

# TM 332 - Estática II

Emílio Eiji Kavamura, MSc

Departamento de Engenharia Mecânica  
UFPR

TM-332, 2012



## Roteiro da aula

Centróides e Baricentros

Formas Compostas

Centros de Massa Tabelados

Teorema de Pappus-Guldin

Momento de Inércia

Momento Polar de Inércia

Raio de Giração

Translação de Eixos de Inércia (TEOREMA DE STEINER)

Exercícios

Momentos de Inércia de Superfícies Compostas

Exercícios

Tarefa Mínima

Produto de Inércia

Eixos rotacionados

Tarefa Mínima

Trabalho



# TÓPICOS

## Centróides e Baricentros

Formas Compostas

Centros de Massa Tabelados

Teorema de Pappus-Guldin

Momento de Inércia

Momento Polar de Inércia

Raio de Giração

Translação de Eixos de Inércia (TEOREMA DE STEINER)

Exercícios

Momentos de Inércia de Superfícies Compostas

Exercícios

Tarefa Mínima

Produto de Inércia

Eixos rotacionados

Tarefa Mínima

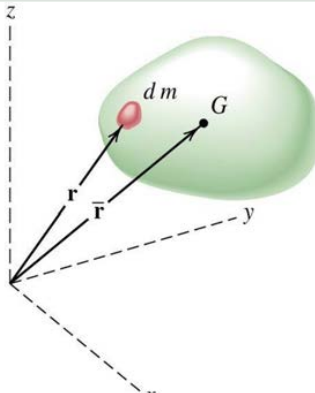
Trabalho



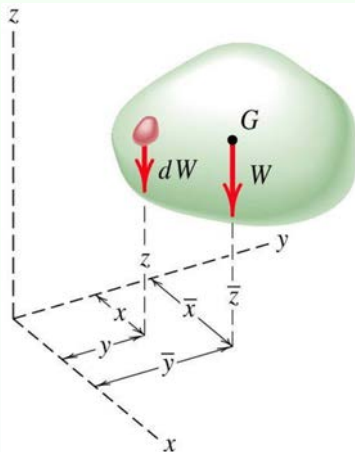
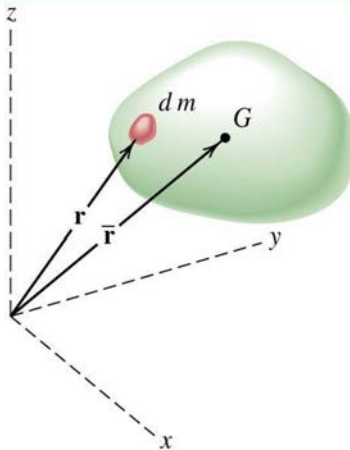
## Definição

### Centro de gravidade (baricentro) de um corpo rígido

É o ponto **G** onde uma única força equivalente **W**, chamada peso do corpo, pode ser aplicada para representar o efeito da atração exercida pela Terra no corpo.

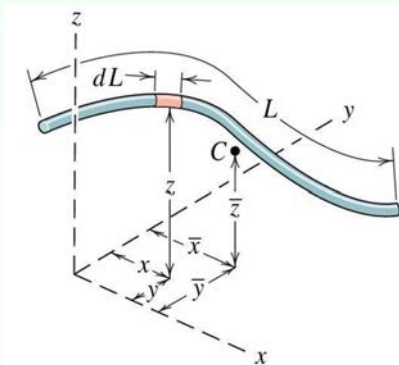


## Definição

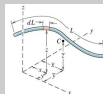


$$d\vec{W} = -d(mg)\hat{k} \rightsquigarrow \begin{cases} \bar{X} = \frac{\int x d(mg)}{mg} \\ \bar{Y} = \frac{\int y d(mg)}{mg} \end{cases}$$

## Definição

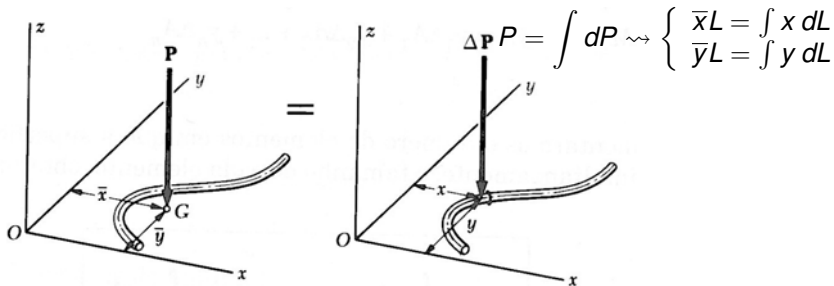


$$d\vec{W} = -d(mg) = -g\rho A dl \hat{k} \rightsquigarrow \begin{cases} \bar{X} = \frac{\int x dl}{l} \\ \bar{Y} = \frac{\int y dl}{l} \\ \bar{Z} = \frac{\int z dl}{l} \end{cases}$$



$$d\bar{W} = -d(mg) = -g_0 A d\bar{k} \rightsquigarrow \begin{cases} \bar{x} = \int x dL \\ \bar{y} = \int y dL \\ \bar{z} = \int z dL \end{cases}$$

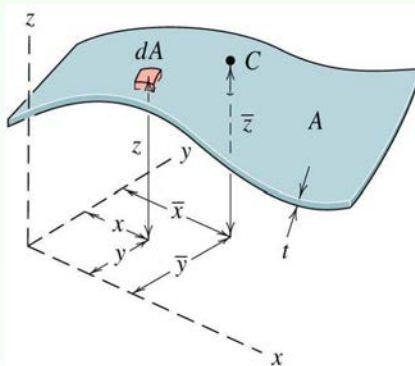
A determinação do centro de gravidade de um **fio homogêneo de seção transversal uniforme** contido em um plano reduz-se à determinação do centróide  $C$  da linha  $L$  que representa o fio; nós temos:



$$\Sigma M_y = \bar{x}P = \Sigma x \Delta P$$

$$\Sigma M_x = \bar{y}P = \Sigma y \Delta P$$

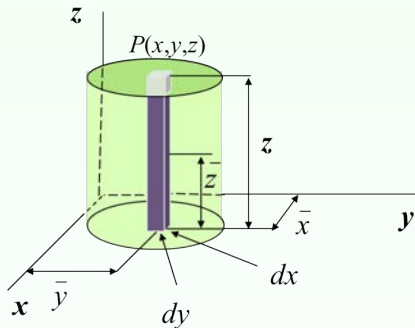
## Definição



$$d\vec{W} = -d(mg)\hat{k} = -g\rho t dA\hat{k} \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{X} = \frac{\int x dA}{A} \\ \bar{y} = \frac{\int y dA}{A} \\ \bar{Z} = \frac{\int z dA}{A} \end{array} \right.$$



## Definição

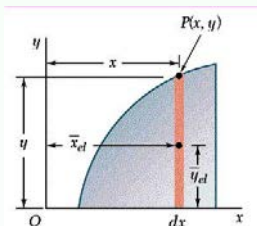


$$d\vec{W} = -d(mg)\hat{k} = -g\rho dV\hat{k} \rightsquigarrow \begin{cases} \bar{X} = \frac{\int x dV}{V} \\ \bar{Y} = \frac{\int y dV}{V} \\ \bar{Z} = \frac{\int z dV}{V} \end{cases}$$

## Para figuras Planas

$$\bar{x}A = \int x_{el} dA \rightsquigarrow \bar{x} = \frac{\int x_{el} dA}{A}$$

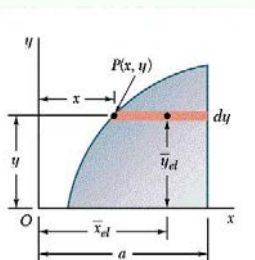
$$\bar{y}A = \int y_{el} dA \rightsquigarrow \bar{y} = \frac{\int y_{el} dA}{A}$$



$$\bar{x}_{el} = x$$

$$\bar{y}_{el} = y/2$$

$$dA = y dx$$



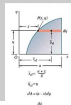
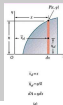
$$\bar{x}_{el} = \frac{a+x}{2}$$

$$\bar{y}_{el} = y$$

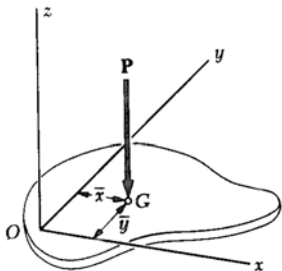
$$dA = (a-x) dy$$

$$\bar{x}A = \int x_w dA \Rightarrow \bar{x} = \frac{\int x_w dA}{A}$$

$$\bar{y}A = \int y_w dA \Rightarrow \bar{y} = \frac{\int y_w dA}{A}$$



Considere corpos bidimensionais, tais como **placas lisas e fios** contidos no plano  $xy$ . Adicionando forças no sentido vertical de  $z$  e os momentos sobre os eixos horizontais  $y$  e  $x$ , as seguintes relações são obtidas:



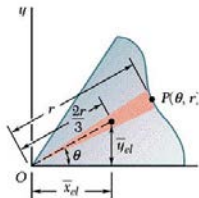
$$P = \int dP \rightsquigarrow \begin{cases} \bar{x}P = \int x dP \\ \bar{y}P = \int y dP \end{cases}$$

as quais definem o peso do corpo e as coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  de seu centro de gravidade.

## Para figuras Planas

$$\bar{x}A = \int x_{el} dA \rightsquigarrow \bar{x} = \frac{\int x_{el} dA}{A}$$

$$\bar{y}A = \int y_{el} dA \rightsquigarrow \bar{y} = \frac{\int y_{el} dA}{A}$$



$$\bar{x}_{el} = \frac{2r}{3} \cos \theta$$

$$\bar{y}_{el} = \frac{2r}{3} \sin \theta$$

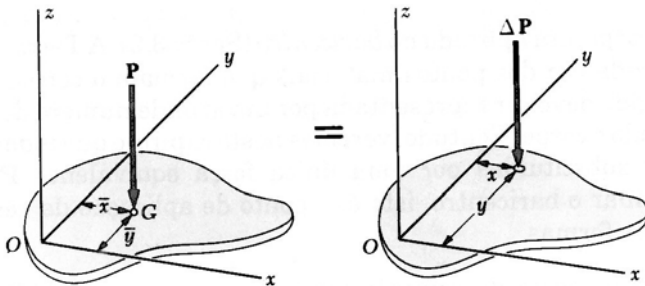
$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

$$\bar{x}A = \int x_c dA \rightarrow \bar{x} = \frac{\int x_c dA}{A}$$

$$\bar{y}A = \int y_c dA \rightarrow \bar{y} = \frac{\int y_c dA}{A}$$



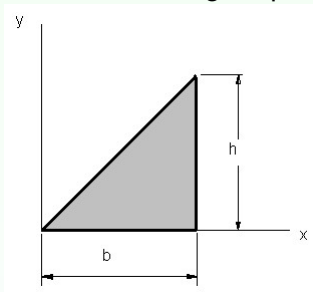
Para uma **placa lisa homogênea de espessura uniforme**, o centro de gravidade  $G$  da placa coincide com o centróide  $C$  da área  $A$  da placa.



$$\Sigma M_y = \bar{x}P = \Sigma x\Delta P$$

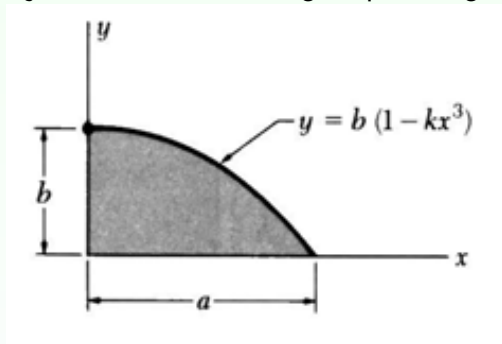
$$\Sigma M_x = \bar{y}P = \Sigma y\Delta P$$

Determine a posição do centróide da figura por integração



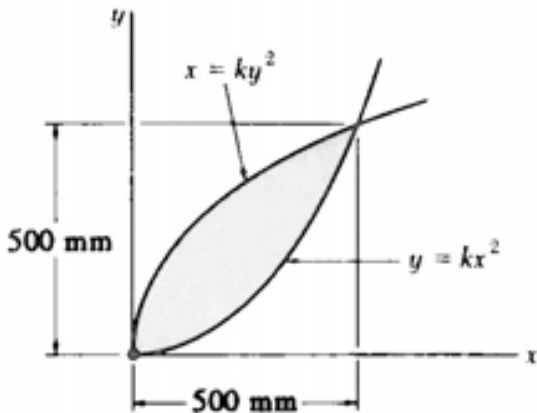
Resolução

Determine a posição do centróide da figura por integração



Resolução

Determine a posição do centróide da figura por integração



Resolução



# TÓPICOS

Centróides e Baricentros

**Formas Compostas**

Centros de Massa Tabelados

Teorema de Pappus-Guldin

Momento de Inércia

Momento Polar de Inércia

Raio de Giração

Translação de Eixos de Inércia (TEOREMA DE STEINER)

Exercícios

Momentos de Inércia de Superfícies Compostas

Exercícios

Tarefa Mínima

Produto de Inércia

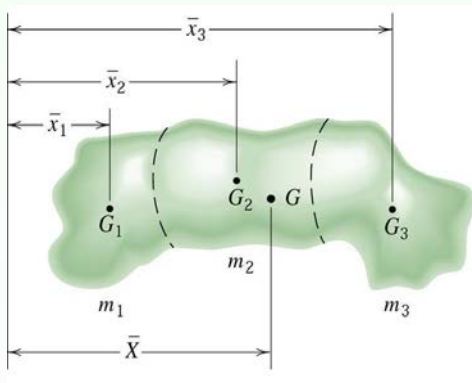
Eixos rotacionados

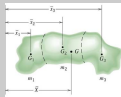
Tarefa Mínima

Trabalho

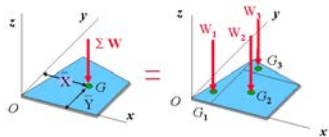


## Formas Compostas





## Centróides de Placas Compostas



As áreas e os centróide de várias formas comuns são tabeladas.

Quando uma placa lisa pode ser dividida em diversas formas comuns, as coordenadas  $\bar{X}$  e  $\bar{Y}$  de seu centro de gravidade  $G$  podem ser determinadas pelas coordenadas  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots$  e  $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots$  dos centros de gravidade das formas básicas que compõem a área.

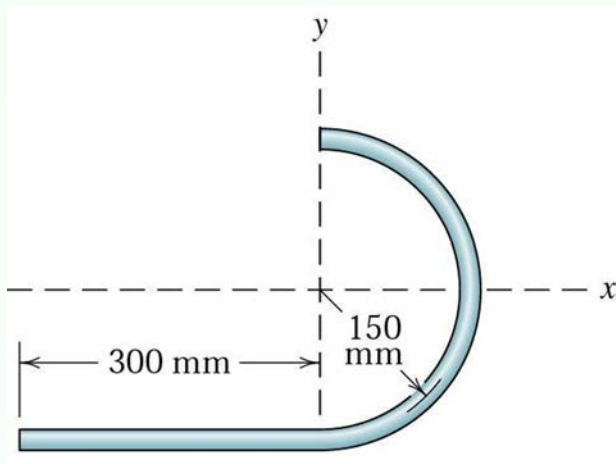
Neste caso,

$$\begin{cases} \bar{X} \sum W = \sum \bar{x}_i W_i \\ \bar{Y} \sum W = \sum \bar{y}_i W_i \end{cases}$$

Se a placa for homogênea e da espessura uniforme, seu centro de gravidade coincide com o centróide  $C$  da área da placa, e os Momentos de Primeira Ordem da área composta são

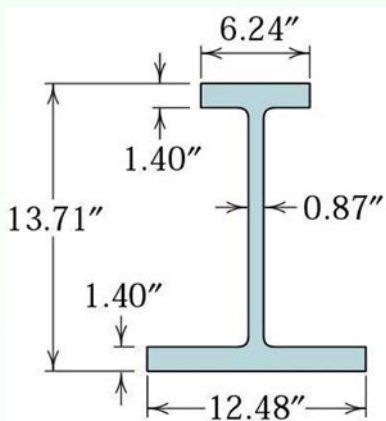
$$\begin{cases} Q_y = \bar{X} \sum A = \sum \bar{x} A \\ Q_x = \bar{Y} \sum A = \sum \bar{y} A \end{cases}$$

# Formas Compostas



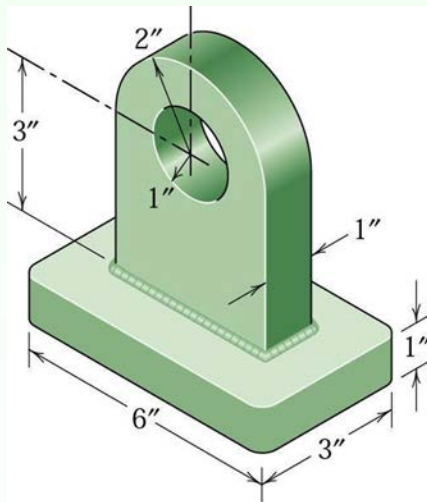
Resolução

## Formas Compostas



Resolução

# Formas Compostas



Resolução

# TÓPICOS

Centróides e Baricentros

Formas Compostas

**Centros de Massa Tabelados**

Teorema de Pappus-Guldin

Momento de Inércia

Momento Polar de Inércia

Raio de Giração

Translação de Eixos de Inércia (TEOREMA DE STEINER)

Exercícios

Momentos de Inércia de Superfícies Compostas

Exercícios

Tarefa Mínima

Produto de Inércia

Eixos rotacionados

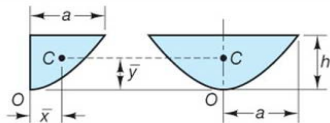
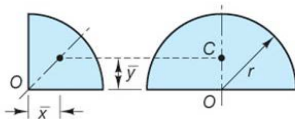
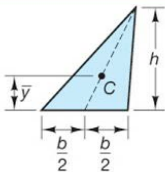
Tarefa Mínima

Trabalho



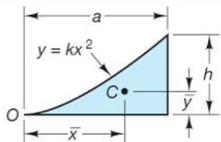
Table 5.2 Centroids of Common Shapes

Shape	$\bar{x}$	$\bar{y}$	Area
Triangular area		$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Quarter-circular area	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Semicircular area	0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Semiparabolic area	$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Parabolic area	0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$





Parabolic spandrel

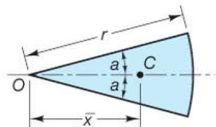


$\frac{3a}{4}$

$\frac{3h}{10}$

$\frac{ah}{3}$

Circular sector

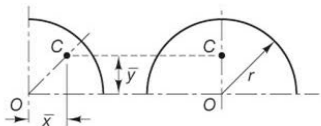


$\frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}$

0

$\alpha r^2$

Quarter-circular arc

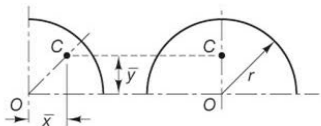


$\frac{2r}{\pi}$

$\frac{2r}{\pi}$

$\frac{\pi r}{2}$

Semicircular arc

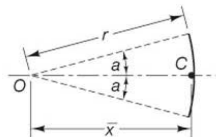


0

$\frac{2r}{9}$

$\pi r$

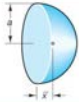
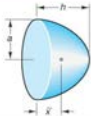
Arc of circle

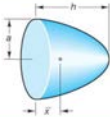
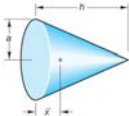
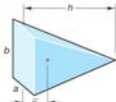


$\frac{r \sin \alpha}{\alpha}$

0

$2\alpha r$

Shape	$\bar{x}$	Volume
Hemisphere		$\frac{3a}{8}$ $\frac{2}{3}\pi a^3$
Semiellipsoid of revolution		$\frac{3h}{8}$ $\frac{2}{3}\pi a^2 h$

Paraboloid of revolution		$\frac{h}{3}$ $\frac{1}{2}\pi a^2 h$
Cone		$\frac{h}{4}$ $\frac{1}{3}\pi a^2 h$
Pyramid		$\frac{h}{4}$ $\frac{1}{3}abb$

# TÓPICOS

Centróides e Baricentros

Formas Compostas

Centros de Massa Tabelados

**Teorema de Pappus-Guldin**

Momento de Inércia

Momento Polar de Inércia

Raio de Giração

Translação de Eixos de Inércia (TEOREMA DE STEINER)

Exercícios

Momentos de Inércia de Superfícies Compostas

Exercícios

Tarefa Mínima

Produto de Inércia

Eixos rotacionados

Tarefa Mínima

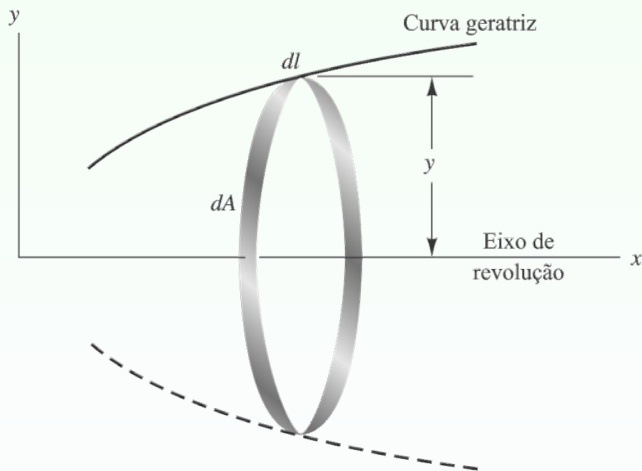
Trabalho



O **Teorema de Pappus-Guldin** permite determinar a área de uma superfície de revolução ou o volume de um corpo de revolução.

A área  $A$  da superfície gerada pela rotação de uma curva de comprimento  $L$  sobre um eixo fixo é dada por:

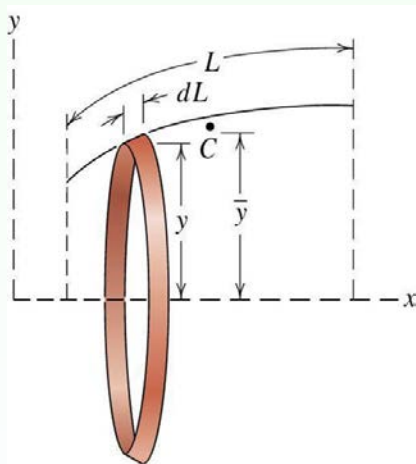
$$A = 2 \pi \bar{y} L$$



onde  $\bar{y}$  representa a distância do centróide  $C$  até o eixo de revolução  $x$ .

A área  $A$  da superfície gerada pela rotação de uma curva de comprimento  $L$  sobre um eixo fixo é dada por:

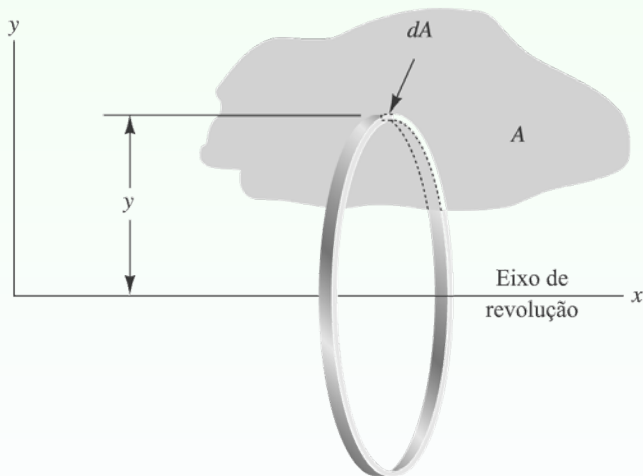
$$A = 2 \pi \bar{y} L$$



onde  $\bar{y}$  representa a distância do centróide  $C$  até o eixo de revolução  $x$ .

O volume  $V$  do corpo gerado pela rotação de uma área  $A$  sobre um eixo fixo é dada por:

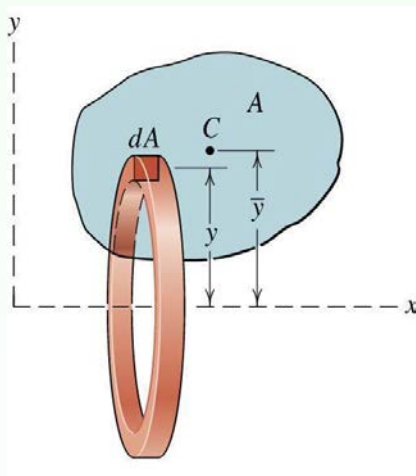
$$V = 2 \pi \bar{y} A$$



onde  $\bar{y}$  é a distância do centróide  $C$  da área até o eixo de revolução  $x$ .

O volume  $V$  do corpo gerado pela rotação de uma área  $A$  sobre um eixo fixo é dada por:

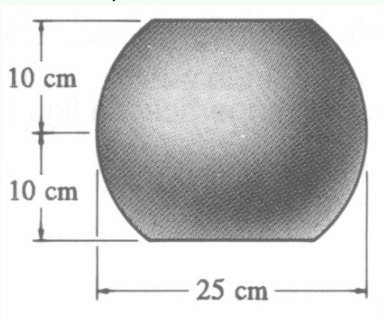
$$V = 2 \pi \bar{y} A$$



onde  $\bar{y}$  é a distância do centróide  $C$  da área até o eixo de revolução  $x$ .

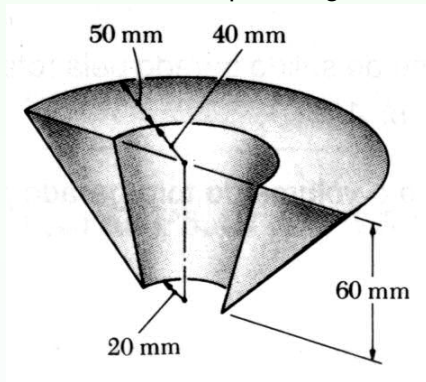


Sabendo que duas calotas iguais foram cortadas de uma esfera de madeira de 25 cm de diâmetro, determine a área total da parte

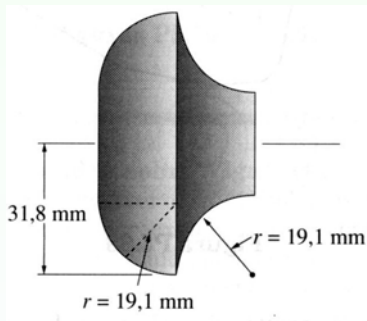


resultante.

Determine o volume e a área do corpo da figura.



Determine o volume e o peso do botão sólido de bronze da figura. (O peso específico do bronze é  $83,0 \cdot 10^3 \text{ N/m}^3$ ).



## MOMENTOS DE ÁREA DE PRIMEIRA ORDEM

As coordenadas do centróide são definidas pelas relações:

$$\bar{x}A = \int x dA \quad \bar{y}A = \int y dA$$

### Momentos de Primeira Ordem da Área A

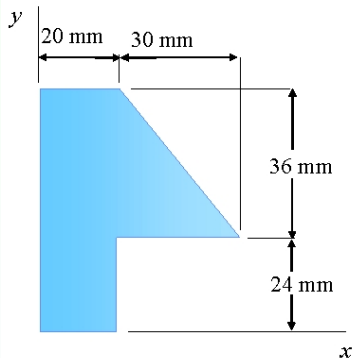
são estas integrais apresentadas acima, e denotadas por  $Q_y$  e  $Q_x$ ,

$$Q_y = \bar{x}A \text{ em relação ao eixo } y$$

$$Q_x = \bar{y}A \text{ em relação ao eixo } x$$

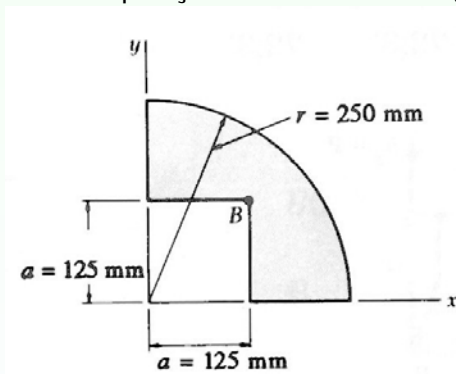
## Tarefa mínima

Determine a posição do centróide da figura



## Tarefa mínima

Determine a posição do centróide da figura



# Tarefa mínima

- ▶ Resolver os exercícios

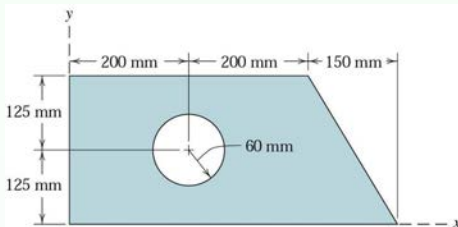
- ▶ 9.5,
- ▶ 9.18,
- ▶ 9.35,
- ▶ 9.11,
- ▶ 9.49,
- ▶ 9.89 e
- ▶ 9.100.

- ▶ Fazer os exercícios propostos:

- ▶ 9.124;
- ▶ 9.126;
- ▶ 9.129;

## EXTRAS

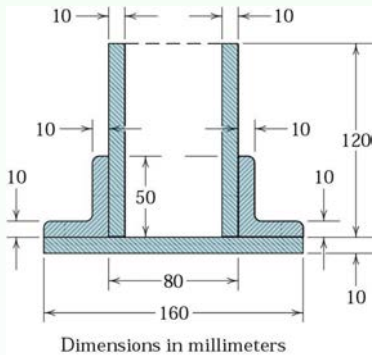
Determine o centróide das figuras:





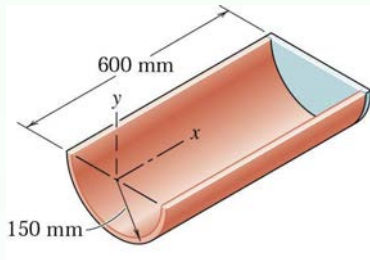
## EXTRAS

Determine o centróide das figuras:



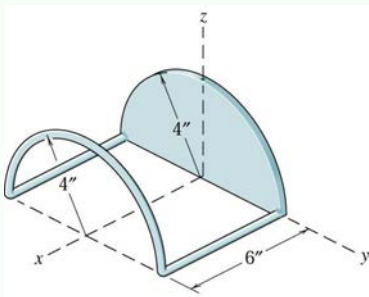
## EXTRAS

Determine o centróide das figuras:



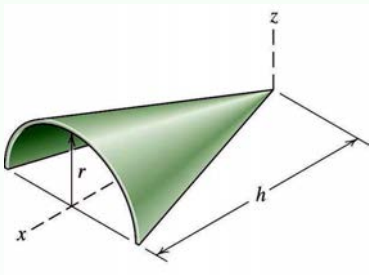
## EXTRAS

Determine o centróide das figuras:



## EXTRAS

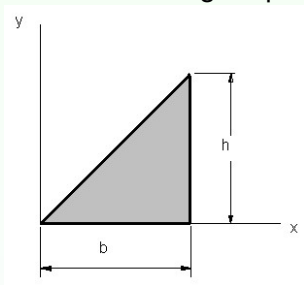
Determine o centróide das figuras:



## RESOLUÇÃO

## Resolução

Determine a posição do centróide da figura por integração

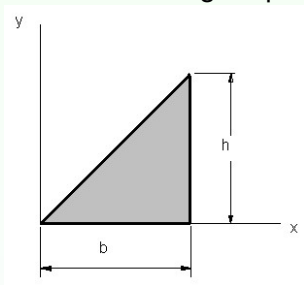


$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{A} \rightsquigarrow \bar{x} = \frac{\int x \overbrace{x \frac{h}{a} dx}^{dA}}{A} = \frac{\frac{b^2 h}{3}}{\frac{bh}{2}} = \frac{2}{3} b$$

## RESOLUÇÃO

## Resolução

Determine a posição do centróide da figura por integração



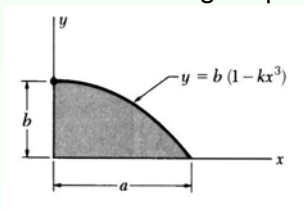
$$\bar{y} = \frac{\int y \, dA}{A} \rightsquigarrow \bar{y} = \frac{\int y \overbrace{(b-x)}^{dA} dy}{A} = \frac{\frac{b h^2}{6}}{\frac{bh}{2}} = \frac{1}{3} h.$$

Próximo exercício

## RESOLUÇÃO

## Resolução

Determine a posição do centróide da figura por integração

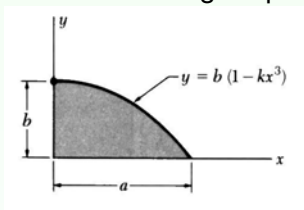


$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{A} \rightsquigarrow \bar{x} = \frac{\int_0^a x \overbrace{b(1 - kx^3) dx}^{dA}}{\int_0^a b(1 - kx^3) dx} = \frac{\frac{a^2 b}{2} - \frac{a^5 b k}{5}}{-\frac{ab(a^3 k - 4)}{4}} = \frac{4a}{5} + \frac{6a}{5a^3 k - 4a^3}$$

## RESOLUÇÃO

## Resolução

Determine a posição do centróide da figura por integração



$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{\int y \, dA}{A} \rightsquigarrow \bar{y} = \frac{\int y \overbrace{x \, dy}^{dA}}{A} = \frac{\int_0^a (b(1 - kx^3)) \cdot x \cdot (-3bx^2) \, dx}{-\frac{ab(a^3k - 4)}{4}} \\ &= -\frac{3a^3b(4a^3k - 7)}{7(a^3k - 4)} \end{aligned}$$

Próximo exercício

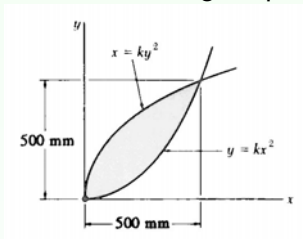




## RESOLUÇÃO

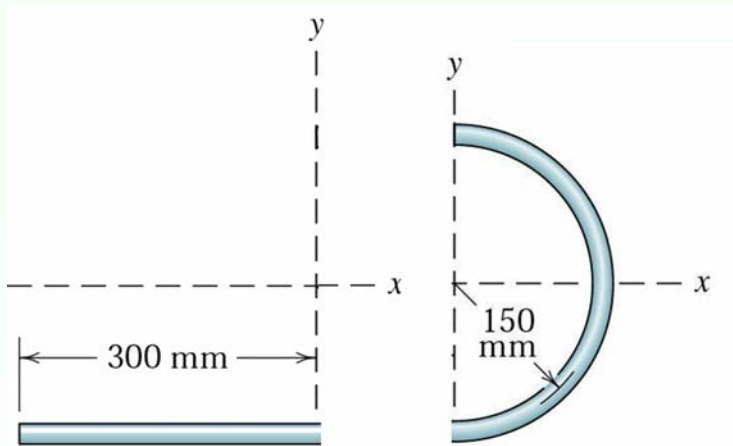
## Resolução

Determine a posição do centróide da figura por integração



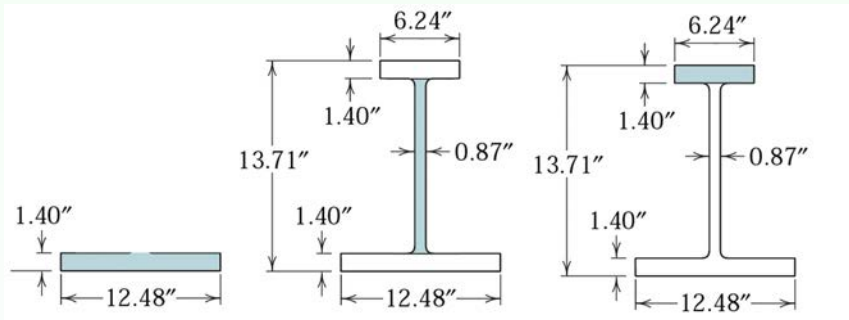
$$\bar{y} = \frac{\int y \, dA}{A} \rightsquigarrow \bar{y} = \frac{\int_0^{0.5} y \left( \sqrt{\frac{y}{k}} - ky^2 \right) dy}{\int_0^{0.5} \left( \sqrt{\frac{y}{k}} - ky^2 \right) dy} = \frac{\frac{k}{32} - \frac{\sqrt{\frac{2}{k}}}{10}}{\frac{k}{12} - \frac{\sqrt{\frac{2}{k}}}{3}}$$

## RESOLUÇÃO



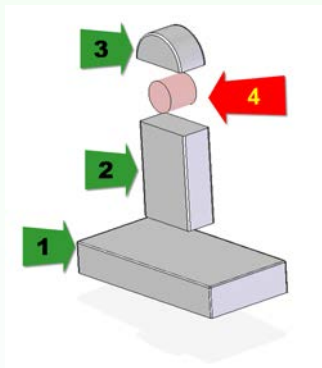
Próximo exercício

## RESOLUÇÃO



Próximo exercício

## RESOLUÇÃO



$$\vec{r}_{CM} = \frac{\vec{r}_1 \cdot V_1 + \vec{r}_2 \cdot V_2 + \vec{r}_3 \cdot V_3 - \vec{r}_4 \cdot V_4}{V_1 + V_2 + V_3 - V_4}$$

Tabelados

# TÓPICOS

Centróides e Baricentros

Formas Compostas

Centros de Massa Tabelados

Teorema de Pappus-Guldin

**Momento de Inércia**

Momento Polar de Inércia

Raio de Giração

Translação de Eixos de Inércia (TEOREMA DE STEINER)

Exercícios

Momentos de Inércia de Superfícies Compostas

Exercícios

Tarefa Mínima

Produto de Inércia

Eixos rotacionados

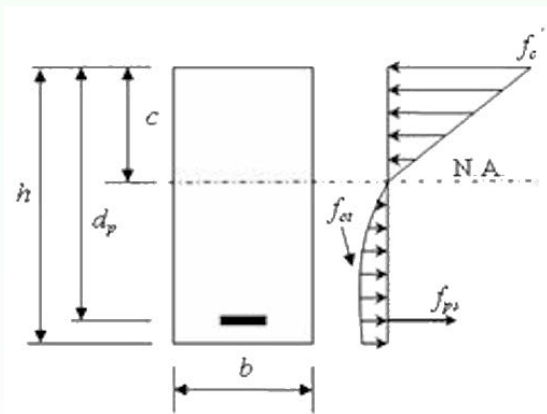
Tarefa Mínima

Trabalho



## Momento de Inércia

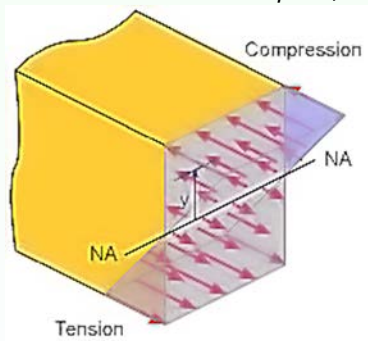
O momento de inércia de uma área tem origem nos casos em que devemos calcular o momento de uma carga distribuída que varia em relação a um eixo.



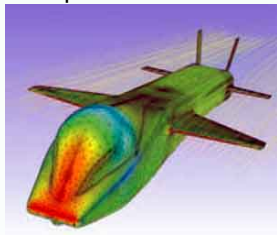
# Momento de Inércia

Exemplos clássicos podem ser encontrados :

- ▶ na Resistência dos Materiais, como o caso da *flexão pura*;

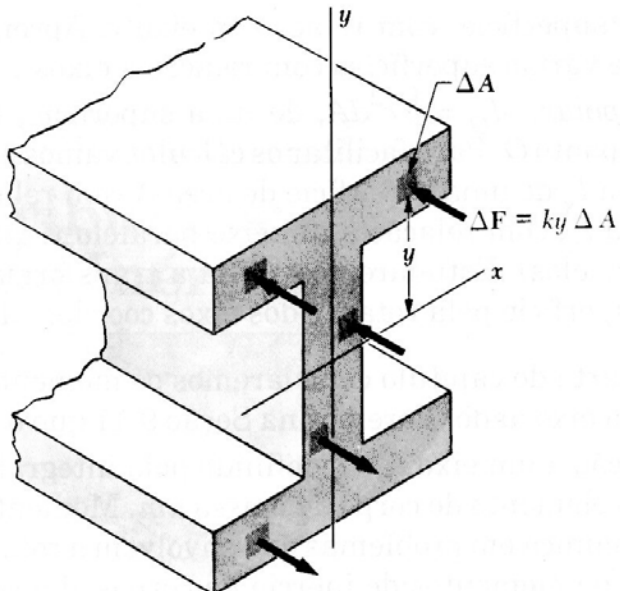


- ▶ na Mecânica dos Fluidos, como o caso de carregamento devido à pressão de um líquido atuante sobre a superfície submersa de uma placa.



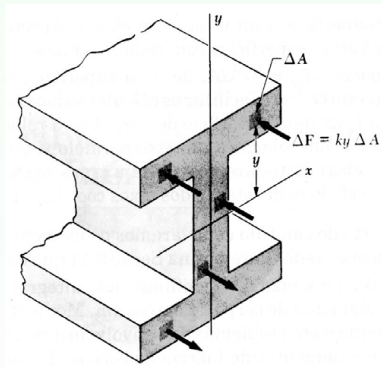


## Cálculo



## Cálculo

Considere:

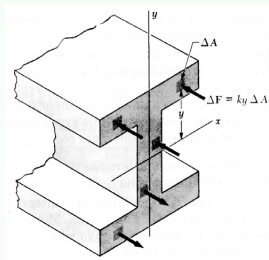


O módulo da resultante  $\mathbf{R}$  das forças elementares  $\Delta\mathbf{F}$  sobre a seção inteira é:

$$R = \int k_y dA = k \underbrace{\int y dA}_{Q_x} = k Q_x$$

Assim,  $\sum \mathbf{R} = \vec{0}$ , visto que o centróide da seção está localizado sobre o eixo  $x$ .

## Cálculo



O sistema de forças apresentado reduz-se a um binário.

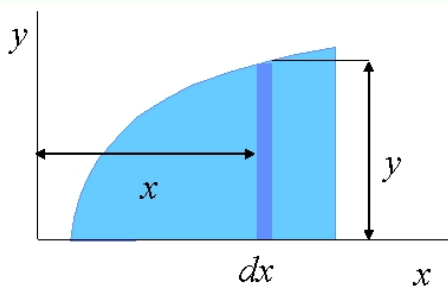
O módulo desse binário **M** é dado por:

$$M = \int ky^2 dA = k \int y^2 dA$$

A última integral obtida é o **momento estático de 2ª ordem** ou *momento de inércia* em relação ao eixo  $x$  e é representado por  $I_x$ .

Cálculo de  $I_y$ 

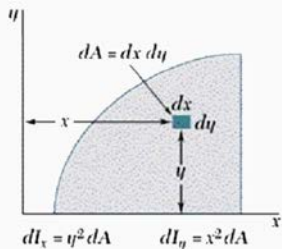
A mesma idéia pode ser aplicada ao eixo  $y$  e, assim, calcular o *momento de inércia*  $I_y$ .



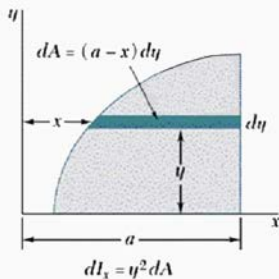
Os **Momentos de Inércia**,  $I_x$  e  $I_y$ , de uma área são definidos como:

$$\begin{cases} I_x = \int y^2 dA \\ I_y = \int x^2 dA \end{cases}$$

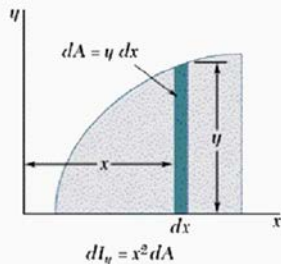
As integrais,  $I_x$  e  $I_y$ , podem ser facilmente calculadas se considerarmos a definição dos seguintes elementos infinitesimais:



(a)



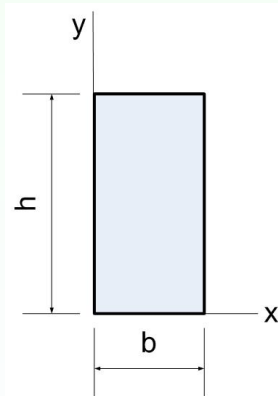
(b)



(c)

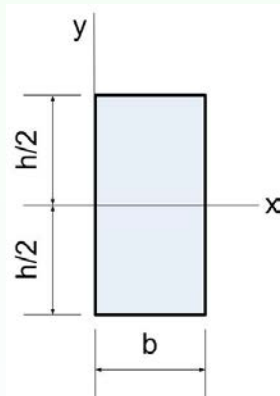
## Exercícios

Ex. 1) Determine, por integração, o momento de inércia da superfície sombreada em relação ao eixo  $x$ .



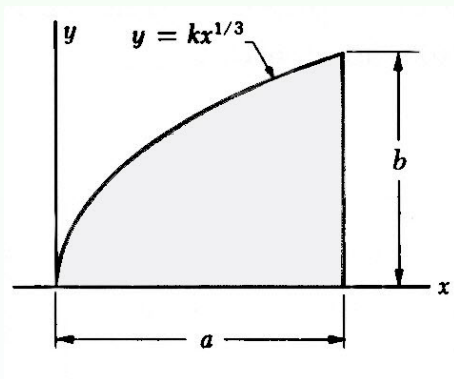
## Exercícios

Ex. 2) Determine, por integração, o momento de inércia da superfície sombreada em relação ao eixo  $x$ .



## Exercícios

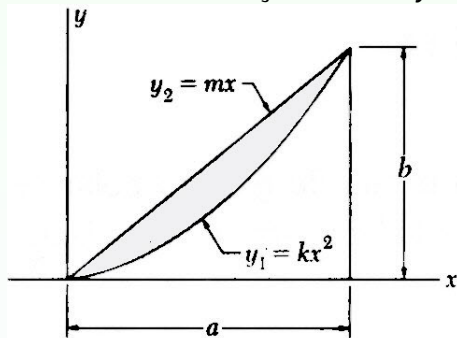
Ex. 3) Determine, por integração, o momento de inércia da superfície sombreada em relação ao eixo  $x$ .





## Exercícios

Ex. 4) Determine, por integração, o momento de inércia da superfície sombreada em relação ao eixo  $y$ .



# TÓPICOS

Centróides e Baricentros

Formas Compostas

Centros de Massa Tabelados

Teorema de Pappus-Guldin

Momento de Inércia

**Momento Polar de Inércia**

Raio de Giração

Translação de Eixos de Inércia (TEOREMA DE STEINER)

Exercícios

Momentos de Inércia de Superfícies Compostas

Exercícios

Tarefa Mínima

Produto de Inércia

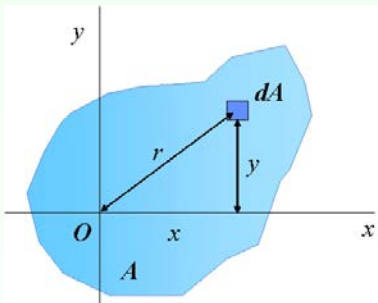
Eixos rotacionados

Tarefa Mínima

Trabalho



## Momento Polar de Inércia



O **Momento Polar de Inércia** de uma área  $A$  em relação ao pólo  $O$  é definido como:

$$J_o = \int r^2 dA$$

A distância de  $O$  ao elemento diferencial de área  $dA$  é  $r$ .

Observando que  $r^2 = x^2 + y^2$ , a seguinte relação pode ser estabelecida:

$$J_o = I_x + I_y$$

# TÓPICOS

Centróides e Baricentros

Formas Compostas

Centros de Massa Tabelados

Teorema de Pappus-Guldin

Momento de Inércia

Momento Polar de Inércia

**Raio de Giração**

Translação de Eixos de Inércia (TEOREMA DE STEINER)

Exercícios

Momentos de Inércia de Superfícies Compostas

Exercícios

Tarefa Mínima

Produto de Inércia

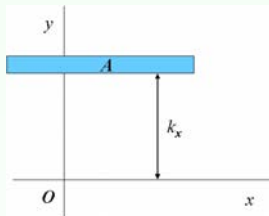
Eixos rotacionados

Tarefa Mínima

Trabalho



## Raio de Giração



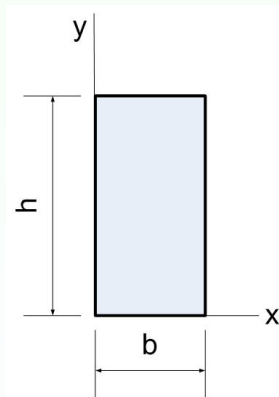
O **Raio de Giração** de uma área  $A$  em relação a um eixo  $x$  é definido como a distância  $k_x$ , onde  $I_x = k_x^2 A$ .

Com definição similar para o raio de giração de  $A$  em relação ao eixo  $y$  e com relação a  $O$ , nós temos:

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}; \quad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad e \quad k_o = \sqrt{\frac{J_o}{A}}$$

## Exercício

Ex. 5) Determine o momento polar de inércia da superfície sombreada em relação à origem do sistema. Determine o raio de giração em relação ao eixo  $y$ .



## Tarefa mínima

- ▶ Ler e entender os exercícios resolvidos 10.1, 10.2 e 10.3.
- ▶ Fazer os exercícios propostos:
  - ▶ 10.1;
  - ▶ 10.8;
  - ▶ 10.11;
  - ▶ 10.15;
  - ▶ 10.21;
  - ▶ 10.23.

## Tarefa mínima - Beer & Johnston

- ▶ Ler e entender os exercícios resolvidos 9.1, 9.2 e 9.3.
- ▶ Fazer os exercícios propostos:
  - ▶ 9.1;
  - ▶ 9.5;
  - ▶ 9.4;
  - ▶ 9.8;
  - ▶ 9.16;
  - ▶ 9.18.



## Roteiro da aula

Centróides e Baricentros

Formas Compostas

Centros de Massa Tabelados

Teorema de Pappus-Guldin

Momento de Inércia

Momento Polar de Inércia

Raio de Giração

Translação de Eixos de Inércia (TEOREMA DE STEINER)

Exercícios

Momentos de Inércia de Superfícies Compostas

Exercícios

Tarefa Mínima

Produto de Inércia

Eixos rotacionados

Tarefa Mínima

Trabalho



## TÓPICOS

Centróides e Baricentros

Formas Compostas

Centros de Massa Tabelados

Teorema de Pappus-Guldin

Momento de Inércia

Momento Polar de Inércia

Raio de Giração

**Translação de Eixos de Inércia (TEOREMA DE STEINER)**

Exercícios

Momentos de Inércia de Superfícies Compostas

Exercícios

Tarefa Mínima

Produto de Inércia

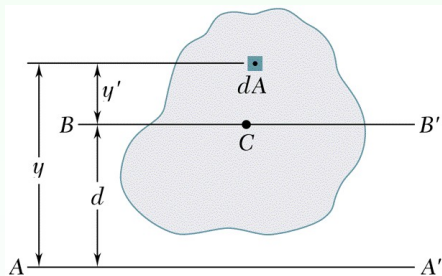
Eixos rotacionados

Tarefa Mínima

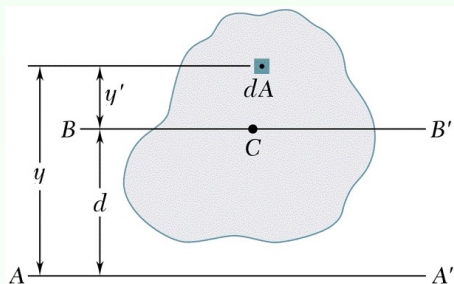
Trabalho



## Teorema dos eixos paralelos:



Este teorema nos permite relacionar momentos de inércia em relação a eixos quaisquer com momentos de inércia relativos a eixos baricêntricos, desde que eles sejam paralelos.



Os momentos de inércia  $I$  de uma seção com relação a eixos paralelos aos eixos principais de inércia podem ser determinados pelo teorema dos eixos paralelos:

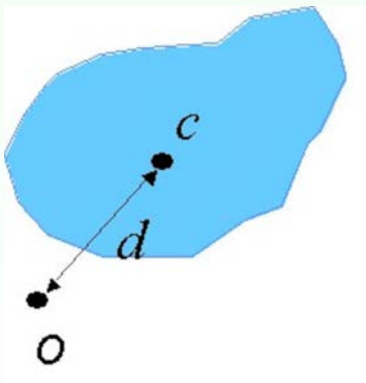
$$I = \bar{I} + A d^2$$

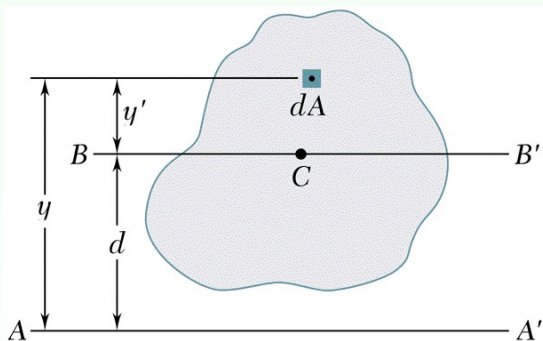
onde:

$\bar{I}$  é o momento de inércia em relação ao centróide,  
 $A$  é a área da superfície e  
 $d$  é a distância entre os eixos.

Por analogia, o mesmo pode ser dito para o momento polar de inércia, ou seja:

$$J = \bar{J}_o + A d^2$$





O teorema dos eixos paralelos também pode ser utilizado quando se quer determinar o momento de inércia em relação ao centróide  $\bar{I}$  e se conhece o momento de inércia em relação a outro eixo.

$$\bar{I} = I - A d^2$$

# TÓPICOS

Centróides e Baricentros

Formas Compostas

Centros de Massa Tabelados

Teorema de Pappus-Guldin

Momento de Inércia

Momento Polar de Inércia

Raio de Giração

Translação de Eixos de Inércia (TEOREMA DE STEINER)

## Exercícios

Momentos de Inércia de Superfícies Compostas

Exercícios

Tarefa Mínima

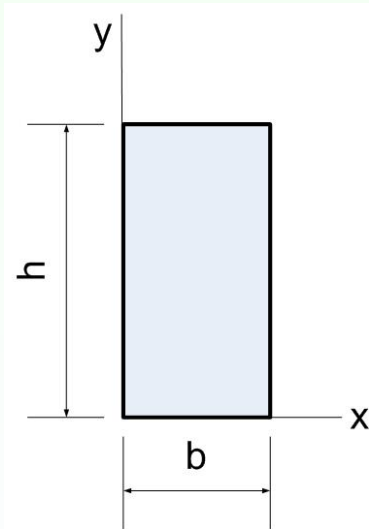
Produto de Inércia

Eixos rotacionados

Tarefa Mínima

Trabalho





Ex. 1) Determine, o momento de inércia da superfície sombreada em relação ao eixo  $x$ , sabendo que o momento de inércia em relação ao centróide  $\bar{I}_x$  é igual a  $\frac{bh^3}{12}$ .



## TÓPICOS

Centróides e Baricentros

Formas Compostas

Centros de Massa Tabelados

Teorema de Pappus-Guldin

Momento de Inércia

Momento Polar de Inércia

Raio de Giração

Translação de Eixos de Inércia (TEOREMA DE STEINER)

Exercícios

**Momentos de Inércia de Superfícies Compostas**

Exercícios

Tarefa Mínima

Produto de Inércia

Eixos rotacionados

Tarefa Mínima

Trabalho



## Momentos de Inércia de Superfícies Compostas:

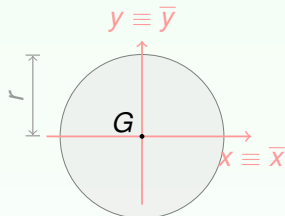
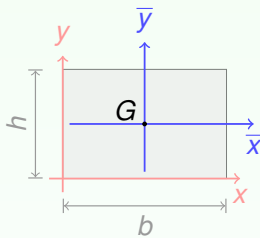
### Figuras compostas

O momento de inércia de uma superfície é a soma dos momentos de inércia das diversas superfícies nas quais ela pode ser decomposta.

Isto evita, muitas vezes, a necessidade de integrações, desde que se decomponha a superfície dada em figuras geométricas básicas tais como retângulos, círculos, etc, para os quais já se conhecem previamente o valor dos momentos de inércia.

## Formas Tabeladas-1

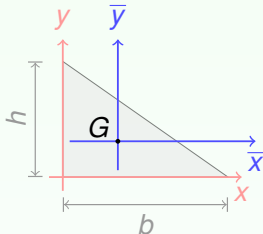
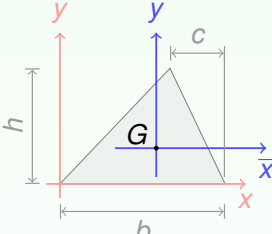
## Forma plana



Área	$b \cdot h$	$\pi \cdot r^2$
$I_x$	$\frac{b \cdot h^3}{3}$	$\frac{1}{4} \pi r^4$
$I_y$	$\frac{b^3 \cdot h}{3}$	$= I_x$
$I_{\bar{x}}$	$\frac{b \cdot h^3}{12}$	$= I_x$
$I_{\bar{y}}$	$\frac{b^3 \cdot h}{12}$	$= I_x$

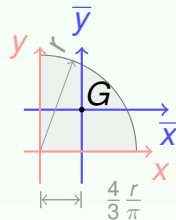
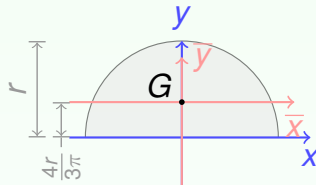
## Formas Tabeladas-1

## Forma plana

	Forma plana	
		
Área	$\frac{b \cdot h}{2}$	$\frac{b \cdot h}{2}$
$I_x$	$\frac{b \cdot h^3}{12}$	$\frac{b \cdot h^3}{12}$
$I_y$	$\frac{b^3 \cdot h}{12}$	$\frac{b \cdot h}{12} (3b^2 - 3bc + c^2)$
$I_{\bar{x}}$	$\frac{b \cdot h^3}{36}$	$\frac{b \cdot h^3}{36}$
$I_{\bar{y}}$	$\frac{b^3 \cdot h}{36}$	$\frac{b \cdot h}{36} (b^2 - bc + c^2)$

## Formas Tabeladas-1

## Forma plana



Área	$\pi \cdot \frac{r^2}{2}$	$\pi \cdot \frac{r^2}{4}$
$I_x$	Teor. Steiner	$\frac{\pi r^4}{16}$
$I_y$	$= I_{\bar{y}}$	$= I_x$
$I_{\bar{x}}$	$\frac{9\pi^2 - 64}{72\pi} r^4$	$\frac{9\pi^2 - 64}{144\pi} r^4$
$I_{\bar{y}}$	$\frac{\pi r^4}{8}$	$= I_{\bar{x}}$

## Formas Tabeladas-1

## Forma plana

	Forma plana	
Área	$r^2 (\alpha - \text{sen}(\alpha)\text{cos}(\alpha))$	$\theta r^2$
$I_x$	$= I_{\bar{x}}$	$= I_{\bar{x}}$
$I_y$	Teor. Steiner	$\frac{1}{4} r^4 (\theta + \frac{1}{2} \text{sen}(2\theta))$
$I_{\bar{x}}$	$\frac{r^4}{12} \left[ 3\alpha + \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} (\text{cos}(2\alpha) - 4) \right]$	$\frac{1}{4} r^4 (\theta - \frac{1}{2} \text{sen}(2\theta))$
$I_{\bar{y}}$	$\frac{r^4}{4} \left[ \alpha - \frac{1}{4} \text{sen}(4\alpha) \right]$	Teor. Steiner

# TÓPICOS

Centróides e Baricentros

Formas Compostas

Centros de Massa Tabelados

Teorema de Pappus-Guldin

Momento de Inércia

Momento Polar de Inércia

Raio de Giração

Translação de Eixos de Inércia (TEOREMA DE STEINER)

Exercícios

Momentos de Inércia de Superfícies Compostas

**Exercícios**

Tarefa Mínima

Produto de Inércia

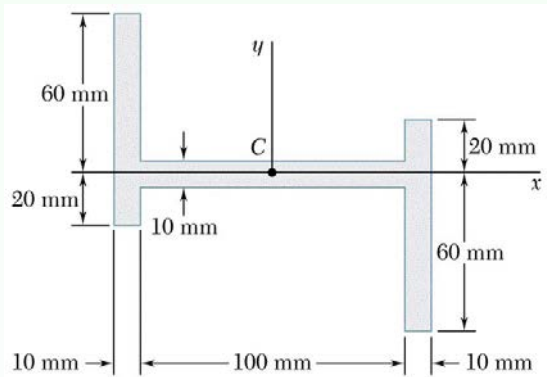
Eixos rotacionados

Tarefa Mínima

Trabalho

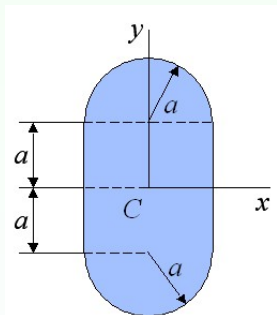


Ex. 3) Determine os momentos de inércia,  $I_x$  e  $I_y$ , em relação ao centróide.





Ex. 9.25) Determine os momentos de inércia,  $I_x$  e  $I_y$ , em relação ao centróide; com  $a=20$  mm.



# TÓPICOS

Centróides e Baricentros

Formas Compostas

Centros de Massa Tabelados

Teorema de Pappus-Guldin

Momento de Inércia

Momento Polar de Inércia

Raio de Giração

Translação de Eixos de Inércia (TEOREMA DE STEINER)

Exercícios

Momentos de Inércia de Superfícies Compostas

Exercícios

**Tarefa Mínima**

Produto de Inércia

Eixos rotacionados

Tarefa Mínima

Trabalho



## Tarefa mínima - Beer & Johnston

- ▶ Ler e entender os exercícios resolvidos 9.4 e 9.5.
- ▶ Fazer os exercícios propostos:
  - ▶ 9.22;
  - ▶ 9.26;
  - ▶ 9.27;
  - ▶ 9.28;
  - ▶ 9.33;
  - ▶ 9.34.



## Roteiro da aula

Centróides e Baricentros

Formas Compostas

Centros de Massa Tabelados

Teorema de Pappus-Guldin

Momento de Inércia

Momento Polar de Inércia

Raio de Giração

Translação de Eixos de Inércia (TEOREMA DE STEINER)

Exercícios

Momentos de Inércia de Superfícies Compostas

Exercícios

Tarefa Mínima

Produto de Inércia

Eixos rotacionados

Tarefa Mínima

Trabalho



# TÓPICOS

Centróides e Baricentros

Formas Compostas

Centros de Massa Tabelados

Teorema de Pappus-Guldin

Momento de Inércia

Momento Polar de Inércia

Raio de Giração

Translação de Eixos de Inércia (TEOREMA DE STEINER)

Exercícios

Momentos de Inércia de Superfícies Compostas

Exercícios

Tarefa Mínima

**Produto de Inércia**

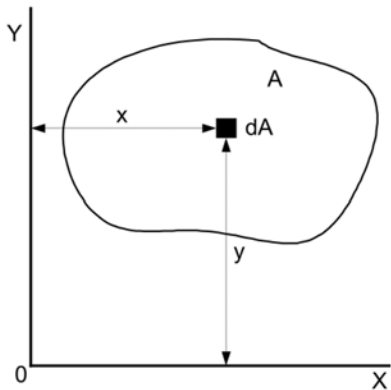
Eixos rotacionados

Tarefa Mínima

Trabalho



# Produto de Inércia

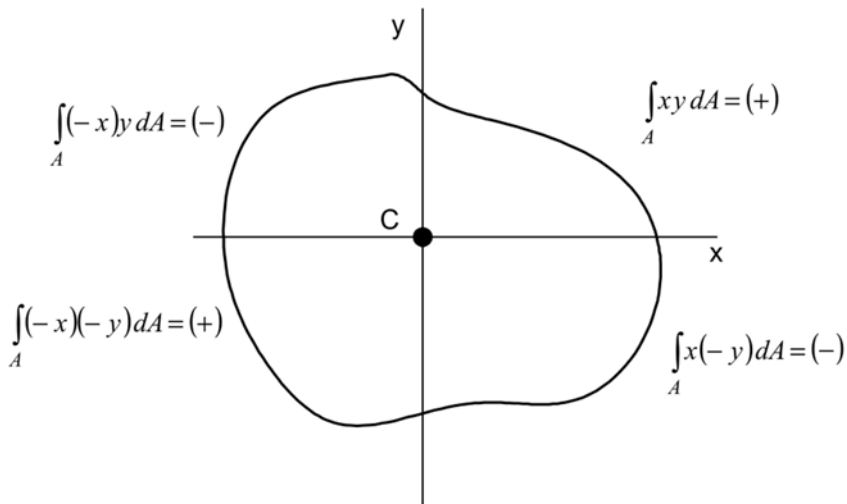


O produto de inércia de um elemento de área  $dA$ , localizado num ponto  $(x, y)$ , é calculado pela expressão:  $dI_{xy} = xy dA$ .

$$I_{xy} = \int xy dA$$

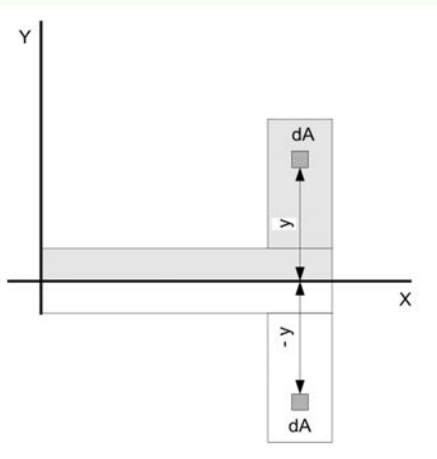
# Produto de Inércia

O produto de inércia pode ser positivo, negativo e nulo:



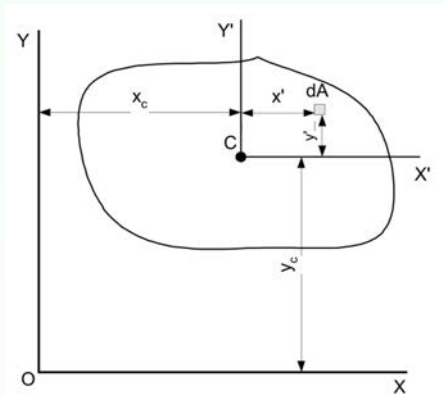


# Produto de Inércia



Para que o produto de inércia seja nulo é necessário que ele seja calculado sobre um eixo de simetria.

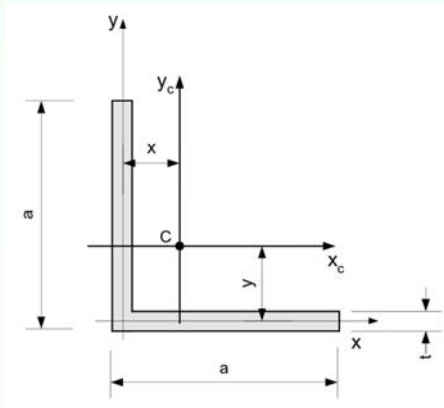
# Teorema de Steiner para produto de inércia



Vale também o teorema de Steiner:

$$I_{xy} = I_{x'y'} + x_c y_c A$$

# Produto de inércia de figuras compostas



Para simplificar o cálculo do produto de inércia pode-se decompor a figura em figuras mais simples e conhecidas:

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^n I_{xy_i} = \sum_{i=1}^n (I_{x'_i y'_i} + A_i x_i y_i)$$

# TÓPICOS

Centróides e Baricentros

Formas Compostas

Centros de Massa Tabelados

Teorema de Pappus-Guldin

Momento de Inércia

Momento Polar de Inércia

Raio de Giração

Translação de Eixos de Inércia (TEOREMA DE STEINER)

Exercícios

Momentos de Inércia de Superfícies Compostas

Exercícios

Tarefa Mínima

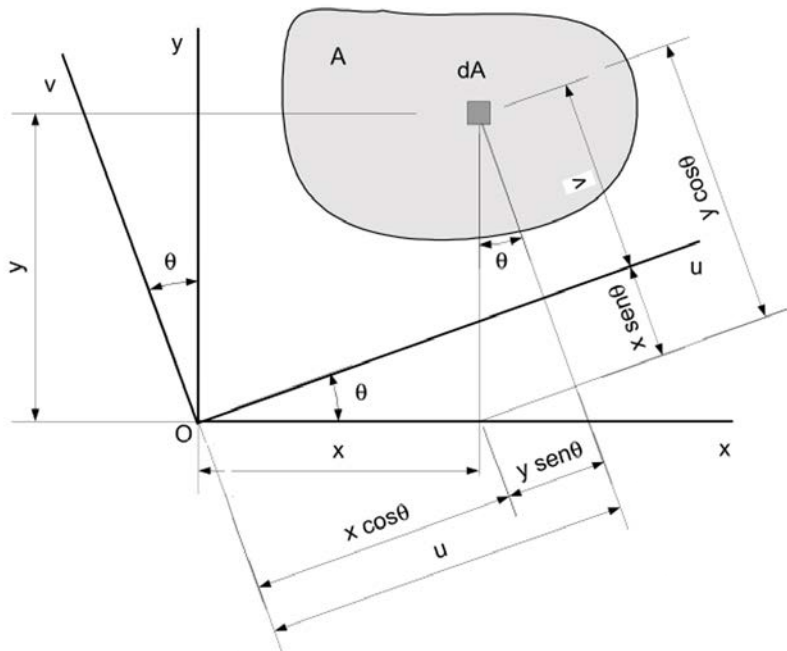
Produto de Inércia

**Eixos rotacionados**

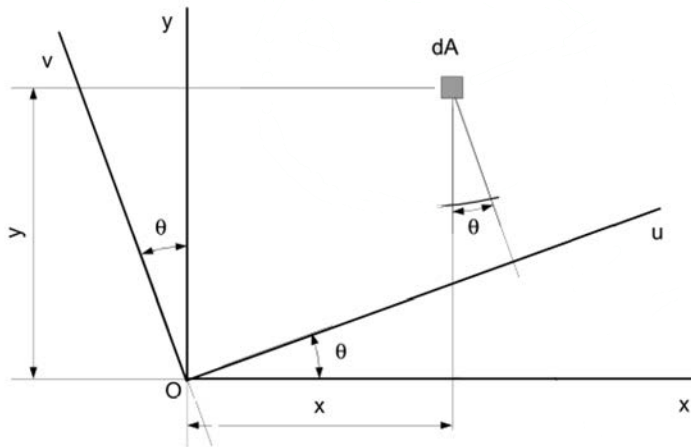
Tarefa Mínima

Trabalho

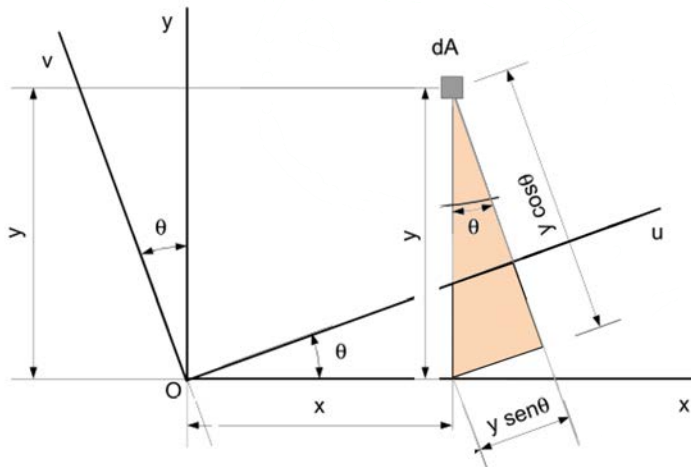




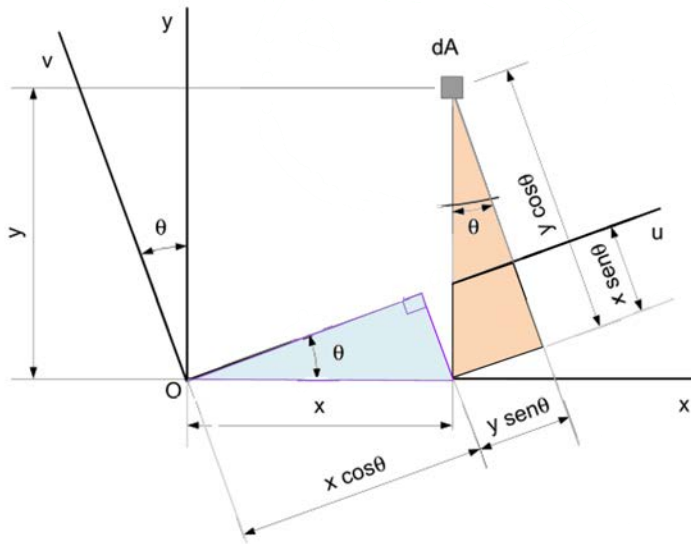
## REVISÃO



## REVISÃO

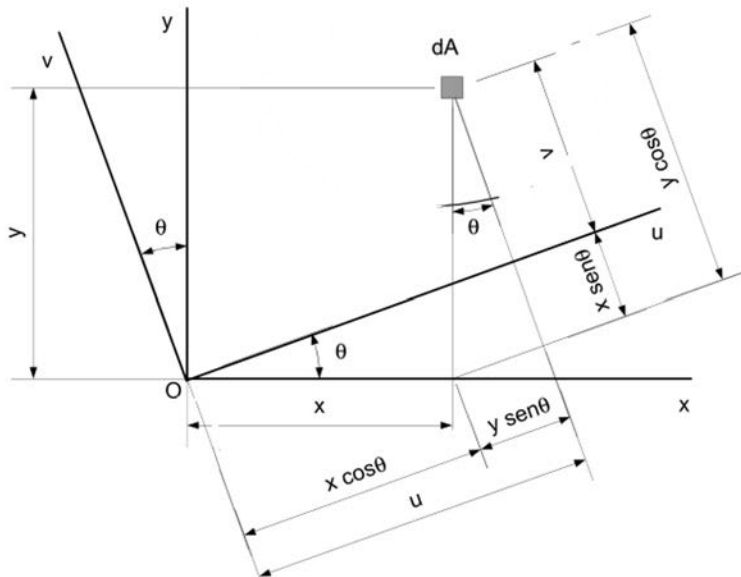


## REVISÃO

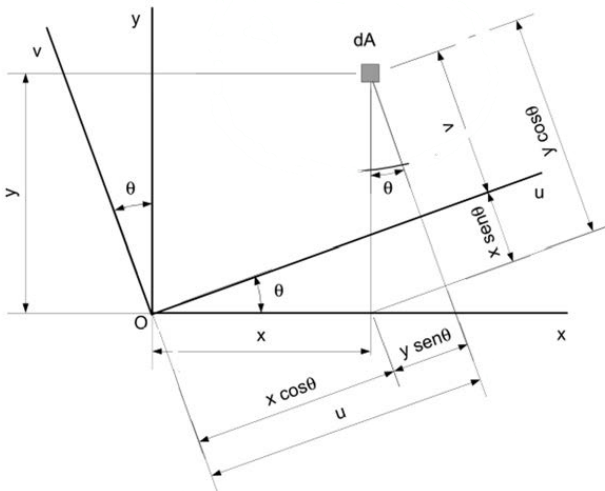




## REVISÃO



## REVISÃO



$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

## Efetuando a rotação...

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} u = x\cos(\theta) + y\sin(\theta) \\ v = -x\sin(\theta) + y\cos(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_u = \int_A v^2 dA = \int_A (x\cos(\theta) + y\sin(\theta))^2 dA \\ I_v = \int_A u^2 dA = \int_A (-x\sin(\theta) + y\cos(\theta))^2 dA \\ I_{uv} = \int_A uv dA = \int_A (x\cos(\theta) + y\sin(\theta))(-x\sin(\theta) + y\cos(\theta)) dA \end{cases}$$

## Efetuando a rotação...

$$\left\{ \begin{array}{l} I_u = \cos^2(\theta)I_x - 2\cos(\theta)\sin(\theta)I_{xy} + \sin^2(\theta)I_y \\ I_v = \cos^2(\theta)I_y + 2\cos(\theta)\sin(\theta)I_{xy} + \sin^2(\theta)I_x \\ I_{uv} = (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) I_{xy} - \cos(\theta)\sin(\theta)I_x + \cos(\theta)\sin(\theta)I_y \end{array} \right.$$

## Efetuando a rotação...

$$\left\{ \begin{array}{l} I_u = \cos^2(\theta)I_x - 2\cos(\theta)\sin(\theta)I_{xy} + \sin^2(\theta)I_y \\ I_v = \cos^2(\theta)I_y + 2\cos(\theta)\sin(\theta)I_{xy} + \sin^2(\theta)I_x \\ I_{uv} = (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) I_{xy} - \cos(\theta)\sin(\theta)I_x + \cos(\theta)\sin(\theta)I_y \end{array} \right.$$

Lembrando que:

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \quad \sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$$

## Efetuando a rotação...

$$\begin{cases} I_u = \cos^2(\theta)I_x - 2\cos(\theta)\sin(\theta)I_{xy} + \sin^2(\theta)I_y \\ I_v = \cos^2(\theta)I_y + 2\cos(\theta)\sin(\theta)I_{xy} + \sin^2(\theta)I_x \\ I_{uv} = (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) I_{xy} - \cos(\theta)\sin(\theta)I_x + \cos(\theta)\sin(\theta)I_y \end{cases}$$

Lembrando que:

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \quad \sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$$

$$\begin{cases} I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos(2\theta) - I_{xy}\sin(2\theta) \\ I_v = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos(2\theta) - I_{xy}\sin(2\theta) \\ I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2}\sin(2\theta) - I_{xy}\cos(2\theta) \end{cases}$$



## Efetando a rotação...

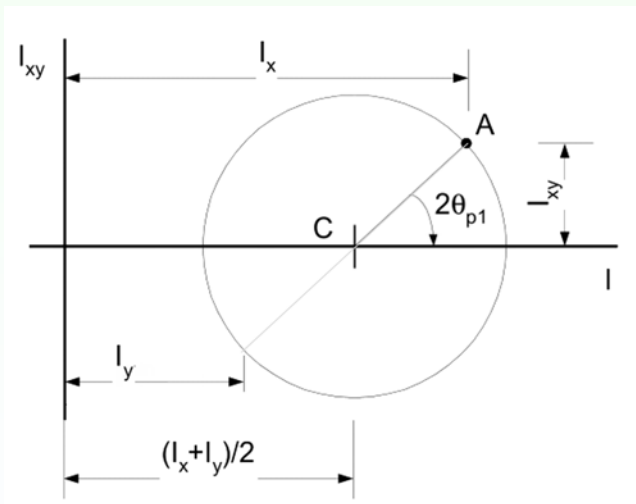
$$\left\{ \begin{array}{l} I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos(2\theta) - I_{xy} \sin(2\theta) \\ I_v = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos(2\theta) - I_{xy} \sin(2\theta) \\ I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin(2\theta) - I_{xy} \cos(2\theta) \end{array} \right.$$

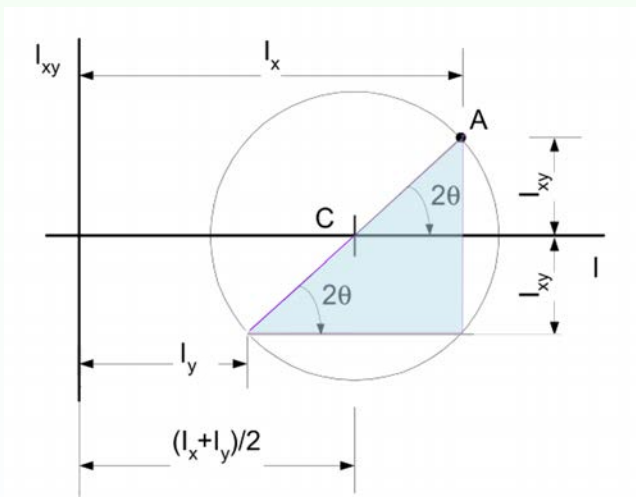
$$\left\{ \begin{array}{l} I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos(2\theta) - I_{xy} \sin(2\theta) \\ I_v = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos(2\theta) + I_{xy} \sin(2\theta) \\ I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin(2\theta) - I_{xy} \cos(2\theta) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_u + I_v = I_x + I_y \\ I_u - I_v = (I_x - I_y) \cos(2\theta) - 2I_{xy} \sin(2\theta) \end{array} \right.$$



$$\begin{cases} I_u + I_v = I_x + I_y \\ I_u - I_v = (I_x - I_y) \cos(2\theta) - 2I_{xy} \sin(2\theta) \end{cases}$$





$$\begin{cases} I_u + I_v = I_x + I_y \\ I_u - I_v = (I_x - I_y) \cos(2\theta) - 2I_{xy} \sin(2\theta) \end{cases}$$
$$J_o = I_z = I_x + I_y = I_u + I_v$$

# TÓPICOS

Centróides e Baricentros

Formas Compostas

Centros de Massa Tabelados

Teorema de Pappus-Guldin

Momento de Inércia

Momento Polar de Inércia

Raio de Giração

Translação de Eixos de Inércia (TEOREMA DE STEINER)

Exercícios

Momentos de Inércia de Superfícies Compostas

Exercícios

Tarefa Mínima

Produto de Inércia

Eixos rotacionados

**Tarefa Mínima**

Trabalho



## Tarefa mínima - Hibeller

- ▶ Ler e entender os exercícios resolvidos 10.6 a 10.9
- ▶ Fazer os exercícios propostos:
  - ▶ 10.64;
  - ▶ 10.73;
  - ▶ 10.72;
  - ▶ 10.76;
  - ▶ 10.82;
  - ▶ 10.89;
  - ▶ 10.95;
  - ▶ 10.100;
  - ▶ 10.101;
  - ▶ 10.109.