Disciplina : TMEC020 - Mecânica dos Sólidos II - Turma AN
Professor : Jucélio Tomás Pereira, D.Sc.

Introdução:

Esta lista de exercícios tem como meta servir de guia de estudo para os alunos da disciplina Mecânica dos Sólidos II (Engenharia Mecânica da UFPR). É recomendado que os alunos façam esse conjunto de exercícios na sequência em que são apresentados.

Boa sorte!!

Bons estudos!!

Questão # 1:

Seja um estado plano de tensões (EPT), já conhecido e posto na forma geral através de uma matriz 2x2. Para este, explique os significados de:

a) *Tensões;*
b) *Componente genérico* T_{ij} *desse estado de tensões;*
c) *Estado de tensões;*
d) *Qual a representação matemática desse estado de tensões;*
e) *Qual a representação gráfica do mesmo.*

Questão # 2:

O estado de tensões anterior é decorrente de esforços mecânicos aplicados sobre a estrutura (o sólido). Explique cuidadosamente (e exemplifique) os conceitos de:

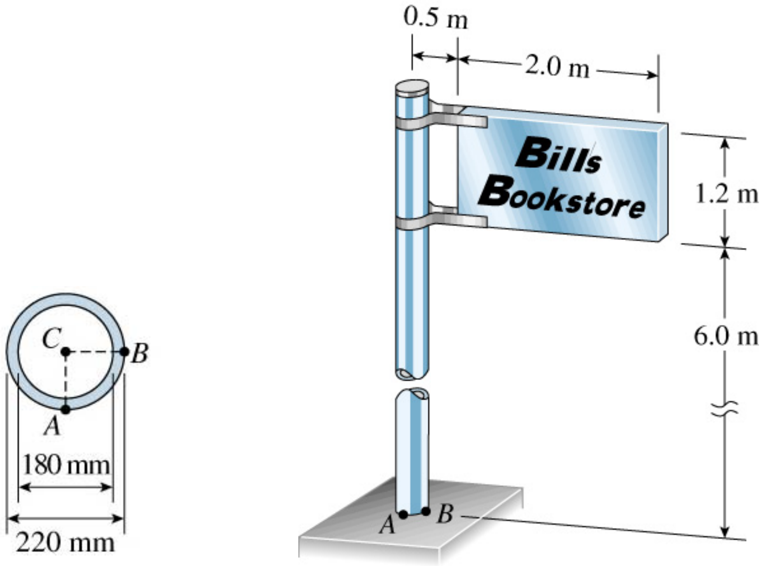
a) *Forças externas de superfície;*
b) *Forças externas de corpo.*

Questão # 3:

A placa de sustentação de uma placa, visualizada abaixo, está submetida a um carregamento provocado pela força do vento frontal à placa (no valor de 10.000 N) e seu próprio peso no valor de 5.000 N. O dimensionamento do poste de sustentação dessa placa envolve a determinação do estado de tensões em vários pontos críticos do poste.

Para esse problema, obtenha o estado de tensões completo (3D) nos pontos A e B.

Para facilitar, obtenha a tensão cisalhante gerada pelo esforço cortante (caso o mesmo ocorra) através da expressão $\tau_{med} = 1,5\,\dfrac{Força}{Area}$.



Questão # 4:

Considere um ponto material onde é conhecido um estado plano de tensões (EPT) genérico (com componentes T_{11}, $T_{12} = T_{21}$ e T_{22}) e defina um novo sistema de coordenadas (denotado $x_1' - x_2'$), rotacionado de um ângulo genérico θ, medido no sentido anti-horário a partir do eixo de coordenadas fixo (original) x_1. Pela construção de um pequeno elemento de volume em torno desse ponto, realize um corte segundo as direções Cartesianas do sistema gerado e obtenha as componentes do estado de tensões nesse novo sistema (T'_{11}, $T'_{12} = T'_{21}$ e T'_{22}).

Questão # 5:

Mostre que as expressões desse novo estado de tensões (obtido anteriormente) recaem na equação de um círculo (denominado Círculo de Mohr).

Questão # 6:

Tendo como referência o Círculo de Mohr genérico obtido anteriormente, obtenha as expressões para:

a. *Raio do círculo;*
b. *Tensão normal máxima ($\sigma_{máx}$);*
c. *Tensão normal mínima ($\sigma_{mín}$);*
d. *Tensão cisalhante máxima ($\tau_{máx}$);*
e. *Ângulo de tensões princpais;*
f. *Apresente, em um rascunhe do círculo, cada uma das grandezas anteriores.*

Questão # 7:

Explique minuciosamente o que é estado de tensões principais? Qual sua importância em um problema da mecânica estrutural?

Questão # 8:

Construa o Círculo de Mohr para os seguintes estados de tensões e obtenha, para cada um deles, as variáveis:

a. *Raio do círculo;*
b. *Tensão normal máxima ($\sigma_{máx}$);*
c. *Tensão normal mínima ($\sigma_{mín}$);*
d. *Tensão cisalhante máxima ($\tau_{máx}$);*
e. *Ângulo de tensões principais.*

$$T = \begin{bmatrix} -20, & -60, \\ -60, & 60, \end{bmatrix} MPa \; ;$$

$$T = \begin{bmatrix} 0, & 100, \\ 100, & 0, \end{bmatrix} MPa \; ;$$

$$T = \begin{bmatrix} -50, & 0, \\ 0, & 50, \end{bmatrix} MPa \; .$$

Questão # 9:

Tendo como referência o estado de tensões descrito na Questão #4, acima, realize o mesmo corte virtual como descrito. Nessa face gerada, surge um vetor de densidade de forças, aqui denotado $\boldsymbol{t}^n$ (definido como vetor de tensões) e escrito em relação ao sistema de coordenadas fixo $x_1 - x_2$. Para este problema:

a. *Obtenha a expressão final para o vetor de tensões $\boldsymbol{t}^n$;*
b. *Explique minuciosamente o significado de vetor de tensões;*
c. *Obtenha os vetores de tensões (e rascunhe) quando os vetores normais unitários $\boldsymbol{n}$ são:*
   c.1. $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_1$;
   c.2. $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_2$.

Questão # 10:

De acordo com o realizado na Questão #9, acima, demonstre como se dá a decomposição do vetor de tensões genérico obtido ($\boldsymbol{t}^n$) em dois vetores ortogonais: um vetor puramente normal à face cortada ($\boldsymbol{t}_n^n$) e outro vetor cisalhante ("shear") à face ($\boldsymbol{t}_s^n$). Explique cada um dos termos envolvidos no processo e rascunhe-os em um elemento de volume genérico.

Questão # 11:

Refaça as Questões #9 e #10 para um estado de tensões genérico 3D.

Questão # 12:

*Seja o estado de tensões T e a direção normal **N**, fornecidos a seguir. Para esse problema, rascunhe a solução e obtenha:*

a. *Vetor tensão atuante na face definida pela direção **N**;*
b. *Intensidade da tensão normal à face;*
c. *Intensidade da tensão cisalhante à essa face;*
d. *Vetor tensão normal à face;*
e. *Vetor tensão cisalhante à face.*

Estado de tensões: $T = \begin{bmatrix} -20, & -60, & 40, \\ -60, & 60, & 15, \\ 40, & 15, & 40, \end{bmatrix} MPa$.

Vetor direção: $\mathbf{N} = \{3,\ -4,\ 0,\}^T$.

Questão # 13:

Refaça a Questão anterior considerando $\mathbf{n} = \mathbf{e}_2$. Rascunhe a solução.

Questão # 14:

Mostre todos os passos do porquê a solução do problema de busca das tensões principais recai na solução de um problema de autovalores/autovetores?

Questão # 15:

O que são invariantes de um estado de tensões?

Questão # 16:

Para os estados de tensões fornecidos abaixo, obtenha:

a. *Tensões principais;*
b. *tensão cisalhante máxima;*
c. *rascunhe o Círculo de Moh:*

$$T = \begin{bmatrix} -20, & -60, & 40, \\ -60, & 60, & 15, \\ 40, & 15, & 40, \end{bmatrix} MPa;$$

$$T = \begin{bmatrix} -20, & -60, & 0, \\ -60, & 60, & 0, \\ 0, & 0, & 40, \end{bmatrix} MPa;$$

$$T=\begin{bmatrix} -30, & 0, & 0, \\ 0, & 40, & 0, \\ 0, & 0, & 70, \end{bmatrix} MPa\ .$$

Questão # 17: ____

Mostre que o tensor de tensões é sempre simétrico (com exceção de situações totalmente peculiares e não estudadas em nosso curso).

Questão # 18: ____

O que é um filamento material. Qual a utilidade dessa definição?

Questão # 19: ____

Explique minuciosamente o que é deformação e quais são seus dois tipos fundamentais.

Questão # 20: ____

Dado o campo de deslocamentos $\mathbf{u}=\mathbf{u}(x)$, *fornecido abaixo, represente o processo de deformação obtendo as posições finais do ponto-base material P (coordenadas* $\mathbf{x}_o$*) e de 4 pontos no entorno do mesmo. Utilize um fator de escala para visualizar os deslocamentos dos pontos extremos dos filamentos* $\overline{QR}$ *e* $\overline{ST}$.

Adote as dimensões $\Delta x_1=\Delta x_2=10^{-3}\,m$.

DICA: Use um papel quadriculado para facilitar.

Campo de deslocamentos: $\mathbf{u}=\mathbf{u}(x)=\mathbf{u}(x_1,x_2)=\begin{Bmatrix} u_1(x_1,x_2) \\ u_2(x_1,x_2) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 2+x_1+x_2^2 \\ 1-x_2^2-x_1^2 \end{Bmatrix}10^{-3}\,m$

Ponto P: $\mathbf{x}_o=\begin{Bmatrix} 1, \\ 2, \end{Bmatrix}m$.

Ponto Q: $\mathbf{x}=\mathbf{x}_o+\begin{Bmatrix} -\Delta x_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$, *Ponto R:* $\mathbf{x}=\mathbf{x}_o+\begin{Bmatrix} \Delta x_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$.

Ponto S: $\mathbf{x}=\mathbf{x}_o+\begin{Bmatrix} 0 \\ -\Delta x_2 \end{Bmatrix}$, *Ponto T:* $\mathbf{x}=\mathbf{x}_o+\begin{Bmatrix} 0 \\ \Delta x_2 \end{Bmatrix}$.

Questão # 21: ____

A partir das coordenadas finais (na configuração deformada) dos pontos P, Q, R, S e T, definidos na Questão anterior, obtenha:

a. *A deformação longitudinal do filamento material* $\overline{PR}$;
b. *A deformação longitudinal do filamento* $\overline{PT}$;

c. *A rotação no plano, e em relação ao eixo x_3, do filamento $\overline{PR}$ (denote-o θ_1);*
d. *A rotação no plano, e em relação ao eixo x_3, do filamento $\overline{PT}$ (denote-o θ_2);*
e. *A rotação média, definida em relação ao eixo x_3, dos filamentos $\overline{PR}$ e $\overline{PT}$;*
f. *A deformação cisalhante (total), aqui denotada γ_{12}, dos filamentos $\overline{PR}$ e $\overline{PT}$.*

Questão # 22: ______

Seja um problema de deformações no plano ($x_1 - x_2$), no qual é definido o campo de deslocamento $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{u}(x_1, x_2)$. Seja, também, um filamento material $\overline{PQ}$, muito pequeno, com início no ponto material P (cujas coordenadas são $\{x_1, x_2\}$) e término no ponto Q (de coordenadas $\{x_1 + \delta x_1,\ x_2 + \delta x_2\} = \{x_1,\ x_2\} + \{\delta x_1,\ \delta x_2\}$). Para esse problema:

a) *Obtenha o vetor diferença de deslocamentos desses dois pontos (denotado $\delta\boldsymbol{u}$) utilizando o conceito de expansão em série de Taylor. Rascunhe graficamente a resposta;*
b) *O que é matriz gradiente de deslocamentos (aqui denotada $\nabla\boldsymbol{u}$);*
c) *Decomponha a matriz gradiente de deslocamentos em suas parcelas simétrica (denotada $\nabla^S\boldsymbol{u}$) e anti-simétrica (denotada $\nabla^{AS}\boldsymbol{u}$).*

Questão # 23: ______

Utilizando o resultado da Questão anterior e 3 pontos (P, Q e R), defina dois filamentos genéricos, mas orientados segundo os eixos Cartesianos, na forma:

Ponto P: $\boldsymbol{x}_P = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$, *Ponto Q:* $\boldsymbol{x}_Q = \boldsymbol{x}_P + \begin{Bmatrix} \Delta x_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$, *Ponto R:* $\boldsymbol{x}_R = \boldsymbol{x}_P + \begin{Bmatrix} 0 \\ \Delta x_2 \end{Bmatrix}$.

Filamento na direção Cartesiana $\boldsymbol{e}_1$: $\overline{PQ}$;

Filamento na direção Cartesiana $\boldsymbol{e}_2$: $\overline{PR}$.

Para esse problema:

a) *Obtenha o vetor diferença de deslocamentos dos dois pontos extremos de cada filamento e rascunhe as formas finais destes;*
b) *Obtenha a expressão para a deformação longitudinal do filamento $\overline{PR}$ (denomine-a ε_{22}) e para a deformação cisalhante (γ_{12}) entre os dois filamentos;*
c) *Defina completamente a expressão que fornece a matriz de deformações no plano. Justifique o fato de a mesma ser simétrica;*
d) *Obtenha a rotação média desses dois filamentos em relação ao eixo Cartesiano x_3;*
e) *Compare com os resultados obtidos na Questão #22.c.*

Questão # 24: ______

Utilizando o resultado da Questão anterior, generalize as expressões que fornece a matriz de deformações em um problema 3D. Faça o mesmo para o vetor de rotações médias em relação aos três eixos Cartesianos.

Questão # 25: ______

Utilizando a definição de rotacional de um campo vetorial, obtenha a expressão para essa variável para um campo de deslocamentos genérico 3D. Compare esse resultado com as expressões para as rotações médias obtidas na Questão anterior e com parcela anti-simétrica do gradiente dos deslocamentos (Questão #22.c).

Questão # 26: ______

Aplique os resultados obtidos na Questão #23 ao campo de deslocamento fornecido na Questão #20, obtendo as deformações e a rotação média do ponto $\mathbf{x}_o$ *fornecido. Compare estes resultados com aqueles obtidos na Questão #21.*

Questão # 27: ______

Explique minuciosamente o que é material elástico, linear e isotrópico (MELI).

Questão # 28: ______

Obtenha a Lei de Hooke Generalizada (LHG) para um MELI.

Questão # 29: ______

Obtenha a forma inversa da equação obtida na Questão anterior.

Questão # 30: ______

Seja um MELI cujas propriedades materiais são:

módulo de elasticidade longitudinal: E = 208, GPa e

coeficiente de Poisson: $\nu = 0{,}30$.

Obtenha o tensor de deformações completo para os estados de tensões dados em:

a. $T = \begin{bmatrix} -20, & -60, & 40, \\ -60, & 60, & 15, \\ 40, & 15, & 40, \end{bmatrix} MPa$;

b. $T = \begin{bmatrix} -20, & -60, & 0, \\ -60, & 60, & 0, \\ 0, & 0, & 40, \end{bmatrix} MPa$;

c. $T = \begin{bmatrix} -30, & 0, & 0, \\ 0, & 40, & 0, \\ 0, & 0, & 70, \end{bmatrix} MPa$.

Questão # 31:

Partindo da questão #22.a, obtenha a parcela do vetor diferença de deslocamentos ($\delta\mathbf{u}$) que é somente na direção longitudinal ao filamento (na direção do versor que define sua direção). Denote essa grandeza escalar como δu_n. Observe que essa parcela representa o alongamento total do filamento. Assim:

a. *A partir desse valor e do comprimento total do filamento, obtenha a expressão que fornece a deformação longitudinal do filamento que está com uma inclinação θ qualquer. Denote-a ε_θ.*
b. *Aplique essa expressão aos filamentos nas duas direções Cartesianas (com vistas à validação do resultado).*

Questão # 32:

Pesquise na bibliografia e/ou internet e encontre as definições para extensometria e extensômetros elétricos (ou strain-gages) e rosetas. Mostre alguns tipos desses extensômetros e de rosetas.

Questão # 33:

Seja um componente mecânico submetido a vários esforços mecânicos e adequadamente vinculado no espaço. Em seu ponto crítico, é instalada uma roseta do tipo estrela, como mostrada na Figura abaixo. Após a leitura das deformações em cada extensômetro, obtenha:

a. *A matriz de deformações no plano tangente à superfície da peça;*
b. *A matriz de deformações completa (3D) no ponto;*
c. *A matriz de tensões completa no ponto;*
d. *As três tensões principais no ponto;*
e. *A tensão cisalhante máxima ($\tau_{máx}$).*

Deformações lidas nos extensômetros:

$\varepsilon_a = 10^{-3}$ mm/mm

$\varepsilon_b = -10^{-3}$ mm/mm

$\varepsilon_c = 2 \, . \, 10^{-3}$ mm/mm

Propriedades do material:

E = 208, GPa

$\nu = 0{,}30$