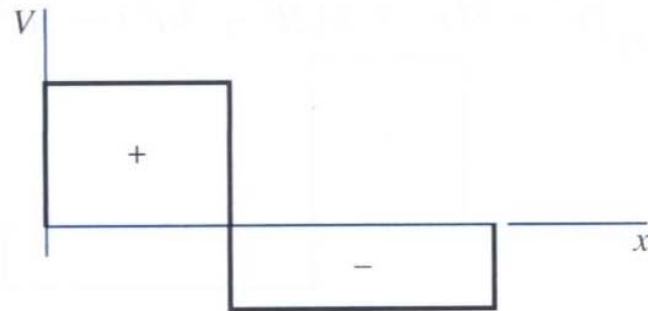
6 Apoios simples – carga intermediária



$$R_1 = \frac{Fb}{l} \quad R_2 = \frac{Fa}{l}$$

$$V_{AB} = R_1 \quad V_{BC} = -R_2$$

$$M_{AB} = \frac{Fbx}{l} \quad M_{BC} = \frac{Fa}{l}(l-x)$$



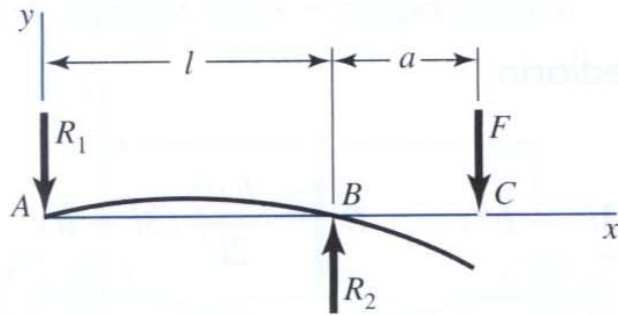
$$y_{AB} = \frac{Fbx}{6EI} (x^2 + b^2 - l^2)$$

$$y_{BC} = \frac{Fa(l-x)}{6EI} (x^2 + a^2 - 2lx)$$

Nota: As reações de força e momento são positivas nas direções mostradas; as equações para força de cisalhamento V e momento flexor M seguem as convenções de sinais dadas na Seção 4-2.

(continua)

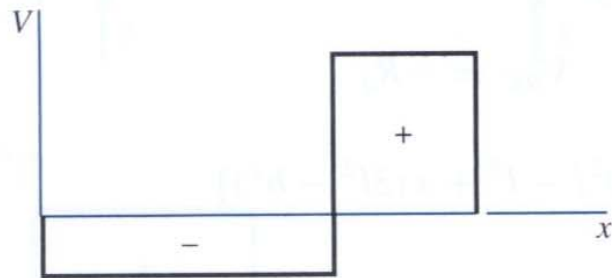
10 Apoios simples – carga de balanço (sobressalente)



$$R_1 = \frac{Fa}{l} \quad R_2 = \frac{F}{l}(l + a)$$

$$V_{AB} = -\frac{Fa}{l} \quad V_{BC} = F$$

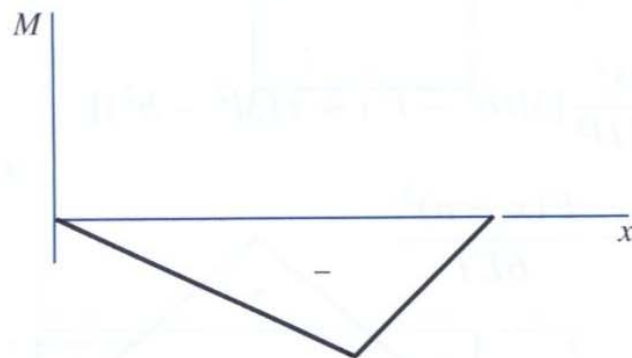
$$M_{AB} = -\frac{Fax}{l} \quad M_{BC} = F(x - l - a)$$



$$y_{AB} = \frac{Fax}{6EI}(l^2 - x^2)$$

$$y_{BC} = \frac{F(x-l)}{6EI}[(x-l)^2 - a(3x-l)]$$

$$y_c = -\frac{Fa^2}{3EI}(l + a)$$



Nota: As reações de força e momento são positivas nas direções mostradas; as equações para força de cisalhamento V e momento flexor M seguem as convenções de sinais dadas na Seção 4-2.

(continua)

A deflexão da viga A-9-6 para $x \geq l$ é a sua inclinação em l multiplicada por $(x - l)$. Logo,

$$y_{CD} = \frac{2000(3)}{5,3014(10^7)}[-3(6^2) + 6(6)6 - 2(6^2) - 3^2](x - 6)$$

$$+ \frac{1100(x - 6)6}{5,3014(10^7)}[(x - 6)^2 - 1,75(3x - 6)]$$

$$= 1,24495(10^{-4})x^3 - 2,8945(10^{-3})x^2 + 2,173(10^{-2})x - 5,3069(10^{-2}) \text{ in}$$

$$\theta_{CD} = \frac{2000(3)}{5,3014(10^7)}[-3(6^2) + 6(6)6 - 2(6^2) - 3^2]$$

$$+ \frac{1100(6)}{5,3014(10^7)}\{3(x - 6)^2 - 1,75[6x - 4(6)]\}$$

$$= 3,7349(10^{-4})x^2 - 5,789(10^{-3})x + 2,173(10^{-2}) \text{ rad}$$

Os deslocamentos e as inclinações em A , B , C e D estão tabelados a seguir.

<i>Posição, in</i>	<i>y, in</i>	<i>θ, rad</i>
$A (x = 0)$	0	-0,0017486
$B (x = 3)$	-0,003170	0,0003268
$C (x = 6)$	0	0,0004414
$D (x = 7,75)$	-0,0005620	-0,0007024

Inclinação de mancal: a partir da Equação (18-4), com os subscritos de d identificando a localização de posição,

$$d_A = 1 \left| \frac{1,5(-0,001\ 749)}{0,001} \right|^{1/4} = 1,273 \text{ in}$$

$$d_C = 1 \left| \frac{1,5(0,000\ 4414)}{0,001} \right|^{1/4} = 0,902 \text{ in}$$

Inclinação em engrenagens acopladas: a partir da Equação (18-4),

$$d_B = 1 \left| \frac{1,5(0,000\ 3268)}{0,0005} \right|^{1/4} = 0,995 \text{ in}$$

$$d_D = 1 \left| \frac{1,5(-0,000\ 7024)}{0,0005} \right|^{1/4} = 1,205 \text{ in}$$

Distância de centro a centro: para engrenagens de passo diametral 8, a expansão da distância de centro a centro em engrenagens de qualidade comercial é de 0,010 in. Dividiremos esta entre engrenagens engrenadas, tornando a deflexão transversal admissível 0,005 in. A partir da Equação (18-3),

$$d_B = 1 \left| \frac{1,5(-0,003\ 170)}{0,005} \right|^{1/4} = 0,988 \text{ in}$$

$$d_D = 1 \left| \frac{1,5(-0,0005620)}{0,005} \right|^{1/4} = 0,641 \text{ in}$$

O diâmetro de eixo, mantendo todas essas restrições folgadas, exceto uma, é de 1,273 in. Também sabemos que a restrição apertada (com uma margem de 1,5) é o desalinhamento de mancal à esquerda (mancal A).

Projeto de Eixos por Resistência

- o caso mais comum em termos de solicitações no projeto de eixos de transmissão, corresponde a situação de torção constante com flexão alternada. Assim, para uma secção circular maciça:

$$\sigma_a = \frac{M_a \cdot y}{J} = \frac{32 \cdot M_a}{\pi \cdot d^3}$$

$$\tau_m = \frac{T_m \cdot y}{J_p} = \frac{16 \cdot T_m}{\pi \cdot d^3}$$

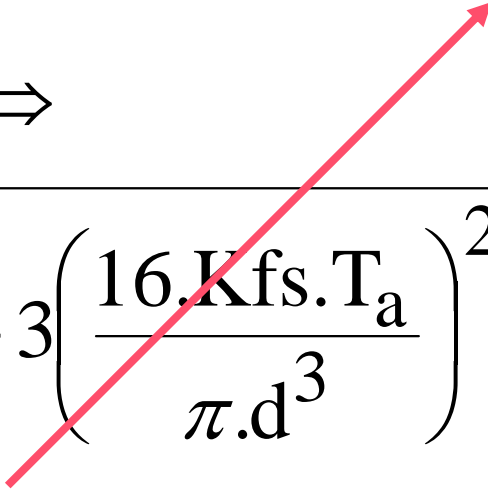
Projeto de Eixos por Resistência

- para o estado plano de tensões, Von Mises vale:

$$\sigma' = (\sigma_x^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3\tau_{xy}^2)^{1/2}$$

- cujas substituições resultam em:

$$\sigma_a' = (\sigma_a^2 + 3\tau_a^2)^{1/2} \Rightarrow$$

$$\sigma_a' = \sqrt{\left(\frac{32 \cdot K_f \cdot M_a}{\pi \cdot d^3}\right)^2 + 3 \left(\frac{16 \cdot K_{fs} \cdot T_a}{\pi \cdot d^3}\right)^2}$$


Projeto de Eixos por Resistência



$$\sigma_m' = (\sigma_m^2 + 3\tau_m^2)^{1/2} \Rightarrow$$

$$\sigma_m' = \sqrt{\left(\frac{32.Kf.M_m}{\pi.d^3}\right)^2 + 3\left(\frac{16.Kfs.T_m}{\pi.d^3}\right)^2}$$

Projeto de Eixos por Fadiga

- por Gerber:
$$\frac{\sigma_a.CS}{Se} + \left(\frac{\sigma_m.CS}{\sigma_{rup}} \right)^2 = 1$$

- resultando em função do diâmetro:

$$d = \left(\frac{16.CS.Kf.M_a}{\pi.Se} \left\{ 1 + \left[1 + 3 \cdot \left(\frac{Kfs.T_m.Se}{Kf.M_a \cdot \sigma_{rup}} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \right)^{1/3}$$

Projeto de Eixos por Fadiga

Tabela 18-1 Critérios de resistência à fadiga de eixos

Critério de falha	Fórmula básica
Soderberg	$\frac{n\sigma_a}{S_e} + \frac{n\sigma_m}{S_y} = 1$
Goodman	$\frac{n\sigma_a}{S_e} + \frac{n\sigma_m}{S_{ut}} = 1$
Gerber	$\frac{n\sigma_a}{S_e} + \left(\frac{n\sigma_m}{S_{ut}}\right)^2 = 1$
ASME-elíptico	$\left(\frac{n\sigma_a}{S_e}\right)^2 + \left(\frac{n\sigma_m}{S_y}\right)^2 = 1$
Yelding (Langer)	$\frac{n}{S_y}(\sigma_a + \sigma_m) = 1$

Nota: A substituição de S_a por $n\sigma_a$ e de S_m por $n\sigma_m$ produz um *locus* inteiramente em termos de resistências.

EXEMPLO 18-3

Em um ressalto usinado de eixo, o diâmetro menor d é de 1,100 in, o diâmetro maior D é de 1,65 in e o raio do filete é de 0,11 in. O momento flexor é de 1260 lbf · in, e o momento permanente de torção é de 1100 lbf · in. O eixo de aço termotratado apresenta uma resistência final de $S_{ut} = 105$ kpsi e uma resistência ao escoamento de $S_y = 82$ kpsi. A meta de confiabilidade é de 0,99.

- Determine o fator de segurança à fadiga do projeto utilizando o critério DE-elíptico.
- Determine o fator de segurança à fadiga do projeto utilizando o critério DE-Gerber.
- Trace o diagrama de fadiga do projetista para (a).

Solução

- (a) $D/d = 1,65/1,100 = 1,50$, $r/d = 0,11/1,100 = 0,10$, $K_t = 1,68$ (Figura A-15-9), $K_{ts} = 1,42$ (Figura A-15-8). Então, a partir da Equação (7-35),

$$K_f = \frac{1,68}{1 + \frac{2(1,68 - 1)}{1,68} \frac{4/105}{\sqrt{0,11}}} = 1,54$$

$$K_{fs} = \frac{1,42}{1 + \frac{2(1,42 - 1)}{1,42} \frac{4/105}{\sqrt{0,11}}} = 1,33$$

Equação (7-8): $S'_e = 0,504(105) = 52,92$ kpsi

Equação (7-18): $k_a = 2,70(105)^{-0,265} = 0,787$

Equação (7-19): $k_b = \left(\frac{1,100}{0,30}\right)^{-0,107} = 0,870$

$$k_c = k_d = k_f = 1$$

Tabela 7-7:

$$k_e = 0,814$$

$$S_e = 0,787(0,870)0,814(52,92) = 29,49 \text{ kpsi}$$

$$r = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1,54}{1,33} \frac{1260}{1100} = 1,53$$

$$\text{Equação (18-22): } \frac{1}{n} = \frac{16}{\pi(1,1)^3} \left\{ 4 \left[\frac{1,54(1260)}{29\,490} \right]^2 + 3 \left[\frac{1,33(1100)}{82\,000} \right]^2 \right\}^{1/2} = 0,517$$

$$n = 1,93$$

(b) A partir da Equação (18-17),

$$\frac{1}{n} = \frac{16(1,54)1260}{\pi(1,1^3)29\,490} \left\{ 1 + \sqrt{1 + 3 \left[\frac{1,33(1100)29\,490}{1,54(1260)105\,000} \right]} \right\} = 0,574$$

$$n = 1,74$$

$$(c) \quad \sigma'_a = \frac{32(1,54)1260}{\pi(1,1)^3} = 14\,850 \text{ psi}$$

$$\sigma'_m = \frac{16\sqrt{3}(1,33)1100}{\pi(1,1)^3} = 9696 \text{ psi}$$

Equação (18-28):

$$S_a = \frac{2(82\,000)29\,490^2}{29\,490^2 + 82\,000^2} = 18\,780 \text{ psi}$$

$$S_m = 82\,000 - 18\,780 = 63\,220 \text{ psi}$$

$$r_{\text{crit}} = \frac{18\,780}{63\,220} = 0,297$$

O diagrama de fadiga do projetista é visto na Figura 18-12. O local geométrico de fadiga é traçado a partir de $(S_a/29,5)^2 + (S_m/82)^2 = 1$.

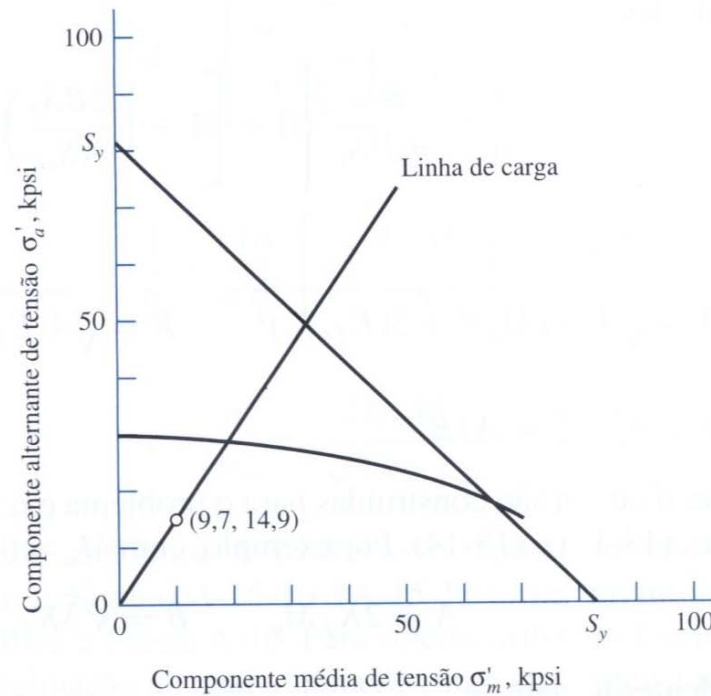


Figura 18-12 O diagrama de falha por fadiga do projetista para o Exemplo 18-3. O locus de falha por fadiga é o DE-elíptico. As componentes de condição de tensão para o ressalto são mostradas juntamente com a linha de carga.

EXEMPLO 18-4

Considerando $M_m = T_a = 0$, $M_a = 1260 \text{ lbf} \cdot \text{in}$, $T_m = 1100 \text{ lbf} \cdot \text{in}$, $S_{ut} = 105 \text{ kpsi}$, $S_y = 82 \text{ kpsi}$, um completamente corrigido $S_e = 36 \text{ kpsi}$, $n = 2$, $k_f = 1,73$ e $K_{fs} = 1,31$, determine d empregando o seguinte critério de falha por fadiga:

- MSS-Soderberg.
- DE-Goodman.
- ASME-elíptico.
- DE-Gerber.

Solução

A partir da Equação (18-31),

Resposta

$$d = \left\{ \frac{32n}{\pi} \left[\left(K_f \frac{M_a}{S_e} \right)^2 + \left(K_{fs} \frac{T_m}{S_y} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/3}$$

$$= \left\{ \frac{32(2)}{\pi} \left[\left(1,73 \frac{1260}{36\,000} \right)^2 + \left(1,31 \frac{1100}{82\,000} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/3} = 1,087 \text{ in}$$

A partir da Equação (18-34),

Resposta

$$d = \left[\frac{16n}{\pi} \left(2 \frac{K_f M_a}{S_e} + \sqrt{3} \frac{K_{fs} T_m}{S_{ut}} \right) \right]^{1/3}$$

$$= \left\{ \frac{16(2)}{\pi} \left[2 \frac{1,73(1260)}{36\,000} + \sqrt{3} \frac{1,31(1100)}{105\,000} \right] \right\}^{1/3} = 1,138 \text{ in}$$

A partir da Equação (18-21),

$$d = \left\{ \frac{16n}{\pi} \left[4 \left(K_f \frac{M_a}{S_e} \right)^2 + 3 \left(K_{fs} \frac{T_m}{S_y} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/3}$$
$$= \left\{ \frac{16(2)}{\pi} \left[4 \left(1,73 \frac{1260}{36\,000} \right)^2 + 3 \left(1,31 \frac{1100}{82\,000} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/3} = 1,083 \text{ in}$$

A partir da Equação (18-16),

Resposta

$$d = \left(\frac{16n K_f M_a}{\pi S_e} \left\{ 1 + \left[1 + 3 \left(\frac{K_{fs} T_m S_e}{K_f M_a S_{ut}} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \right)^{1/3}$$
$$= \left\{ \frac{16(2)1,73(1260)}{\pi(36\,000)} \left(1 + \left[1 + 3 \left(\frac{1,31(1100)36}{1,73(1260)105} \right)^2 \right]^{1/2} \right) \right\}^{1/3} = 1,086 \text{ in}$$

Tabelados, os resultados são

Critério	d, in
MSS-Soderberg	1,087
DE-Goodman	1,138
ASME-elíptico	1,083
DE-Gerber	1,086

Projeto de Eixos por Velocidades Críticas



Preliminares:

- quando um eixo está girando, a excentricidade causa uma deflexão devido à força centrífuga, a qual é resistida pela rigidez EJ do eixo;
- para deflexões pequenas, nenhum dano será ocasionado;
- porém, para determinadas velocidades o eixo torna-se instável com as deflexões podendo aumentar sem um limite superior;
- tal problema é designado por “**velocidades críticas**”.

Projeto de Eixos por Velocidades Críticas

Premissas – na fase de projeto, buscar as primeiras velocidades críticas, as quais devem ser evitadas!!

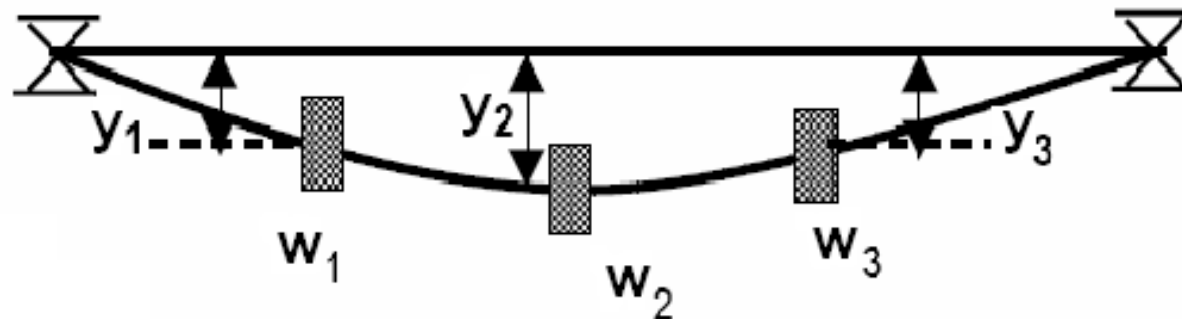
- caso mais simples – eixo de diâmetro uniforme suportado por dois mancais extremos



$$\omega_1 = \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{g \cdot E \cdot J}{A \cdot \gamma}} \text{ (rad/s)}$$

Projeto de Eixos por Velocidades Críticas

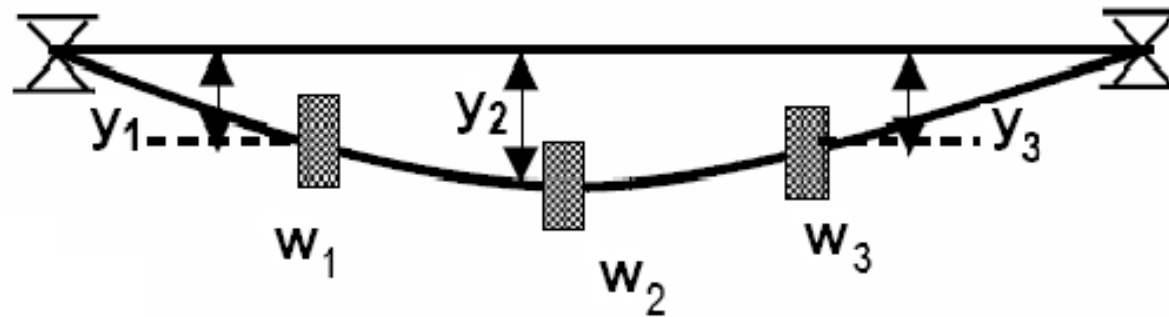
- eixo com um conjunto de acessórios (Método de Rayleigh):



$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g \cdot \sum w_i \cdot y_i}{\sum w_i \cdot y_i^2}} \text{ (rad/s)}$$

Projeto de Eixos por Velocidades Críticas

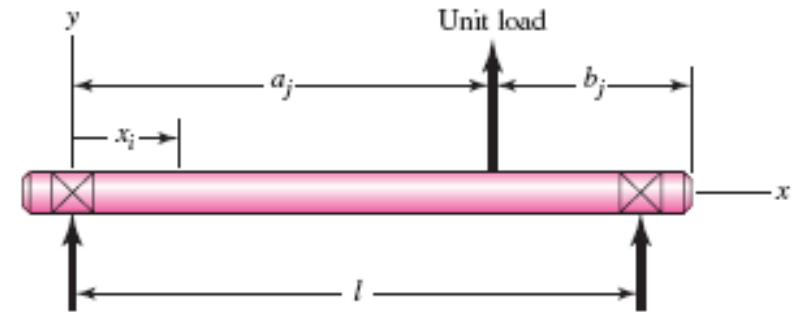
- Dificuldade matemática – definir as deflexões transversais em cada ponto considerado!!



- Solução prática – utilização dos chamados “coeficientes de influência”!

Projeto de Eixos por Velocidades Críticas

- coeficiente de influência = deflexão transversal na posição “i” devido a uma carga unitária na posição “j”. Para uma viga apoiada com uma carga unitária, tem-se:



$$\delta_{ij} = \begin{cases} \frac{b_j \cdot x_i}{6EJL} (L^2 - b_j^2 - x_i^2) \rightarrow x_i \leq a_j \\ \frac{a_j \cdot (L - x_i)}{6EJL} (2L \cdot x_i - a_j^2 - x_i^2) \rightarrow x_i > a_j \end{cases}$$

onde: $\delta_{ij} = \delta_{ji}$

Projeto de Eixos por Velocidades Críticas



de onde, os abaixamentos em cada ponto podem ser determinados por:

$$\begin{aligned}y_1 &= F_1 \cdot \delta_{11} + F_2 \cdot \delta_{12} + F_3 \cdot \delta_{13} \\y_2 &= F_1 \cdot \delta_{21} + F_2 \cdot \delta_{22} + F_3 \cdot \delta_{23} \\y_3 &= F_1 \cdot \delta_{31} + F_2 \cdot \delta_{32} + F_3 \cdot \delta_{33}\end{aligned}$$

EXEMPLO 18-5

Considere um eixo de aço simplesmente apoiado, como representado na Figura 18-17, com diâmetro de 1 in e um vão de 31 in entre mancais, carregando duas engrenagens que pesam 35 e 55 lbf.

- Encontre os coeficientes de influência.
- Encontre $\sum wy$ e $\sum wy^2$, bem como a primeira velocidade crítica, utilizando a equação de Rayleigh, Equação (18-36).
- A partir dos coeficientes de influência, encontre ω_{11} e ω_{22} .
- Utilizando a equação de Dunkerley, Equação (18-45), estime a primeira velocidade crítica.
- Utilize sobreposição para estimar a primeira velocidade crítica.
- Estime a velocidade crítica intrínseca do eixo. Sugira uma modificação para a equação de Dunkerley, a fim de incluir o efeito da massa de eixo na primeira velocidade crítica dos acessórios.

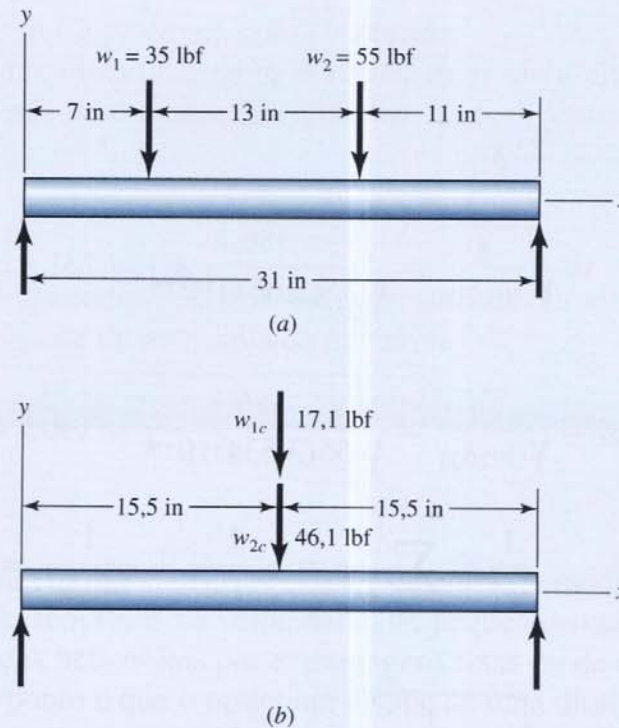


Figura 18-17 (a) Um eixo de diâmetro uniforme de 1 in para o Exemplo 18-5. (b) Sobreposição de cargas equivalentes no centro do eixo, para o propósito de encontrar a primeira velocidade crítica.

Solução

(a)

$$I = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi(1)^4}{64} = 0,049\ 09\ \text{in}^4$$

$$6EIl = 6(30)10^6(0,049\ 09)31 = 0,2739(10^9)\ \text{lbf} \cdot \text{in}^3$$

A partir do conjunto de Equações (18-37),

$$\delta_{11} = \frac{24(7)(31^2 - 24^2 - 7^2)}{0,2739(10^9)} = 2,061(10^{-4})\ \text{in/lbf}$$

$$\delta_{22} = \frac{11(20)(31^2 - 11^2 - 20^2)}{0,2739(10^9)} = 3,534(10^{-4})\ \text{in/lbf}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{11(7)(31^2 - 11^2 - 7^2)}{0,2739(10^9)} = 2,224(10^{-4})\ \text{in/lbf}$$

Resposta

<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>
	1	2
1	2,061(10 ⁻⁴)	2,234(10 ⁻⁴)
2	2,234(10 ⁻⁴)	2,534(10 ⁻⁴)

$$y_1 = w_1\delta_{11} + w_2\delta_{12} = 35(2,061)10^{-4} + 55(2,234)10^{-4} = 0,01950\ \text{in}$$

$$y_2 = w_1\delta_{21} + w_2\delta_{22} = 35(2,234)10^{-4} + 55(3,534)10^{-4} = 0,02726\ \text{in}$$

$$(b) \quad \sum w_i y_i = 35(0,01950) + 55(0,02726) = 2,181 \text{ lbf} \cdot \text{in}$$

Resposta

$$\sum w_i y_i^2 = 35(0,01950)^2 + 55(0,02726)^2 = 0,05418 \text{ lbf} \cdot \text{in}^2$$

Resposta

$$\omega = \sqrt{\frac{386,1(2,181)}{0,05418}} = 124,7 \text{ rad/s, ou } 1191 \text{ rpm}$$

(c)

Resposta

$$\frac{1}{\omega_{11}^2} = \frac{w_1}{g} \delta_{11}$$

$$\omega_{11} = \sqrt{\frac{g}{w_1 \delta_{11}}} = \sqrt{\frac{386,1}{35(2,061)10^{-4}}} = 231,4 \text{ rad/s, ou } 2210 \text{ rpm}$$

Resposta

$$\omega_{22} = \sqrt{\frac{g}{w_2 \delta_{22}}} = \sqrt{\frac{386,1}{55(3,534)10^{-4}}} = 140,9 \text{ rad/s, ou } 1346 \text{ rpm}$$

(d)

$$\frac{1}{\omega_1^2} \doteq \sum \frac{1}{\omega_{ii}^2} = \frac{1}{231,4^2} + \frac{1}{140,9^2} = 6,905(10^{-5})$$

Resposta

$$\omega_1 \doteq \sqrt{\frac{1}{6,905(10^{-5})}} = 120,3 \text{ rad/s, ou } 1149 \text{ rpm}$$

que é menor que a parte *b*, como esperado.

(e) A partir da Equação (18-37),

$$\delta_{cc} = \frac{b_{cc}x_{cc}(l^2 - b_{cc}^2 - x_{cc}^2)}{6EI} = \frac{15,5(15,5)(31^2 - 15,5^2 - 15,5^2)}{0,2739(10^9)}$$

$$= 4,215(10^{-4}) \text{ in/lbf}$$

A partir da Equação (18-46),

$$w_{1c} = w_1 \frac{\delta_{11}}{\delta_{cc}} = 35 \frac{2,061(10^{-4})}{4,215(10^{-4})} = 17,11 \text{ lbf}$$

$$w_{2c} = w_2 \frac{\delta_{22}}{\delta_{cc}} = 55 \frac{3,534(10^{-4})}{4,213(10^{-4})} = 46,11 \text{ lbf}$$

Resposta

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\delta_{cc} \sum w_{ic}}} = \sqrt{\frac{386,1}{4,215(10^{-4})(17,11 + 46,11)}} = 120,4 \text{ rad/s, ou } 1150 \text{ rpm}$$

que, exceto pelo arredondamento, concorda com a parte (d), como esperado.

(d) Para o eixo $E = 30(10^6) \text{ psi}$, $\nu = 0,282 \text{ lbf/in}^3$ e $A = \pi(1^2)/4 = 0,7854 \text{ in}^2$

(f) Para o eixo, $E = 30(10^6)$ psi, $\gamma = 0,282$ lbf/in³ e $A = \pi(1^4)/4 = 0,7854$ in⁴.

Considerando o eixo unicamente, a velocidade crítica, a partir da Equação (18-35), é

Resposta

$$\omega_s = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{gEI}{A\gamma}} = \left(\frac{\pi}{31}\right)^2 \sqrt{\frac{386,1(30)10^6(0,049\ 09)}{0,7854(0,282)}}$$

$$= 520,4 \text{ rad/s, ou } 4970 \text{ rpm}$$

Podemos simplesmente adicionar $1/\omega_s^2$ ao lado direito da equação de Dunkerley, Equação (1), para incluir a contribuição do eixo.

Resposta

$$\frac{1}{\omega_1^2} \doteq \frac{1}{520,4^2} + 6,905(10^{-5}) = 7,274(10^{-5})$$

$$\omega_1 \doteq 117,3 \text{ rad/s, ou } 1120 \text{ rpm}$$

que é ligeiramente menor que a parte (d), como esperado.

A primeira velocidade crítica do eixo ω_s é apenas mais um efeito isolado a adicionar à equação de Dunkerley. Visto que ele não cabe dentro da somatória, é geralmente escrito adiante.

Resposta

$$\frac{1}{\omega_1^2} \doteq \frac{1}{\omega_s^2} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_{ii}^2} \quad (18-47)$$

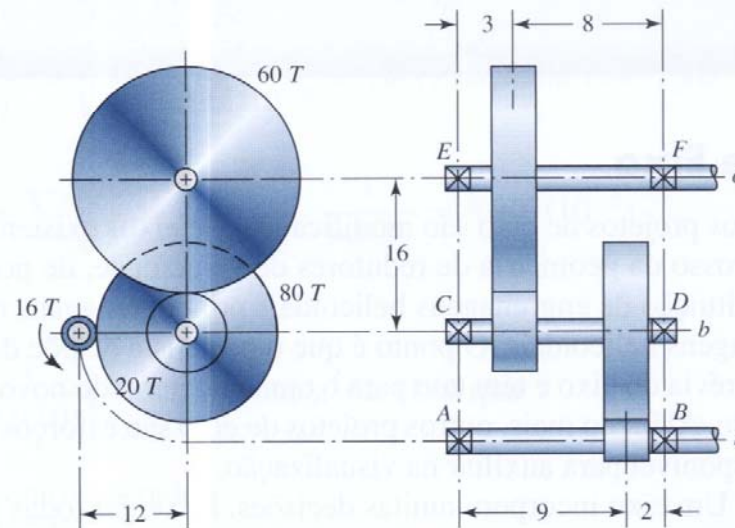
Eixos comuns são complicados pela geometria escalonada cilíndrica, o que torna a determinação dos coeficientes de influência parte de uma solução numérica.

Exercícios

18-1

O pinhão de 16 dentes da figura move um trem de engrenagens de redução dupla, como mostrado. Todas as engrenagens têm ângulo de pressão de 25° . O pinhão roda, em sentido anti-horário, a 1200 rpm e transmite 50 hp ao trem de engrenagens. Nosso foco está no eixo do pinhão. Nenhum dos eixos foi projetado.

- Para o eixo do pinhão, desenvolva o diagrama de momento.
- Para mancais de rolos cilíndricos, a inclinação do eixo no munhão deve ser menor que 0,001 rad. Para um fator de projeto de $n_d = 2$, estime o diâmetro uniforme do eixo que satisfaria às restrições de deflexão.



18-1
polegadas.

18-2

Investigue os resultados do Problema 18-1 para a resistência à fadiga de uma forma preliminar, caso a resistência ou a deflexão controlem. Utilize um aço 1030 laminado a quente para esse propósito. A meta de confiabilidade provável para esse eixo é de 0,999. Suponha um rasgo de chaveta no eixo com K_f e K_{ts} dados na página 440 e um raio de filete de 0,02 in.

- Utilize o critério de falha de fadiga DE-elíptico para estimar seu fator de segurança.
- Utilize o critério de falha de fadiga DE-Gerber em sua estimativa.

18-3

Tendo descoberto que o eixo de pinhão dos Problemas 18-1 e 18-2 tem uma restrição apertada de deflexão, projete a partir desse eixo tanto quanto puder. O balanço para montar um acoplamento pode assumir uma extensão de 6 in do eixo além do mancal. Desenhe seu eixo, mostrando todas as decisões dimensionais.

BIBLIOGRAFIA UTILIZADA

- **SHIGLEY, MISCHKE e BUDYNAS – Projeto de Engenharia Mecânica, editora Bookman.**
- **HIBBELER, R.C. – Resistência dos Materiais – Prentice Hall.**