

Análise Cinemática de Mecanismos

1.1 Introdução

A *Análise Cinemática de Mecanismos* consiste na determinação das características cinemáticas de mecanismos já prontos ou em fase de dimensionamento (projeto). As características cinemáticas a serem determinadas são *posição*, *velocidade* e *aceleração* de pontos de interesse no mecanismo. Trataremos de mecanismos que se enquadram no Modelo de Corpo Rígido.

Nesta etapa inicial do Curso de Mecanismos será vista uma metodologia adequada para *mecanismos planos*. A análise de mecanismos espaciais será vista posteriormente.

A análise cinemática deve ser executada na seguinte seqüência: análise de posição → análise de velocidade → análise de aceleração. Normalmente, a análise de posição é a mais complicada pois recai em sistemas de equações não lineares, dificultando a busca por uma solução analítica. É possível empregar métodos gráficos (construções com régua, esquadro e compasso), analíticos (em alguns casos), ou numéricos (computacionais). Os métodos gráficos não serão tratados neste curso.

No caso de mecanismos planos pode ser usada a representação polar, ou a decomposição de vetores nas direções x e y . No caso de mecanismos espaciais, pode ser utilizada a decomposição nas três direções de um sistema de eixos ortogonais x , y , e z .

1.2 Representação de Vetores de Posição

Os vetores de posição entre dois pontos no plano XY serão representados nesta apostila pela letra R seguida de pelo menos dois índices (subscritos), sendo que o primeiro índice é a extremidade final e o segundo índice é o ponto de origem do vetor de posição, conforme mostrado na figura 1.

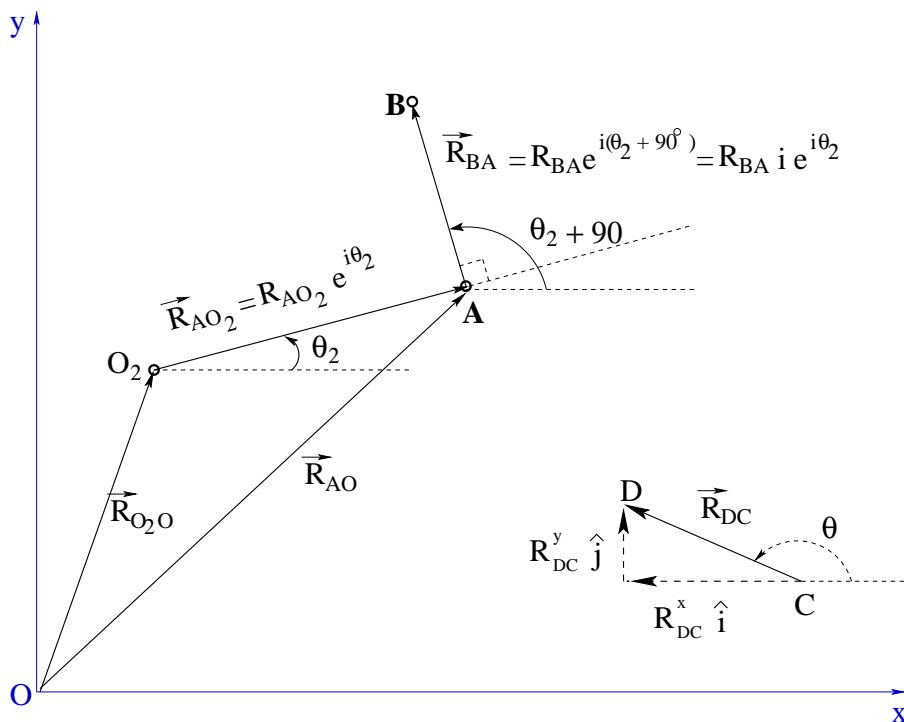


Figura 1: Representações de vetores de posição.

Um vetor no plano XY pode ser representado por seus componentes em X e em Y. Na figura 1 isso é mostrado claramente para $\vec{R}_{DC} = R_{DC}^x \hat{i} + R_{DC}^y \hat{j}$, onde $R_{DC}^x = R_{DC} \cos \theta$ e $R_{DC}^y = R_{DC} \sin \theta$.

Outra maneira de representar um vetor no plano é pela forma polar, análogo aos fasores vistos no curso de eletrotécnica. $\vec{R}_{AO_2} = R_{AO_2} e^{i\theta_2}$. Relembrando a Relação de Euler: $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$. Então, $\vec{R}_{AO_2} = R_{AO_2} e^{i\theta_2} = R_{AO_2} [\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2)]$.

Note que, da Relação de Euler, $i = e^{i90^\circ}$. Dessa forma, $i e^{i\theta_2} = e^{i90^\circ} e^{i\theta_2} = e^{i(90^\circ + \theta_2)}$. Então, $i e^{i\theta_2}$ equivale a uma rotação de $+90^\circ$ em relação a θ_2 .

Convenção para Ângulos: em cursos de mecanismos é padrão considerar um ângulo como positivo se ele for medido no sentido anti-horário a partir da direção vertical. Se medido no sentido horário deve-se utilizar o sinal de menos. É importante lembrar que a medida do ângulo de um vetor deve ser feita no seu ponto de origem e não em sua extremidade final. Todos os ângulos indicados na figura 1 estão no sentido anti-horário a partir da horizontal e, portanto, são positivos. Entretanto, observe na figura 2 como é importante medir o ângulo a partir da origem do vetor.

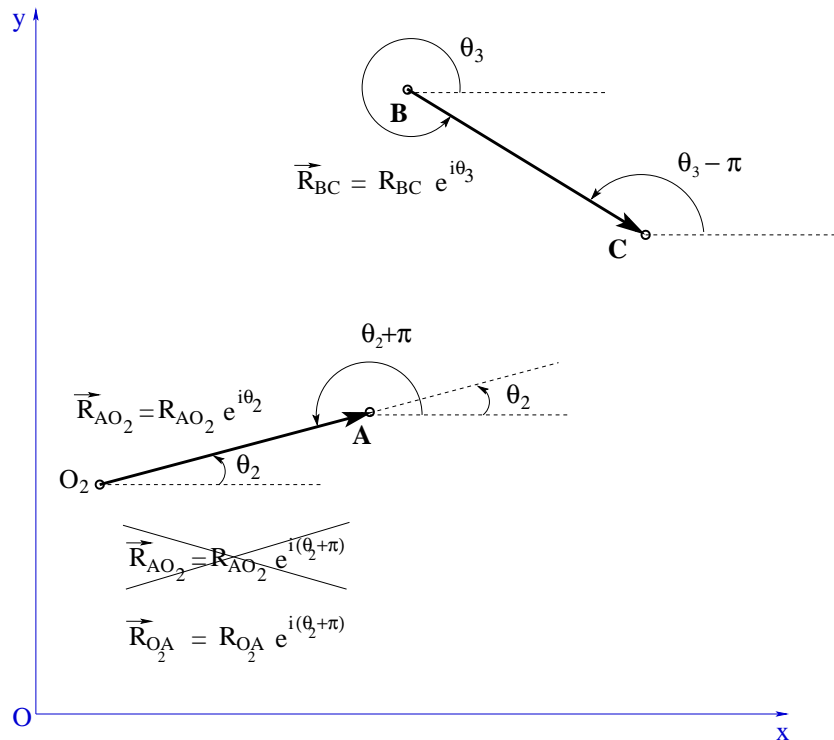


Figura 2: Notação de ângulos de vetores.

Como $0 \leq \theta_2 \leq \pi$, então $\vec{R}_{AO_2} = R_{AO_2} e^{i\theta_2}$ e o vetor no sentido oposto é $\vec{R}_{O_2A} = R_{O_2A} e^{i(\theta_2 + \pi)}$.

Como $\pi \leq \theta_3 \leq 2\pi$, então $\vec{R}_{BC} = R_{BC} e^{i\theta_3}$ e o vetor no sentido oposto é $\vec{R}_{CB} = R_{CB} e^{i(\theta_3 - \pi)}$.

Equivalência entre a decomposição vetorial e a forma polar: dado um vetor no plano XY representado na forma polar por $\vec{R}_{AO_2} = R_{AO_2} e^{i\theta_2} = R_{AO_2} [\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2)]$, teremos:

- Componente em X = Parte Real = $R_{AO_2} \cos(\theta_2)$.
- Componente em Y = Parte Imaginária = $R_{AO_2} \sin(\theta_2)$.

1.3 Problema de Determinação da Posição

Um problema típico encontrado na análise de mecanismos é o seguinte. Considere um mecanismo de 4 elos (barras) articulado por juntas de revolução (pinos) como mostrado na figura 3. Normalmente, são conhecidos os comprimentos das barras (R_{AO} , R_{BA} , R_{CB}), a distância entre os pivôs fixos (R_{OC}), e o ângulo de entrada q_2 . Portanto, resta determinar os ângulos θ_3 e θ_4 que dão as direções das barras 3 e 4 respectivamente.

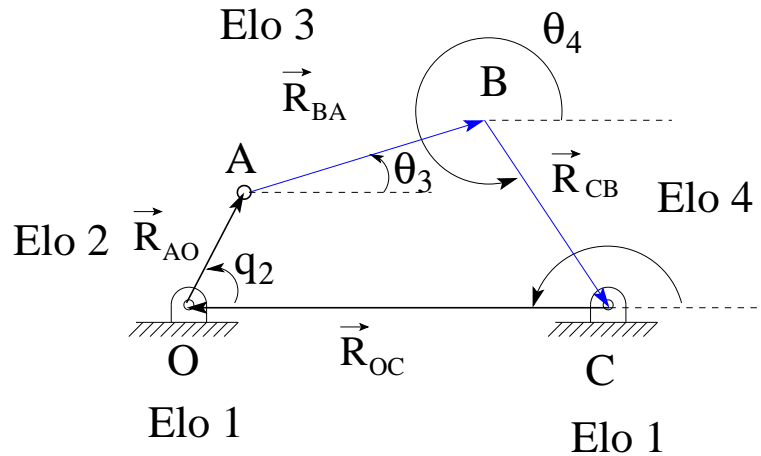


Figura 3: Mecanismo plano de 4 barras.

A resolução gráfica usando régua e compasso é muito simples, e é mostrada na figura 4. Há duas soluções possíveis dadas pelos pontos B e B' . Por outro lado, a solução analítica se torna bastante complicada pois se baseia num sistema de equações não-lineares.

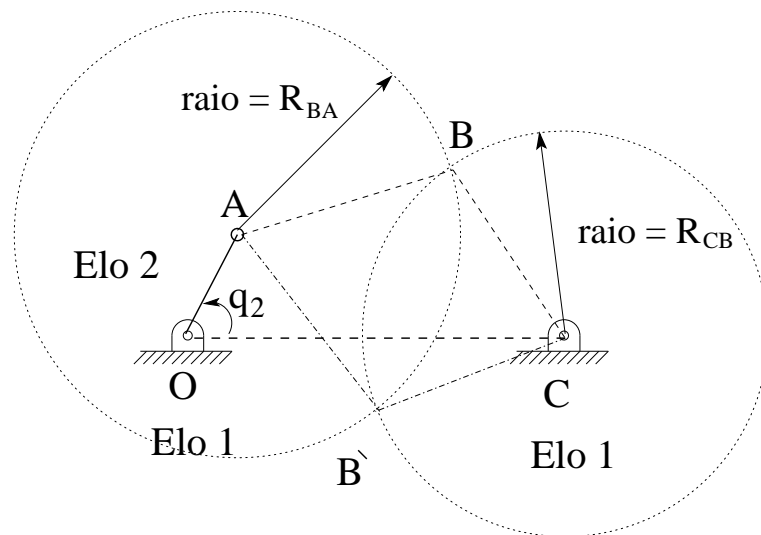


Figura 4: Determinação gráfica das posições do mecanismo de 4 barras.

O método para determinação analítica consiste em encontrar uma ou mais equações vetoriais de caminho fechado (loop) e, em seguida, formar o sistema de pares de equações escalares (componentes em X e em Y) e resolver o sistema para as incógnitas especificadas.

No problema em questão, o caminho fechado pode ser encontrado ligando os vértices do polígono $OABC$. Existe sempre mais que uma forma de equação vetorial para o polígono, dependendo da seqüência dos vértices escolhidos.

Uma possível equação vetorial, mostrada na figura 3, é: $\vec{R}_{AO} + \vec{R}_{BA} + \vec{R}_{CB} + \vec{R}_{OC} = \vec{0}$. Na forma polar: $R_{AO}e^{iq_2} + R_{BA}e^{i\theta_3} + R_{CB}e^{i\theta_4} + R_{OC}e^{i180^\circ} = \vec{0}$.

Equações Escalares:

$$\text{Componente em X: } R_{AO}\cos(q_2) + R_{BA}\cos(\theta_3) + R_{CB}\cos(\theta_4) + R_{OC}\cos(180^\circ) = 0 \quad (1.3.1a)$$

$$\text{Componente em Y: } R_{AO}\sin(q_2) + R_{BA}\sin(\theta_3) + R_{CB}\sin(\theta_4) + R_{OC}\sin(180^\circ) = 0 \quad (1.3.1b)$$

No sistema de equações 1.3.1 os parâmetros variáveis no tempo são: q_2 , θ_3 e θ_4 . Então, pode-se utilizar o conceito de funções nessas variáveis para tratar matematicamente essas equações. Denominando essas funções de f_1 e f_2 obtém-se:

$$f_1(q_2, \theta_3, \theta_4) = R_{AO}\cos(q_2) + R_{BA}\cos(\theta_3) + R_{CB}\cos(\theta_4) + R_{OC}\cos(180^\circ) = 0 \quad (1.3.2a)$$

$$f_2(q_2, \theta_3, \theta_4) = R_{AO}\sin(q_2) + R_{BA}\sin(\theta_3) + R_{CB}\sin(\theta_4) + R_{OC}\sin(180^\circ) = 0 \quad (1.3.2b)$$

Resolve-se o sistema para encontrar as incógnitas (no caso, θ_3 e θ_4) por método analítico (quando possível) ou por método numérico. O método numérico de Newton-Raphson será visto em detalhes mais adiante no curso.

Outra possível equação vetorial para o polígono $OABC$ está mostrada na figura 5, e é dada por: $\vec{R}_{AO} + \vec{R}_{BA} = \vec{R}_{CO} + \vec{R}_{BC}$. Esta equação vetorial está particularizando o ponto B. Na forma polar: $R_{AO}e^{iq_2} + R_{BA}e^{i\theta_3} = R_{CO}e^{i0^\circ} + R_{BC}e^{i\theta'_4}$. Note que ao invés de usar o ângulo θ_4 está sendo usado o ângulo $\theta'_4 = \theta_4 - 180^\circ$.

O sistema de equações escalares correspondentes será:

$$f'_1(q_2, \theta_3, \theta'_4) = R_{AO}\cos(q_2) + R_{BA}\cos(\theta_3) - R_{BC}\cos(\theta'_4) - R_{CO}\cos(0^\circ) = 0 \quad (1.3.3a)$$

$$f'_2(q_2, \theta_3, \theta'_4) = R_{AO}\sin(q_2) + R_{BA}\sin(\theta_3) - R_{BC}\sin(\theta'_4) - R_{CO}\sin(0^\circ) = 0 \quad (1.3.3b)$$

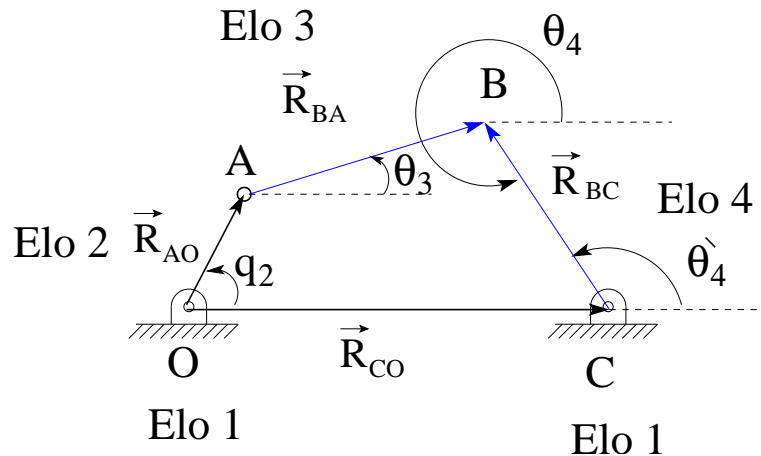


Figura 5: Outra equação vetorial, particularizada para o ponto B.

É importante notar que ao resolver o sistema de equações 1.3.2 ou 1.3.3 deverão ser encontradas duas possíveis soluções: uma correspondendo ao ponto B e outra correspondendo ao ponto B' da solução gráfica (figura 4).

1.4 Velocidade

Velocidade Linear

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} \quad (1.4.1)$$

Velocidade Angular

$$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt} \hat{r} \quad (1.4.2)$$

onde \hat{r} é um vetor unitário do eixo de rotação instantâneo.

1.5 Aceleração

Aceleração Linear

$$\vec{A} = \frac{d\vec{V}}{dt} \quad (1.5.1)$$

Aceleração Angular

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad (1.5.2)$$

Tranco (Jerk)

$$\varphi = \frac{d\alpha}{dt} \quad \text{ou} \quad \vec{J} = \frac{d\vec{A}}{dt} \quad (1.5.3)$$

1.6 Análise de Movimento com Translação Pura

Se um corpo rígido está em translação pura, então a velocidade de qualquer ponto é a mesma e corresponde à velocidade de translação, figura 6.

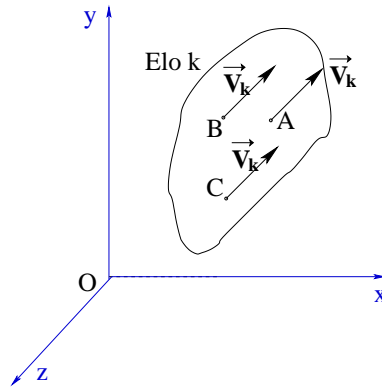


Figura 6: Corpo rígido em translação.

Considere um sistema de coordenadas ortogonal XY com origem em O e um corpo rígido deslizando numa rampa fixa, como na figura 7.

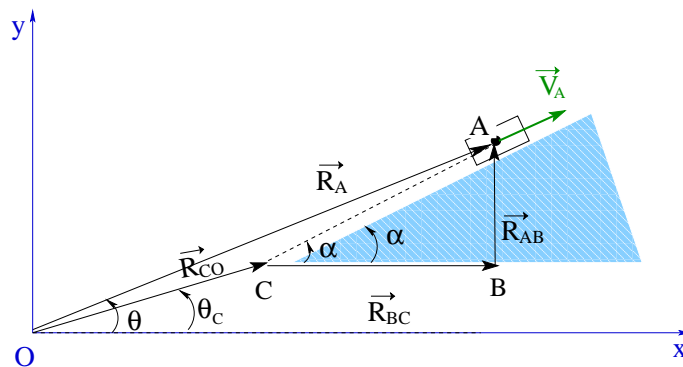


Figura 7: Corpo rígido deslizando por uma rampa fixa.

No mecanismo plano da figura 7, uma equação que define a posição do ponto A é:

$$\vec{R}_A = \vec{R}_{CO} + \vec{R}_{BC} + \vec{R}_{AB} \tag{1.6.1}$$

$$R_A e^{i\theta} = R_{CO} e^{i\theta_C} + R_{BC} e^{i0^\circ} + R_{AB} e^{i90^\circ} \tag{1.6.2}$$

Note que as variáveis no tempo são: R_A , θ , R_{BC} e R_{AB} . Mas, deve também ser respeitada a relação:

$$\tan(\alpha) = \frac{R_{AB}}{R_{BC}} \tag{1.6.3}$$

A velocidade pode ser obtida como a derivada em função do tempo da posição. Para a equação vetorial 1.6.1:

$$\vec{V}_A = \underbrace{\frac{d\vec{R}_{CO}}{dt}}_{=0} + \frac{d\vec{R}_{BC}}{dt} + \frac{d\vec{R}_{AB}}{dt} = \frac{dR_{BC}}{dt} \hat{i} + \frac{dR_{AB}}{dt} \hat{j} = V_A^x \hat{i} + V_A^y \hat{j} \tag{1.6.4}$$

Para a forma polar, equação 1.6.2, a derivada no tempo dos termos a esquerda da igualdade fica:

$$\frac{d(R_A e^{i\theta})}{dt} = \left(\frac{dR_A}{dt}\right) e^{i\theta} + R_A \left(\frac{d(i\theta)}{dt}\right) e^{i\theta} = \text{o resultado deve ser a velocidade na direção } \alpha = V_A e^{i\alpha} \quad (1.6.5)$$

A derivada dos termos a direita da equação 1.6.2 é:

$$\underbrace{\frac{d(R_{CO} e^{i\theta_C})}{dt}}_{=0} + \frac{d(R_{BC} e^{i\theta^0})}{dt} + \frac{d(R_{AB} e^{i90^\circ})}{dt} = e^{i\theta^0} \frac{dR_{BC}}{dt} + e^{i90^\circ} \frac{dR_{AB}}{dt} = V_A^x \hat{i} + V_A^y \hat{j} \quad (1.6.6)$$

A aceleração é obtida derivando-se a equação de velocidade no tempo. Para a forma vetorial:

$$\vec{A}_A = \frac{d^2 \vec{R}_{BC}}{dt^2} + \frac{d^2 \vec{R}_{AB}}{dt^2} = \frac{d^2 R_{BC}}{dt^2} \hat{i} + \frac{d^2 R_{AB}}{dt^2} \hat{j} = \frac{dV_A^x}{dt} \hat{i} + \frac{dV_A^y}{dt} \hat{j} = A_A^x \hat{i} + A_A^y \hat{j} \quad (1.6.7)$$

Analogamente, para a forma polar:

$$A_A e^{i\alpha} = e^{i\theta^0} \frac{d^2 R_{BC}}{dt^2} + e^{i90^\circ} \frac{d^2 R_{AB}}{dt^2} = A_A^x \hat{i} + A_A^y \hat{j} \quad (1.6.8)$$

1.7 Translação com Movimento Relativo

Se a rampa do caso anterior também se mover em translação (movimento retilíneo) com velocidade \vec{V}_R , figura 8, será necessário considerar o movimento relativo entre o corpo rígido e a rampa.

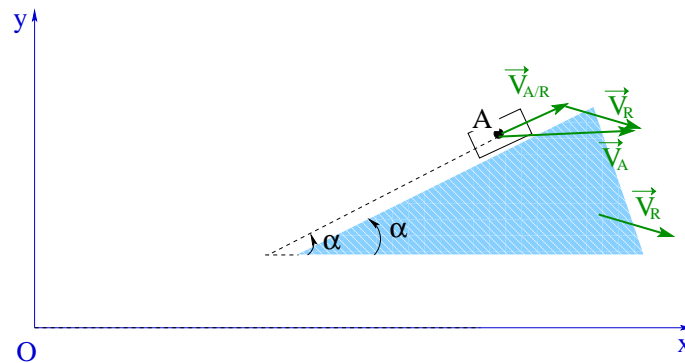


Figura 8: Corpo rígido deslizando por uma rampa em movimento.

A posição do ponto A é dada pelas mesmas equações da seção anterior (ver figura 7, equação 1.6.1 e equação 1.6.2):

$$\vec{R}_A = \vec{R}_{CO} + \vec{R}_{BC} + \vec{R}_{AB} \quad (1.7.1)$$

$$R_A e^{i\theta} = R_{CO} e^{i\theta_C} + R_{BC} e^{i0^\circ} + R_{AB} e^{i90^\circ} \quad (1.7.2)$$

Entretanto, agora o vetor \vec{R}_{CO} varia no tempo, pois o ponto C da rampa se move com velocidade \vec{V}_R .

As variáveis no tempo são: R_A , θ , \vec{R}_{CO} (que deve acompanhar o movimento de translação da rampa), R_{BC} e R_{AB} . E, também, deve ser respeitada a relação:

$$\tan(\alpha) = \frac{R_{AB}}{R_{BC}} \quad (1.7.3)$$

A velocidade absoluta do ponto A é obtida derivando-se no tempo a equação 1.7.1:

$$\begin{aligned} \vec{V}_A &= \underbrace{\frac{d\vec{R}_{CO}}{dt}}_{=\vec{V}_R} + \frac{dR_{BC}}{dt} \hat{i} + \frac{dR_{AB}}{dt} \hat{j} \\ &= \vec{V}_R + V_{A/R}^x \hat{i} + V_{A/R}^y \hat{j} = \vec{V}_R + \vec{V}_{A/R} \end{aligned} \quad (1.7.4)$$

onde $\vec{V}_{A/R}$ é a velocidade relativa de A (velocidade de A em relação a R). Para a forma polar:

$$\begin{aligned} \vec{V}_A &= \underbrace{\frac{d(R_{CO} e^{i\theta_C})}{dt}}_{=\vec{V}_C = \vec{V}_R} + \frac{d(R_{BC} e^{i0^\circ})}{dt} + \frac{d(R_{AB} e^{i90^\circ})}{dt} \\ &= \vec{V}_R + e^{i0^\circ} \frac{dR_{BC}}{dt} + e^{i90^\circ} \frac{dR_{AB}}{dt} = \vec{V}_R + V_{A/R}^x \hat{i} + V_{A/R}^y \hat{j} \end{aligned} \quad (1.7.5)$$

A aceleração é obtida de forma análoga, derivando a velocidade em relação ao tempo:

$$\vec{A}_A = \vec{A}_R + A_{A/R}^x \hat{i} + A_{A/R}^y \hat{j} = \vec{A}_R + \vec{A}_{A/R} \quad (1.7.6)$$

1.8 Movimento de Rotação Pura

A figura 9 representa a configuração de um corpo rígido (elo 2) com uma junta de revolução (pino) no ponto O_2 . Desta forma, o eixo de rotação passa por esse ponto O_2 . Seja o sistema de coordenadas ortogonal XYZ com origem no ponto O , conforme mostrado na figura. Considerando o mecanismo como plano, o eixo de rotação terá direção paralela à \hat{k} . A velocidade angular ω_2 também segue a direção \hat{k} , sendo que o sentido de rotação positivo é o anti-horário, $\vec{\omega}_2 = \frac{d\theta_2}{dt} \hat{k}$.

A equação de posição é dada por:

$$\vec{R}_A = \vec{R}_{O_2O} + \vec{R}_{AO_2} = \vec{R}_{O_2O} + R_{AO_2} e^{i\theta_2} \quad (1.8.1)$$

Note que \vec{R}_{O_2O} é invariante no tempo.

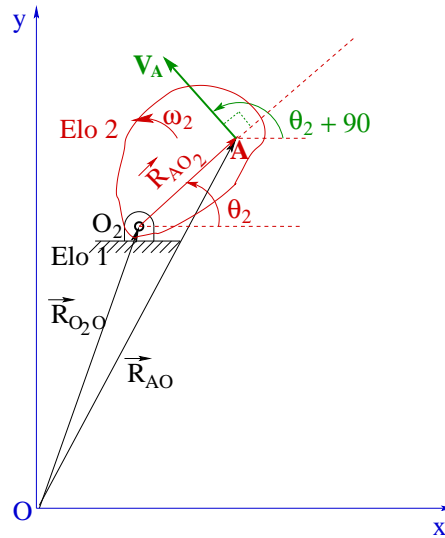


Figura 9: Rotação pura do elo 2 por um eixo de rotação passando pelo ponto de articulação O_2 e com direção paralela à \hat{k} .

Sabemos do curso de Mecânica Geral que para um corpo rígido em rotação pura:

$$\vec{V}_A = \vec{\omega}_2 \wedge \vec{R}_{AO_2} \tag{1.8.2}$$

No caso de mecanismos planos, o eixo de rotação é sempre normal ao plano do mecanismo, ou seja, $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$. Portanto, em mecanismos planos, a velocidade é sempre perpendicular ao vetor de posição do ponto em relação ao eixo de rotação no plano do mecanismo. Derivando no tempo, obtém-se a velocidade:

$$\vec{V}_A = R_{AO_2} \frac{d(i\theta_2)}{dt} e^{i\theta_2} = R_{AO_2} i\omega_2 e^{i\theta_2} \tag{1.8.3}$$

Note que $i = e^{i90^\circ}$. Então,

$$\vec{V}_A = R_{AO_2} \omega_2 e^{i90^\circ} e^{i\theta_2} = R_{AO_2} \omega_2 e^{i(90^\circ + \theta_2)} \tag{1.8.4}$$

Essa última expressão demonstra que a velocidade linear absoluta é perpendicular a \vec{R}_{AO_2} .

A **aceleração** é calculada derivando-se a equação de velocidade em relação ao tempo. Da equação 1.8.3:

$$\begin{aligned} \vec{A}_A &= R_{AO_2} \frac{d(i\omega_2)}{dt} e^{i\theta_2} + R_{AO_2} i\omega_2 \left(\frac{e^{i\theta_2}}{dt} \right) = R_{AO_2} i\alpha_2 e^{i\theta_2} + R_{AO_2} (i\omega_2)^2 e^{i\theta_2} \\ &= R_{AO_2} i\alpha_2 e^{i\theta_2} - R_{AO_2} (\omega_2)^2 e^{i\theta_2} = \underbrace{\vec{A}_A^T}_{\text{tangencial}} + \underbrace{\vec{A}_A^N}_{\text{normal}} \end{aligned} \tag{1.8.5}$$

A aceleração total no ponto A em rotação pura possui dois componentes de destaque: o componente tangencial \vec{A}_A^T , e o componente normal \vec{A}_A^N , figura 10. Note que, no caso geral, o componente de aceleração

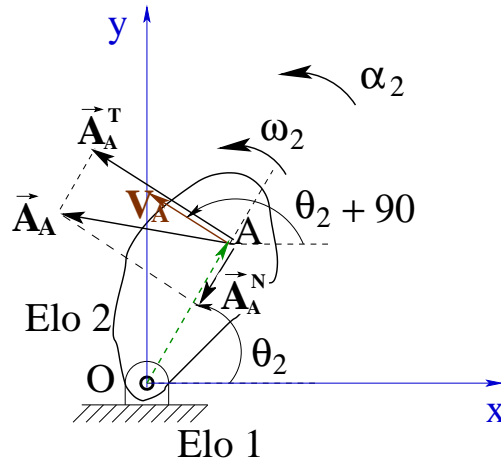


Figura 10: Aceleração de um ponto A num corpo rígido em rotação pura articulado no ponto O.

tangencial não precisa ter o mesmo sentido da velocidade linear (que neste caso é perpendicular a \vec{R}_{AO_2}), enquanto que o sentido da aceleração normal é sempre para o eixo de rotação.

1.9 Composição de Translação e Rotação

Nesta seção será tratado o caso mais geral de um corpo rígido em movimento composto de translação e rotação, figura 11. Suponha que seja conhecida a velocidade angular desse corpo; todos os pontos do corpo estarão sujeitos à mesma velocidade angular. Suponha, ainda que seja conhecida a velocidade linear de um ponto A. Então, com esses dois dados, será possível determinar a velocidade de qualquer ponto do corpo rígido.

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega}_k \wedge \vec{R}_{BA} = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} \tag{1.9.1}$$

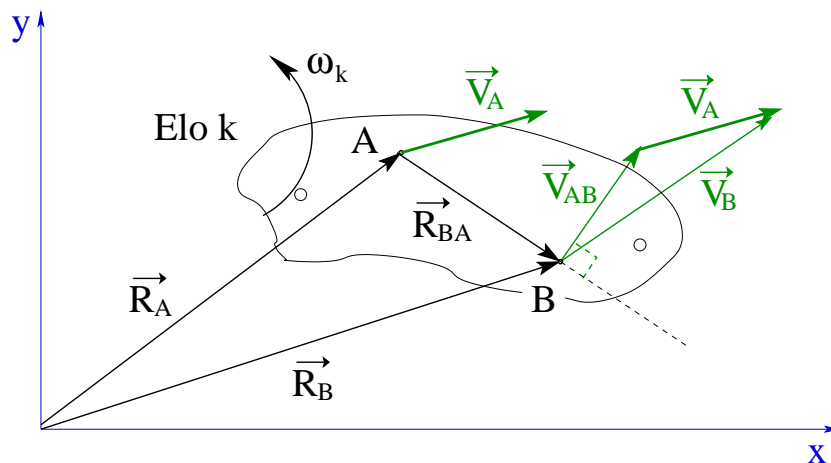


Figura 11: Pontos A e B de um mesmo corpo rígido em movimento composto.

No caso do mecanismo plano da figura 11, usando números complexos:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} = \vec{V}_A + i\omega_k R_{BA} e^{i\theta} \tag{1.9.2}$$

Diferença de Velocidade : $\vec{V}_{BA} = i\omega_k R_{BA} e^{i\theta}$ (1.9.3)

Analogamente, a aceleração de qualquer ponto pode ser determinada desde que se conheça a aceleração de pelo menos um dos pontos do corpo rígido, a velocidade angular e a aceleração angular, conforme o esquema da figura 12.

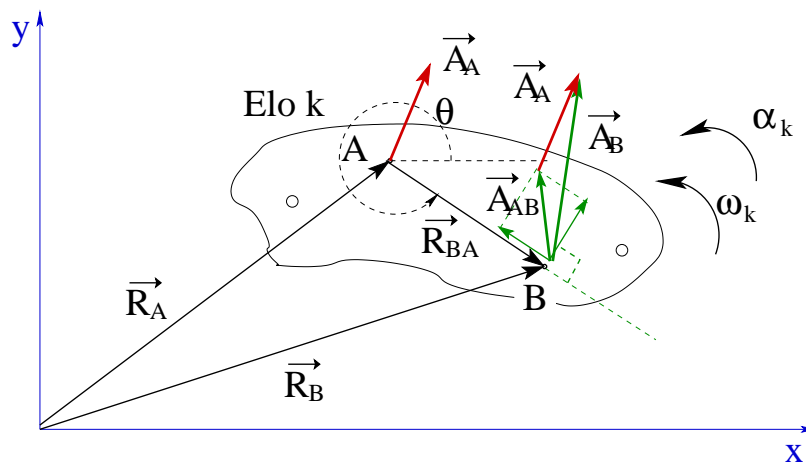


Figura 12: Aceleração de dois pontos num mesmo corpo rígido em movimento composto.

$$\vec{A}_B = \vec{A}_A + \vec{A}_{BA} = \vec{A}_A + \vec{A}_{BA}^T + \vec{A}_{BA}^N = \vec{A}_A + R_{BA} i\alpha_k e^{i\theta} - R_{BA} \omega_k^2 e^{i\theta} \tag{1.9.4}$$

onde \vec{A}_{BA} é a diferença de aceleração entre dois pontos de um mesmo corpo rígido.

Note que esses conceitos de diferença de velocidade e de diferença de aceleração só valem para pontos de um mesmo corpo rígido.

1.10 Composição de Translação, Rotação e Movimento Relativo

No caso de dois pontos em corpos rígidos distintos, deve-se usar o conceito de velocidade relativa. Veja o exemplo seguinte, figura 13, de uma barra em movimento composto de rotação e translação (caso da seção anterior) com velocidade conhecida no ponto A, e com um prisma deslizando pela barra.

Sejam dados a velocidade angular ω_3 do elo 3 (barra), o ângulo θ_3 do elo 3 naquele instante, e a velocidade relativa $V_{4/3}$ (velocidade de deslizamento) do elo 4 em relação ao elo 3. Deseja-se determinar a velocidade absoluta no ponto B (\vec{V}_B).

Observe que o ponto B pertence de fato ao elo 4, e, para um observador num referencial inercial (origem O), sofre a ação composta da rotação-translação da barra 3 e do deslizamento relativo do prisma 4 em

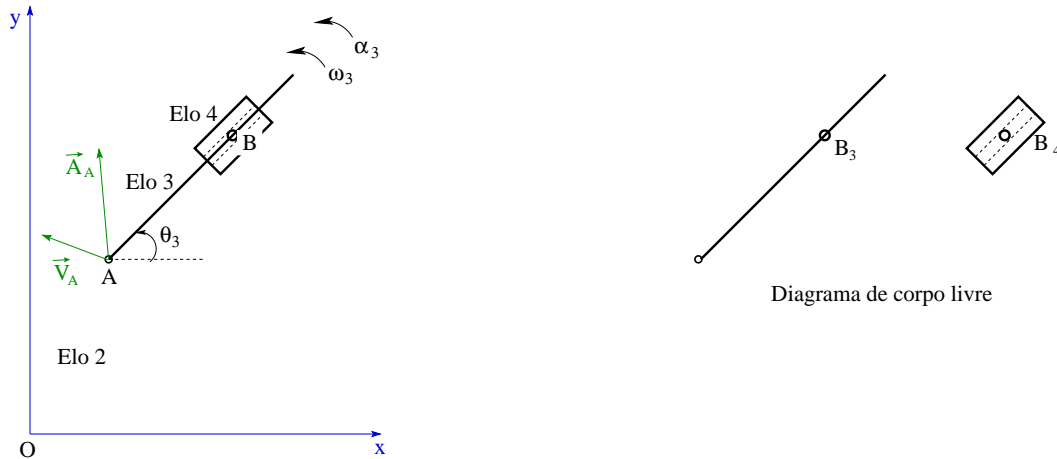


Figura 13: Elo 3 (barra) em rotação pura e elo 4 em movimento relativo de deslizamento em relação ao elo 3 através de junta prismática.

relação à barra 3. Entretanto, instantaneamente, podemos considerar o ponto B_3 (projeção de B na barra 3) coincidente com o ponto B_4 no prisma 4. Isso é mostrado no “diagrama de corpo livre” (esquema mostrando os corpos separadamente). Note que B_4 sempre se move com o prisma 4, enquanto que B_3 é fixo no elo 3 e só vale para aquele instante. Num instante posterior deve-se considerar um outro ponto $B_{3'}$ para coincidir instantaneamente com B_4 .

O problema de posição é resolvido primeiro, e depois o de velocidade.

$$\vec{R}_{BO} = \vec{R}_{AO} + R_{B_3A}e^{i\theta_3} \tag{1.10.1}$$

Ao derivar no tempo para obter a velocidade, deve-se notar que tanto R_{BA} como θ_3 variam no tempo. A variação de \vec{R}_{AO} no tempo dá a velocidade conhecida no ponto A (\vec{V}_A). Então:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + R_{BA} \frac{d[e^{i\theta_3}]}{dt} + \frac{dR_{BA}}{dt}e^{i\theta_3} = \vec{V}_A + R_{BA}i\omega_3e^{i\theta_3} + V_{4/3}e^{i\theta_3} \tag{1.10.2}$$

Ou seja,

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} + \vec{V}_{4/3} \tag{1.10.3}$$

A aceleração é obtida derivando-se a equação da velocidade no tempo. Quando se trata de pontos em corpos rígidos distintos emprega-se o conceito de “aceleração relativa”, analogamente ao caso da velocidade.

Quando se tem movimento de deslizamento relativo junto com rotação, aparece também a “aceleração de Coriolis”. Veja o caso esquematizado na figura 14.

Derivando-se em função do tempo a equação de velocidade (eq. (1.10.2)):

$$\vec{A}_B = \frac{d\vec{V}_B}{dt} = \vec{A}_A + \frac{d[V_{4/3}e^{i\theta_3} + R_{BA}i\omega_3e^{i\theta_3}]}{dt} \tag{1.10.4}$$

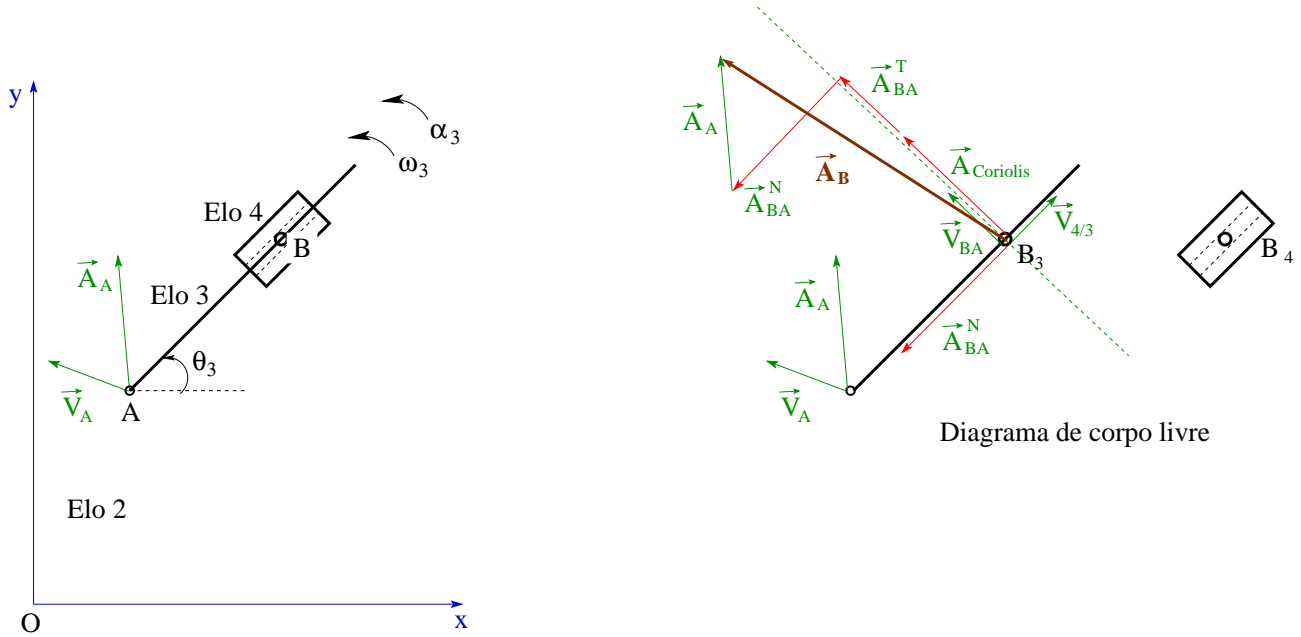


Figura 14: Movimento relativo de dois elos e diagrama de corpo livre correspondente.

$$\vec{A}_B = \vec{A}_A + \frac{dV_{4/3}}{dt} e^{i\theta_3} + V_{4/3} \frac{d[e^{i\theta_3}]}{dt} + \frac{dR_{BA}}{dt} i\omega_3 e^{i\theta_3} + R_{BA} \frac{d[i\omega_3]}{dt} e^{i\theta_3} + R_{BA} i\omega_3 \frac{d[e^{i\theta_3}]}{dt} \quad (1.10.5)$$

$$\vec{A}_B = \vec{A}_A + \underbrace{A_{4/3} e^{i\theta_3}}_{\vec{A}_{4/3}} + \underbrace{V_{4/3} i\omega_3 e^{i\theta_3} + V_{4/3} i\omega_3 e^{i\theta_3}}_{\vec{A}_{Coriolis}} + \underbrace{R_{BA} i\alpha_3 e^{i\theta_3}}_{\vec{A}_{BA}^T} - \underbrace{R_{BA} \omega_3^2 e^{i\theta_3}}_{\vec{A}_{BA}^N} \quad (1.10.6)$$

onde $\vec{A}_{4/3}$ é a aceleração relativa do corpo 4 em relação ao corpo 3. \vec{A}_{BA} é a diferença de aceleração, pois os pontos B e A estão no mesmo corpo rígido.

Agrupando-se os termos da equação 1.10.6 de mesma direção resulta em:

$$\vec{A}_B = \vec{A}_A + \underbrace{[A_{4/3} e^{i\theta_3} - R_{BA} \omega_3^2 e^{i\theta_3}]}_{\vec{A}_{BA}^N} + \underbrace{[2V_{4/3} \omega_3 i e^{i\theta_3} + R_{BA} \alpha_3 i e^{i\theta_3}]}_{\vec{A}_{BA}^T} \quad (1.10.7)$$

Termos de direção radial (normal):

$\vec{A}_{4/3} = A_{4/3} e^{i\theta_3}$ Aceleração relativa do elo 4 em relação ao elo 3. Ao determinar o valor numérico de $A_{4/3}$ através do sistema de equações escalares provenientes da equação vetorial 1.10.7 pode resultar um valor positivo ou negativo. Se for positivo significa que o sentido de $\vec{A}_{4/3}$ coincide com o do fador θ_3 . Se for negativo significa que o sentido de $\vec{A}_{4/3}$ será contrário ao do fador θ_3 .

$\vec{A}_{BA}^N = -R_{BA} \omega_3^2 e^{i\theta_3}$ Aceleração normal do ponto A_2 . Sempre tem sentido voltado para o eixo de rotação, ou seja, contrário ao fador θ_3 .

Termos de direção tangencial ($\theta_3 + 90^\circ$):

$\vec{A}_{Coriolis} = 2V_{4/3}\omega_3 i e^{i\theta_3}$ Aceleração de Coriolis. O sentido depende dos sinais de $V_{4/3}$ e de ω_3 . Se ambos forem positivos ou se ambos forem negativos o sentido de $\vec{A}_{Coriolis}$ coincide com o do fasor ($\theta_3 + 90^\circ$). Se apenas um deles for negativo o sentido de $\vec{A}_{Coriolis}$ será contrário ao do fasor ($\theta_3 + 90^\circ$).

$\vec{A}_{BA}^T = R_{BA}\alpha_3 i e^{i\theta_3}$ Aceleração tangencial do ponto A_3 . O sentido depende do sinal de $\vec{\alpha}_3$: positivo se tiver sentido anti-horário; negativo se tiver sentido horário.

1.11 Problema Resolvido

Consideremos o seguinte problema, esquematizado na figura 15, que representa o conjunto manivela - biela - pistão de um motor em V:

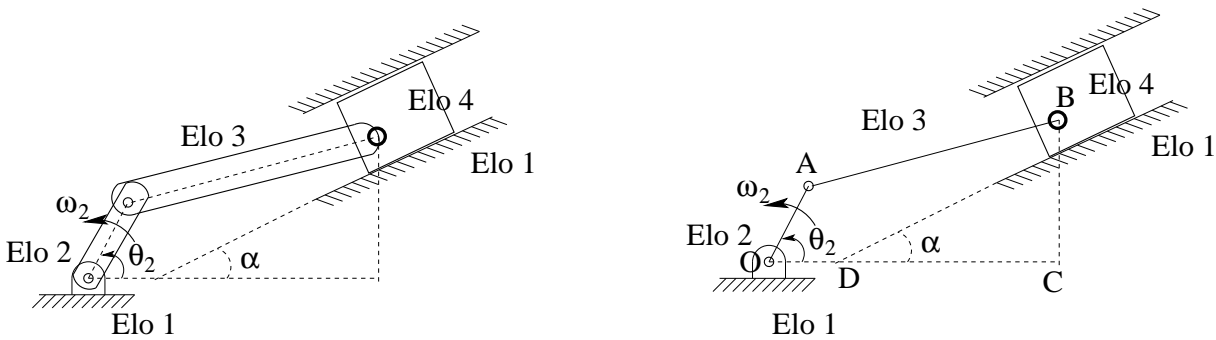


Figura 15: Mecanismo manivela-biela-pistão.

Sejam dados: $\theta_2, \vec{\omega}_2, \vec{\alpha}_2, R_{AO}, R_{BA}$, ângulo α do plano inclinado, R_{OD} . Pede-se resolver o problema de posição, e o problema de velocidade.

A resolução se inicia pela escolha de um caminho fechado (loop). Por exemplo, como na figura 16.

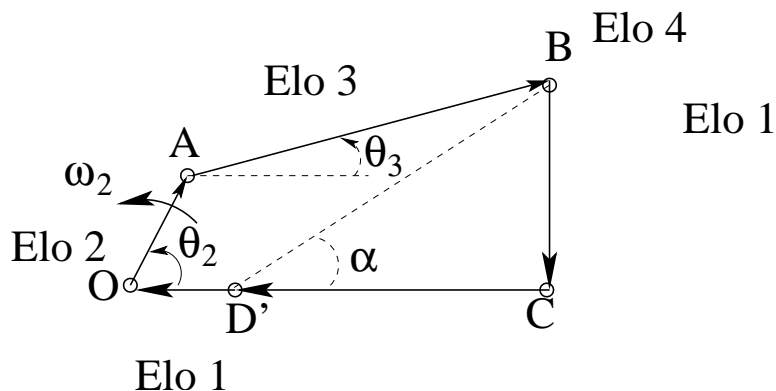


Figura 16: Representação vetorial de um possível caminho fechado do mecanismo manivela - biela - pistão.

$$\vec{R}_{AO} + \vec{R}_{BA} + \vec{R}_{CB} + \vec{R}_{DC} + \vec{R}_{OD} = \vec{0} \tag{1.11.1}$$

$$R_{AO}e^{i\theta_2} + R_{BA}e^{i\theta_3} + R_{CB}e^{i270^\circ} + R_{DC}e^{i180^\circ} + R_{OD}e^{i180^\circ} = \vec{0} \quad (1.11.2)$$

Note que o problema tem 3 incógnitas: θ_3 , R_{CB} , e R_{DC} . Decompondo a equação anterior na parte real e na parte imaginária, obtêm-se duas equações. A terceira equação necessária vem da relação geométrica entre R_{CB} e R_{DC} :

$$\tan \alpha = \frac{R_{CB}}{R_{DC}} \quad (1.11.3)$$

Obtenha você mesmo a solução do problema de posição como exercício. Note, porém, que esse problema tem dois conjuntos de soluções, representados na figura 17.

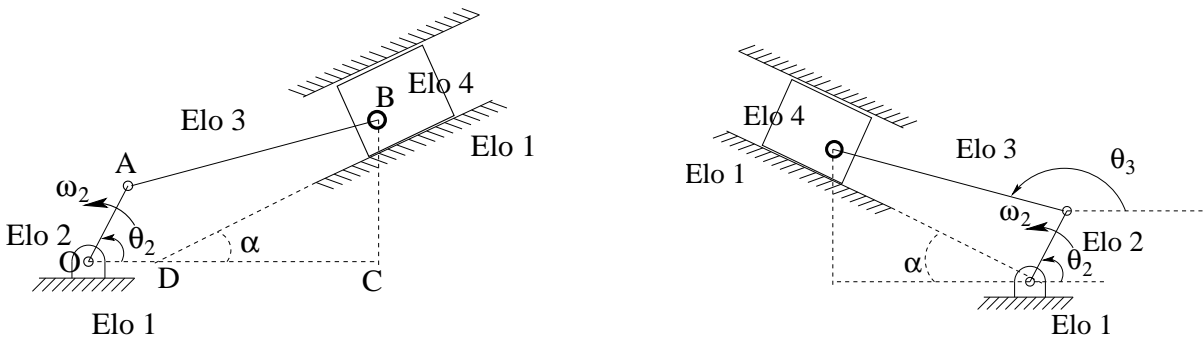


Figura 17: Duas possíveis soluções da posição do mecanismo manivela - biela - pistão para um mesmo conjunto de condições iniciais.

Vamos considerar apenas a solução da esquerda, ou seja, $\theta_3 < 90^\circ$.

O problema de velocidade começa a ser resolvido tomando-se a derivada no tempo da equação (1.11.2):

$$\frac{dR_{AO}}{dt}e^{i\theta_2} + R_{AO}\frac{d[e^{i\theta_2}]}{dt} + \frac{dR_{BA}}{dt}e^{i\theta_3} + R_{BA}\frac{d[e^{i\theta_3}]}{dt} + \frac{dR_{CB}}{dt}e^{i270^\circ} + R_{CB}\frac{d[e^{i270^\circ}]}{dt} + \frac{dR_{DC}}{dt}e^{i180^\circ} + R_{DC}\frac{d[e^{i180^\circ}]}{dt} + \frac{dR_{OD}}{dt}e^{i180^\circ} + R_{OD}\frac{d[e^{i180^\circ}]}{dt} = \vec{0} \quad (1.11.4)$$

Lembre que R_{AO} , R_{BA} , e R_{OD} são constantes no tempo. Além disso, as direções de R_{CB} (vertical) e R_{DC} (horizontal) também não variam no tempo. Então,

$$\underbrace{R_{AO}\omega_2 i e^{i\theta_2}}_{\vec{V}_A} + \underbrace{R_{BA}\omega_3 i e^{i\theta_3}}_{\vec{V}_{BA}} + \underbrace{\dot{R}_{CB}e^{i270^\circ} + \dot{R}_{DC}e^{i180^\circ}}_{-\vec{V}_B} = \vec{0} \quad (1.11.5)$$

Ou seja,

$$\vec{V}_A + \vec{V}_{BA} - \vec{V}_B = \vec{0} \quad (1.11.6)$$

Para entender a razão do sinal negativo em \vec{V}_B da equação anterior, note da figura que o vetor posição do ponto B (vetor que liga o ponto B à origem) é:

$$\vec{R}_B = \vec{R}_A + \vec{R}_{BA} = -\vec{R}_{OD} - \vec{R}_{DC} - \vec{R}_{CB} \quad (1.11.7)$$

Para determinar as incógnitas ω_3 , V_B^x , e V_B^y é necessário decompor a equação (1.11.5) nas suas partes real e imaginária. Além disso, lembrar que o pistão onde está o ponto B só pode se mover na direção do plano inclinado de α , ou seja,

$$\tan \alpha = \left| \frac{V_{By}}{V_{Bx}} \right| = \left| \frac{\dot{R}_{CB}}{\dot{R}_{DC}} \right| = \left| \frac{A_{By}}{A_{Bx}} \right| \quad (1.11.8)$$

Expandindo a equação (1.11.5) com a Relação de Euler,

$$R_{AO}\omega_2 i[\cos \theta_2 + i \sin \theta_2] + R_{BA}\omega_3 i[\cos \theta_3 + i \sin \theta_3] + \dot{R}_{CB}[\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ] + \dot{R}_{DC}[\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ] = \vec{0} \quad (1.11.9)$$

Parte Real:

$$-R_{AO}\omega_2 \sin \theta_2 - R_{BA}\omega_3 \sin \theta_3 - \dot{R}_{DC} = 0 \quad (1.11.10)$$

Parte Imaginária:

$$R_{AO}\omega_2 \cos \theta_2 + R_{BA}\omega_3 \cos \theta_3 - \dot{R}_{CB} = 0 \quad (1.11.11)$$

Note que $V_B^x = \dot{R}_{DC}$ e $V_B^y = \dot{R}_{CB}$.

Resolvendo o sistema linear formado pelas equações (1.11.8), (1.11.10) e (1.11.11) encontram-se os valores das incógnitas ω_3 , V_B^x , e V_B^y .

As equações para as acelerações podem ser obtidas por derivação direta das equações (1.11.10) e (1.11.11), e pelo uso da relação (1.11.8):

Parte Real:

$$-R_{AO}\alpha_2 \sin \theta_2 - R_{AO}(\omega_2)^2 \cos \theta_2 - R_{BA}\alpha_3 \sin \theta_3 - R_{BA}(\omega_3)^2 \cos \theta_3 - \ddot{R}_{DC} = 0 \quad (1.11.12)$$

Parte Imaginária:

$$R_{AO}\alpha_2 \cos \theta_2 - R_{AO}(\omega_2)^2 \sin \theta_2 + R_{BA}\alpha_3 \cos \theta_3 - R_{BA}(\omega_3)^2 \sin \theta_3 - \ddot{R}_{CB} = 0 \quad (1.11.13)$$

$$\tan \alpha = \left| \frac{A_{By}}{A_{Bx}} \right| \quad (1.11.14)$$

Note que $A_B^x = \ddot{R}_{DC}$ e $A_B^y = \ddot{R}_{CB}$.

Resolvendo o sistema de equações lineares (1.11.12), (1.11.13) e (1.11.14) obtêm-se α_3 , A_B^x e A_B^y .

Análise Cinética (Dinâmica) de Mecanismos

2.1 Introdução

A *Análise Cinética de Mecanismos* consiste na determinação das forças e torques que são importantes na geração dos movimentos do mecanismo em análise. Em geral, as forças e torques são transmitidos de um elo a outro da cadeia através das juntas. Além dessas interações entre os elos da cadeia, podem haver interações de campos externos (peso, forças de natureza eletrostática, magnética, etc.). Em muitos casos em que o mecanismo não seja de grandes dimensões a força peso pode ser desprezada por ser muito menor que as outras forças envolvidas.

Neste curso serão considerados apenas mecanismos planos. Portanto, as forças envolvidas são paralelas ao plano de movimento do mecanismo, enquanto que os torques são normais ao plano de movimento do mecanismo. Desta forma, é possível definir um sistema de coordenadas cartesiano em que os eixos X e Y sejam paralelos ao movimento do mecanismo, e o eixo Z seja normal ao movimento do mecanismos. Assim, todas as forças podem ser decompostas em X e Y e os torques estarão na direção Z.

2.2 Forças em Mecanismos

As Leis de Newton, em particular a 2ª Lei de Newton, relaciona conceitos de Dinâmica e Cinemática. Entretanto, as Leis de Newton foram propostas para partículas (“pontos materiais”). Para corpos rígidos, que constituem os elos de uma cadeia cinemática, é necessário integrar o efeito em cada partícula baseando-se na Mecânica de Meios Contínuos.

Considere o elo k intermediário de um mecanismo, figura 18. Na figura estão representados o elo k e dois vizinhos conectados por juntas, elo $k - 1$ e elo $k + 1$. O *diagrama de corpo livre* representa cada elo separadamente. As juntas estão representadas pelos pontos A, B, C, D . Os centros de massa estão representados por G . Os vetores de posição de cada junta ao centro de massa do elo correspondente também estão representados na figura.

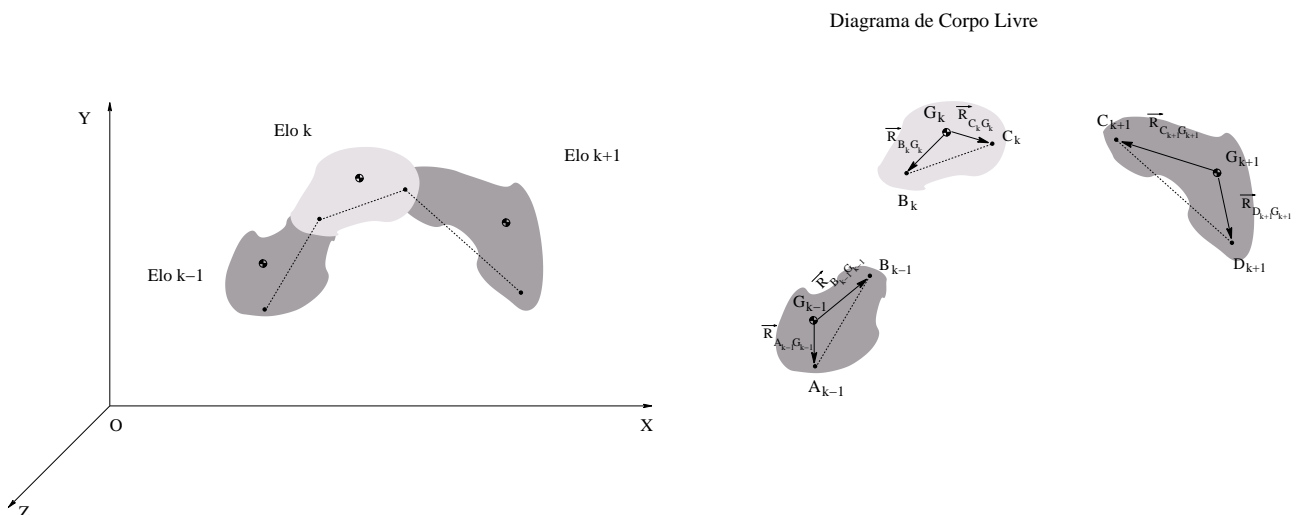


Figura 18: Elos intermediários de um mecanismo. Diagrama de corpo livre.

Considere em particular o elo k com massa total m_k , figura 19. Esse elo pode ser subdividido em partículas ou pontos materiais. Cada um desses pontos materiais possui uma fração da massa total m_k . Dois desses pontos materiais, P com massa dm_P e Q com massa dm_Q , estão representados na figura. A

interação entre os pontos materiais P e Q do mesmo corpo rígido k resulta num par de *forças internas* \vec{F}_{PQ} (força de P em Q) e \vec{F}_{QP} (força de Q em P). Pela 3ª Lei de Newton, essas forças correspondem a um par *ação-reação* e, portanto, $\vec{F}_{PQ} = -\vec{F}_{QP}$. O mesmo ocorre para quaisquer pares de pontos internos do elo k . Portanto, as forças internas sempre ocorrem em pares ação-reação e a resultante de todas as forças internas é nula.

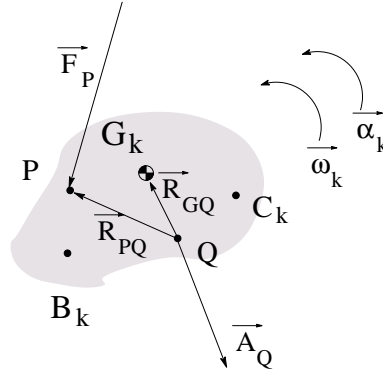


Figura 19: Elo k e duas de suas partículas, P e Q . A aceleração em Q é conhecida.

Por outro lado, as forças de interação com outros corpos ou campos externos possuem reação fora do corpo em questão. Seja uma força \vec{F}_P atuando no ponto genérico P cuja reação está fora do elo k . Seja dm_P a massa do ponto material P e suponha conhecida a aceleração do ponto Q . Pela 2ª Lei de Newton, $d\vec{F}_P = \vec{A}_P dm_P$.

Outras forças com reação fora do corpo k atuam em outros pontos, inclusive a *força peso* que é aplicada no centro de massa. Então, a resultante de todas as forças atuando em pontos do elo k , mas com reações externas ao elo k , é dada por:

$$\sum \vec{F}_{ik} = \int \vec{A}_P dm_P \quad (2.2.1)$$

Repare que nesta equação (2.2.1) a somatória que aparece à esquerda da igualdade representa apenas forças cujas reações são externas ao corpo (elo k); enquanto que a integral à direita da igualdade envolve todos os pontos materiais do elo k . Nessa integração os termos representando pares de forças internas vão se anular, restando apenas as parcelas dos pontos com forças externas.

Se for conhecida a aceleração \vec{A}_Q do ponto Q , a velocidade angular $\vec{\omega}_k$ e a aceleração angular $\vec{\alpha}_k$ do elo k , então é possível encontrar a aceleração em qualquer ponto P genérico distante \vec{R}_{PQ} :

$$\vec{A}_P = \vec{A}_Q + \vec{\omega}_k \wedge (\vec{\omega}_k \wedge \vec{R}_{PQ}) + \vec{\alpha}_k \wedge \vec{R}_{PQ} \quad (2.2.2)$$

Substituindo a equação (2.2.2) em (2.2.1), e lembrando que qualquer ponto do corpo rígido k tem mesma velocidade angular $\vec{\omega}_k$ e aceleração angular $\vec{\alpha}_k$:

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_{ik} &= \int \left[\vec{A}_Q + \vec{\omega}_k \wedge (\vec{\omega}_k \wedge \vec{R}_{PQ}) + \vec{\alpha}_k \wedge \vec{R}_{PQ} \right] dm_P \\ &= \int \vec{A}_Q dm_P + \int [\vec{\omega}_k \wedge (\vec{\omega}_k \wedge \vec{R}_{PQ})] dm_P + \int [\vec{\alpha}_k \wedge \vec{R}_{PQ}] dm_P \\ &= \vec{A}_Q \int dm_P + \vec{\omega}_k \wedge (\vec{\omega}_k \wedge \int \vec{R}_{PQ} dm_P) + \vec{\alpha}_k \wedge \int \vec{R}_{PQ} dm_P \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Lembrando que:

$$\int dm_P = m_k \quad (2.2.4)$$

A definição de centro de massa (ponto G_k na figura) é dada por:

$$\vec{R}_{GQ} = \frac{1}{m_k} \int \vec{R}_{PQ} dm_P \implies \int \vec{R}_{PQ} dm_P = \vec{R}_{GQ} m_k \quad (2.2.5)$$

Então:

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_{ik} &= \vec{A}_Q m_k + \vec{\omega}_k \wedge (\vec{\omega}_k \wedge \vec{R}_{GQ} m_k) + \vec{\alpha}_k \wedge \vec{R}_{GQ} m_k \\ &= m_k \left[\vec{A}_Q + \vec{\omega}_k \wedge (\vec{\omega}_k \wedge \vec{R}_{GQ}) + \vec{\alpha}_k \wedge \vec{R}_{GQ} \right] \\ &= m_k \vec{A}_G \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Portanto, a equação 2.2.6 mostra que basta aplicar a resultante das forças com reações externas no centro de massa do corpo para ter o efeito equivalente a todas as forças individuais.

Os casos mais comuns de forças com reações externas a considerar em mecanismos são: peso, cargas aplicadas, forças em juntas, forças de atrito de partes em contato.

Também, é importante observar que normalmente são determinadas as acelerações em pontos de articulação (juntas) durante a análise cinemática. Assim, é só usar a expressão $\vec{A}_Q + \vec{\omega}_k \wedge (\vec{\omega}_k \wedge \vec{R}_{GQ}) + \vec{\alpha}_k \wedge \vec{R}_{GQ}$ para determinar a aceleração no centro de massa, sendo \vec{A}_Q a aceleração conhecida numa junta Q .

Caso seja conhecida apenas a aceleração de um ponto em outro elo $k-1$ que realiza movimento relativo ao elo k , a equação para o fator A_p fica um pouco mais complexa. Considere, por exemplo, o caso da barra em movimento composto de rotação e translação e com um prisma se movendo por ela. Esse problema já foi considerado na seção 1.10. Basta substituir A_p por uma equação análoga à (1.10.6).

Como exemplo, considere o elo k do mecanismo da figura 18. Suponha que já tenha sido feita a análise cinemática completa e que, portanto, já se conheça a aceleração no ponto B de articulação entre os elos $k-1$ e k . Suponha também que sejam aplicadas as forças externas \vec{R}_{P_1} e \vec{R}_{P_2} e o peso do elo k seja P_k . Por fim, as forças externas transmitidas pelas juntas B (a força $\vec{F}_{(k-1)(k)}$ do elo $(k-1)$ no elo (k)) e C (a força $\vec{F}_{(k+1)(k)}$ do elo $(k+1)$ no elo (k)). Veja a figura 20.

A equação vetorial de forças para o elo k é:

$$\vec{F}_{(k-1)(k)} + \vec{F}_{(k+1)(k)} + \vec{F}_{P_1} + \vec{F}_{P_2} + \vec{P}_k = m_k \vec{A}_{G_k} \quad (2.2.7)$$

Mas, se for conhecida a aceleração \vec{A}_B do ponto B :

$$\vec{A}_{G_k} = \vec{A}_B + \vec{\omega}_k \wedge (\vec{\omega}_k \wedge \vec{R}_{G_k B}) + \vec{\alpha}_k \wedge \vec{R}_{G_k B} \quad (2.2.8)$$

A decomposição da equação vetorial de força nas direções X e Y resulta em duas equações escalares:

$$F_{(k-1)(k)}^x + F_{(k+1)(k)}^x + F_{P_1}^x + F_{P_2}^x = m_k A_{G_k}^x \quad (2.2.9a)$$

$$F_{(k-1)(k)}^y + F_{(k+1)(k)}^y + F_{P_1}^y + F_{P_2}^y + P_k = m_k A_{G_k}^y \quad (2.2.9b)$$

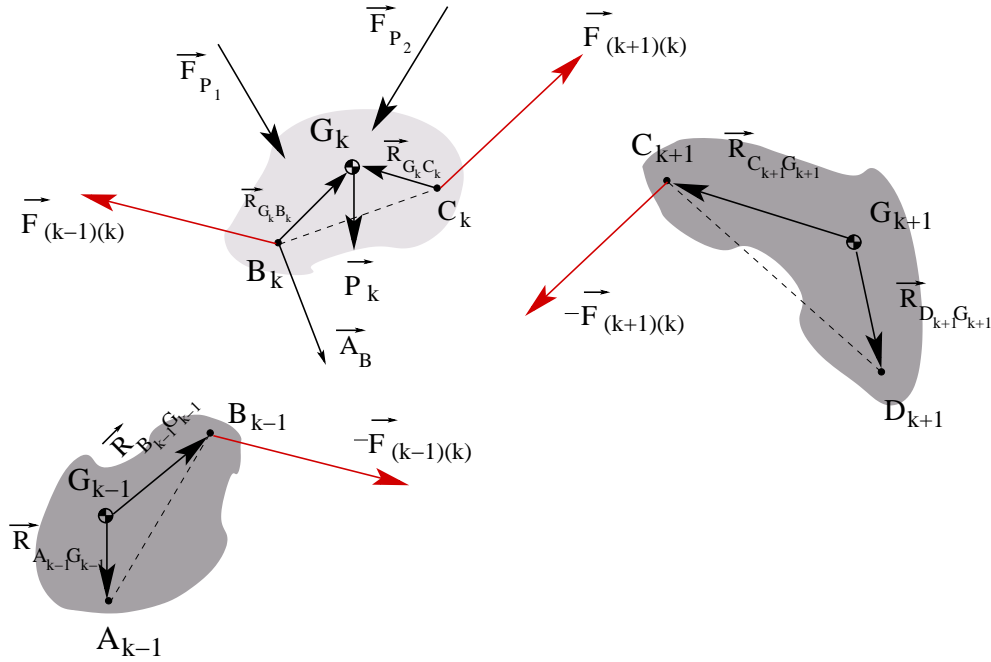


Figura 20: Diagrama de corpo livre detalhado para o Elo k.

2.3 Torques em Mecanismos. Método de Euler

Considere um mecanismo composto de vários elos, como na figura 21. O torque resultante em cada elo será devido aos torques das forças com reações externas ao elo (como na seção anterior) e também devido a torques externos aplicados. O torque resultante devido às forças internas é nulo pois o corpo deve permanecer rígido.

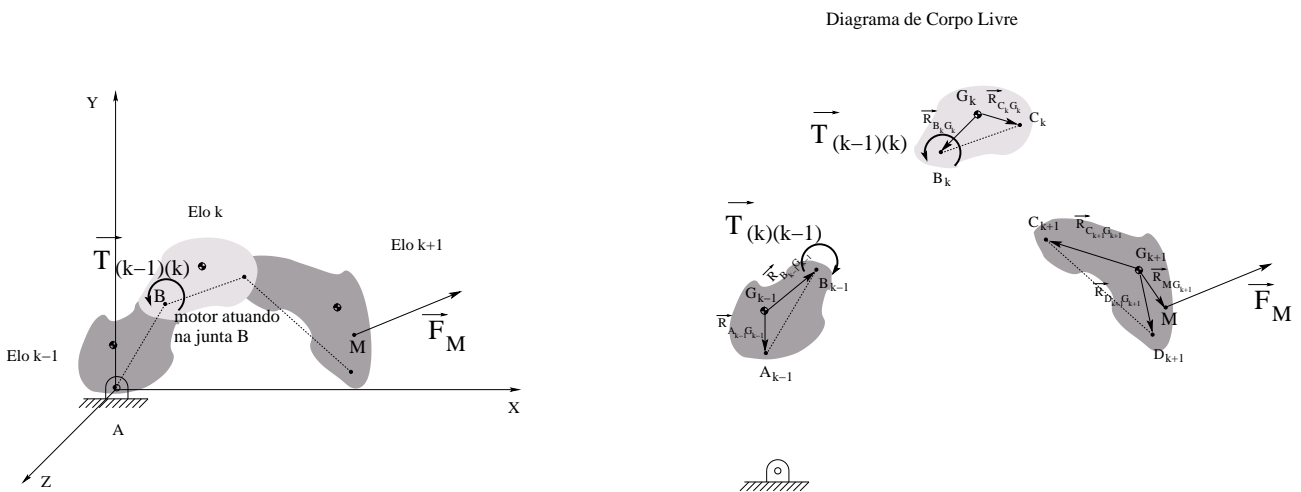


Figura 21: Aplicação de torque e força externa no mecanismo.

Os torques externos (normalmente provenientes de algum tipo de motor) são dados simplesmente pelos seus valores. Por exemplo, $\vec{T}_{(k-1)(k)}$ é o torque proveniente de um motor fixo ao elo (k-1) sendo aplicado no elo (k).

A cada força com reação externa aplicada num ponto material genérico P corresponde um torque (ou momento) em relação ao centro de massa G dado por $\vec{R}_{PG} \wedge \vec{F}_P$.

$$\begin{aligned}\vec{R}_{PG} \wedge \vec{F}_P &= \vec{R}_{PG} \wedge \vec{A}_P dm_P \\ &= \vec{R}_{PG} \wedge \left[\vec{A}_G + \vec{\omega}_k \wedge (\vec{\omega}_k \wedge \vec{R}_{PG}) + \vec{\alpha}_k \wedge \vec{R}_{PG} \right] dm_P\end{aligned}\quad (2.3.1)$$

Então, de maneira análoga ao que foi feito para o equacionamento das forças, deve-se integrar o efeito do torque de todos os pontos materiais que constituem o elo k. O torque resultante $\sum \vec{T}_{iP}$ das forças externas e dos torques externos relativo ao centro de massa G_k do elo k será:

$$\begin{aligned}\sum \vec{T}_{iP} &= \int \vec{R}_{PG} \wedge \vec{F}_P \\ &= \int \left[\vec{R}_{PG} \wedge \left(\vec{A}_G + \vec{\omega}_k \wedge (\vec{\omega}_k \wedge \vec{R}_{PG}) + \vec{\alpha}_k \wedge \vec{R}_{PG} \right) \right] dm_P\end{aligned}\quad (2.3.2)$$

O desenvolvimento dessa expressão para o problema tridimensional é relativamente trabalhoso e não será feito aqui. Quem estiver interessado pode consultar, por exemplo, o livro *Theory of Machines and Mechanisms*, Shigley & Uicker, McGraw-Hill, 1995, capítulo 16. O desenvolvimento da expressão para o caso de mecanismos planos resulta simplesmente em:

$$\sum \vec{T}_{iP} = I_{G_k}^{zz} \vec{\alpha}_k \quad (2.3.3)$$

O exemplo seguinte, figura 22, considera dois elos consecutivos (k) e (k+1) de um mecanismo. Supondo que há um motor elétrico fixo no elo (k) e conectado por um eixo ao elo (k+1), esse motor aplicará um torque $\vec{T}_{(k)(k+1)} = \vec{T}_M$ ao elo (k+1). Ou seja, o elo (k+1) girará impulsionado pelo eixo do motor. Por outro lado, haverá uma reação $\vec{T}_{(k+1)(k)} = -\vec{T}_M$ no elo k.

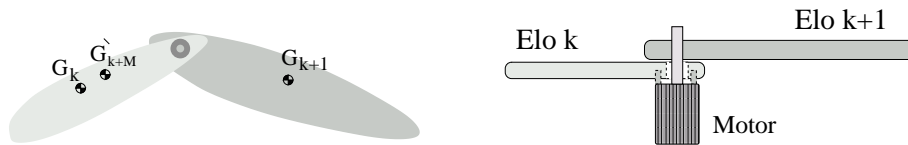


Figura 22: Aplicação de torque por um motor fixo ao elo k e conectado por eixo ao elo k+1.

As forças e torques atuando nos elos k e k+1 estão representados em detalhe na figura 23. Note que para o elo k que contém o motor, o centro de massa a ser considerado é G'_{k+M} do corpo k e do motor em conjunto.

Elo k:

Forças:

$$\vec{F}_{(k-1)(k)} + \vec{F}_{(k+1)(k)} + \vec{P}_k + \vec{P}_M = m_k \vec{A}_{G'_{k+M}} \quad (2.3.4)$$

$$F_{(k-1)(k)}^x + F_{(k+1)(k)}^x = A_{G'_{k+M}}^x \quad (2.3.5a)$$

$$F_{(k-1)(k)}^y + F_{(k+1)(k)}^y + P_k + P_M = A_{G'_{k+M}}^y \quad (2.3.5b)$$

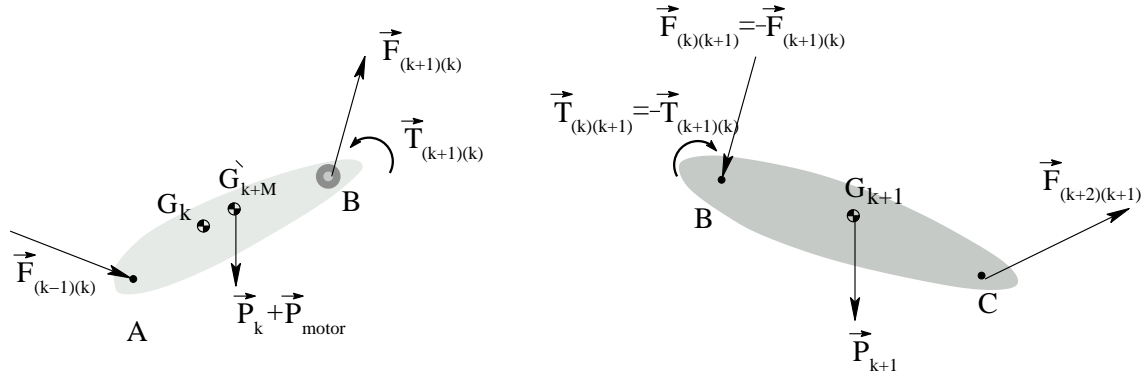


Figura 23: Detalhes das forças externas e torques externos atuando nos elos k e k+1.

Torques

$$-\vec{T}_M + \vec{R}_{AG'_{k+M}} \wedge \vec{F}_{(k-1)(k)} + \vec{R}_{BG'_{k+M}} \wedge \vec{F}_{(k+1)(k)} = I_{G'_{k+M}}^{zz} \vec{\alpha}_k \quad (2.3.6)$$

$$-T_M \hat{k} + \left[R_{AG'_{k+M}}^x F_{(k-1)(k)}^y - R_{AG'_{k+M}}^y F_{(k-1)(k)}^x \right] \hat{k} + \\ + \left[R_{BG'_{k+M}}^x F_{(k+1)(k)}^y - R_{BG'_{k+M}}^y F_{(k+1)(k)}^x \right] \hat{k} = I_{G'_{k+M}}^{zz} \alpha_k \hat{k} \quad (2.3.7)$$

Elo k+1:

Forças:

$$\vec{F}_{(k)(k+1)} + \vec{F}_{(k+2)(k+1)} + \vec{P}_{k+1} = m_{k+1} \vec{A}_{G_{k+1}} \quad (2.3.8)$$

$$F_{(k)(k+1)}^x + F_{(k+2)(k+1)}^x = A_{G_{k+1}}^x \quad (2.3.9a)$$

$$F_{(k)(k+1)}^y + F_{(k+2)(k+1)}^y + P_{k+1} = A_{G_{k+1}}^y \quad (2.3.9b)$$

Torques

$$\vec{T}_M + \vec{R}_{BG_{k+1}} \wedge \vec{F}_{(k)(k+1)} + \vec{R}_{CG_{k+1}} \wedge \vec{F}_{(k+2)(k+1)} = I_{G_{k+1}}^{zz} \vec{\alpha}_{k+1} \quad (2.3.10)$$

$$T_M \hat{k} + \left[R_{BG_{k+1}}^x F_{(k)(k+1)}^y - R_{BG_{k+1}}^y F_{(k)(k+1)}^x \right] \hat{k} + \\ + \left[R_{CG_{k+1}}^x F_{(k+2)(k+1)}^y - R_{CG_{k+1}}^y F_{(k+2)(k+1)}^x \right] \hat{k} = I_{G_{k+1}}^{zz} \alpha_{k+1} \hat{k} \quad (2.3.11)$$

Outros exemplos serão vistos em aula.