

CAPÍTULO 2

A EQUAÇÃO NÃO LINEAR

2.1. INTRODUÇÃO

Um dos maiores desafios para o engenheiro é a representação matemática de um sistema a ser analisado buscando obter a resposta do mesmo a um dado conjunto de parâmetros de projeto e operação. A quase totalidade dos sistemas físicos reais apresenta um comportamento não linear, portanto, devendo ser modelados matematicamente por equação ou sistema de equações não lineares. Observa-se também, que a equação ou sistema de equações resultantes, normalmente não possuem soluções analíticas. Assim, é necessário a busca de uma solução apropriada para o problema por algum método numérico.

O objetivo deste capítulo é o de apresentar alguns métodos numéricos para solução de uma equação algébrica não linear, portanto, da determinação do valor de uma incógnita. Inicialmente, apresenta-se a definição matemática de uma transformação linear. Uma transformação $T(\vec{x}) = \vec{b}$, onde \vec{b} é um vetor constante, tal que $\vec{x}, \vec{b} \in V$, é dita linear quando satisfaz os dois postulados a seguir:

$$i) T(\alpha\vec{x}) = \alpha T(\vec{x}), \alpha \in \mathfrak{R}, \vec{x} \in V \quad (2.1)$$

$$ii) T(\vec{x} + \vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y}), \vec{x}, \vec{y} \in V \quad (2.2)$$

Assim, se $T(\vec{x})$ não satisfizer os dois postulados das Eqs. (2.1) e (2.2), então, a transformação é dita não linear. Assim uma função $f(x)$ que admita uma transformação $f(x) = b$ linear é definida como uma função linear.

Outra forma de se expressar o conceito de função linear resulta da observação de uma taxa de variação em relação à variável independente x . Uma função é dita linear quando varia a uma taxa constante em relação à variável independente, conforme se segue:

a) Em um espaço unidimensional:

$$f'(x) = c, \text{ para } x, c \in \mathfrak{R} \quad (2.3)$$

onde c é uma constante.

b) Em um espaço n-dimensional:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = c_{ij}, \vec{x} \in \mathfrak{R}^n, i, j = 1, \dots, n \quad (2.4)$$

A Equação (2.4) define uma matriz de constantes $C = [c_{ij}]$.

No caso de uma equação algébrica construída com uma função unidimensional objetiva-se determinar o valor da incógnita x , tal que:

$$f(x) = 0 \quad (2.5)$$

No caso de $f(x)$ ser uma função não linear, a Eq. (2.5) é denominada equação não linear. A determinação do valor de x pra satisfazer a Eq. (2.5), i. e., a raiz da equação, normalmente é mais complexa analiticamente do que se $f(x)$ fosse uma função linear, ou até mesmo impossível de ser determinada analiticamente. Nestes casos, a Eq. (2.5) é usualmente denominada como equação **transcendental**. Caso a solução exista, a mesma deverá ser obtida de forma aproximada por um método numérico.

Os problemas não lineares em geral continuam a ser um grande desafio. Ainda hoje não há como se prever a existência da solução de uma equação não linear para todo $f(x)$. Assim, há vários métodos numéricos para a solução de equações não lineares que se comportam diferentemente conforme a definição de $f(x)$.

2.2. O MÉTODO DA BISSEÇÃO

O procedimento para busca da raiz ou solução da Eq.(2.5) pelo método da biseção pode ser entendido com o auxílio da Fig. 2.1. Neste exemplo, observa-se que $f(x)$ cruza o eixo x em um determinado ponto r , tal que $f(r) = 0$, portanto, a raiz da equação.

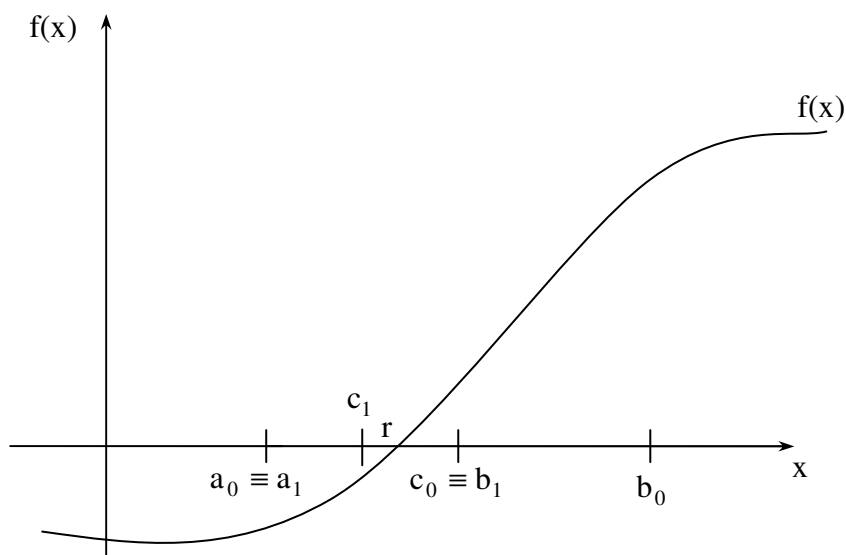


Figura 2.1 – Procedimento de busca da raiz de uma equação pelo método da biseção.

Assumindo que $\exists x$ tal que $f(x) = 0$, o procedimento se inicia com a estimativa de um intervalo $[a_0, b_0]$, tal que $x \in [a_0, b_0]$. Para tanto, o intervalo estimado $[a_0, b_0]$ deve ser tal que $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$, o que permite afirmar que $f(x)$ cruza o eixo x em algum $x \in [a_0, b_0]$, caso $f(x) \in C^0[a_0, b_0]$. Caso este critério não seja satisfeito, um novo intervalo deve ser estimado para que o procedimento seja iniciado. A seguir, o método estima que a provável localização da raiz seja o ponto médio do intervalo estimado, i. e., $c_0 = (a_0 + b_0)/2$. O valor c_0 encontrado deve ser verificado através do cálculo de $f(c_0)$, para avaliar se c_0 é uma aproximação aceitável ou não para a raiz r . Isto ocorrerá se $f(c_0) \cong 0$ o que indicaria que a raiz foi encontrada. Caso contrário, é necessário estimar em qual dos dois intervalos

metade $[a_0, c_0]$ e $[c_0, b_0]$ a raiz se encontra. Para tanto, verifica-se em que intervalo metade $f(x)$ muda de sinal, testando-se $f(a_0).f(c_0) < 0$, por exemplo. Se for verdadeiro, o intervalo novo a ser escolhido é $[a_1, b_1]$ onde $a_1 \equiv a_0$ e $b_1 \equiv c_0$, i. e., o intervalo da esquerda. Caso contrário, faz-se $a_1 \equiv c_0$ e $b_1 \equiv b_0$, i. e., o intervalo da direita. Na Figura 2.1, é mostrado o segundo intervalo a ser escolhido com o procedimento i.e., $[a_1, b_1]$, a partir do qual é calculado o ponto médio, $c_1 = (a_1 + b_1)/2$. O processo é então repetido até que $f(c_i) \cong 0$, i. e., na i -ésima iteração, indicando que c_i é uma raiz aproximada aceitável para a Eq. (2.5).

O algoritmo a seguir descreve o procedimento a ser implementado no computador. Um programa em linguagem FORTRAN foi escrito com base nesse algoritmo e incluído no CD que acompanha este livro.

Algoritmo do método da bisseção

```

Leia n, a, b, ε
u = f(a)
v = f(b)
d = u × v
se d > 0, então
    escreva “estime novo intervalo [a, b]”
    fim do programa
para k = 1 até n faça
    c = a + (b - a) / 2
    w = f(c)
    escreva k, w
    se |w| ≤ ε então
        escreva “a solução foi obtida na iteração k, a raiz é c, e f(c) = w”
    fim do programa
d = w × u
se d < 0 então
    b = c
    v = w
senão
    a = c
    u = w
fim do laço k
escreva “não convergiu em a iterações, obtendo c e f(c) na iteração n”
fim do programa

```

No algoritmo apresentado, verifica-se que foi utilizada a expressão $c = a + (b - a) / 2$ ao invés de $c = (a + b) / 2$ para evitar a possível perda de algarismos significativos quando $b \gg a$. Assim, o objetivo é o de buscar a adição de duas quantidades mais próximas, evitando erros de arredondamento que possam levar o resultado para fora do intervalo $[a, b]$ em uma máquina com precisão limitada, por exemplo.

Critérios de convergência

É necessário definir critérios de convergência (i. e., a solução numérica é satisfatória) ou de parada caso a solução aproximada não seja satisfatória. A seguir, são definidos dois critérios de convergência, baseados no erro relativo entre duas iterações sucessivas, e no módulo do valor da função avaliada no ponto médio do intervalo, bem como um critério de parada com base em um número máximo permitido de iterações especificado pelo usuário. São eles:

1. $|c_{n+1} - c_n| / |c_n| < \varepsilon_1$
 2. $f(c_n) < \varepsilon_2$
 3. $k \leq n$
- (2.6)

onde $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ são dois valores de tolerância pré-especificados, k é o contador de iterações, e n é o número máximo de iterações.

Análise de erro

Em um método iterativo qualquer, é importante avaliar a rapidez com que o método converge para a solução. A análise de erro, ou estimativa do erro absoluto do valor da variável calculado em cada iteração, permite essa avaliação.

No método da bisseção, a partir do intervalo inicial estimado $[a_0, b_0]$ que contenha a raiz r , criam-se as seguintes seqüências:

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq b_0$$

$$b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq a_0$$
(2.7)

que são estritamente crescente e decrescente, respectivamente, ambas limitadas, portanto, convergentes.

Para uma iteração $n \geq 0$, observa-se que:

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$$
(2.8)

Partindo de $n = 0$ e utilizando a Eq. (2.8), escreve-se para qualquer iteração $n \geq 1$:

$$b_n - a_n = 2^{-n}(b_0 - a_0)$$
(2.9)

Portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n}(b_0 - a_0) = 0$. Assim conclui-se que a raiz de $f(x) = 0$ será

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$
(2.10)

uma vez que, no limite $n \rightarrow \infty$, verifica-se que $0 \geq f(a_n)f(b_n) \Rightarrow 0 \geq (f(r))^2 \Rightarrow f(r) = 0$

Em um certo ponto n do processo iterativo, o intervalo considerado é $[a_n, b_n]$. A melhor estimativa para a raiz nesse ponto é o ponto médio do intervalo, conforme mostra a Fig. 2.2 e a equação a seguir:

$$c_n = (a_n + b_n) / 2 \quad (2.11)$$

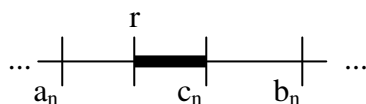


Figura 2.2 – Intervalo $[a_n, b_n]$ na n -ésima iteração do método da bisseção.

O erro absoluto na n -ésima iteração é, portanto, limitado por

$$e_n = |r - c_n| \leq \frac{1}{2} (b_n - a_n) = 2^{-(n+1)} (b_0 - a_0) \quad (2.12)$$

Dessa maneira, pode-se escrever

$$|r - c_n| \leq 2^{-(n+1)} (b_0 - a_0) \quad (2.13)$$

A equação (2.13) permite estabelecer que se existir pelo menos uma raiz para $f(x)$ no intervalo $[a_0, b_0]$, o método da bisseção apresenta convergência garantida, conseqüentemente, a partir de um certo valor de tolerância desejada, é possível determinar *a priori* o número de iterações necessárias para a convergência pelo método da bisseção.

Exemplo 2.1) assumindo que $\exists x \in [a_0, b_0]$ tal que $f(x) = 0$, determine o número de iterações necessárias para obter a solução com o método da bisseção, tal que $|r - c_n| \leq \epsilon$, $\epsilon \rightarrow 0$

Solução

$$|r - c_n| \leq 2^{-(n+1)} (b_0 - a_0) \leq \epsilon$$

$$\ln \{ 2^{-(n+1)} (b_0 - a_0) \} \leq \ln \epsilon$$

$$\ln 2^{-(n+1)} + \ln (b_0 - a_0) \leq \ln \epsilon$$

$$-(n+1) \ln 2 + \ln (b_0 - a_0) \leq \ln \epsilon$$

$$n \geq \frac{\ln (b_0 - a_0) - \ln \epsilon}{\ln 2} - 1$$

Comentário: observa-se que o número de iterações para a convergência é independente da função $f(x)$ considerada, dependendo apenas de $[a_0, b_0]$ e de ϵ .

A taxa de convergência do método da bisseção é avaliada, estimando os erros absolutos nas iterações n e $n + 1$ conforme se segue:

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= |r - c_{n+1}| \leq 2^{-(n+2)}(b_0 - a_0) \\ e_n &= |r - c_n| \leq 2^{-(n+1)}(b_0 - a_0) \end{aligned}$$

então, para um valor inteiro N suficientemente grande

$$e_{n+1} \leq \frac{1}{2} e_n \quad (n \geq N) \quad (2.14)$$

Assim, em acordo com a classificação de ordens de convergência de seqüências apresentada no Capítulo 1, o método da bisseção apresenta uma taxa de convergência **linear**.

2.3. O MÉTODO DE NEWTON

Considerando uma equação não linear $f(x) = 0$, e $f \in C^2[a, b]$, i. e. $\exists f''(x)$, tal que $x \in [a, b]$, então pelo teorema de Taylor, em torno de um ponto x próximo à raiz da equação, pode-se escrever:

$$0 = f(r) = f(x + h) = f(x) + hf'(x) + O(h^2) \quad (2.15)$$

onde $h = r - x$. Se $h \ll 1$, o termo $O(h^2)$ é desprezível em presença dos outros termos. Portanto, se x é uma aproximação para r , resulta que:

$$r \cong x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (2.16)$$

Baseado na Eq. (2.16), iniciando com x_0 para uma primeira aproximação da raiz de $f(x)$, escreve-se:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ &\vdots \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n \geq 0) \end{aligned} \quad (2.17)$$

que define a iteração de Newton.

Interpretação geométrica:

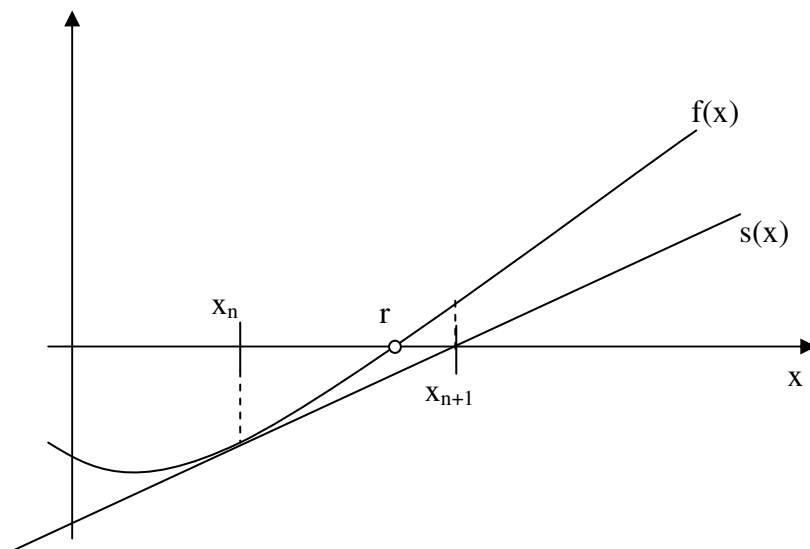


Figura 2.3 – Interpretação geométrica do método de Newton.

A equação da reta tangente à curva definida por $f(x)$ é:

$$s(x) - s(x_n) = f'(x_n)(x - x_n) \quad (2.18)$$

O ponto de interseção $x = x_{n+1}$ da reta $s(x)$ com o eixo x ocorre quando $s(x_{n+1}) = 0$. Assim, resulta a iteração de Newton a partir da Eq. (2.18), substituindo $s(x_{n+1}) = 0$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (2.19)$$

É importante destacar que *a priori* não há garantia de convergência para a solução, a partir de um valor inicial estimado x_0 . No entanto, de uma forma geral, pode-se afirmar que para haver convergência, x_0 deve ser suficientemente próximo de r .

Possíveis problemas

Vários problemas podem ser encontrados ao se realizar uma iteração de Newton. A Fig.2.4 destaca dois processos divergentes.

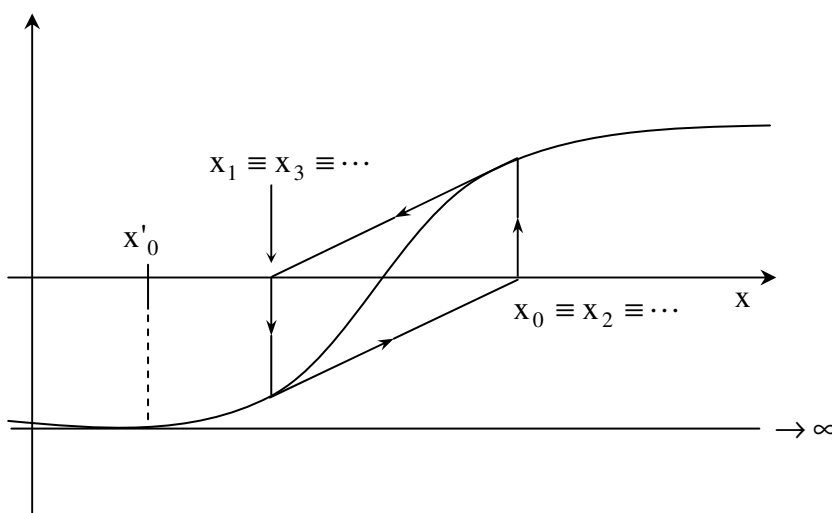


Figura 2.4 – Dois processos divergentes com a iteração de Newton.

A seqüência $[x_n]$ na Fig. 2.4 caracteriza uma iteração de Newton cíclica, comumente denominada de “histerese”. Ainda na Fig 2.4, verifica-se que a seqüência $[x'_n]$ diverge logo na primeira iteração.

Análise de erro

Considere a seqüência erro definida por:

$$e_n = x_n - r \quad (2.20)$$

onde não são considerados os erros de arredondamento unitário do computador.

Admitindo que f' é contínua, que r é raiz simples de f ($f(r) = 0$), e que $f'(r) \neq 0$, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= x_{n+1} - r = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - r \\ &= e_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{e_n f'(x_n) - f(x_n)}{f'(x_n)} \end{aligned} \quad (2.21)$$

A seguir, aproxima-se $f(r)$ por uma série de Taylor conforme se segue:

$$0 = f(r) = f(x_n - e_n) = f(x_n) - e_n f'(x_n) + \frac{1}{2} e_n^2 f''(\xi_n) \quad (2.22)$$

para ξ_n entre x_n e r . Portanto:

$$e_n f'(x_n) - f(x_n) = \frac{1}{2} f''(\xi_n) e_n^2 \quad (2.23)$$

Substituindo na Eq. (2.21) obtém-se :

$$e_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} e_n^2 \cong \frac{1}{2} \frac{f''(r)}{f'(r)} e_n^2 = C e_n^2 \quad (2.24)$$

onde C é uma constante não necessariamente menor do que 1.

A Equação (2.24) estabelece que a iteração de Newton apresenta uma ordem de convergência quadrática, segundo o critério de ordens de convergência de seqüências apresentado no capítulo 1. Observa-se que a precisão aproximadamente aumenta em 2 ordens de magnitude a cada iteração.

A Equação (2.24) também mostra uma condição suficiente para a iteração de Newton convergir, i. e., para uma iteração $n \geq N$, onde N é um inteiro positivo suficientemente grande:

$$e_{n+1} \leq C e_n^2 \quad (2.25)$$

Portanto, a iteração de Newton deve ser iniciada com uma estimativa para a raiz x_0 , tal que a Eq. (2.25) seja satisfeita. Assim, x_0 deve estar suficientemente próxima da raiz para haver convergência.

2.4. O MÉTODO DA SECANTE

A iteração de Newton definida pela Eq. (2.17) envolve a derivada da função f . Isso pode ser um problema se a derivada não existir ou for de difícil avaliação. Esta constatação motivou o desenvolvimento de um método que avalia aproximadamente $f'(x)$ a partir da diferença finita:

$$f'(x_n) \cong \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \quad (2.26)$$

Assim, estabelece-se o método da secante combinando as Eqs. (2.17) e (2.26), obtendo:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \left[\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \right] \quad (n \geq 1) \quad (2.27)$$

A iteração definida pela Eq. (2.27) necessita de duas estimativas para a raiz no início do processo. No entanto, a cada novo x_{n+1} passa a requerer somente uma nova avaliação de f .

A fórmula da secante, definida pela Eq. (2.27) pode também ser deduzida a partir de uma interpretação geométrica, de forma análoga ao método de Newton. Este assunto é tratado no problema proposto 2.1.

Análise de erro

Considerando o erro a cada iteração, definida pela Eq. (2.20), i. e., $e_n = x_n - r$, pode-se escrever para a iteração $n + 1$:

$$e_{n+1} = x_{n+1} - r = \frac{f(x_n)x_{n-1} - f(x_{n-1})x_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})} - r = \frac{f(x_n)e_{n-1} - f(x_{n-1})e_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \quad (2.28)$$

Fatorando e_{n-1} e multiplicando por $\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$, escreve-se:

$$e_{n+1} = \left[\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \right] \left[\frac{f(x_n)/e_n - f(x_{n-1})/e_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \right] e_n e_{n-1} \quad (2.29)$$

É importante lembrar que o objetivo da análise de erro é o de relacionar o erro em uma iteração posterior do processo, e_{n+1} , com o erro na iteração anterior, e_n . Portanto, ainda é necessário eliminar o termo e_{n-1} , bem como avaliar quantitativamente o conteúdo das expressões entre colchetes na Eq. (2.29). Para tanto, utiliza-se a seguinte série de Taylor:

$$f(x_n) = f(r + e_n) = f(r) + e_n f'(r) + \frac{1}{2} e_n^2 f''(r) + O(e_n^3)$$

mas $f(r) = 0$, então:

$$\frac{f(x_n)}{e_n} = f'(r) + \frac{1}{2} e_n f''(r) + O(e_n^2)$$

que também pode ser escrita para a iteração $n - 1$ como :

$$\frac{f(x_{n-1})}{e_{n-1}} = f'(r) + \frac{1}{2} e_{n-1} f''(r) + O(e_{n-1}^2)$$

Subtraindo a equação para a iteração $n - 1$ da equação para a iteração n , obtém-se:

$$\frac{f(x_n)}{e_n} - \frac{f(x_{n-1})}{e_{n-1}} = \frac{1}{2} (e_n - e_{n-1}) f''(r) + O(e_{n-1}^2)$$

mas $x_n - x_{n-1} = e_n - e_{n-1}$, portanto:

$$\frac{f(x_n)/e_n - f(x_{n-1})/e_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \approx \frac{1}{2} f''(r) \quad (2.30)$$

Além disso, a primeira expressão entre colchetes na Eq. (2.29) pode ser escrita como:

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \approx \frac{1}{f'(r)} \quad (2.31)$$

Assim, substituindo as Eqs. (2.30) e (2.31) na Eq. (2.29), obtém-se:

$$e_{n+1} \approx \frac{1}{2} \frac{f''(r)}{f'(r)} e_n e_{n-1} = C e_n e_{n-1} \quad (2.32)$$

reconhecendo $C = \frac{1}{2} \frac{f''(r)}{f'(r)}$ como um valor constante.

Portanto, para uma iteração convergente com o método da secante, para $n-1$ e n suficientemente grandes, tal que $(e_n, e_{n-1}) < 1$, pode-se afirmar que:

$$e_n < e_{n-1} \quad \text{e} \quad e_n e_{n-1} > e_n^2 \quad (2.33)$$

portanto, para $\alpha \in \mathbb{R}$, pode-se escrever que:

$$e_n e_{n-1} = e_n^\alpha \quad \text{e} \quad \alpha < 2 \quad (2.34)$$

A Equação (2.34) permite afirmar que o método da secante apresenta ordem de convergência α . Como $\alpha < 2$, o método da secante tem ordem de convergência superlinear.

Apesar do método da secante ter convergência mais lenta que o método de Newton (que apresenta ordem de convergência quadrática), o mesmo requer apenas uma avaliação da função em cada iteração. O método de Newton requer a avaliação da função e de sua derivada em cada iteração.

2.5. PONTOS FIXOS E ITERAÇÃO FUNCIONAL

Os métodos apresentados neste capítulo são procedimentos tais que uma seqüência de pontos é gerada na forma:

$$x_{n+1} = F(x_n) \quad (n \geq 0) \quad (2.35)$$

A Equação (2.35) pode gerar seqüências que não convergem. Por exemplo, se $x_0 = 1$ e $F(x) = 2x$, uma seqüência divergente é gerada. No entanto, deseja-se que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = s \quad (2.36)$$

Portanto, se F é contínua, observa-se que $F(s) = F\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = s$. Assim, $F(s) = s$, e s é denominado um **ponto fixo** de F .

Definição:

F mapeia um conjunto fechado $C \in \mathfrak{X}$ em si mesmo. Um mapeamento é dito “contrativo”, se $\exists \lambda < 1$, tal que:

$$|F(x) - F(y)| \leq \lambda |x - y| \quad (2.37)$$

A Figura 2.5 mostra graficamente o comportamento de uma função F que satisfaz a Eq. (2.37). observa-se que a distancia $\langle x, y \rangle$ é mapeada por F resultado em um valor menor, daí a denominação de função “contrativa” para F .

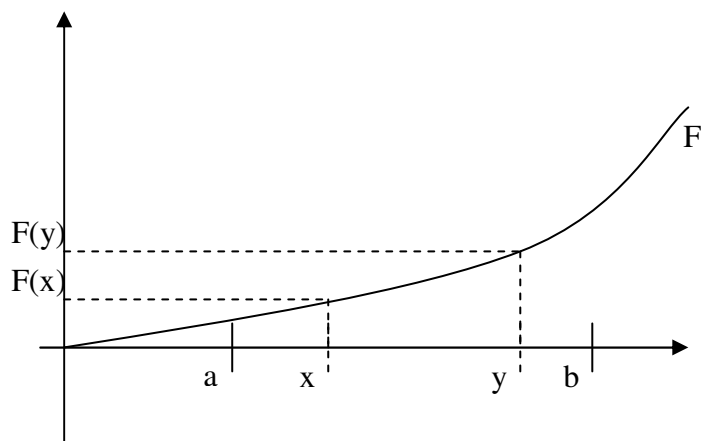


Figura 2.5 – Representação gráfica de um mapeamento contrativo F .

Exemplo 2.2) Ache a raiz da equação $f(x) = 0$.

Solução.

Seja $f(x) = 0$, ache x

Adicionando x a ambos os lados da equação, obtém-se:

$$x = x + f(x) = F(x)$$

o que sugere o processo iterativo

$$x_{n+1} = F(x_n) \quad \text{para } n \geq 0$$

Assim, para uma iteração convergente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = s$$

Portanto

$$s = F(s) = s + f(s)$$

Donde se conclui que

$$f(s) = 0 \Rightarrow s \text{ é a raiz de } f \text{ e ponto fixo de } F.$$

Teorema 2.1

Seja F um mapeamento contrativo de um conjunto fechado $C \subset \mathfrak{X}$ em C , então F tem um único ponto fixo. Este ponto fixo é o limite de toda seqüência obtida pela Eq. (2.35), $\forall x_0 \in C$.

Prova:

a) Existência:

i) Utilizando as Eqs. (2.35) e (2.37), escreve-se:

$$|x_n - x_{n-1}| = |F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})| \leq \lambda |x_{n-1} - x_{n-2}|, \text{ e}$$

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \lambda |x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \lambda^2 |x_{n-2} - x_{n-3}| \leq \dots \leq \lambda^{n-1} |x_1 - x_0|$$

ii) Seja o desenvolvimento:

$$x_n = x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1})$$

A seqüência $[x_n]$ convergirá se e somente se a série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_{n-1}) \text{ convergir.}$$

Pela desigualdade do triângulo, escreve-se:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_{n-1}) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - x_{n-1}|$$

Portanto, é suficiente provar que o termo do lado direito da inequação acima converge. De fato:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - x_{n-1}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} |x_1 - x_0| = \frac{1}{1-\lambda} |x_1 - x_0|$$

Como $\lambda < 1$ e $|x_1 - x_0|$ é finito, $\frac{1}{1-\lambda}$ representa a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita, de razão menor do que 1, portanto $[x_n]$ converge, daí:

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Rightarrow F(s) = s \quad (\text{ponto fixo})$$

b) Unicidade:

Suponha $x, y \in [a, b]$, então:

$$|x - y| = |F(x) - F(y)| \leq \lambda |x - y|$$

que, para ser verdade, com $\lambda < 1$, requer que:

$$|x - y| = 0 \Rightarrow x = y$$

Por último $s \in C$, porque $[x_n] \in C$.

Exemplo 2.3) Verifique se $F(x) = 8 - \frac{2}{5} \cos 2x$ é contrativa.

Solução:

Aplicando o teorema do valor médio (TVM), escreve-se:

$|F(x) - F(y)| = \frac{2}{5} |\cos 2x - \cos 2y| = \frac{4}{5} |\sin 2\xi| |x - y| \leq \frac{4}{5} |x - y|$, onde ξ está entre x e y . Como $\frac{4}{5} < 1$, $F(x)$ é contrativa e tem um ponto fixo.

Exemplo 2.4) Seja $p > 1$, qual é o valor de

$$x = \frac{1}{p + \frac{1}{p + \frac{1}{p + \dots}}} \quad ?$$

Solução:

Imagine a seqüência:

$$x_0 = \frac{1}{p}, \text{ tal que } x_{n+1} = \frac{1}{p + x_n}, n > 0$$

Observa-se que $x_n \rightarrow x$ para $n \rightarrow \infty$. Assim:

$$x = \frac{1}{p + x} = F(x)$$

Portanto:

$$px + x^2 = 1 \therefore x^2 + px - 1 = 0$$

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 + 4}}{2}$$

Como $p > 1 \Rightarrow x > 0$, então $x = \frac{-p + \sqrt{p^2 + 4}}{2}$

$F(x)$ é um mapeamento contrativo?

$$x_{n+1} = \frac{1}{p + x_n} = F(x_n) \therefore F(x) = \frac{1}{p + x}$$

Aplicando o teorema de valor médio:

$$|F(x) - F(y)| = \left| \frac{1}{p+x} - \frac{1}{p+y} \right| \stackrel{\text{TVM}}{=} \underbrace{\left| \frac{1}{(p+x)^2} \right|}_{F'(x)} |x - y|$$

$$\left| \frac{1}{(p+x)^2} \right| = \frac{1}{\left(\underbrace{\frac{p-p}{2}}_{p/2} + \frac{\sqrt{p^2+4}}{2} \right)^2}, \text{ e } p > 0$$

O conteúdo no interior dos parêntesis no denominador é maior do que 1, uma vez que $p/2 + \sqrt{p^2+4}/2 > 1$. Note que $\sqrt{p^2+4} > p$.

Assim, $\left| \frac{1}{(p+x)^2} \right| < 1 \Rightarrow F(x)$ é um mapeamento contrativo e a seqüência $[x_n]$ converge.

2.6. PROBLEMAS PROPOSTOS

2.1) Deduza a fórmula da secante apresentada na Eq. (2.27) utilizando conhecimentos de Geometria Analítica, com base na Fig. P2.1.

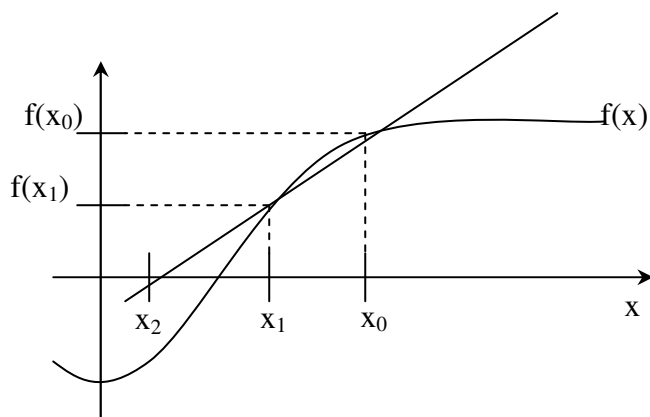


Figura P2.1 – Esquema gráfico para o método da secante.

2.2) Deduza a fórmula de recorrência do método da falsa posição, a partir da interpretação gráfica da Fig. P2.2 a seguir.

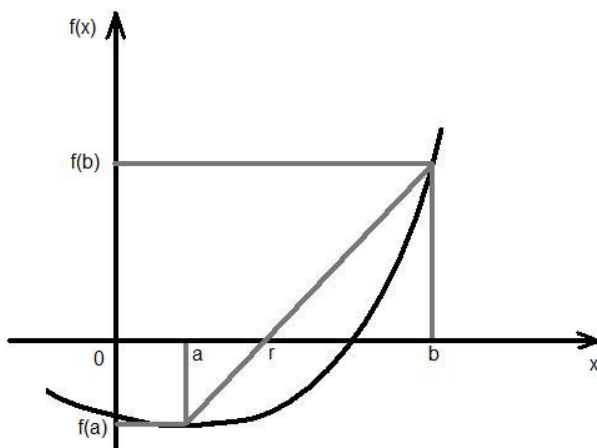


Figura P2.2 – Esquema gráfico para o método da falsa posição.

2.3) Encontre as raízes (zeros) das seguintes funções, nos intervalos dados, através dos métodos gráfico, da bisseção, da falsa posição, de Newton e da secante. Com base no resultado gráfico, determine intervalos para a possível solução, no caso do método da bisseção ou estimativa(s) inicial(is) para os métodos de Newton e da secante. Note que, para alguns casos, as funções tendem ao infinito para algum dos limites dos intervalos fornecidos. Empregue uma tolerância de 10^{-4} , para o erro relativo.

- a) $f(x) = x + \tan(x)$, $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$
 b) $f(x) = \frac{\text{sen}(x) + \cos(x)}{x^2}$, $(0; 2\pi)$
 c) $f(x) = e^x - \tan(x)$, $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$
 d) $f(x) = e^x \text{sen}(x) - x^2 + 4$; $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

2.4) Considere as seguintes funções. Ao se empregar o método da bisseção, para qual das raízes (zeros) o método conduzirá?

- a) $f(x) = (x - 4)^4(x - 3)(x + 2)$, para $[0; 5]$.
 b) $f(x) = (x - 1)^3(x - 2)(x - 3)$, para $[0; 5]$.
 c) $f(x) = (x - 1)^3(x - 2)(x - 3)$, para $[0; 3,2]$.

2.5) A determinação de raízes múltiplas (em especial, os casos de multiplicidade par) se constitui em um problema para a grande maioria dos métodos numéricos comumente empregados para definir “zeros” (raízes) de funções. No caso de raízes com multiplicidade par, o método da bisseção falha, uma vez que não ocorre variação do sinal da função em um intervalo de valores ao redor da raiz. Métodos como os de Newton e da secante, por sua vez, podem ser empregados com restrições, uma vez que tanto o valor da função quanto o da derivada tendem a zero nas proximidades da raiz, embora a função tenda a zero com maior rapidez que sua derivada. Deste modo, empregue os métodos de Newton e da secante para encontrar a raiz da seguinte função, $f(x) = (x - 2)^4$. Utilize como estimativa inicial $x_0 = 0$ para o método de Newton e $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$ para o método da secante.

2.6) Implemente um código computacional para encontrar a raiz da função $f(x) = (x - 1)^5$, empregando os métodos da bisseção, falsa posição, Newton-Raphson e secante. Empregue como intervalo inicial $[0; 3]$ para os métodos da bisseção e falsa posição; $x_0 = 3$ para Newton-Raphson e $x_0 = 0$ e $x_1 = 3$ no caso da secante. Utilize uma tolerância de 10^{-4} para o erro relativo. Qual dos métodos empregados apresenta convergência mais rápida? Por que isso ocorre?

2.7) Com o intuito de melhorar a taxa de convergência do método de Newton, para funções com raízes múltiplas, várias modificações foram propostas. As expressões resultantes de duas modificações, propostas por Ralston e Rabinowitz (1978), são apresentadas a seguir:

$$x_{i+1} = x_i - m \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

sendo m a multiplicidade da raiz; e

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)f'(x_i)}{[f'(x_i)]^2 - f(x_i)f''(x_i)}$$

Empregue ambas as expressões para as funções dadas nos exercícios 4 e 5, mantendo-se as mesmas estimativas iniciais. Compare os comportamentos obtidos.

2.8) Empregue os métodos da bisseção, falsa posição, Newton e secante para encontrar a raiz real da seguinte função: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x - 20$. Para os métodos da bisseção e da falsa posição, empregue $[3; 6]$ como intervalo inicial. Para o método de Newton, utilize como estimativa inicial $x_0 = 3$ e, para o método da secante, as estimativas iniciais $x_0 = 3$ e $x_1 = 6$. Para a função fornecida, a raiz exata procurada é $x_r = 5$. De posse desse fato e de que, para um determinado método, sua ordem de convergência pode ser estimada através da expressão

$$p \approx \frac{\log \left| \frac{e_{k+1}}{e_k} \right|}{\log \left| \frac{e_k}{e_{k-1}} \right|}$$

onde o erro na k -ésima iteração (e_k) é dado por:

$$e_k = x_k - x_r$$

estime, também, as ordens de convergência para os métodos empregados. Sugestão: para a estimativa das ordens de convergência, implemente códigos computacionais, empregando precisão dupla (ou superior).

2.9) Com base na expressão apresentada no exercício 7, calcule o comportamento das ordens de convergência dos métodos da Bisseção, da Falsa Posição, de Newton e da Secante para a função $f(x) = (x - 1)^5$, apresentada no exercício 6, com as mesmas estimativas e intervalos iniciais, bem como a mesma tolerância.

2.10) escoamentos compressíveis são encontrados em vários problemas de engenharia aeroespacial, em virtude das altas velocidades alcançadas. Eles devem ser levados em conta, por exemplo, no projeto aerodinâmico de estruturas de aviões e foguetes, uma vez que em ambos os casos têm-se números de Mach superiores a 0,3, podendo, em alguns casos, alcançar valores superiores à unidade (escoamentos supersônicos). Uma idealização bastante útil para estudos iniciais de escoamentos compressíveis é o estudo do escoamento isentrópico unidimensional em bocais do tipo convergente-divergente (Bocal de Laval). Para tanto, considera-se que um gás monoespécie com propriedades constantes escoar através de um bocal convergente-divergente, apresentando aceleração ao longo do escoamento, com regimes de velocidades sub, trans e supersônicas ao longo do bocal. Neste caso, são obtidas as seguintes equações para a determinação das propriedades do escoamento:

$$p = p_0 \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{1-k}}$$

$$T = T_0 \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{-1}$$

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{1-k}}$$

$$\left(\frac{A}{A_c}\right)^2 = \frac{1}{M^2} \left[\frac{2}{k+1} \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \right]^{(k+1)/(k-1)}$$

sendo: p a pressão; T a temperatura; ρ a massa específica; M o número de Mach; k a razão entre calores específicos a pressão e a volume constantes; A a área da seção transversal do bocal; A_c a área crítica (seção transversal na estricção ou garganta do bocal); e os índices 0 indicando propriedades de estagnação, previamente conhecidos. Nota-se que, determinado o número de Mach, todas as propriedades podem ser calculadas a partir de valores previamente conhecidos. O número de Mach, por sua vez, pode ser obtido através da última expressão, uma vez que sejam conhecidas as áreas das seções transversais referentes ao escoamento e à garganta do bocal (região de menor área). Graficamente, pode-se observar que, para uma dada razão entre áreas, existem duas possibilidades de números de Mach – uma, associada a um escoamento subsônico e a outra, referente a um escoamento supersônico. Neste caso, o escoamento subsônico estará associado aos pontos a montante (anteriores) à garganta do bocal e o escoamento supersônico estará localizado a jusante (pontos posteriores) à garganta. Suponha que, para o raio de um determinado bocal seja definido pela seguinte função:

$$r(x) = \begin{cases} 0,2, & \text{se } x \leq 0,1 \text{ m} \\ 0,15 + 0,05 \cos \left[\frac{(x - 0,1)\pi}{0,3} \right], & \text{se } 0,1 < x \leq 0,4 \\ 0,1 + (x - 0,4) \tan \left(\frac{\pi}{12} \right), & \text{se } 0,4 < x \leq 1 \end{cases}$$

e que escoando por esse bocal seja empregado ar (modelado como um gás monoespécie), com as seguintes propriedades constantes: $k = 1,40$; $R = 287 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$; $T_0 = 2000 \text{ K}$; $p_0 = 2 \text{ MPa}$; $\rho_0 = 3,48432 \text{ kg/m}^3$. Plote gráficos com a variação do número de Mach, temperatura e pressão ao longo do eixo de simetria do bocal. Utilize passos no eixo das abscissas iguais a 0,05.

2.11) A transferência de calor em regime transiente em uma parede plana, sem geração de calor, sujeita a convecção em suas duas superfícies pode ser modelada através da seguinte equação:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

sendo α a difusividade térmica do material (considerada constante neste caso), T a temperatura, x a coordenada espacial e t o tempo. A solução exata de tal equação diferencial tem como resultado a seguinte expressão:

$$\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-\zeta_n^2 \cdot Fo) \cos\left(\zeta_n \frac{x}{L}\right)$$

onde: T_i é a temperatura inicial da parede (considerada constante), T_∞ é a temperatura do fluido em contato com as duas superfícies da parede, Fo representa o tempo adimensionalizado, x é a posição do ponto em que se deseja obter a temperatura, avaliada a partir do centro (linha de simetria) da parede, L é a semi-espessura da parede, e

$$C_n = \frac{4 \text{sen}(\zeta_n)}{2\zeta_n + \text{sen}(2\zeta_n)}$$

sendo ζ_n correspondente às raízes positivas da equação transcendental

$$\zeta_n \tan(\zeta_n) = Bi$$

na qual Bi refere-se ao número de Biot, que pode ser entendido como uma razão entre as resistências térmicas de condução no interior do sólido (parede) e de convecção através da camada-limite do fluido. Calcule os quatro primeiros valores não-nulos de ζ_n em função de diversos números de Biot, iniciando com $Bi=0$ até $Bi = 2$, com passo de 0,1.