

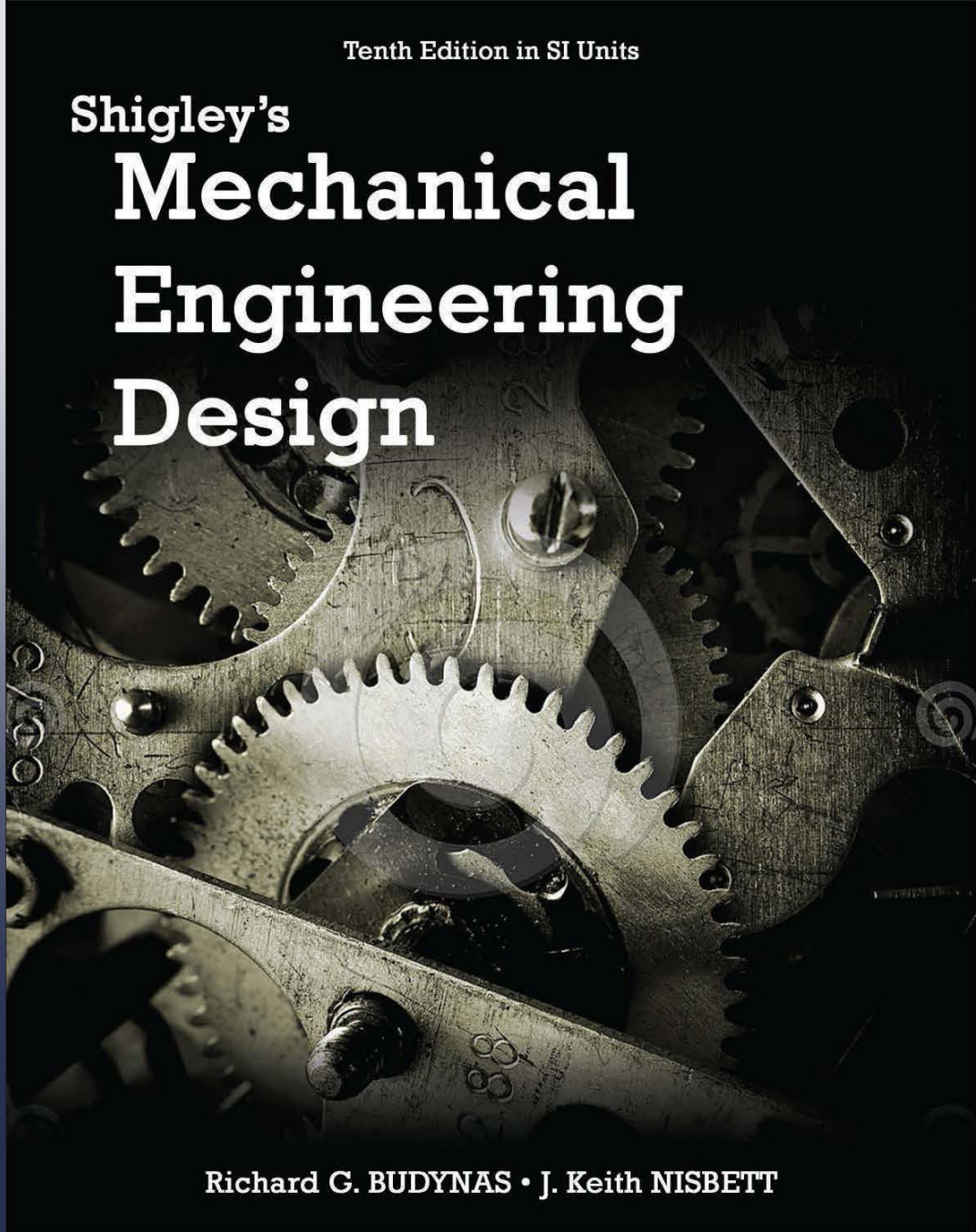
## Lecture Slides

### Chapter 5

# Failures Resulting from Static Loading

Tenth Edition in SI Units

# Shigley's Mechanical Engineering Design



Richard G. BUDYNAS • J. Keith NISBETT

# Projeto de Engenharia

---

Projetar consiste na formulação de um plano para satisfazer uma necessidade específica, bem como, para solucionar um problema.

## Considerações de projeto:

1. Funcionalidade
2. Resistência
3. Rigidez
4. Desgaste
5. Corrosão
6. Segurança
7. Confiabilidade
8. Fabricabilidade
9. Custo
10. Peso
11. Expectativa vida
12. Forma
13. Propriedades térmicas
14. Mercado
15. Manutenção
16. Lubrificação
17. Acabamento
18. Responsabilidade civil
19. ....

# Requisitos Operacionais

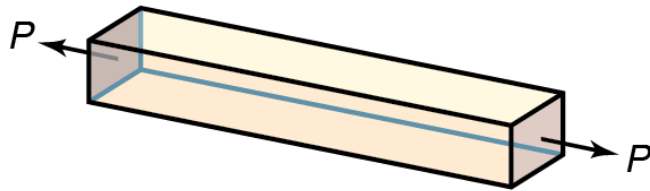
---

- condições de operação padrão;
- previsão de sobrecargas;
- possibilidade de falhas humanas;
- condições anormais de uso;
- condições de emergência;
- problemas de materiais;
- problemas de degradação;
- manutenções inadequadas;
- falhas ocultas;
- .....

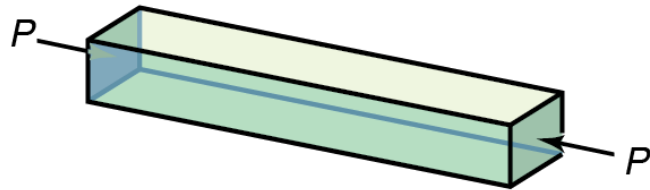
## Como obtê-los?

- normas ou códigos de projeto;
- experiência;
- comparação;
- protótipos;
- Engenharia reversa
- simulações numéricas.
- ....

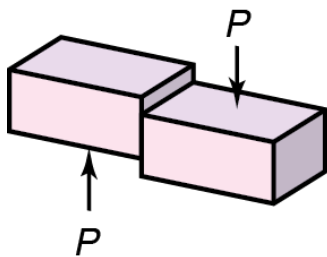
# Revisão – Solicitações Internas



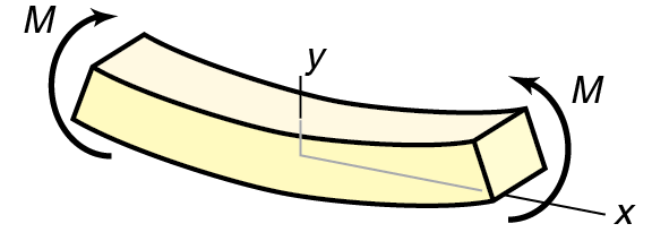
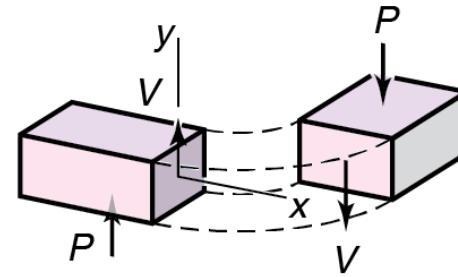
(a)



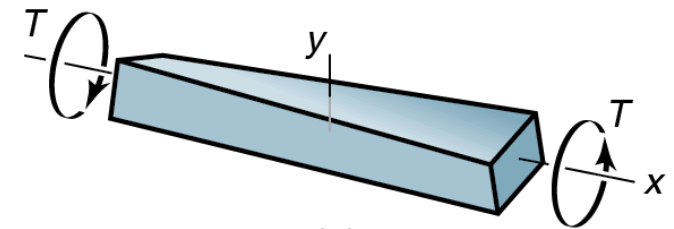
(b)



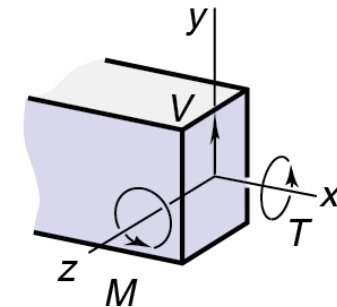
(c)



(d)



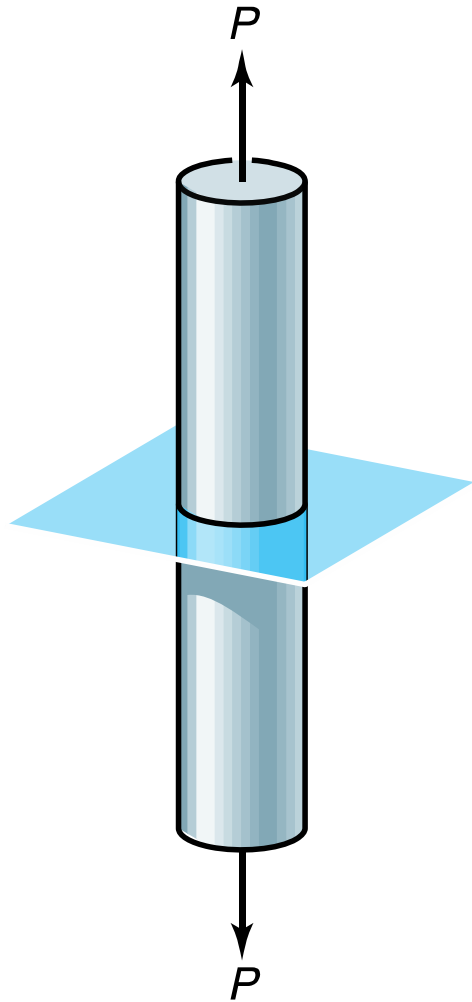
(e)



(f)

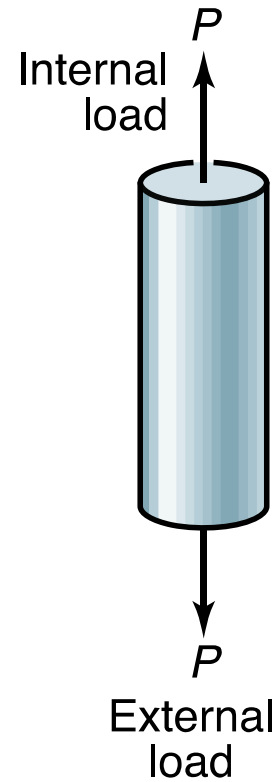
- Tração
- Compressão
- Cisalhamento
- Flexão
- Torção
- Esforços combinados

# Revisão – Tração/ compressão

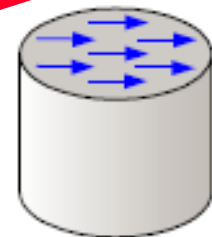
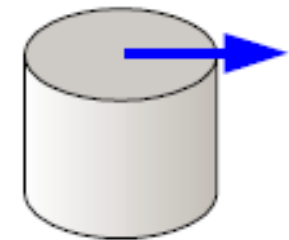
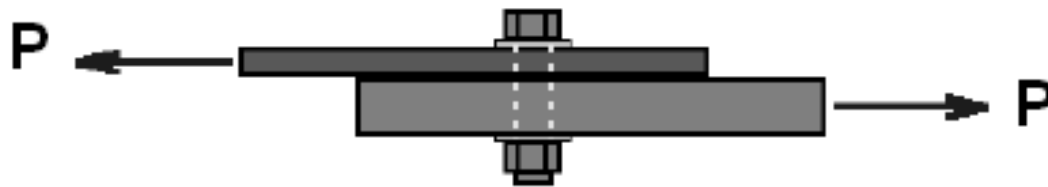


$$\sigma = \frac{F}{A}$$

(3-22)



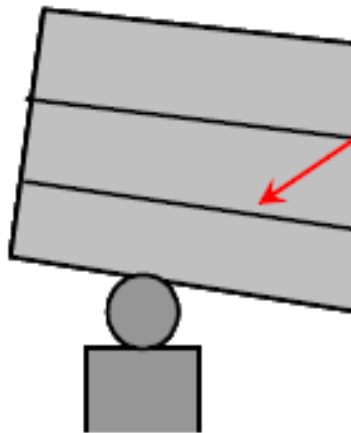
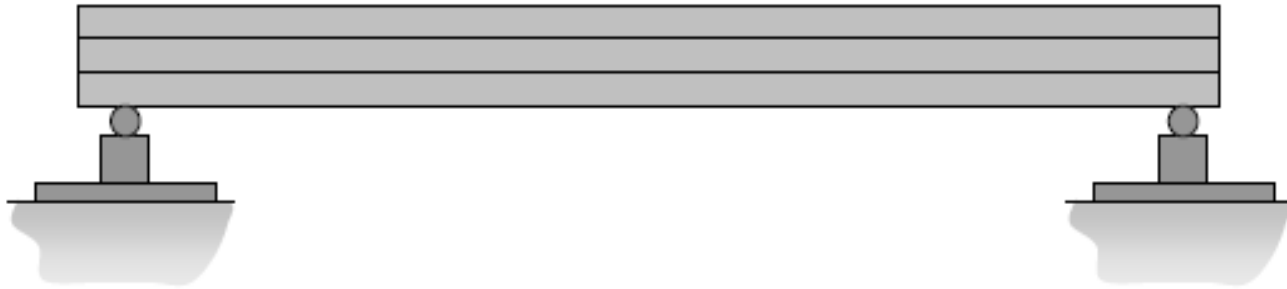
# Revisão - Cisalhamento Simples



$$\tau = \frac{V}{A}$$

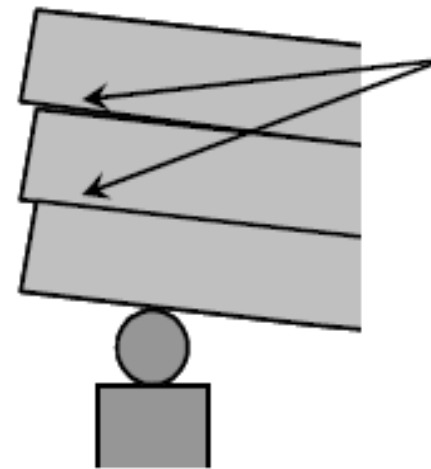
(3-23)

# Revisão – Cisalhamento devido a Flexão



Tensões de cisalhamento horizontais impedem o deslizamento entre as lâminas

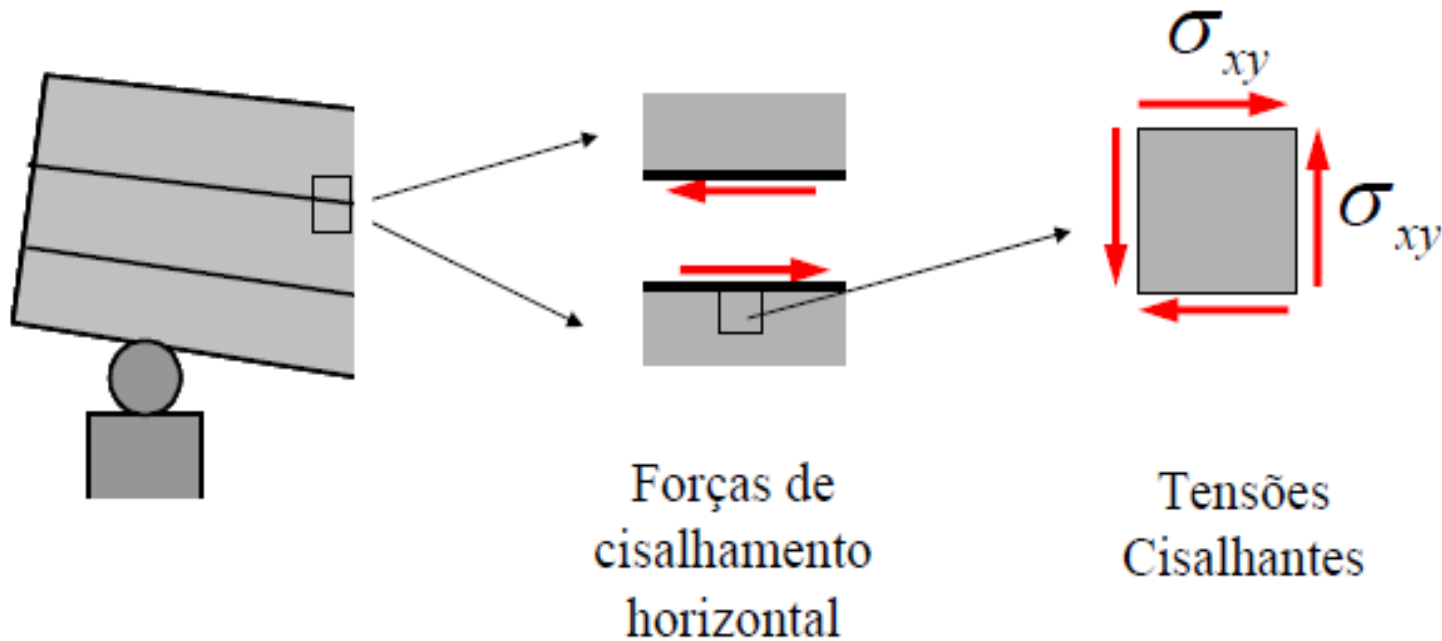
Lâminas “Coladas”



Lâminas deslizam umas sobre as outras

Lâminas Independentes

# Revisão – Cisalhamento devido a Flexão



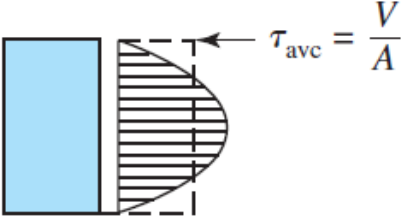
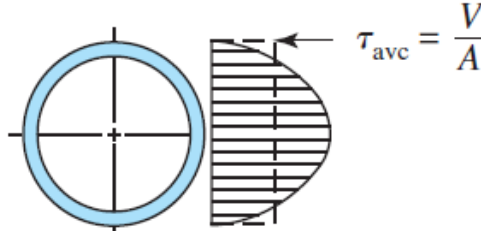
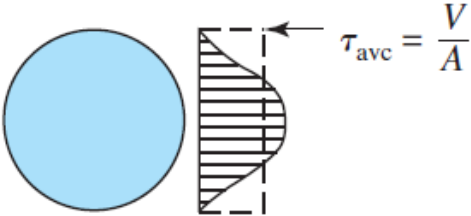
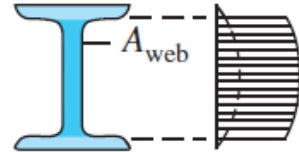
$$\tau = \frac{VQ}{Ib}$$

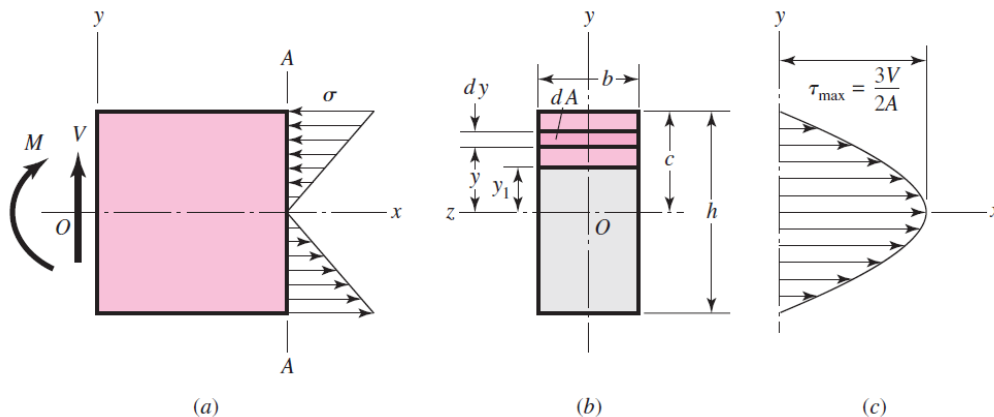
(3-31)

- $V$  – força cortante
- $Q$  – momento estático de primeira ordem
- $I$  – Segundo momento de área da secção transversal
- $b$  – largura da peça no ponto em análise



# Revisão – Cisalhamento devido a Flexão

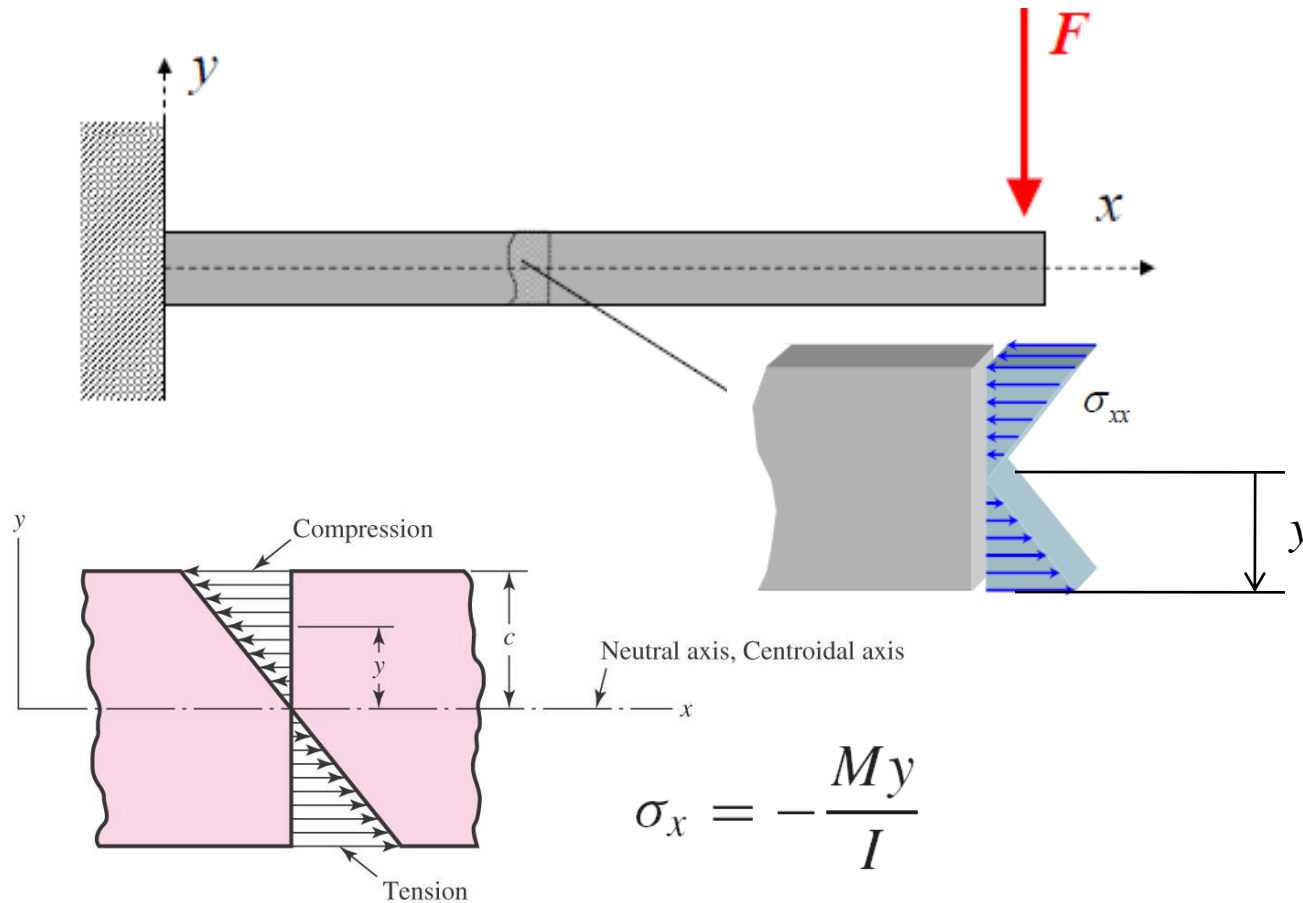
Beam Shape	Formula	Beam Shape	Formula
 <p>Rectangular</p>	$\tau_{\max} = \frac{3V}{2A}$	 <p>Hollow, thin-walled round</p>	$\tau_{\max} = \frac{2V}{A}$
 <p>Circular</p>	$\tau_{\max} = \frac{4V}{3A}$	 <p>Structural I beam (thin-walled)</p>	$\tau_{\max} \approx \frac{V}{A_{\text{web}}}$



$$\tau = \frac{3V}{2A} \left( 1 - \frac{y_1^2}{c^2} \right)$$

(3-33)

# Revisão - Flexão



$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \quad (3-24)$$

$$I = \int y^2 dA \quad (3-25)$$

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I} \quad (3-26a)$$

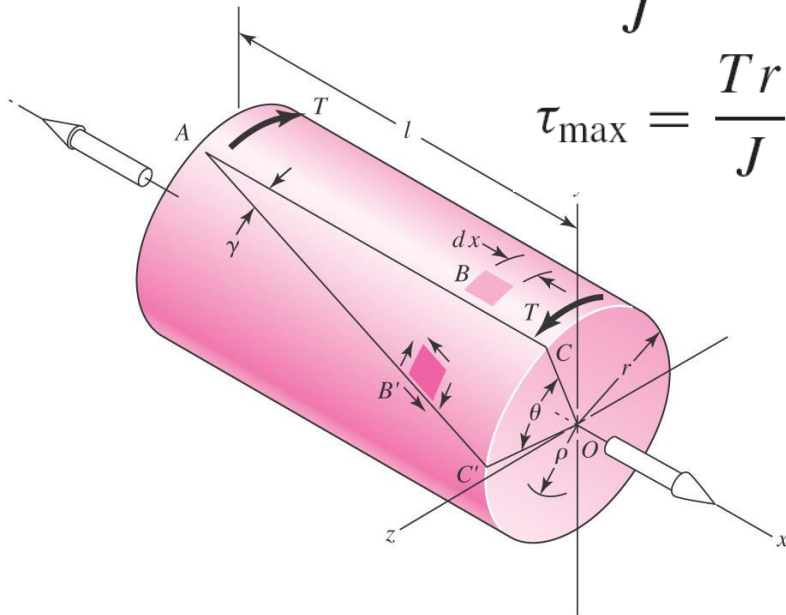
# Revisão – Torção em Seções Circulares

- *Torque vector* – O vetor do momento torque é colinear com o eixo do elemento mecânico.
- Uma barra sujeita a um torque binário está sob *torção*
- *Angulo de torção*, em radianos, para uma barra sólida de seção circular.

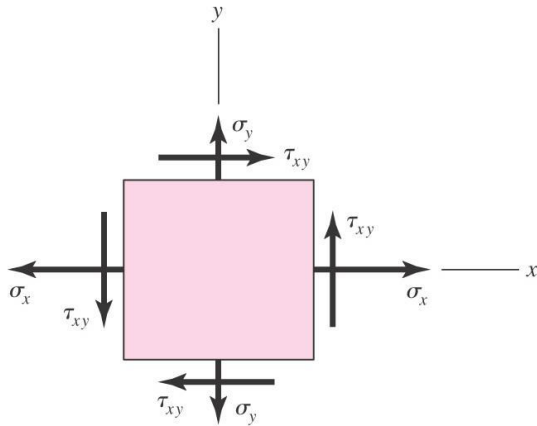
$$\theta = \frac{Tl}{GJ} \quad (3-35)$$

$$\tau = \frac{T\rho}{J} \quad (3-36)$$

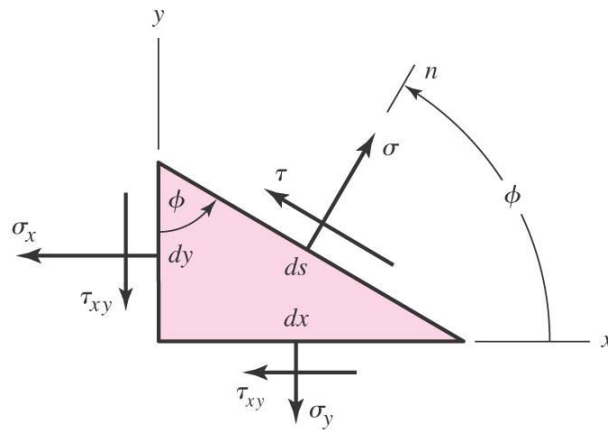
$$\tau_{\max} = \frac{Tr}{J} \quad (3-37)$$



# Revisão – Eq. de Transformação Estado plano de tensão



$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\phi + \tau_{xy} \sin 2\phi \quad (3-8)$$



$$\tau = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\phi + \tau_{xy} \cos 2\phi \quad (3-9)$$

# Revisão – Eq. de Transformação Estado plano de tensão

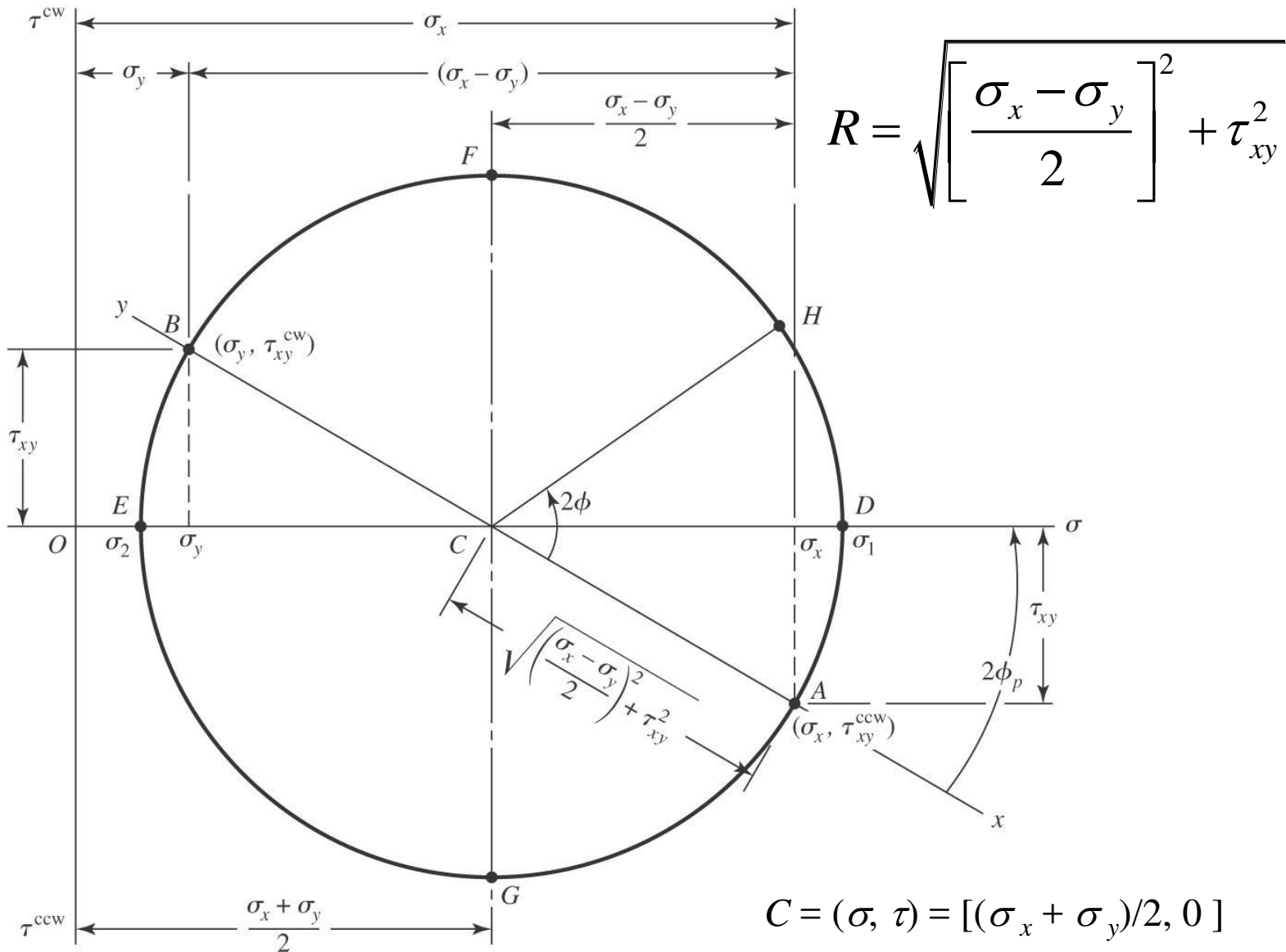
---

$$\tan 2\phi_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (3-10)$$

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3-13)$$

$$\tau_1, \tau_2 = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3-14)$$

# Revisão – Circulo de Mohr



# Revisão – Circulo de Mhor

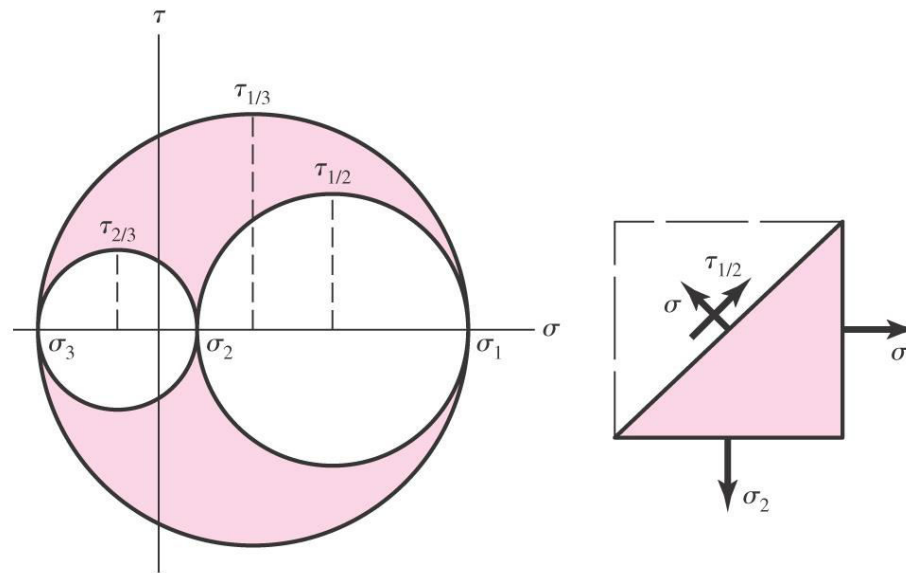
---

## Conclusões:

- a maior tensão normal possível é  $\sigma_1$  e a menor  $\sigma_2$ . Nesses planos não existem tensões de cisalhamento;
- a maior tensão de cisalhamento é  $\tau_{max}$  e a menor  $\tau_{min}$ , as quais são iguais ao raio do círculo. Nesses planos existem tensões normais cujos valores correspondem a:  $(\sigma_x + \sigma_y)/2$ ;
- se  $\sigma_1 = \sigma_2$ , o círculo de Mohr se degenera num único ponto e, conseqüentemente, não se desenvolvem tensões de cisalhamento no plano xy;
- se  $(\sigma_x + \sigma_y) = 0$ , o centro do círculo coincide com a origem das coordenadas, existindo assim um estado de cisalhamento puro;
- a soma das tensões normais em quaisquer dos planos mutuamente perpendiculares é constante, ou seja:  $\sigma_x + \sigma_y = \sigma_x' + \sigma_y' = \sigma_1 + \sigma_2$ ;
- os planos de tensão máxima ou mínima formam ângulos de  $45^\circ$  com os planos das tensões principais.

# Revisão – Caso Geral – Estado tridimensional de tensões

$$\sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 + (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2)\sigma - (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2) = 0 \quad (3-15)$$



$$\tau_{1/2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad \tau_{2/3} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \quad \tau_{1/3} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (3-16)$$



# Teoria de Falhas

---

Porque as peças falham?

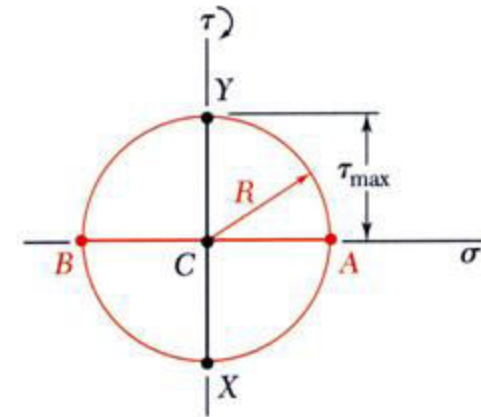
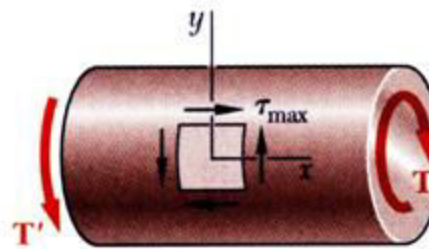
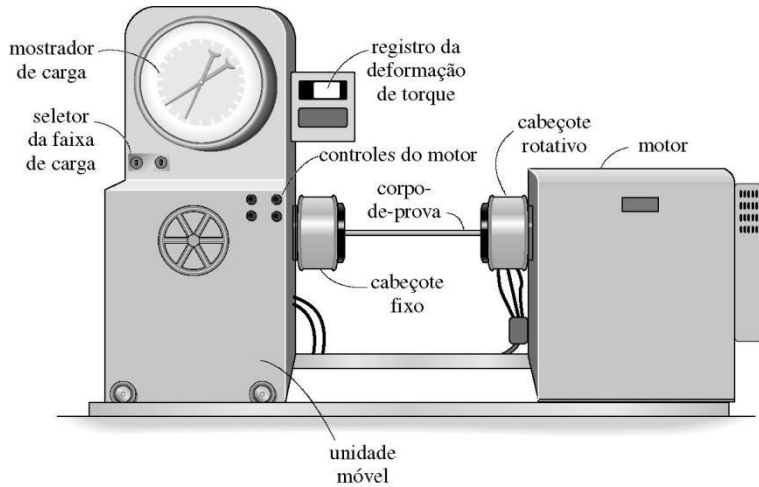
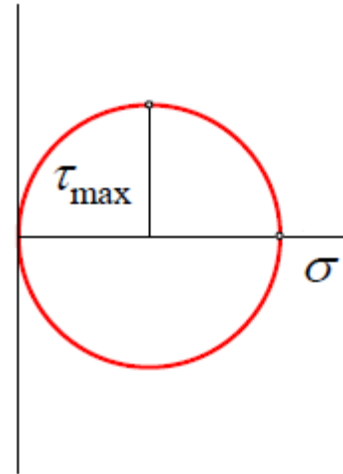
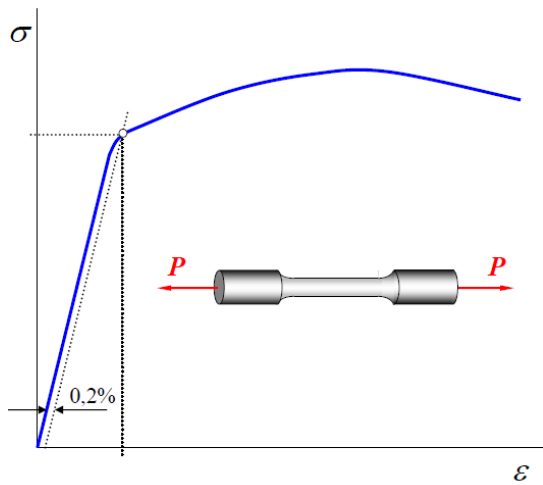
- porque suas tensões excederam sua resistência.

Que tipo de tensão causou a falha?

- depende do material e da sua relativa resistência à tração, compressão ou cisalhamento. Depende também do carregamento ser estático ou dinâmico.

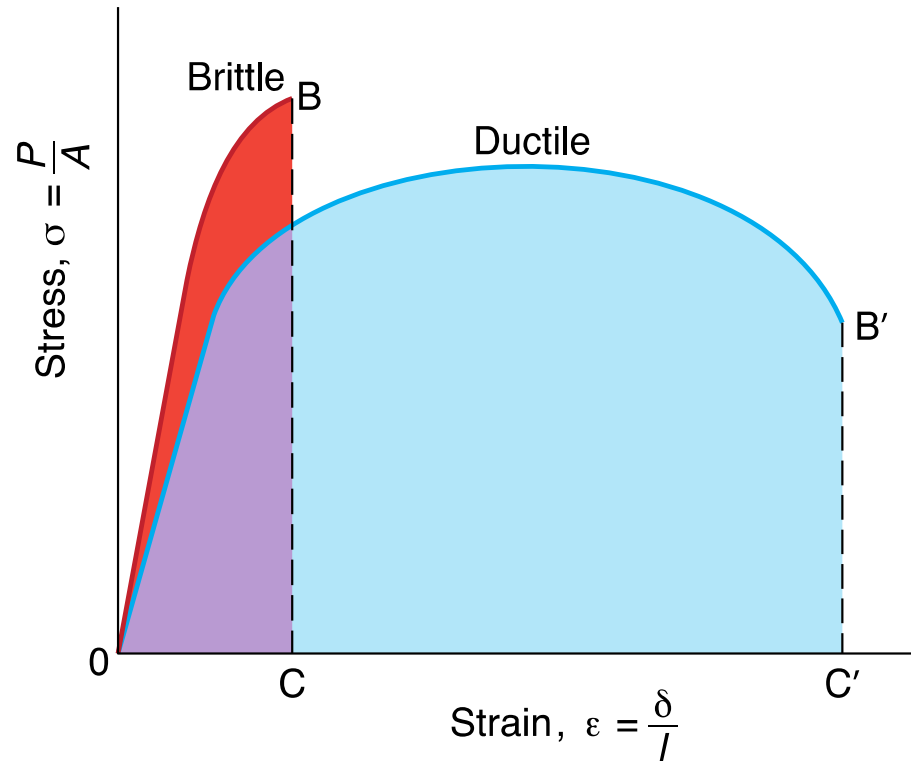
# Teoria de Falhas

## Ensaio: tração simples e torção simples



# Teoria de Falhas

Regra geral: materiais dúcteis submetidos a carregamentos estáticos são limitados pelas suas tensões de cisalhamento, enquanto que materiais frágeis são limitados pela tensão normal.



# Teoria de Falhas

---

## **Falhas estruturais sob condições estáticas:**

- deformação plástica excessiva;
- fratura (dúctil ou frágil).

## **CrITÉrios normalmente adotados:**

- materiais dúcteis – falha caracterizada pelo início de escoamento;
- materiais frágeis – falha caracterizada pela fratura.

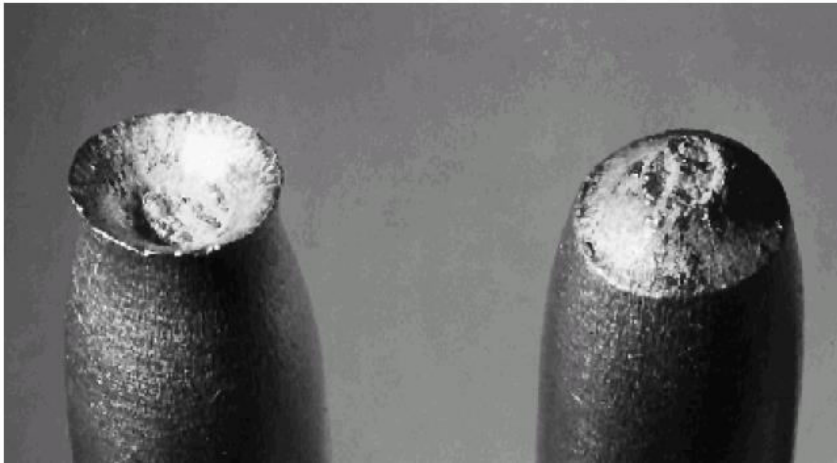
## **Considerações:**

- estado uniaxial de tensões – falha prontamente detectada;
- estado biaxial ou triaxial de tensões – dificuldade em se estabelecer a condição de falha.

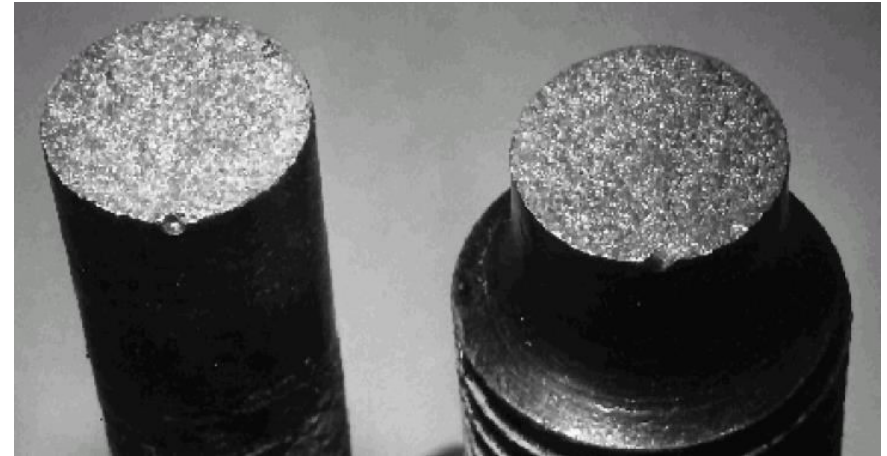
# Teoria de falhas

---

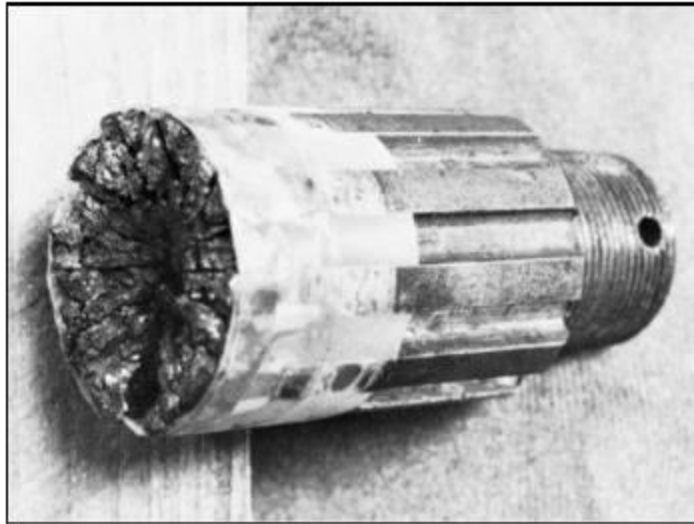
## Ductile Fracture



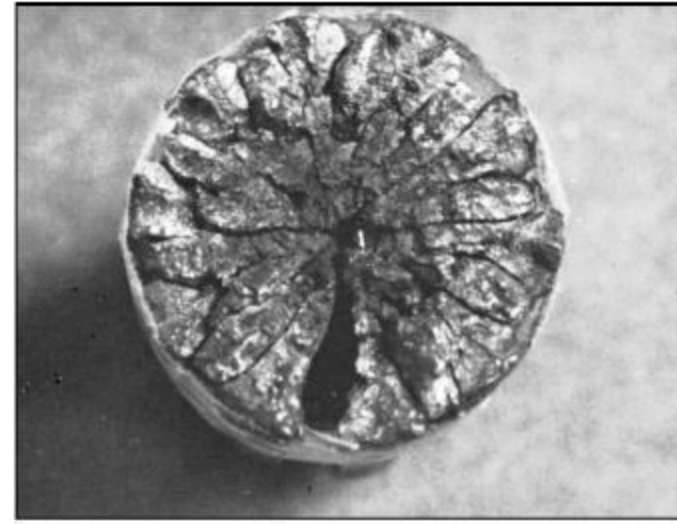
## Brittle Fracture



# Exemplos de Falhas



(a)



(b)

Fig. 5–1

- Falha em um eixo de direção devido à fadiga por corrosão

# Failure Examples

---

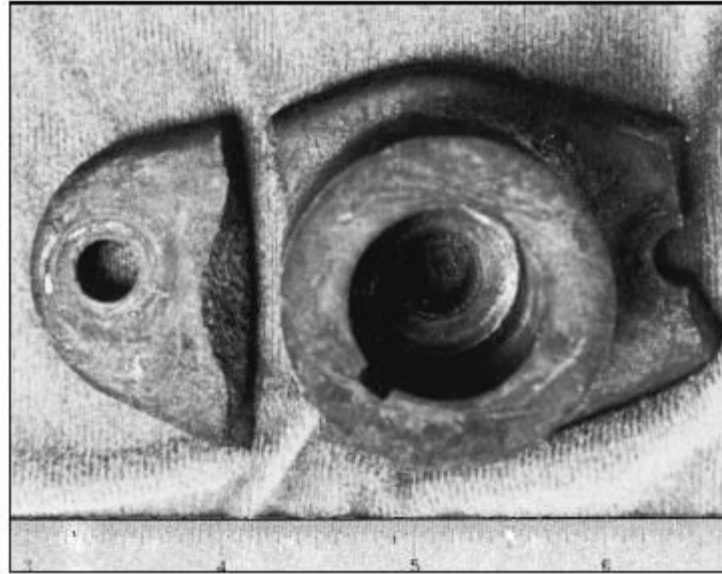


Fig. 5–2

- Falha de impacto de um cubo guia de pá de um cortador de grama.

# Failure Examples

---

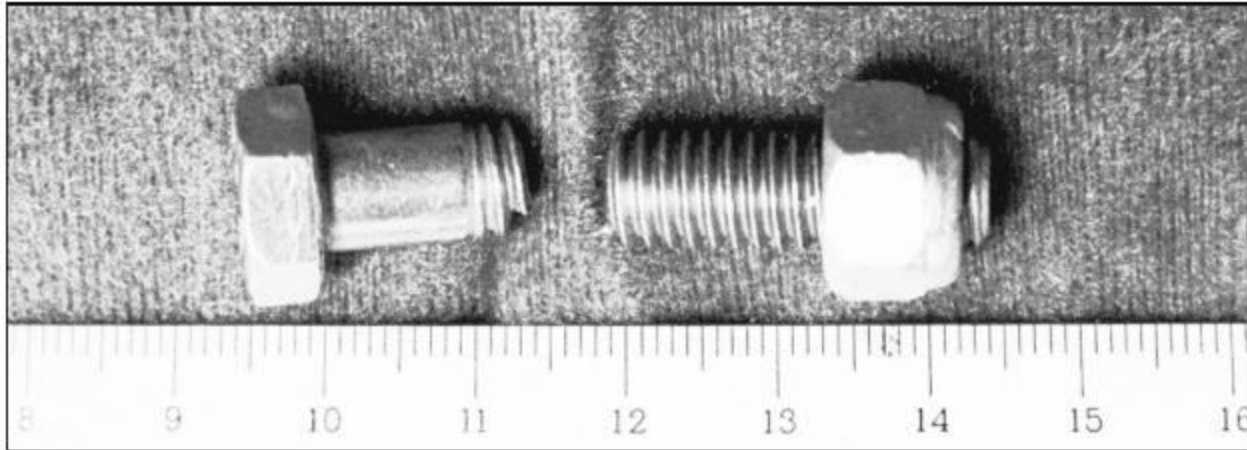


Fig. 5–3

- Falha de um parafuso com porca devido a um momento excessivo.



# Resistência Estática

---

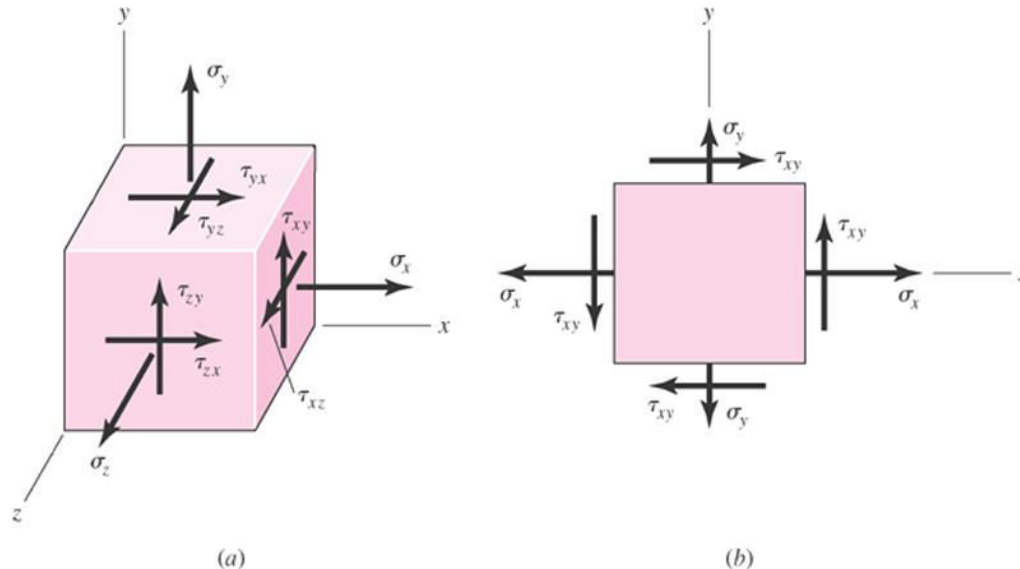
- Normalmente é necessário para projetar o uso valores de resistência publicados (oriundas de testes).
- Dados oriundos de experimentos são melhores, mas geralmente só têm garantia para grandes quantidades de testes ou quando a falha é muito cara (em tempo, despesas , ou vida )
- São necessários métodos para usar com segurança e eficientemente valores de resistência publicados para uma variedade de situações

# Necessidade de teorias de falha estáticas

- Tensão em um elemento uniaxial (teste de tensão)

$$n = \frac{\text{Strength}}{\text{Stress}} = \frac{S}{\sigma}$$

- Elemento de tensão triaxial
  - Uma resistência, várias tensões.
  - Como comparar um estado de tenões com uma única resistência?



# Necessidade de teorias de falha estáticas

---

- As Teorias de falhas propoem formas adequadas para se comparar estados de tensão triaxiais a uma única resistência
- Geralmente estão baseadaa em algumas hipóteses em que aspectos do estado de tensão é crítico
- Algumas teorias de falha ganharam reconhecimento de utilidade para várias situações, a saber alguns materiais polméricos por exemplo.

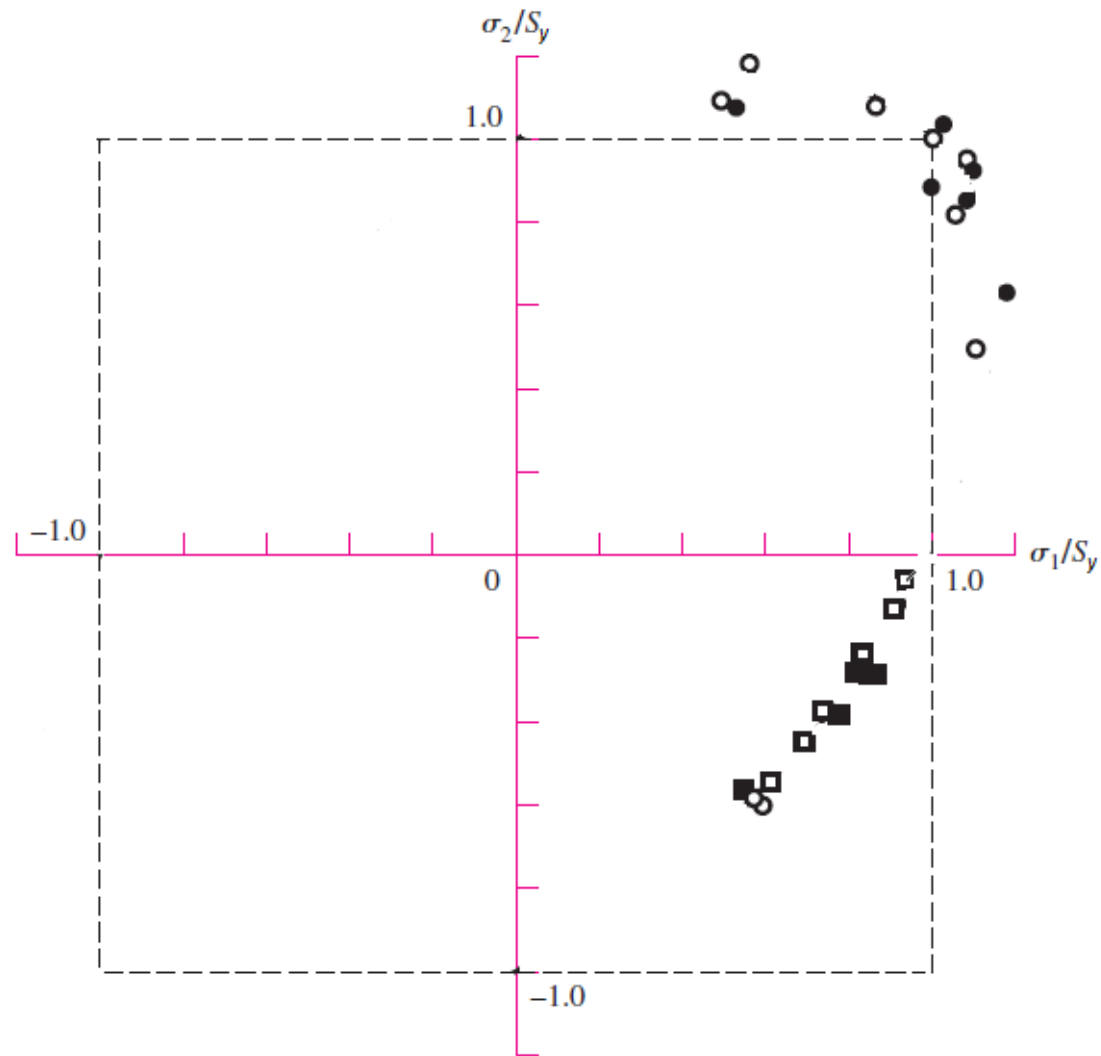
# Teoria da Máxima Tensão Normal (Principal)

---

- Teoria: O escoamento começa quando a tensão principal máxima em um elemento, excede o limite de resistência ao escoamento.
- Para qualquer elemento de tensão, usar o círculo de Mohr para encontrar as tensões principais.
- Compare a maior tensão principal com a resistência ao escoamento.
- É uma boa teoria?

# Teoria da Máxima Tensão Normal (Principal)

- Dados experimentais mostram que a teoria não é segura no 4º quadrante.
- Esta teoria não é segura para materiais dúcteis.



# Teoria da Máxima Tensão de Cisalhamento (MSS)

---

- Teoria : Inicia-se quando a tensão máxima de cisalhamento em um elemento de tensão, excede a tensão máxima de cisalhamento em um espécime de ensaio de tensão do mesmo material, dando início assim ao escoamento de espécime.
- Para a tensão de teste no espécime, a máxima tensão cisalhante será  $\sigma_1 / 2$ .
- Assim, no escoamento, quando  $\sigma_1 = S_y$ , a máxima tensão cisalhante será  $S_y / 2$  .
- A teoria é reafirmada da seguinte forma:
  - Teoria: O escoamento inicia quando a máxima tensão cisalhante no elemento excede a tensão  $S_y / 2$  do material que foi feito o espécime.

# Teoria da Máxima Tensão de Cisalhamento (MSS)

---

- Para qualquer estado de tensão no elemento, usar o círculo de Mohr para encontrar a tensão máxima de cisalhamento. Compare a tensão máxima de cisalhamento com  $S_y/2$ .
- Ordenando as tensões principais de tal forma que  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ,

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \geq \frac{S_y}{2} \quad \text{or} \quad \sigma_1 - \sigma_3 \geq S_y \quad (5-1)$$

- Incorporando o fator de segurança  $n$

$$\tau_{\max} = \frac{S_y}{2n} \quad \text{or} \quad \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{S_y}{n} \quad (5-3)$$

- Ou resolvendo para o fator de segurança

$$n = \frac{S_y / 2}{\tau_{\max}}$$

# Teoria da Máxima Tensão de Cisalhamento (MSS)

---

- Para comparar os dados experimentais, expresse  $\tau_{\max}$  em termos das tensões principais no gráfico.
- Para simplificar, vamos considerar o estado plano de tensão.
- Seja  $\sigma_A$  e  $\sigma_B$  representando duas tensões principais diferentes de zero, e ordene as tensões principais na forma  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$
- Assumindo  $\sigma_A \geq \sigma_B$  Os casos a considerar são os seguintes, a saber:
  - Case 1:  $\sigma_A \geq \sigma_B \geq 0$
  - Case 2:  $\sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B$
  - Case 3:  $0 \geq \sigma_A \geq \sigma_B$



# Teoria da Máxima Tensão de Cisalhamento (MSS)

---

- Caso 1:  $\sigma_A \geq \sigma_B \geq 0$ 
  - Para este caso,  $\sigma_1 = \sigma_A$  and  $\sigma_3 = 0$
  - A Eq. (5-1) é reduzida a  $\sigma_A \geq S_y$
- Caso 2:  $\sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B$ 
  - Para este caso,  $\sigma_1 = \sigma_A$  and  $\sigma_3 = \sigma_B$
  - A Eq. (5-1) é reduzida a  $\sigma_A - \sigma_B \geq S_y$
- Caso 3:  $0 \geq \sigma_A \geq \sigma_B$ 
  - Para este caso,  $\sigma_1 = 0$  and  $\sigma_3 = \sigma_B$
  - A Eq. (5-1) é reduzida a  $\sigma_B \leq -S_y$

# Teoria da Máxima Tensão de Cisalhamento (MSS)

- Gráfico dos três casos
- Caso 1:  $\sigma_A \geq \sigma_B \geq 0$ 
  - $\sigma_A \geq S_y$
- Caso 2:  $\sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B$ 
  - $\sigma_A - \sigma_B \geq S_y$
- Caso 3:  $0 \geq \sigma_A \geq \sigma_B$ 
  - $\sigma_B \leq -S_y$
- Outras linhas são casos simétricos.
- O envelope prediz a zona de segurança.

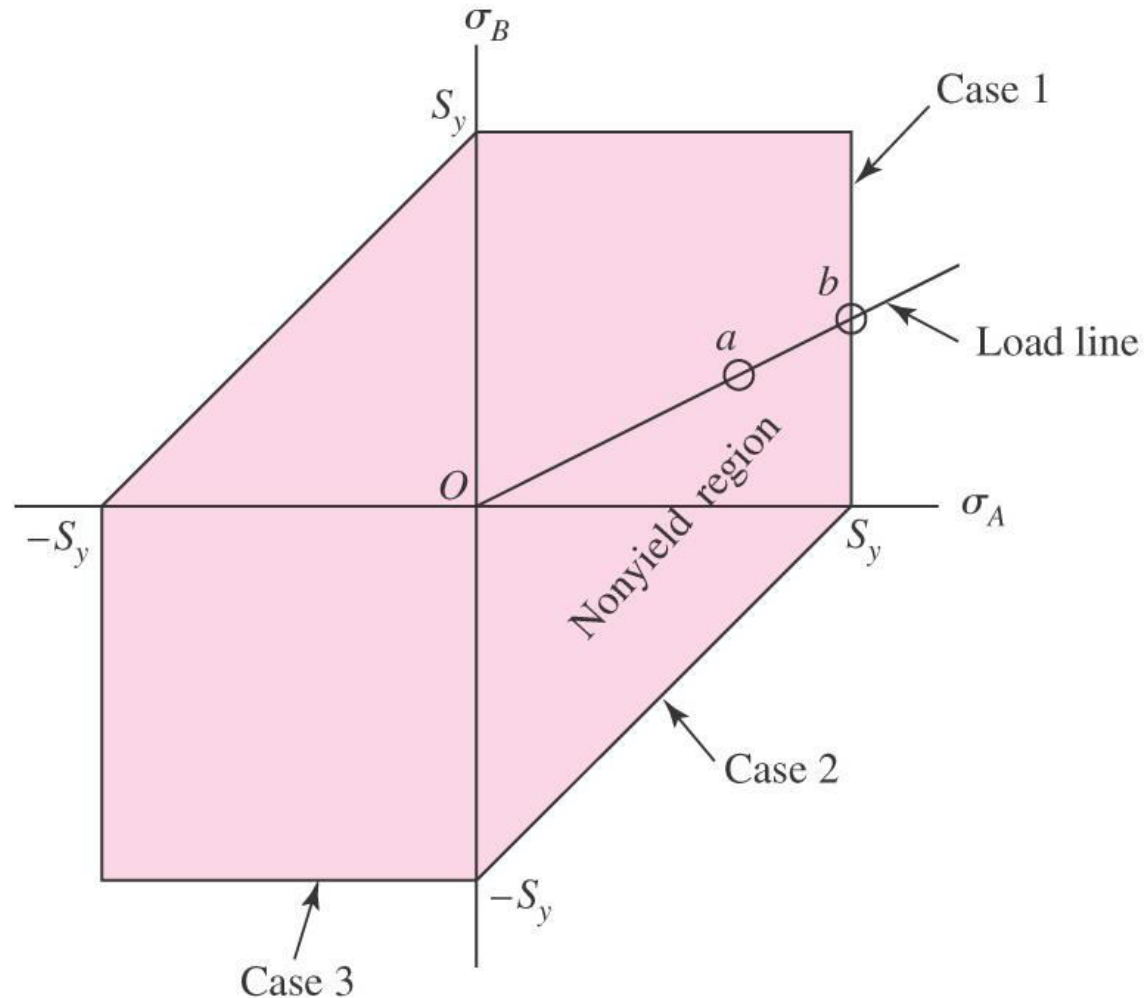
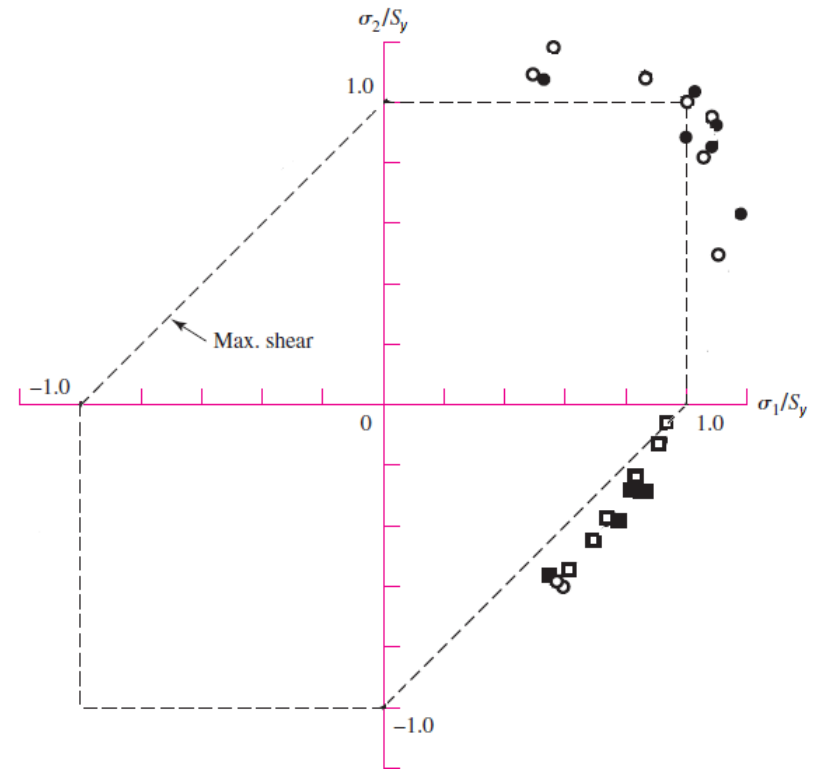


Fig. 5-7

# Teoria da Máxima Tensão de Cisalhamento (MSS)

- Comparação de dados experimentais
- Os quadrantes são todos conservativos
- É uma teoria comumente utilizada em situações de projeto.



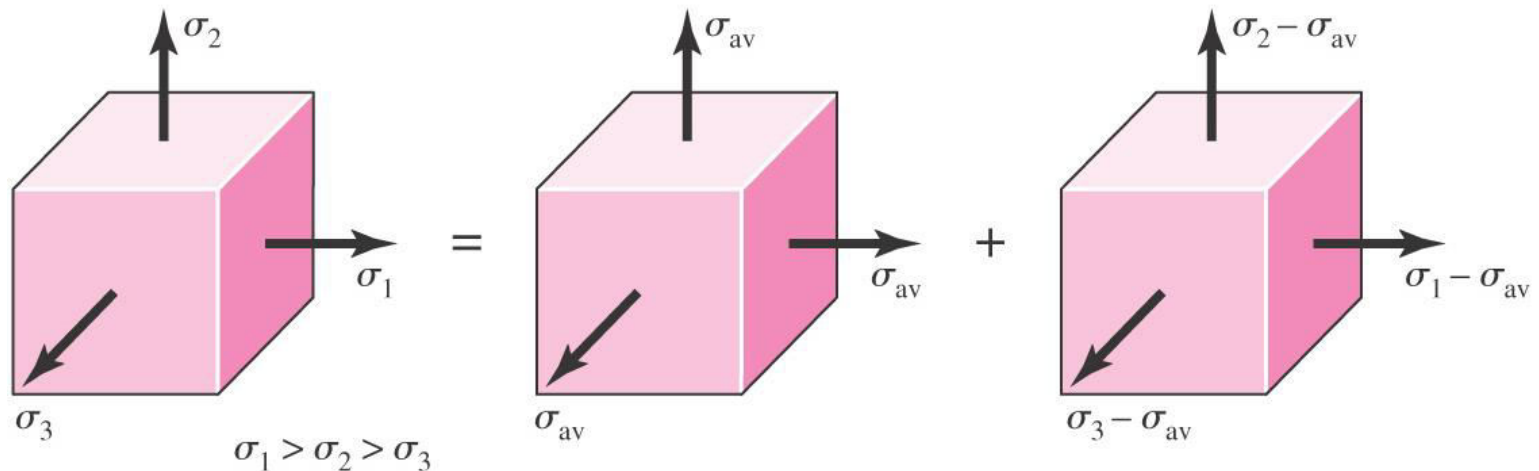
# Teoria de Falha da Energia de Distorção (DE)

---

- Também conhecida como:
  - Tensão cisalhante Octaedral
  - Energia cisalhante
  - von Mises
  - von Mises – Hencky

# Teoria de Falha da Energia de Distorção (DE)

- Originado a partir da observação de que materiais dúcteis tensionados hidrostaticamente (igualdade de tensões principais) exibem tensões de escoamento bem acima dos valores esperados em ensaios simples de tração.
- A Teoria da energia de deformação é consequência da energia devido a mudança de volume, ou melhor a energia hidrostática mais a energia devido a distorção angular. Assim o escoamento é afetado principalmente pela energia de distorção.



(a) Triaxial stresses

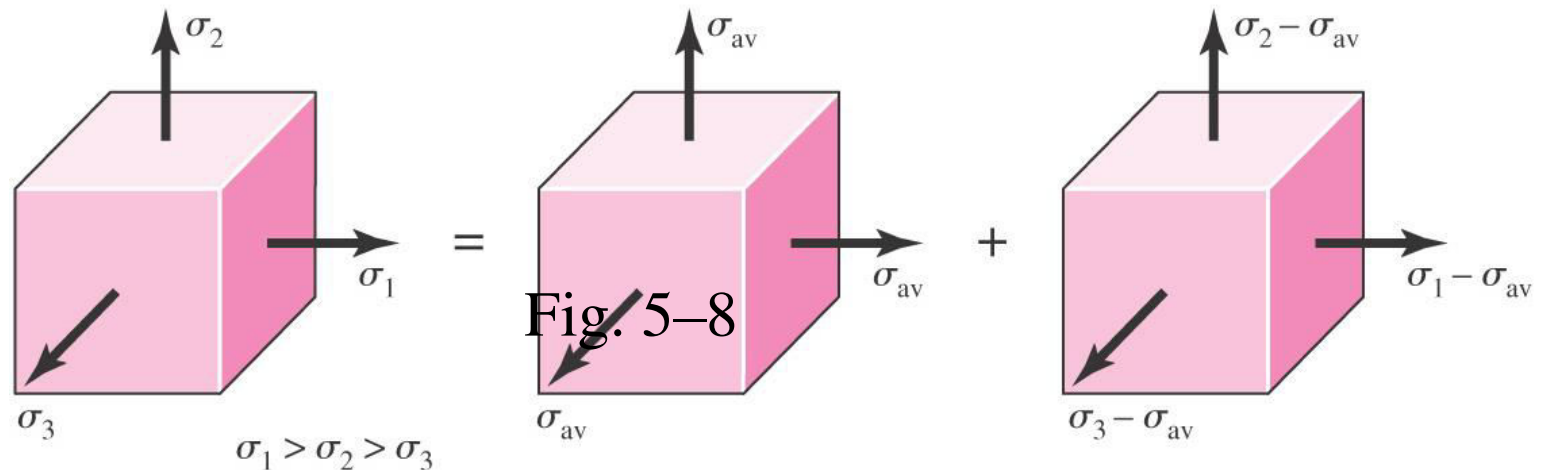
(b) Hydrostatic component

(c) Distortional component

Fig. 5-8

# Distortion Energy (DE) Failure Theory

- Teoria: O escoamento ocorrerá quando a energia de deformação por distorção em uma unidade de volume alcança ou excede a energia de deformação por distorção por unidade de volume no escoamento sob tração ou compressão simples do mesmo material.



(a) Triaxial stresses

(b) Hydrostatic component

(c) Distortional component

# Derivando o Critério da Energia de Distorção

---

- A tensão média hidrostática.

$$\sigma_{av} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (a)$$

- Energia de deformação por unidade de volume,

$$u = \frac{1}{2}[\tilde{\epsilon}_1\sigma_1 + \epsilon_2\sigma_2 + \epsilon_3\sigma_3]$$

- Substituindo Eq. (3-19) equação da energia de deformação ,

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

(3-19)

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] \quad (b)$$

## Derivando o Critério da Energia de Distorção

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] \quad (b)$$

- Para se obter a energia de deformação para a mudança de volume substitui-se  $\sigma_{av}$  no lugar de  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , e  $\sigma_3$ .

$$u_v = \frac{3\sigma_{av}^2}{2E}(1 - 2\nu) \quad (c)$$

- Substituindo  $\sigma_{av}$  pela Eq. (a),

$$u_v = \frac{1 - 2\nu}{6E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_2\sigma_3 + 2\sigma_3\sigma_1) \quad (5-7)$$

- E obtemos a energia de distorção pela subtração da energia de variação do volume, Eq. (5-7), da energia de deformação total, Eq. (b).

$$u_d = u - u_v = \frac{1 + \nu}{3E} \left[ \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right] \quad (5-8)$$



## Derivando o Critério da Energia de Distorção

$$u_d = u - u_v = \frac{1 + \nu}{3E} \left[ \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right] \quad (5-8)$$

- No escoamento em um espécime durante um ensaio de tração simples, tem-se que  $\sigma_1 = S_y$  and  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$
- E aplicando-se esta condição na Eq.(5-8)

$$u_d = \frac{1 + \nu}{3E} S_y^2 \quad (5-9)$$

- A Teoria da Energia de distorção prediz a falha quando a energia de distorção, Eq. (5-8), for igual ou exceder a energia de distorção no escoamento de um espécime sob tração simples, Eq. (5-9).

$$\left[ \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right]^{1/2} \geq S_y \quad (5-10)$$

## Tensão de von Mises

$$\left[ \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right]^{1/2} \geq S_y \quad (5-10)$$

- O termo da esquerda da eq. (5-10) é a *tensão de von Mises*.

$$\sigma' = \left[ \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right]^{1/2} \quad (5-12)$$

- Para o estado plano de tensão, tem-se

$$\sigma' = (\sigma_A^2 - \sigma_A \sigma_B + \sigma_B^2)^{1/2} \quad (5-13)$$

- Em termos de xyz as componentes tridimensionais

$$\sigma' = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]^{1/2} \quad (5-14)$$

- Em termos de xyz as componentes, para o estado plano

$$\sigma' = (\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2)^{1/2} \quad (5-15)$$

# Teoria da Energia de Distorção com a Tensão de von Mises

---

- A tensão de von Mises, pode ser pensada como um único, equivalent, ou efetiva tensão para o estado geral de tensão em um elemento.
- A teoria de falha da Energiade Distorção simplesmente compara a tensão de von Mises a tensão de escoamento .

$$\sigma' \geq S_y \quad (5-11)$$

- Introduzindo-se o fator de segurança ou de projeto,

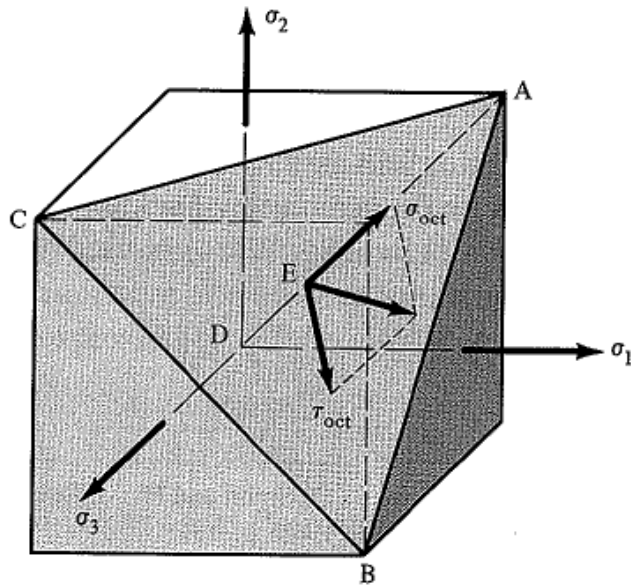
$$\sigma' = \frac{S_y}{n} \quad (5-19)$$

- Expressiando o fator de segurança,

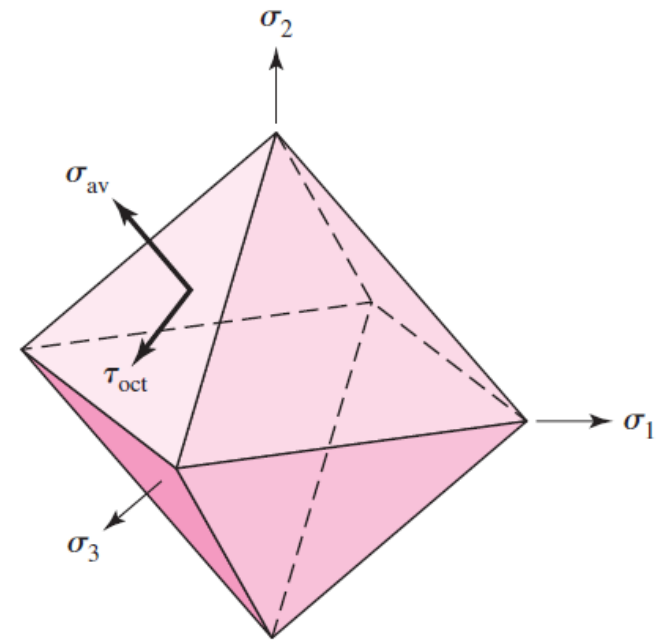
$$n = \frac{S_y}{\sigma'}$$

# Tensão Octaedral

- O mesmo resultado pode ser obtido via a tensão *octaedral* .
- As tensões octaedral são idênticas nas oito (8) nas faces simétricas e iguais a tensão hidrostática.
- Em cada superfície simétrica existe uma tensão de cisalhamento octaédrica..



Principal stress element with single octahedral plane showing



All 8 octahedral planes showing

# Tensão cisalhante Octaedral

- A tensão normal octaedral é uma média das tensões normais principais .
- A tensão cisalhante octaedral é.

$$\tau_{\text{oct}} = \frac{1}{3} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} \quad (5-16)$$

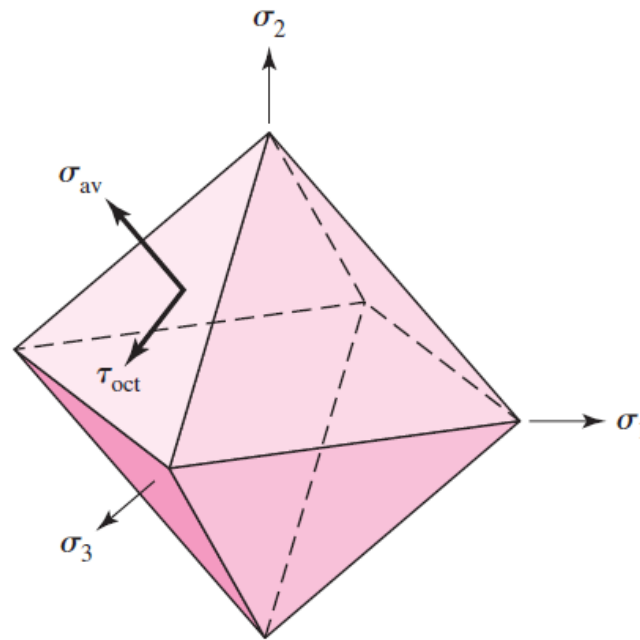


Fig. 5-10

# Teoria DE comparada com Dados Experimentais

- Faça o gráfico de von Mises sobre os eixos da tensões principais para comparar com os dados experimentais ( e outras teorias de falha )
- Boa adequação da curva DE aos data experimentais.
- Comumente utilizada para situações de análise.
- A teoria MSS por ser mais conservadora, pode ser utilizada em situações de maior desconhecimento de informações durante o projeto.

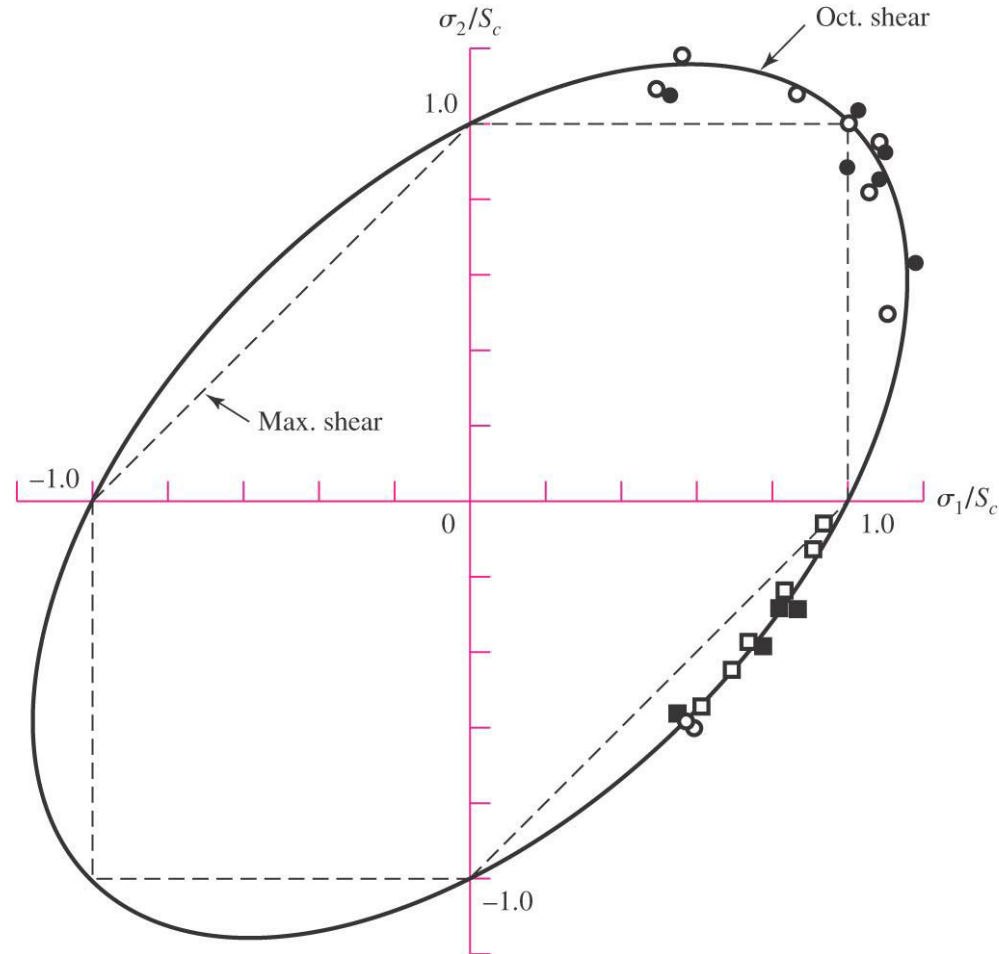
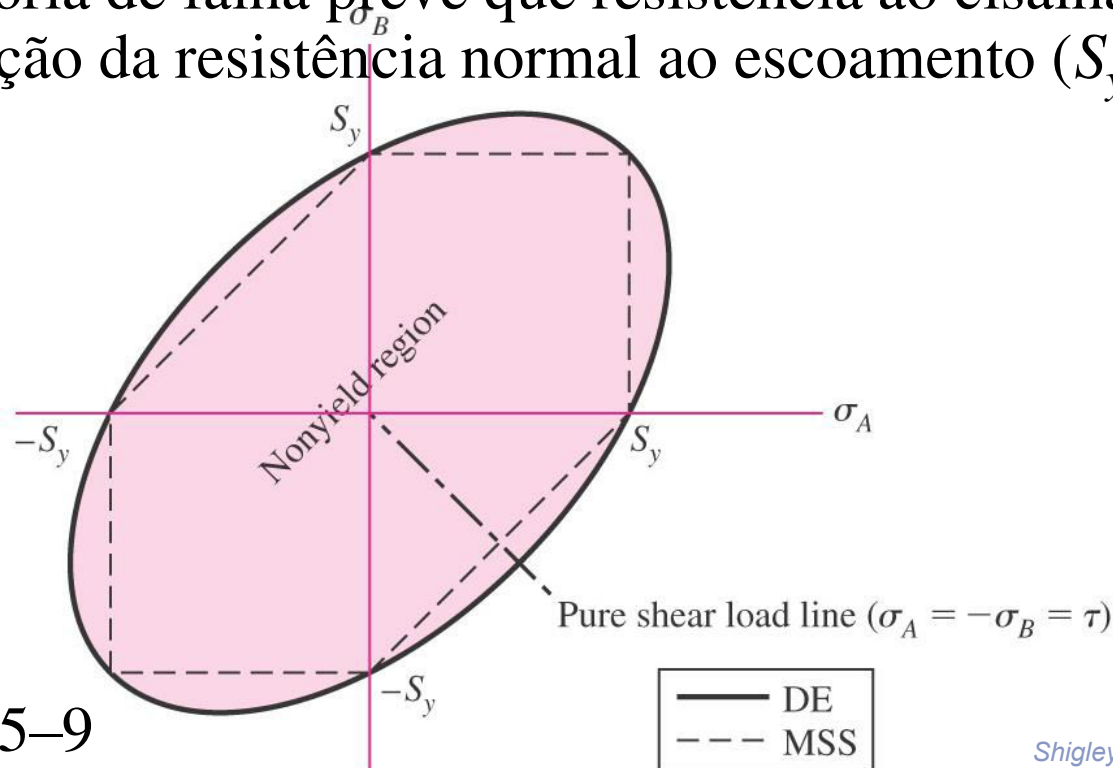


Fig. 5-15

## Predição da Resistência ao Escoamento

- Para uma carga de cisalhamento puro, O círculo de Mohr mostra que  $\sigma_A = -\sigma_B = \tau$
- Desenhando a linha de cisalhamento puro em relação aos eixos principais temos o gráfico a seguir.
- Intersecção da linha de carga do cisalhamento puro, com curva de falha indica que a resistência ao cisalhamento foi atingida
- Cada teoria de falha prevê que resistência ao cisalhamento ( $S_{sy}$ ) é uma fração da resistência normal ao escoamento ( $S_y$ ),



# Predição da Resistência ao Escoamento

- Para as teorias DE e MSS, o cruzamento da linha de carga de cisalhamento puro com a linha de falha resulta na resistência de cisalhamento ao escoamento.

$$S_{sy} = 0.5S_y \quad (5-2)$$

$$S_{sy} = 0.577S_y \quad (5-21)$$

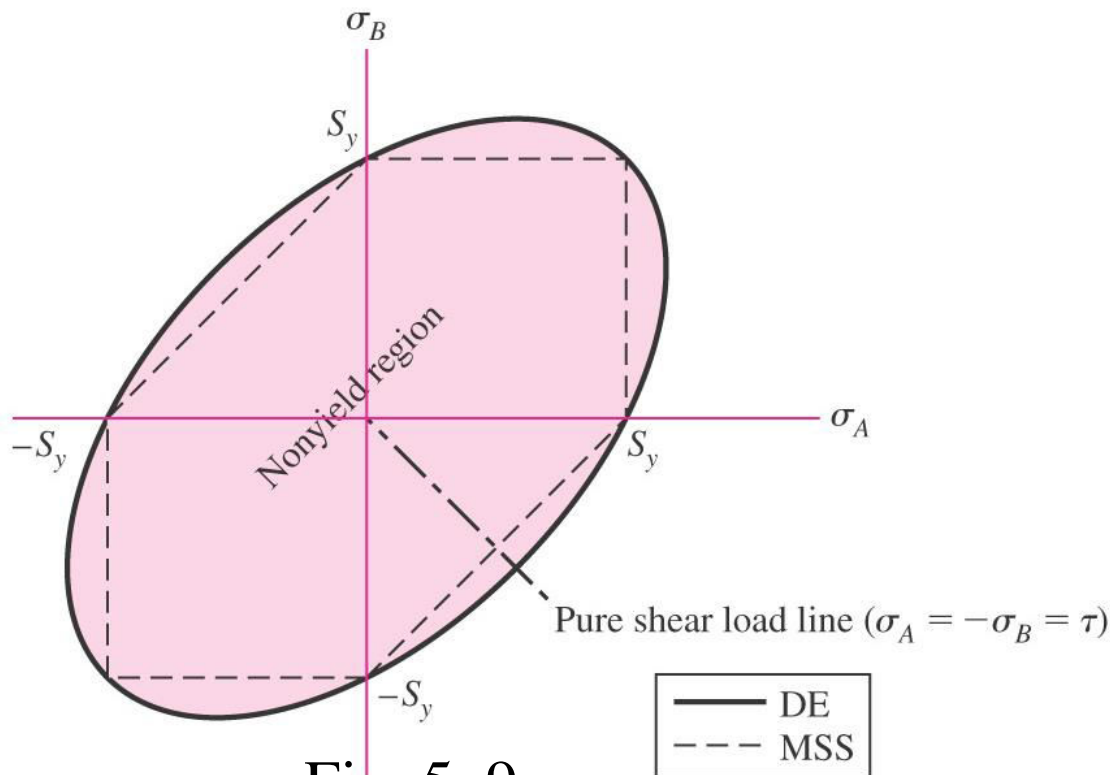


Fig. 5-9

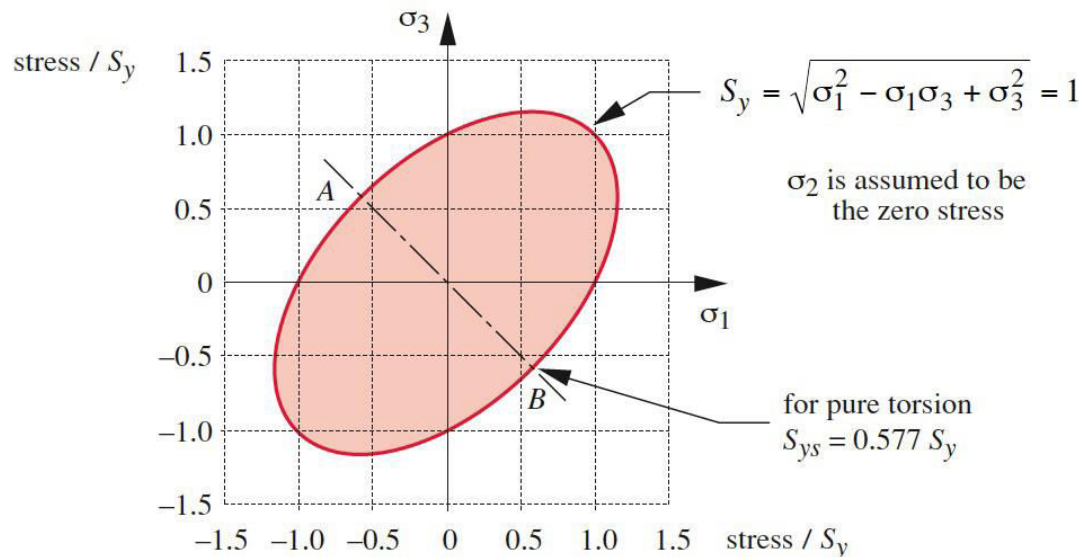


# Teoria de Falha em termos de von Mises

$$\left[ \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right]^{1/2} \geq S_y \quad (5-10)$$

$$\sigma' = \left[ \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right]^{1/2} \quad (5-12)$$

$$\sigma' = (\sigma_A^2 - \sigma_A \sigma_B + \sigma_B^2)^{1/2} \quad (5-13)$$



$$n = \frac{S_y}{\sigma'}$$

**FIGURE 5-3**

The 2-D Distortion-Energy Ellipse Normalized to the Yield Strength of the Material

## Example 5–1

A hot-rolled steel has a yield strength of  $S_{yt} = S_{yc} = 700$  MPa and a true strain at fracture of  $\epsilon_f = 0.55$ . Estimate the factor of safety for the following principal stress states:

- (a) 490, 490, 0 MPa.
- (b) 210, 490, 0 MPa.
- (c) 0, 490,  $-210$  MPa.
- (d) 0,  $-210$ ,  $-490$  MPa.
- (e) 210, 210, 210 MPa.

### Solution

Since  $\epsilon_f > 0.05$  and  $S_{yc}$  and  $S_{yt}$  are equal, the material is ductile and the distortion-energy (DE) theory applies. The maximum-shear-stress (MSS) theory will also be applied and compared to the DE results. Note that cases *a* to *d* are plane stress states.

## Example 5–1 (continued)

(a) The ordered principal stresses are  $\sigma_A = \sigma_1 = 490$ ,  $\sigma_B = \sigma_2 = 490$ ,  $\sigma_3 = 0$  MPa.

DE From Eq. (5–13),

$$\sigma' = [490^2 - 490(490) + 490^2]^{1/2} = 490 \text{ MPa}$$

Answer

$$n = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{700}{490} = 1.43$$

MSS Case 1, using Eq. (5–4) with a factor of safety,

Answer

$$n = \frac{S_y}{\sigma_A} = \frac{700}{490} = 1.43$$

## Example 5–1 (continued)

(b) The ordered principal stresses are  $\sigma_A = \sigma_1 = 490$ ,  $\sigma_B = \sigma_2 = 210$ ,  $\sigma_3 = 0$  MPa.

DE 
$$\sigma' = [490^2 - 490(210) + 210^2]^{1/2} = 426 \text{ MPa}$$

Answer

$$n = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{700}{426} = 1.64$$

MSS Case 1, using Eq. (5–4),

Answer

$$n = \frac{S_y}{\sigma_A} = \frac{700}{490} = 1.43$$

## Example 5–1 (continued)

(c) The ordered principal stresses are  $\sigma_A = \sigma_1 = 490$ ,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_B = \sigma_3 = -210$  MPa.

DE 
$$\sigma' = [490^2 - 490(-210) + (-210)^2]^{1/2} = 622 \text{ MPa}$$

Answer

$$n = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{700}{622} = 1.13$$

MSS Case 2, using Eq. (5–5),

Answer

$$n = \frac{S_y}{\sigma_A - \sigma_B} = \frac{700}{490 - (-210)} = 1.00$$

## Example 5–1 (continued)

(d) The ordered principal stresses are  $\sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_A = \sigma_2 = -210$ ,  $\sigma_B = \sigma_3 = -490$  MPa.

DE 
$$\sigma' = [(-490)^2 - (-490)(-210) + (-210)^2]^{1/2} = 426 \text{ MPa}$$

Answer

$$n = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{700}{426} = 1.64$$

MSS Case 3, using Eq. (5–6),

Answer

$$n = -\frac{S_y}{\sigma_B} = -\frac{700}{-490} = 1.43$$

## Example 5–1 (continued)

(e) The ordered principal stresses are  $\sigma_1 = 210$ ,  $\sigma_2 = 210$ ,  $\sigma_3 = 210$  MPa

DE From Eq. (5–12),

$$\sigma' = \left[ \frac{(210 - 210)^2 + (210 - 210)^2 + (210 - 210)^2}{2} \right]^{1/2} = 0 \text{ MPa}$$

Answer

$$n = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{700}{0} \rightarrow \infty$$

MSS From Eq. (5–3),

Answer

$$n = \frac{S_y}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{700}{210 - 210} \rightarrow \infty$$

## Example 5–1 (continued)

A tabular summary of the factors of safety is included for comparisons.

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
DE	1.43	1.64	1.13	1.64	$\infty$
MSS	1.43	1.43	1.00	1.43	$\infty$

Since the MSS theory is on or within the boundary of the DE theory, it will always predict a factor of safety equal to or less than the DE theory, as can be seen in the table. For each case, except case (e), the coordinates and load lines in the  $\sigma_A$ ,  $\sigma_B$  plane are shown in Fig. 5–11. Case (e) is not plane stress. Note that the load line for case (a) is the only plane stress case given in which the two theories agree, thus giving the same factor of safety.

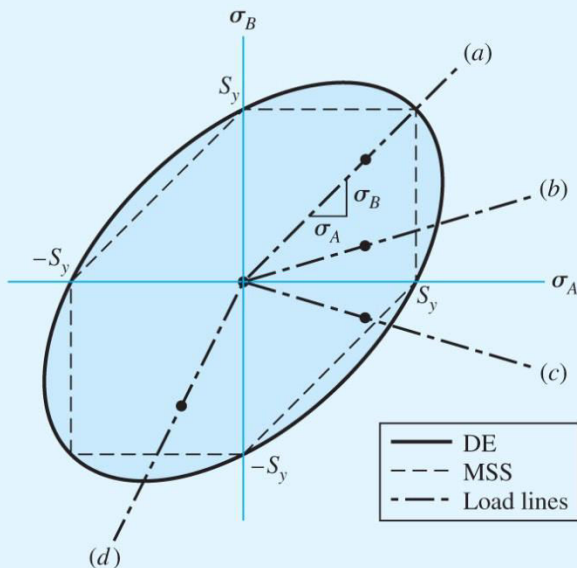


Fig. 5–11



# Teoria Mohr

- Alguns materiais têm resistências à compressão diferentes das resistências à tração
- *A teoria de Mohr* é baseada em três testes simples: tração, compressão e cisalhamento
- Desenhando o círculo de Mohr para cada curva e traçando a linha de falha tem-se a ideia de onde o material poderá falhar.

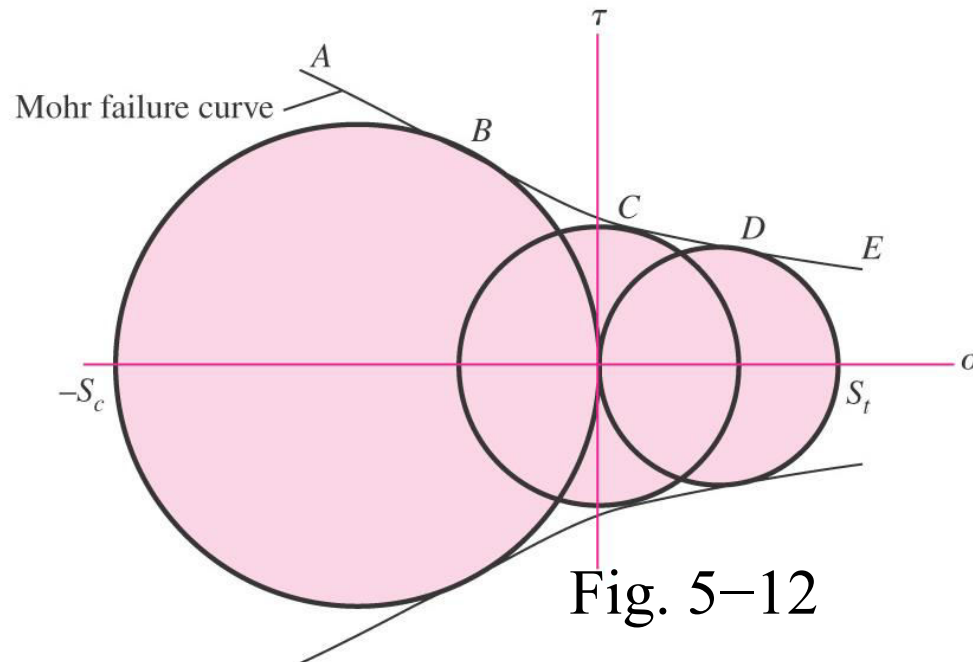


Fig. 5-12

# Teoria Coulomb-Mohr

- A curva de falha inclinada é difícil de se determinar analiticamente
- *A teoria de Coulomb-Mohr* simplifica o desenho do envelope da linha de falha usando apenas os dados dos testes de tração e compressão

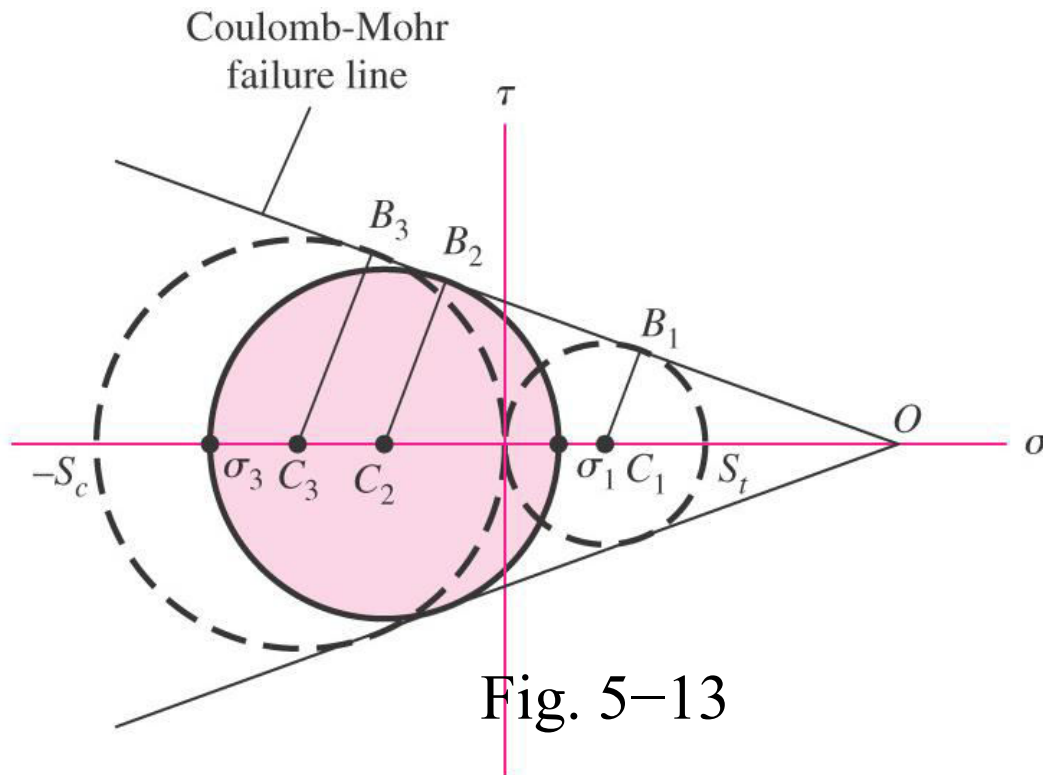


Fig. 5-13

# Teoria Coulomb-Mohr

- Para a geometria, deriva-se o critério de falha

$$\frac{B_2 C_2 - B_1 C_1}{OC_2 - OC_1} = \frac{B_3 C_3 - B_1 C_1}{OC_3 - OC_1}$$

$$\frac{B_2 C_2 - B_1 C_1}{C_1 C_2} = \frac{B_3 C_3 - B_1 C_1}{C_1 C_3}$$

$B_1 C_1 = S_t/2$ ,  $B_2 C_2 = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ ,  
and  $B_3 C_3 = S_c/2$ .

$$\frac{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \frac{S_t}{2}}{\frac{S_t}{2} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}} = \frac{\frac{S_c}{2} - \frac{S_t}{2}}{\frac{S_t}{2} + \frac{S_c}{2}}$$

$$\frac{\sigma_1}{S_t} - \frac{\sigma_3}{S_c} = 1$$

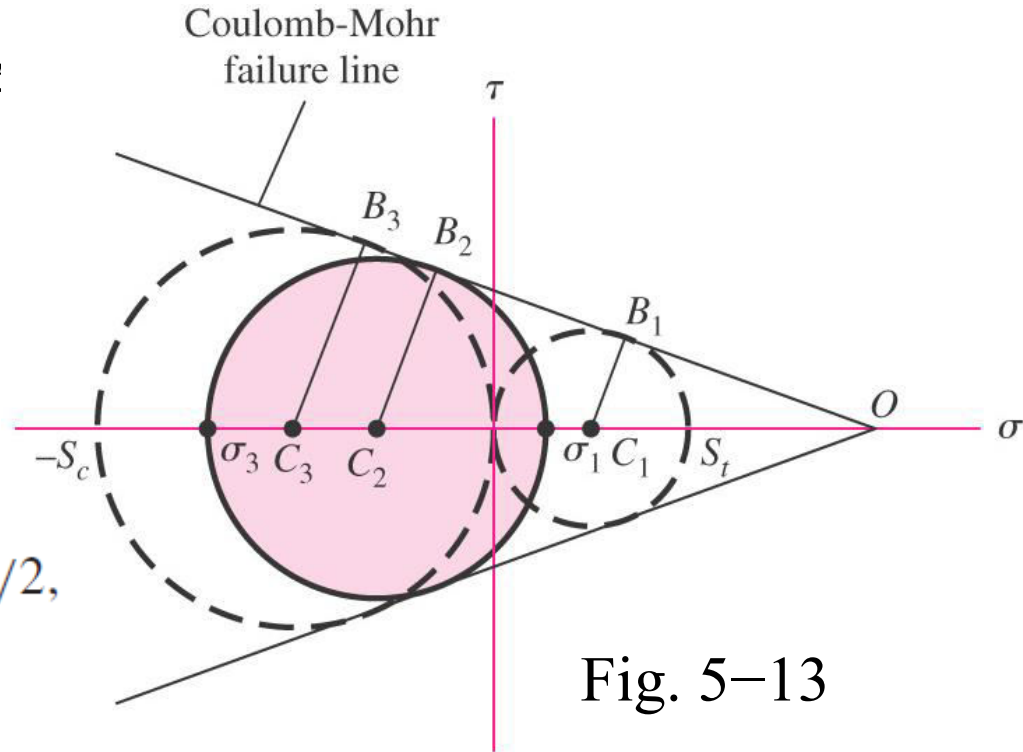


Fig. 5-13

(5-22)

# Teoria de Coulomb-Mohr

---

- Incorporando o coeficiente de segurança.

$$\frac{\sigma_1}{S_t} - \frac{\sigma_3}{S_c} = \frac{1}{n} \quad (5-26)$$

- Para materiais dúteis usa-se as resistências ao escoamento na tração e na compressão
- Para materiais frágeis, usa-se as resistências últimas na tração e na compressão.

# Teoria Coulomb-Mohr

---

$$\frac{\sigma_1}{S_t} - \frac{\sigma_3}{S_c} = 1 \quad (5-22)$$

- Caso 1:  $\sigma_A \geq \sigma_B \geq 0$       Para este caso,  $\sigma_1 = \sigma_A$  and  $\sigma_3 = 0$ 
  - Eq. (5-22) reduces to  
$$\sigma_A \geq S_t \quad (5-23)$$
- Caso 2:  $\sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B$       Para este caso,  $\sigma_1 = \sigma_A$  and  $\sigma_3 = \sigma_B$ 
  - Eq. (5-22) reduces to  
$$\frac{\sigma_A}{S_t} - \frac{\sigma_B}{S_c} \geq 1 \quad (5-24)$$
- Caso 3:  $0 \geq \sigma_A \geq \sigma_B$       Para este caso,  $\sigma_1 = 0$  and  $\sigma_3 = \sigma_B$ 
  - Eq. (5-22) reduces to  
$$\sigma_B \leq -S_c \quad (5-25)$$

# Coulomb-Mohr Theory

- Desenhando os casos nos eixos das tensões principais temos:
- Esta teoria é semelhante a teoria MSS, exceto pelo caso das resistências diferentes para a compressão e para a tensão

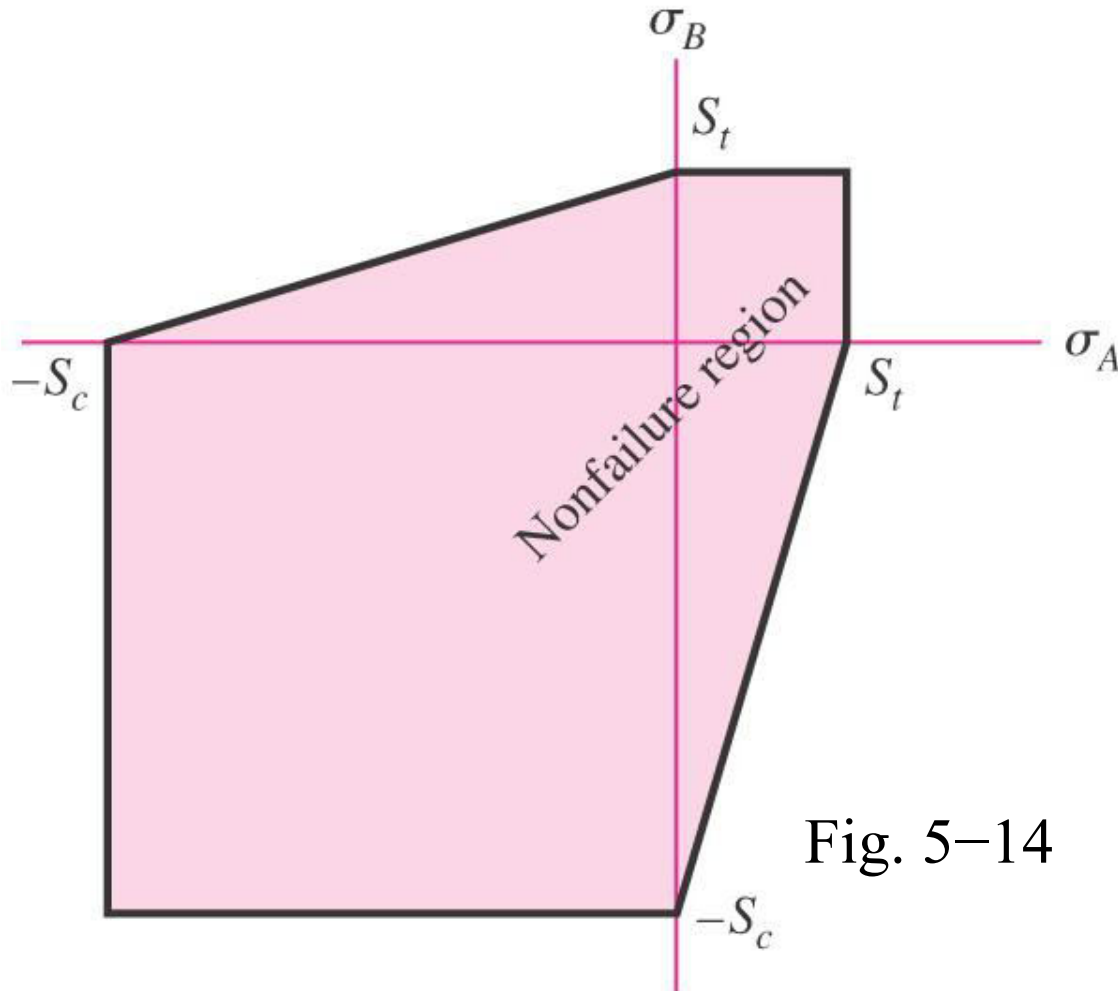


Fig. 5-14

# Coulomb-Mohr Theory

---

- Cruzam a linha de carga de cisalhamento puro com a linha de falha do critério pode-se determinar a resistência ao cisalhamento.
- A linha de falha é uma função das resistências à compressão e a tração, e a resistência ao cisalhamento também é uma função destes termos

$$S_{sy} = \frac{S_{yt} S_{yc}}{S_{yt} + S_{yc}} \quad (5-27)$$

# Teoria de Falha para Materiais Frágeis

- Dados experimentais indicam algumas diferenças em falha para materiais frágeis.
- Critérios de falha geralmente utilizam a tensão de ruptura do material (tensão última do material) em vez de utilizar o escoamento
- A resistência à compressão é geralmente maior que a resistência à tração

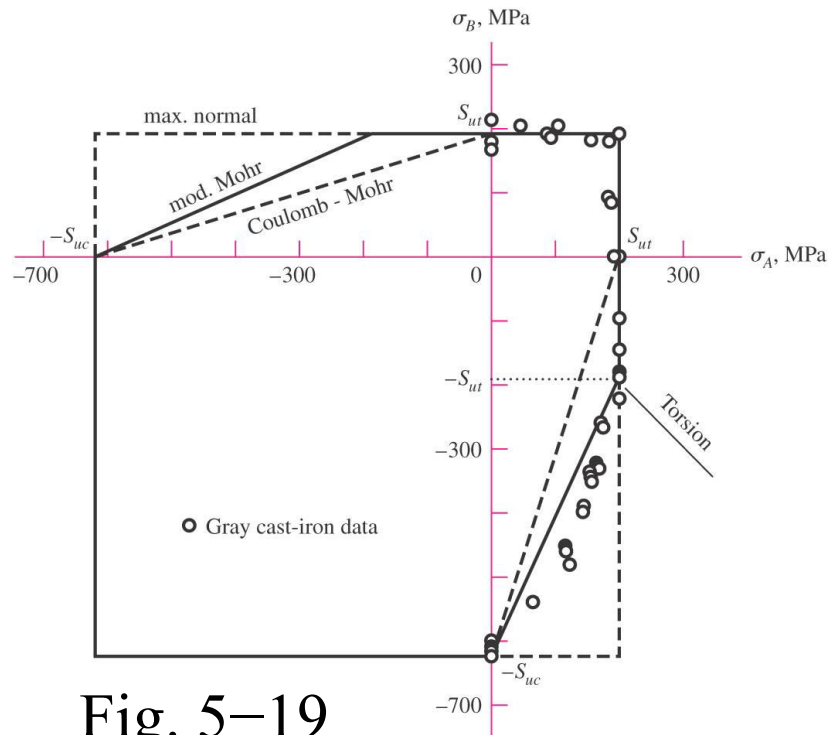


Fig. 5–19



# Maximum Normal Stress Theory

---

- Teoria: A falha ocorre quando a tensão principal máxima em um elemento excede a força.
- A Falha é predita

$$\sigma_1 \geq S_{ut} \quad \text{or} \quad \sigma_3 \leq -S_{uc} \quad (5-28)$$

- Para o estado plano de tensão,

$$\sigma_A \geq S_{ut} \quad \text{or} \quad \sigma_B \leq -S_{uc} \quad (5-29)$$

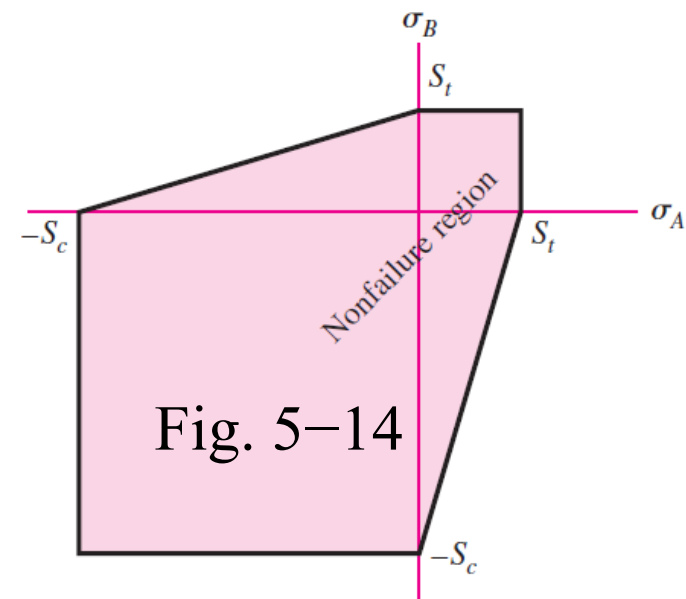
- Incorporando o fator de Segurança,

$$\sigma_A = \frac{S_{ut}}{n} \quad \text{or} \quad \sigma_B = -\frac{S_{uc}}{n} \quad (5-30)$$

# Brittle Coulomb-Mohr

- Mesmas equações que caso anterior (para materiais dúcteis), trocam-se apenas as resistências ao escoamento pelas tensões últimas.
- Equações de falha dependem dos quadrantes.

Condição de quadrante	Critério de Falha
$\sigma_A \geq \sigma_B \geq 0$	$\sigma_A = \frac{S_{ut}}{n} \quad (5-31 a)$
$\sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B$	$\frac{\sigma_A}{S_{ut}} - \frac{\sigma_B}{S_{uc}} = \frac{1}{n} \quad (5-31 b)$
$0 \geq \sigma_A \geq \sigma_B$	$\sigma_B = -\frac{S_{uc}}{n} \quad (5-31 c)$



# Brittle Failure Experimental Data

- Coulomb-Mohr is conservative in 4<sup>th</sup> quadrant
- *Modified Mohr* criteria adjusts to better fit the data in the 4<sup>th</sup> quadrant

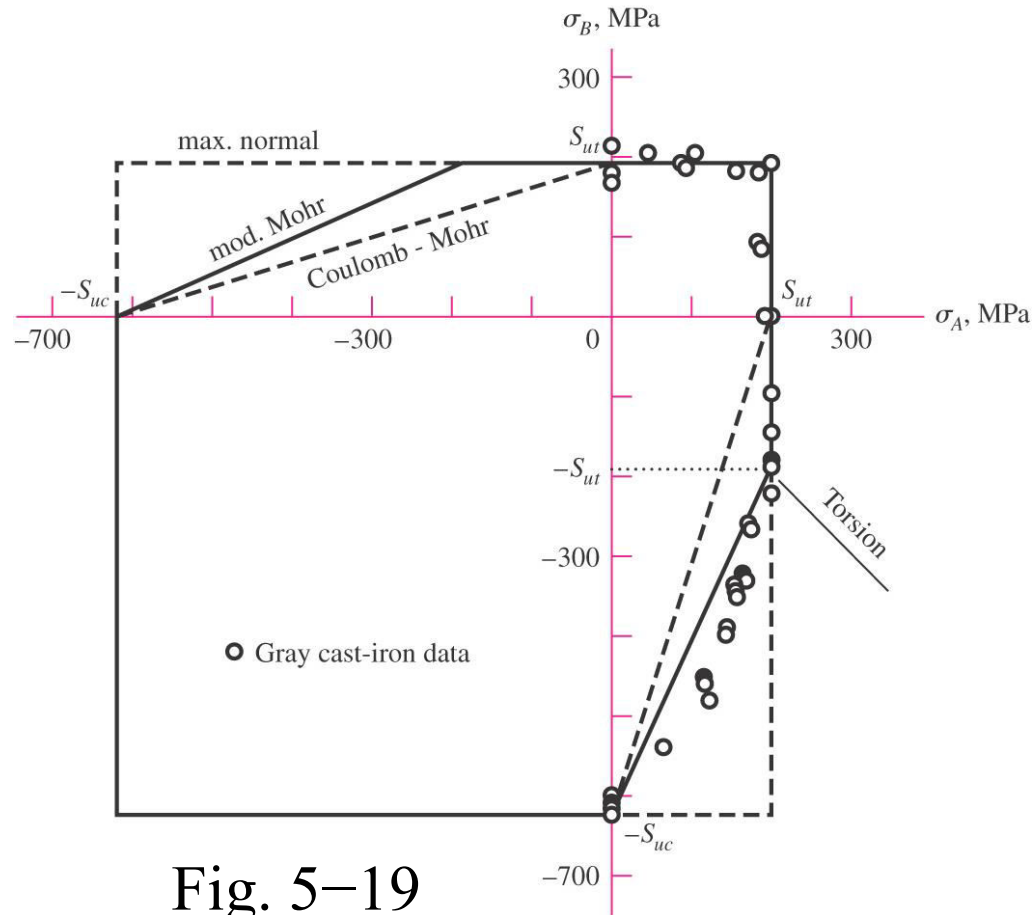


Fig. 5-19



# Selection of Failure Criteria

---

- Primeiro determine dúctil  $\varepsilon_f \geq 0.05$  vs. frágil  $\varepsilon_f < 0.05$ .
- Para Materiais dúcteis
  - Como MSS é mais conservativo, usa-se normalmente onde a confiabilidade elevada é desejada.
  - DE é bem mais usual, é utilizada principalmente quando existem dados experimentais para a comparação.
  - Se as resistências ao escoamento de tração e compressão diferem, usa-se o critério de Coulomb-Mohr dúctil
- Para Materiais Frágeis
  - A Teoria Mohr é muito boa, contudo difícil de ser utilizada.
  - O Critério de Coulomb-Mohr Frágil é mais conservativo no 4<sup>th</sup> quadrante
  - O critério de Mohr Modificada ainda é conservador no 4<sup>th</sup> quadrante, porém mais perto do usual.

# Selection of Failure Criteria in Flowchart Form

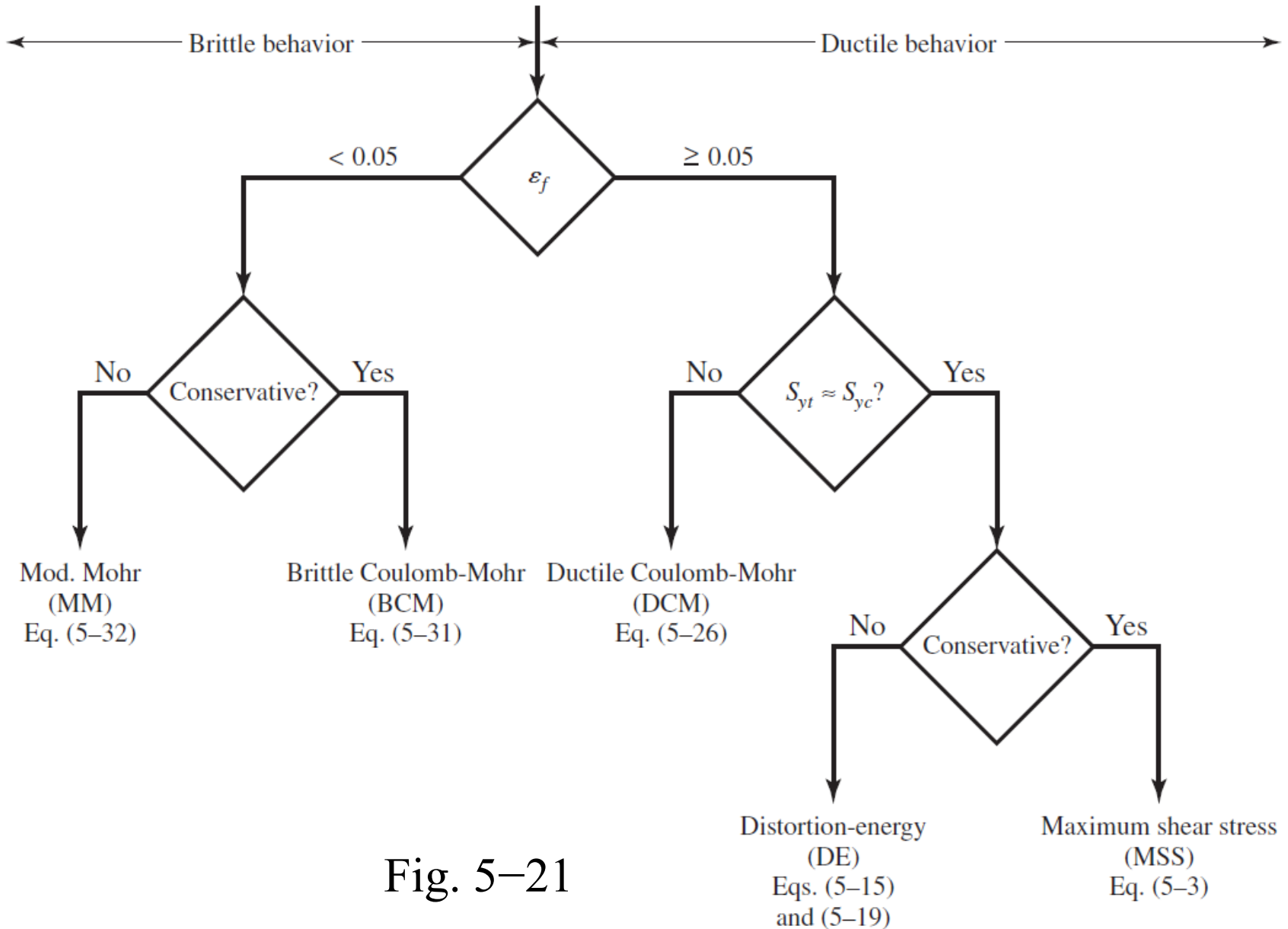


Fig. 5-21

# Introduction to Fracture Mechanics

---

- Mecânica da Fratura Elástica Linear (*LEFM*) analisa o crescimento da falha durante o serviço.
- Assume rachaduras podem existir antes que o serviço começa , por exemplo, falha, inclusão ou defeito.
- Modelos próximos da modelagem e da prevenção do crescimento de uma fenda
- A abordagem do fator de concentração de tensão é inadequada quando raio da ponta da trinca torna-se extremamente aguda, como em uma rachadura, uma vez que factor de concentração de tensão se aproxima do infinito
- Materiais dúcteis, muitas vezes podem negligenciar efeito do crescimento do trinca, uma vez que deformação plástica local mascara as trincas muito finas.
- Materiais relativamente frágil, tal como o vidro , aços duros , ligas de alumínio fortes , e aços abaixo da temperatura de transição dúctil – frágil podem ter o benefício da mecânica da fratura quando a energia foi cuidadosamente medida.

# Quasi-Static Fracture

---

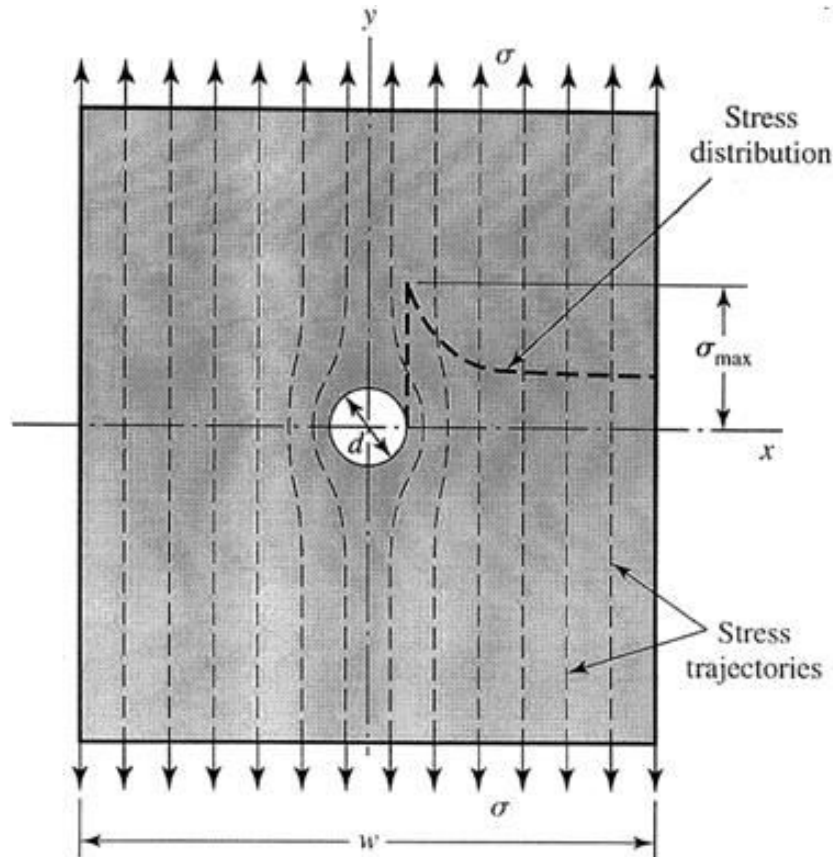
- Though brittle fracture seems instantaneous, it actually takes time to feed the crack energy from the stress field to the crack for propagation.
- A static crack may be stable and not propagate.
- Some level of loading can render a crack unstable, causing it to propagate to fracture.



# Concentração de Tensão

- Incremento da tensão próximo a descontinuidades;
- $K_t$  é o Fator de Concentração Tensão teórico (Geometria)

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_0} \quad K_{ts} = \frac{\tau_{\max}}{\tau_0} \quad (3-48)$$



# Fator de Concentração de tensão teórico

- Gráficos para a avaliação da configuração padrão
- Ver Apendice A-15 e A-16 para os exemplos em comum.
- Note que  $K_t$  tende a aumentar conforme a relação  $r/d$  tende para zero, gerando uma descontinuidade.

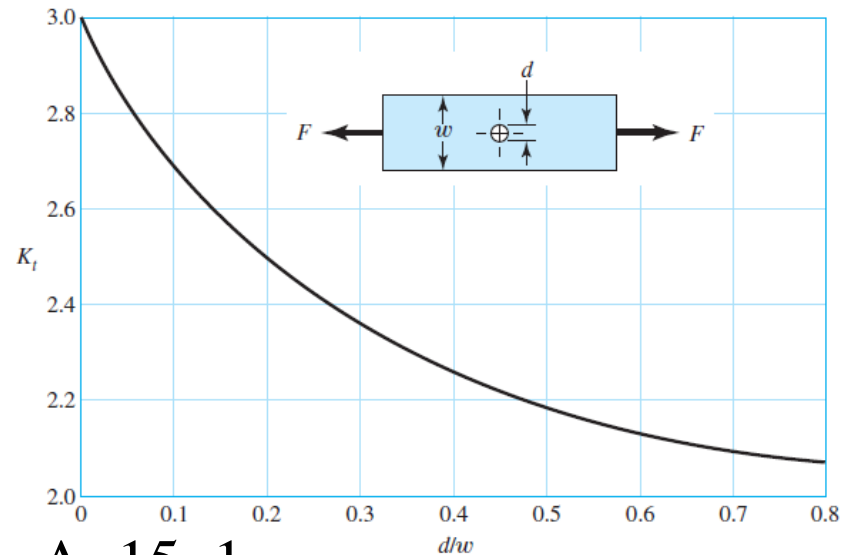


Fig. A-15-1

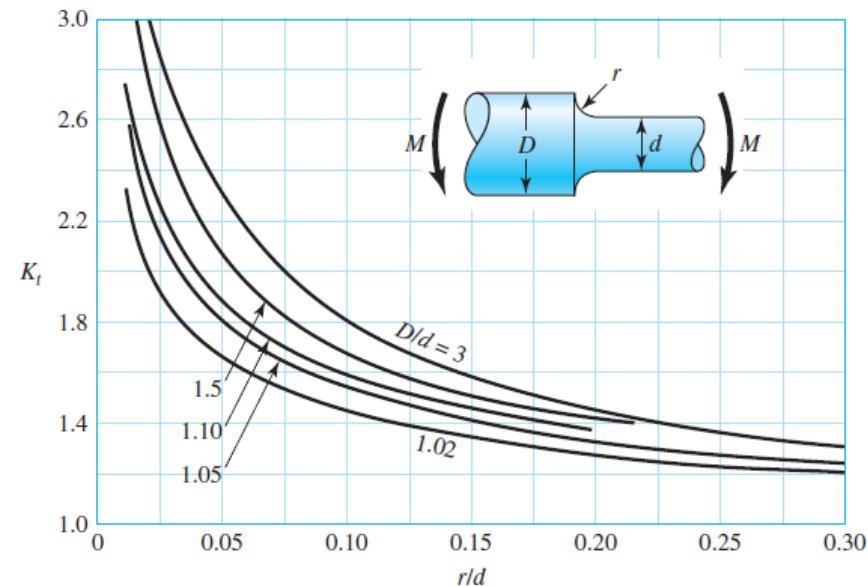


Fig. A-15-9

# Fratura Quase Estática

- Fundamentos da mecânica da fratura foram estabelecidos por Griffith em 1921
- Considerou uma placa infinita com um furo elíptico no centro e carregada na lateral
- Máximo tensão ocorre em  $(\pm a, 0)$

$$(\sigma_y)_{\max} = \left(1 + 2\frac{a}{b}\right)\sigma \quad (5-33)$$

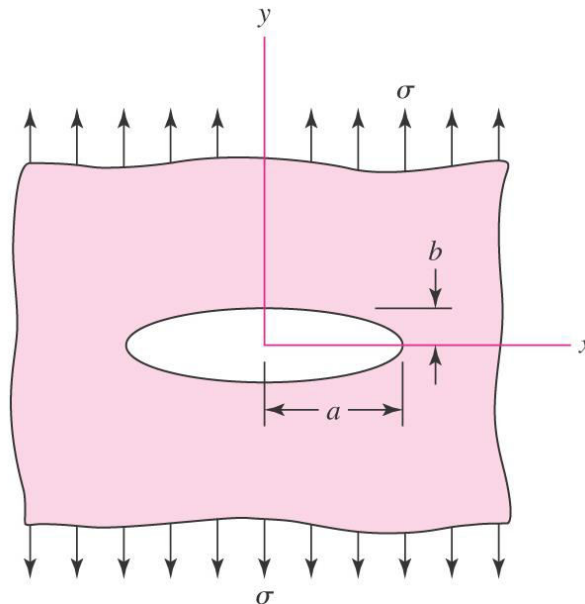


Fig. 5-22

# Fratura Quase Estática

---

- O crescimento de trinca ocorre quando a taxa de liberação de energia a partir de carga aplicada é maior do que a taxa de energia para o crescimento de crack
- O crescimento de trinca instável ocorre quando a taxa de variação da taxa relativa liberação de energia para quebrar comprimento excede taxa de variação da taxa de crescimento da trinca de energia

# Fator de Intensidade de Tensão e Modos de Trinca

- São Três os modos distintos de propagação de trinca
  - *Modo I: modo de abertura de trinca*, devido ao campo de tensão de tração (somente este modo será estudado)
  - *Mode II: modo de deslizamento*, devido ao cisalhamento no plano
  - *Mode III: modo de rasgamento*, devido ao cisalhamento out-of-plane
- Combinações desses três modos é possível.
- O Modo I de abertura de trinca é mais comum, e será o foco deste estudo

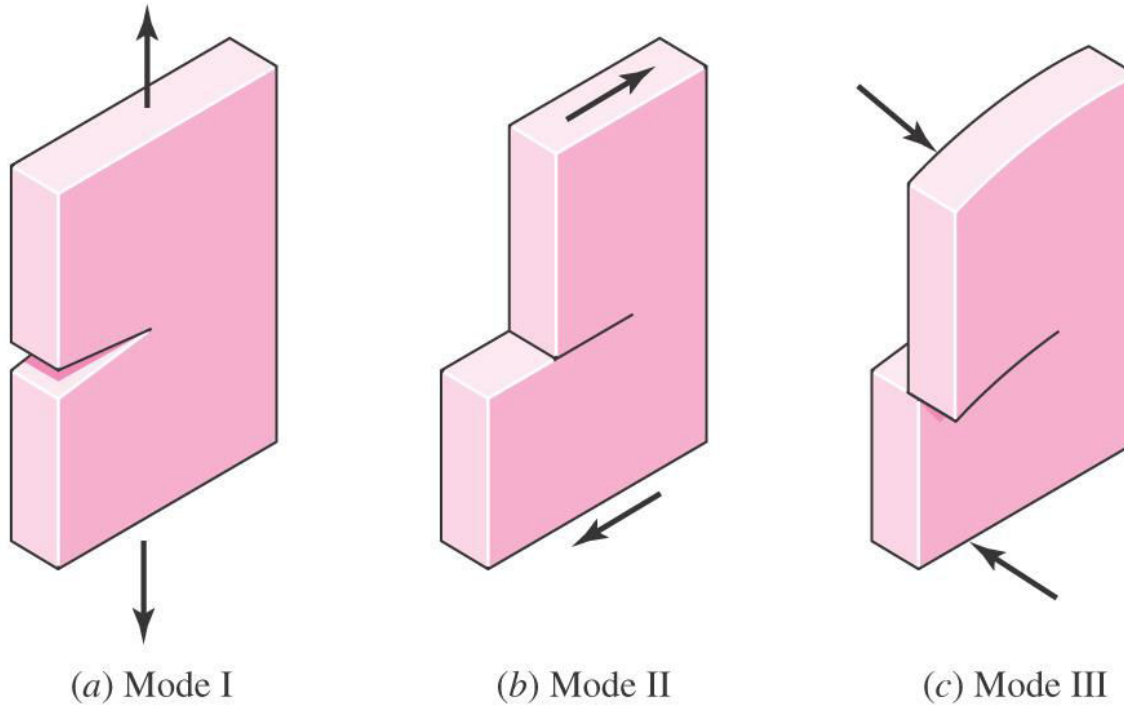


Fig. 5–23

# Mode I Crack Model

- Campo de tensões no elemento  $dx dy$  na ponta da trinca

$$\sigma_x = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (5-34a)$$

$$\sigma_y = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (5-34b)$$

$$\tau_{xy} = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (5-34c)$$

$$\sigma_z = \begin{cases} 0 & \text{(for plane stress)} \\ \nu(\sigma_x + \sigma_y) & \text{(for plane strain)} \end{cases} \quad (5-34d)$$

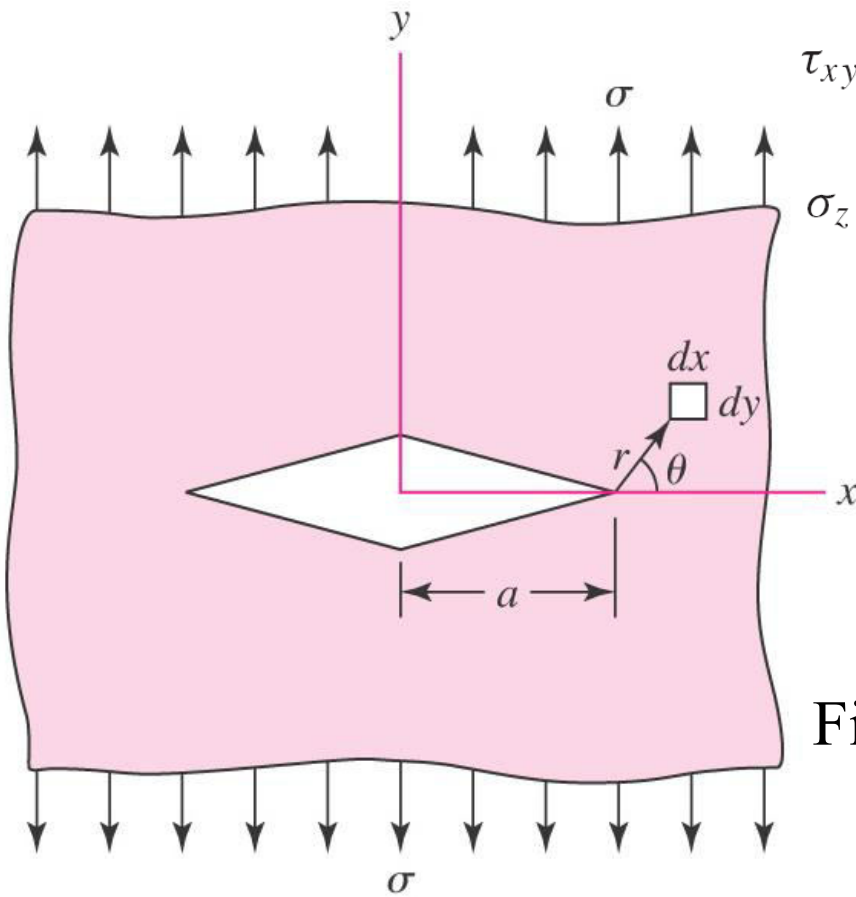


Fig. 5-24

## Factor de Intensidade de Tensões

- Prática comum para se definir *fator de intensidade de tensão*

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (5-35)$$

- Incorporando  $K_I$ , nas equações no campo de tensões

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (5-36a)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (5-36b)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (5-36c)$$

$$\sigma_z = \begin{cases} 0 & \text{(for plane stress)} \\ \nu(\sigma_x + \sigma_y) & \text{(for plane strain)} \end{cases} \quad (5-36d)$$

## Fator de Modificação de Intensidade de Tensão

---

- O fator de intensidade de tensão  $K_I$ , é função da geometria, do tamanho e da forma da trinca, e do tipo de carga aplicada.
- Após várias configurações de carga e geometria terem sido testadas, o *fator de intensidade de tensão* é modificado por uma constante  $\beta$  chamada de *fator de modificação de intensidade de tensão* e é incorporada  $K_I$ .

$$K_I = \beta \sigma \sqrt{\pi a} \quad (5-37)$$

- Gráficos para a determinação do  $\beta$  estão disponíveis na literatura.
- Figuras 5–25 até 5–30 no livro apresentam alguns desses gráficos para a determinação de  $\beta$ .



# Fator de Modificação de Intensidade de Tensão

- Trinca fora do centro na placa longitudinal
- Curvas sólidas são para ponta da trinca em A
- Curvas tracejadas são para a ponta no ponto B.

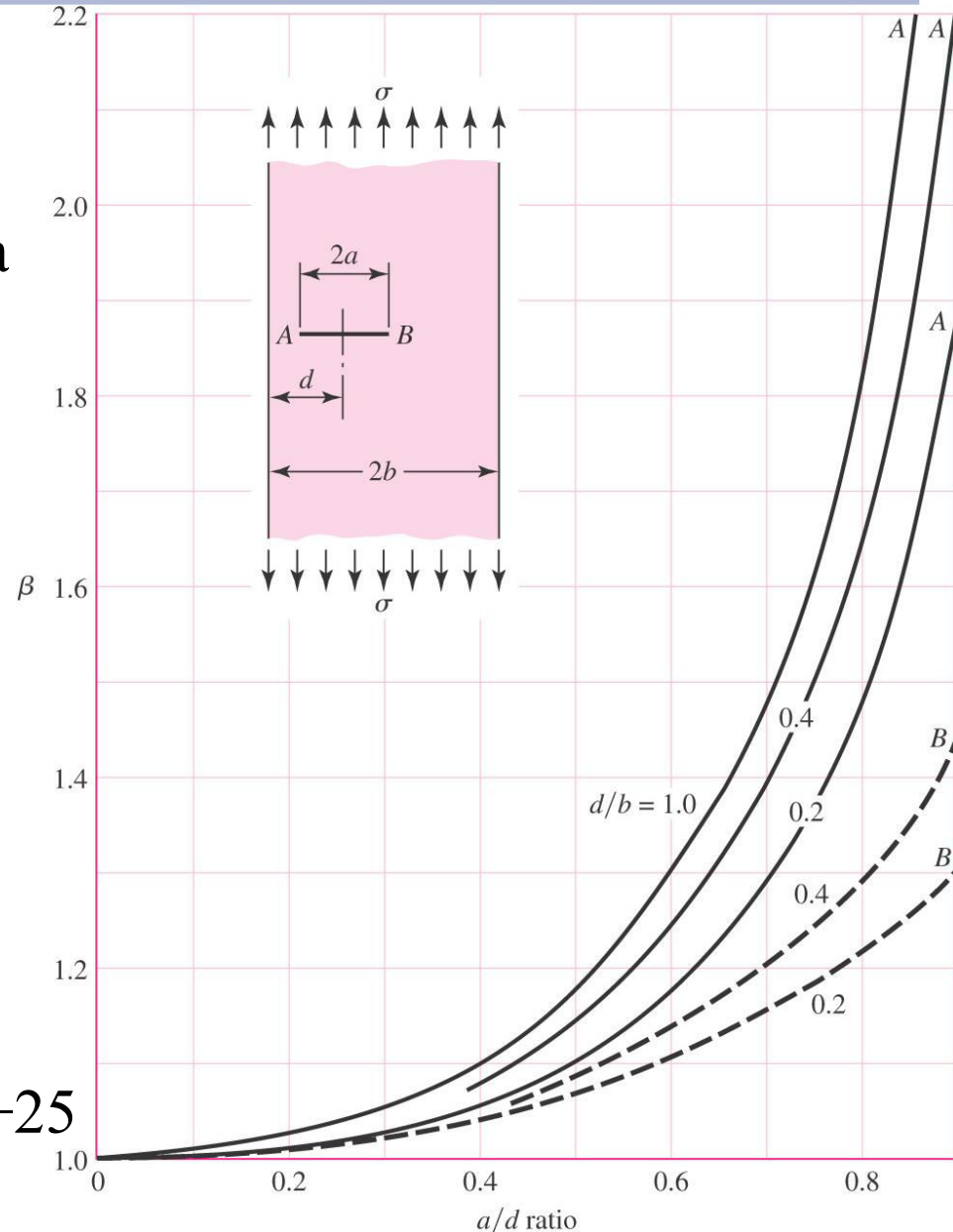


Fig. 5-25

# Fator de Modificação de Intensidade de Tensão

- Placa carregada com tensão longitudinal com trinca na borda.
- Para curva sólida não há restrições para dobrar
- Curva tracejada obtida com flexão e restrições adicionais

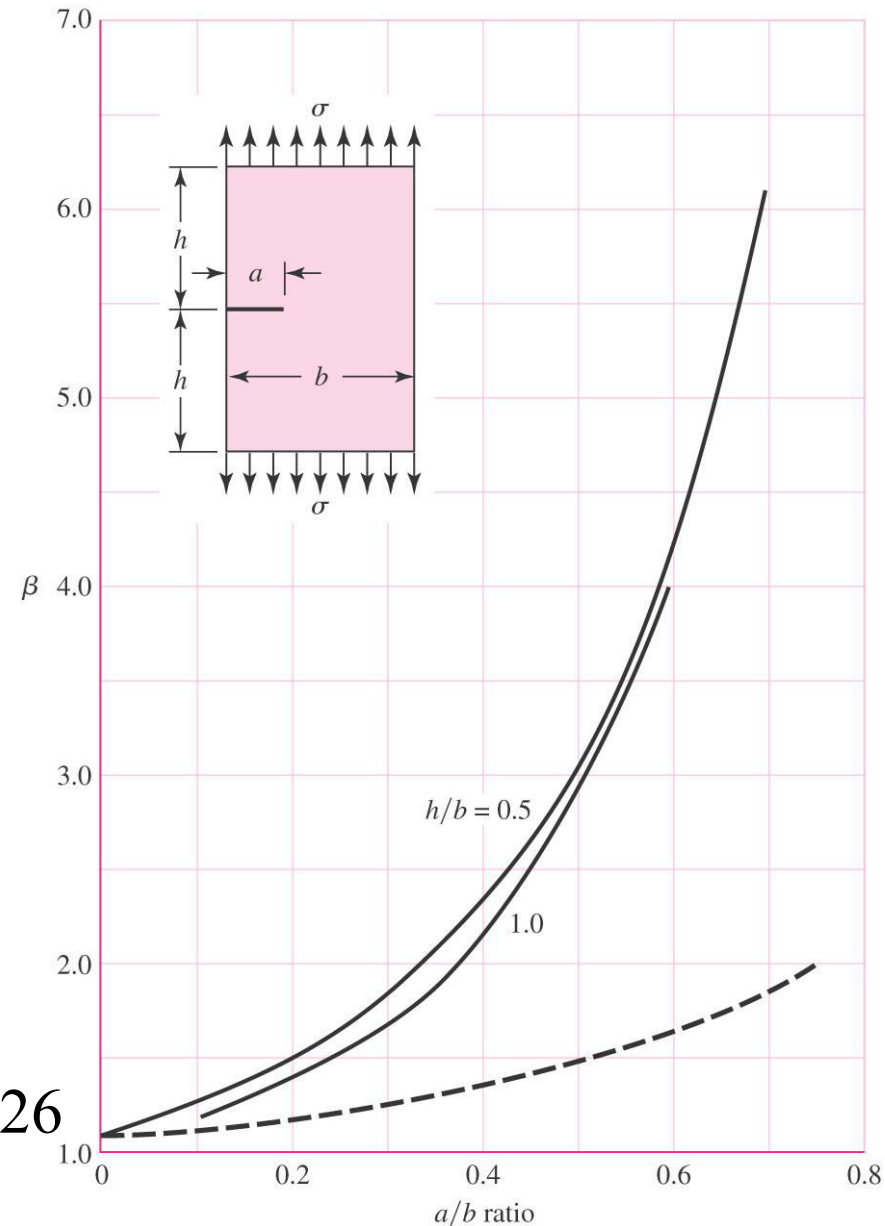


Fig. 5-26

# Fator de Modificação de Intensidade de Tensão

- Vigas de secção rectangular com uma trinca borda

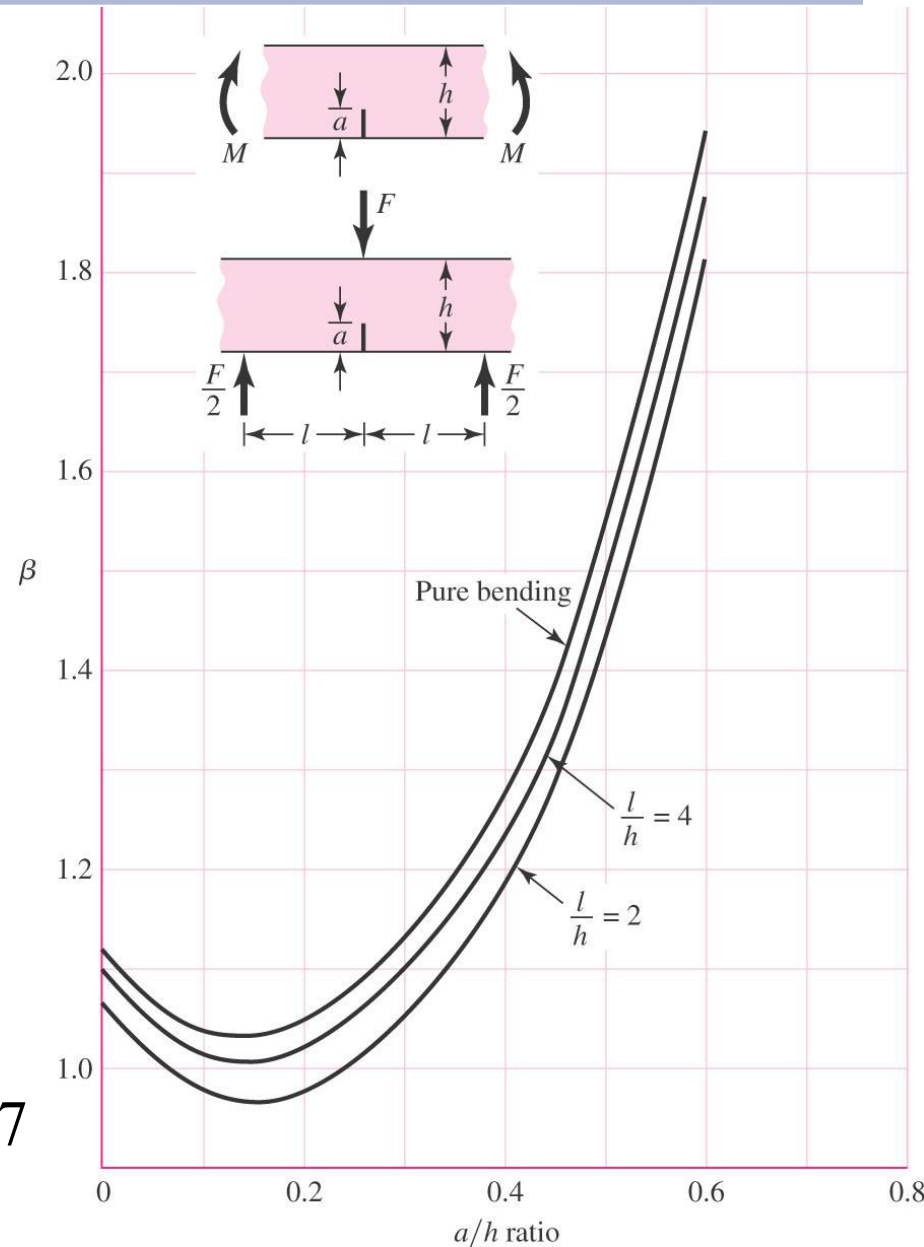


Fig. 5-27

## Fator de intensidade de Tensão Crítico

---

- A propagação de trincas inicia-se quando o fator de intensidade de tensão alcança um valor crítico, the *fator de intensidade de tensão crítico*  $K_{Ic}$
- $K_{Ic}$  é uma propriedade material que depende, do modo de falha (modo I), do processamento do material, da temperatura de trabalho, da taxa de carregamento, e do estado de tensão próximo a trinca
- É conhecido algumas vezes como tenacidade de fratura.
- $K_{Ic}$  será definido apenas para o *modo I*.

# Typical Values for $K_{Ic}$

**Table 5-1**

Values of  $K_{Ic}$  for Some  
Engineering Materials  
at Room Temperature

Material	$K_{Ic}$ , MPa $\sqrt{m}$	$S_y$ , MPa
Aluminum		
2024	26	455
7075	24	495
7178	33	490
Titanium		
Ti-6AL-4V	115	910
Ti-6AL-4V	55	1035
Steel		
4340	99	860
4340	60	1515
52100	14	2070

# Fator de Inetensidade de Tensão Crítico e Fator de Segurança

---

- Ruptura frágil deve ser considerada como um modo de falha devido a
  - Operações em baixas temperaturas, onde a temperatura de transição dúctil-frágil é alcançada.
  - Materiais com uma alta razão  $S_y/S_w$ , indicam uma pequena habilidade em absorver a energia na região plástica.
- Um fator de segurança para a fratura frágil.

$$n = \frac{K_{Ic}}{K_I} \quad (5-38)$$

# Análise Estatística da Falha

---

- Todos os comportamentos físicos possuem variabilidade.
- Isto é especialmente verdade quando falamos de materiais em geral.
- Os métodos determinísticos são muito bons e atendem a uma grande variedade de situações contudo, em alguns casos não são suficientes.
- Grande quantidade de variáveis envolvidas.
- Necessidade de projetos mais robustos e otimizados.
- Dessa forma tensão e resistência são de natureza estatística e atreladas a natureza do componente.

# Análise Estatística da Falha

---

- Considere as seguintes funções densidades de propabilidades,  $\sigma$  e  $S$ .
- Os valores médios das tensões e resistências são, respectivamente  $\mu_\sigma$  e  $\mu_S$ .
- Assim o fator de segurança médio será

$$\bar{n} = \frac{\mu_S}{\mu_\sigma} \quad (a)$$

- E margem de segurança entre qualquer valor de tensão e resistência é:

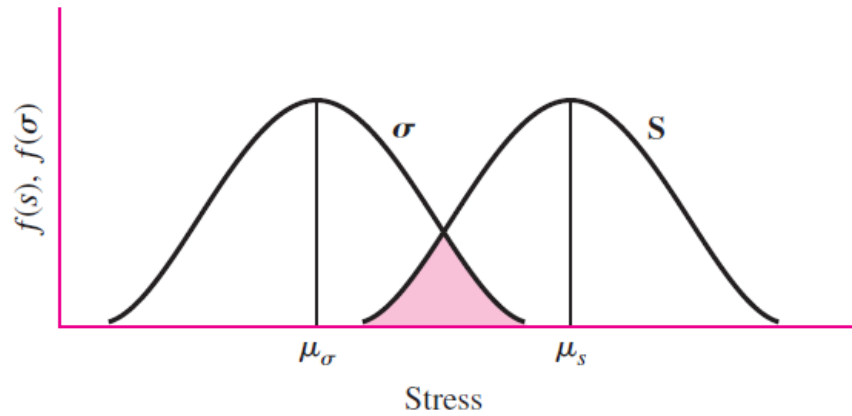
$$m = S - \sigma \quad (b)$$

- E o valor médio dessa margem de segurança será

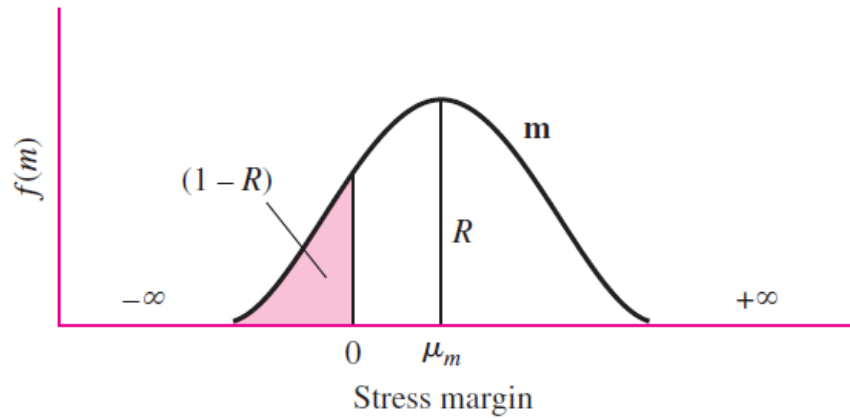
$$\bar{m} = \mu_S - \mu_\sigma$$



# Análise Estatística da Falha



(a)



(b)

# Análise Estatística da Falha

---

## Caso Normal-Normal

Considere as tensões e as resistências como distribuições normais:

$$\mathbf{S} = \mathbf{N}(\mu_S, \hat{\sigma}_S) \text{ and } \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{N}(\mu_\sigma, \hat{\sigma}_\sigma).$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{S} - \boldsymbol{\sigma},$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{N}(\mu_m, \hat{\sigma}_m).$$

Na parte sombreada da figura 5-31 (a) em que a tensão excede a resistência a margem de segurança é negativa  $m = S - \sigma$

A confiança de que a tensão seja sempre menor que a resistência é

$$R = p(S > \sigma) = p(S - \sigma > 0) = p(m > 0) \quad (5-39)$$

# Análise Estatística da Falha

## Caso Normal-Normal

$$\mu_m = \mu_S - \mu_\sigma \text{ and } \hat{\sigma}_m = (\hat{\sigma}_S^2 + \hat{\sigma}_\sigma^2)^{1/2}$$

Criando a variável  $z$  de  $m$  e substituindo  $m = 0$ , temos:

$$z = \frac{m - \mu_m}{\hat{\sigma}_m} = \frac{0 - \mu_m}{\hat{\sigma}_m} = -\frac{\mu_m}{\hat{\sigma}_m} = -\frac{\mu_S - \mu_\sigma}{(\hat{\sigma}_S^2 + \hat{\sigma}_\sigma^2)^{1/2}} \quad (5-40)$$

A equação (5-40) acima é conhecida como equação de acoplamento normal. E a confiabilidade associada a  $z$  é dada por

$$R = \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = 1 - F = 1 - \Phi(z) \quad (5-41)$$

# Análise Estatística da Falha

## Caso Normal-Normal

O corpo da tabela A-10 nos dá  $R$  quando  $z > 0$  e  $(1 - R = F)$  quando  $z \leq 0$ . Observando que :

$$\bar{n} = \mu_S / \mu_\sigma \quad C_\sigma = \hat{\sigma}_\sigma / \mu_\sigma \quad C_S = \hat{\sigma}_S / \mu_S$$

Introduzindo os parâmetros acima na equação (5-40) e resolvendo a sua forma quadrática para  $\bar{n}$  tem-se a expressão abaixo.

$$\bar{n} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - (1 - z^2 C_S^2)(1 - z^2 C_\sigma^2)}}{1 - z^2 C_S^2} \quad (5-42)$$

O sinal de + está associado com  $R > 0,5$  e o sinal de menos com  $R < 0,5$ .

# Análise Estatística da Falha

## Caso Lognormal-Lognormal

Considere agora as tensões  $\sigma$  e as resistências  $S$  não mais como distribuições normais, mas como distribuições lognormais, do tipo:

$$S = \text{LN}(\mu_S, \hat{\sigma}_S) \quad \sigma = \text{LN}(\mu_\sigma, \hat{\sigma}_\sigma).$$

$$\begin{aligned} \mu_{\ln S} &= \ln \mu_S - \ln \sqrt{1 + C_S^2} \\ \hat{\sigma}_{\ln S} &= \sqrt{\ln(1 + C_S^2)} \end{aligned} \quad (\text{strength})$$

$$\begin{aligned} \mu_{\ln \sigma} &= \ln \mu_\sigma - \ln \sqrt{1 + C_\sigma^2} \\ \hat{\sigma}_{\ln \sigma} &= \sqrt{\ln(1 + C_\sigma^2)} \end{aligned} \quad (\text{stress})$$

# Análise Estatística da Falha

## Caso Lognormal-Lognormal

Utilizando a equação (5-40) que relaciona a interferência das distribuições e a equação (5-41) que expressa a confiabilidade.

$$z = -\frac{\mu_{\ln S} - \mu_{\ln \sigma}}{(\hat{\sigma}_{\ln S}^2 + \hat{\sigma}_{\ln \sigma}^2)^{1/2}} = -\frac{\ln \left( \frac{\mu_S}{\mu_\sigma} \sqrt{\frac{1 + C_\sigma^2}{1 + C_S^2}} \right)}{\sqrt{\ln [(1 + C_S^2)(1 + C_\sigma^2)]}} \quad (5-43)$$

Tem-se que o coeficiente de segurança  $n$  (ou fator de projeto) é definido pelo quociente das distribuições  $S/\sigma$ , e este também é uma variável aleatória.

$$\mu_n = \frac{\mu_S}{\mu_\sigma} \quad C_n = \sqrt{\frac{C_S^2 + C_\sigma^2}{1 + C_\sigma^2}} \quad \hat{\sigma}_n = C_n \mu_n$$

O quociente de duas variáveis aleatórias lognormal é também uma variável aleatória lognormal  $n = \text{LN}(\mu_n, \hat{\sigma}_n)$ .

# Análise Estatística da Falha

## Caso Lognormal-Lognormal

De sorte que a média lognormal é determinada pela expressão abaixo, a saber:

$$\mu_y = \ln \mu_n - \ln \sqrt{1 + C_n^2} \quad \hat{\sigma}_y = \sqrt{\ln(1 + C_n^2)}$$

E a variável  $z$  em função das estatísticas lognormal é:

$$z = \frac{y - \mu_y}{\hat{\sigma}_y}$$

Dessa forma, a falha ocorrerá quando  $\bar{n} < 1$  ou quando  $y < 0$ .

$$z = \frac{0 - \mu_y}{\hat{\sigma}_y} = -\frac{\mu_y}{\sigma_y} = -\frac{\ln \mu_n - \ln \sqrt{1 + C_n^2}}{\sqrt{\ln(1 + C_n^2)}} = -\frac{\ln(\mu_n / \sqrt{1 + C_n^2})}{\sqrt{\ln(1 + C_n^2)}} \quad (5-44)$$

# Análise Estatística da Falha

## Caso Lognormal-Lognormal

Resolvendo a equação (5-44) para se determinar o valor de  $\bar{n}$ , temos:

$$\mu_n = \bar{n} = \exp \left[ -z \sqrt{\ln(1 + C_n^2)} + \ln \sqrt{1 + C_n^2} \right] \doteq \exp \left[ C_n \left( -z + \frac{C_n}{2} \right) \right] \quad (5-45)$$

As equações (5-42) e (5-45) são utilizadas na obtenção do coeficiente de segurança por meio de dados estatísticos. Estas são marcantes por diversas razões, a saber:

- ✓ Elas relacionam o fator de projeto  $\bar{n}$  à confiabilidade objetiva (por meio de  $z$ ) e aos coeficientes de variação da resistência e da tensão que são parâmetros estatísticos.
- ✓ Estas equações não são funções das médias da tensão e da resistência.
- ✓  $C_s$  depende ligeiramente do material em questão e  $C_\sigma$  é o coeficiente de variação da carga aplicada.



# Análise Estatística da Falha

## Exercício: Caso normal

A round cold-drawn 1018 steel rod has an 0.2 percent yield strength  $S_y = N(78.4, 5.90)$  kpsi and is to be subjected to a static axial load of  $P = N(50, 4.1)$  kip. What value of the design factor  $\bar{n}$  corresponds to a reliability of 0.999 against yielding ( $z = -3.09$ )? Determine the corresponding diameter of the rod.

$$C_S = 5.90/78.4 = 0.0753, \text{ and}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{4P}{\pi d^2}$$

Since the COV of the diameter is an order of magnitude less than the COV of the load or strength, the diameter is treated deterministically:

$$C_\sigma = C_P = \frac{4.1}{50} = 0.082$$

From Eq. (5-42),

$$\bar{n} = \frac{1 + \sqrt{1 - [1 - (-3.09)^2(0.0753^2)][1 - (-3.09)^2(0.082^2)]}}{1 - (-3.09)^2(0.0753^2)} = 1.416$$

The diameter is found deterministically:

$$d = \sqrt{\frac{4\bar{P}}{\pi \bar{S}_y / \bar{n}}} = \sqrt{\frac{4(50\,000)}{\pi(78\,400)/1.416}} = 1.072 \text{ in}$$

# Análise Estatística da Falha

$S_y = N(78.4, 5.90)$  kpsi,  $P = N(50, 4.1)$  kip, and  $d = 1.072$  in. Then

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi (1.072^2)}{4} = 0.9026 \text{ in}^2$$

$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{P}}{A} = \frac{(50\,000)}{0.9026} = 55\,400 \text{ psi}$$

$$C_P = C_\sigma = \frac{4.1}{50} = 0.082$$

$$\hat{\sigma}_\sigma = C_\sigma \bar{\sigma} = 0.082(55\,400) = 4540 \text{ psi}$$

$$\hat{\sigma}_S = 5.90 \text{ kpsi}$$

From Eq. (5-40)

$$z = -\frac{78.4 - 55.4}{(5.90^2 + 4.54^2)^{1/2}} = -3.09$$

From Appendix Table A-10,  $R = \Phi(-3.09) = 0.999$ .

# Análise Estatística da Falha

## Exercício: Caso Lognormal

Rework Ex. 5–8 with lognormally distributed stress and strength.

$C_S = 5.90/78.4 = 0.0753$ , and  $C_\sigma = C_P = 4.1/50 = 0.082$ . Then

$$\sigma = \frac{\mathbf{P}}{A} = \frac{4\mathbf{P}}{\pi d^2}$$

$$C_n = \sqrt{\frac{C_S^2 + C_\sigma^2}{1 + C_\sigma^2}} = \sqrt{\frac{0.0753^2 + 0.082^2}{1 + 0.082^2}} = 0.1110$$

From Table A–10,  $z = -3.09$ . From Eq. (5–45),

$$\bar{n} = \exp \left[ -(-3.09)\sqrt{\ln(1 + 0.111^2)} + \ln \sqrt{1 + 0.111^2} \right] = 1.416$$

$$d = \sqrt{\frac{4\bar{P}}{\pi \bar{S}_y / \bar{n}}} = \sqrt{\frac{4(50\,000)}{\pi(78\,400)/1.416}} = 1.0723 \text{ in}$$

$S_y = \text{LN}(78.4, 5.90)$ ,  $\mathbf{P} = \text{LN}(50, 4.1)$  kip. Then

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi(1.0723^2)}{4} = 0.9031$$

$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{P}}{A} = \frac{50\,000}{0.9031} = 55\,365 \text{ psi}$$

$$C_\sigma = C_P = \frac{4.1}{50} = 0.082$$

$$\hat{\sigma}_\sigma = C_\sigma \mu_\sigma = 0.082(55\,367) = 4540 \text{ psi}$$

# Análise Estatística da Falha

---

From Eq. (5-43),

$$z = -\frac{\ln\left(\frac{78.4}{55.365} \sqrt{\frac{1 + 0.082^2}{1 + 0.0753^2}}\right)}{\sqrt{\ln[(1 + 0.0753^2)(1 + 0.082^2)]}} = -3.1343$$

Appendix Table A-10 gives  $R = 0.99950$ .