tal que T_n e suas n primeiras derivadas tenham os mesmos valores em $x = a$ como f e suas n primeiras derivadas. Diferenciando repetidamente e fazendo $x = a$, mostre que essas condições estão satisfeitas se $c_0 = f(a)$, $c_1 = f'(a)$, $c_2 = \frac{1}{2}f''(a)$, e em geral

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

onde $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot k$. O polinômio resultante

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

é chamado **polinômio de Taylor de grau n de f centrado em a.**

6. Encontre o polinômio de Taylor de oitavo grau centrado em $a = 0$ para a função $f(x) = \cos x$. Faça os gráficos de f junto com os polinômios de Taylor T_2, T_4, T_6, T_8 na janela de inspeção $[-5, 5]$ por $[-1{,}4, 1{,}4]$ e comente a qualidade da aproximação de f.

3 Revisão

VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

1. Estabeleça as seguintes regras da diferenciação em símbolos e palavras.
(a) A Regra da Potência
(b) A Regra do Múltiplo Constante
(c) A Regra da Soma
(d) A Regra da Diferença
(e) A Regra do Produto
(f) A Regra do Quociente
(g) A Regra da Cadeia

2. Estabeleça a derivada de cada função.
(a) $y = x^n$ (b) $y = e^x$ (c) $y = a^x$
(d) $y = \ln x$ (e) $y = \log_a x$ (f) $y = \operatorname{sen} x$
(g) $y = \cos x$ (h) $y = \operatorname{tg} x$ (i) $y = \operatorname{cossec} x$
(j) $y = \sec x$ (k) $y = \operatorname{cotg} x$ (l) $y = \operatorname{sen}^{-1} x$
(m) $y = \cos^{-1} x$ (n) $y = \operatorname{tg}^{-1} x$ (o) $y = \operatorname{senh} x$
(p) $y = \cosh x$ (q) $y = \operatorname{tgh} x$ (r) $y = \operatorname{senh}^{-1} x$
(s) $y = \cosh^{-1} x$ (t) $y = \operatorname{tgh}^{-1} x$

3. (a) Como é definido o número e?
(b) Expresse e como limite.
(c) Por que a função exponencial natural $y = e^x$ é usada mais freqüentemente em cálculo do que as outras funções exponenciais $y = a^x$?
(d) Por que a função logarítmica natural $y = \ln x$ é usada mais freqüentemente em cálculo do que as demais funções logarítmicas $y = \log_a x$?

4. (a) Explique como funciona a diferenciação implícita.
(b) Explique como funciona a diferenciação logarítmica.

5. O que são a segunda e a terceira derivadas da função f? Se f é uma função posição de um objeto, como você interpreta f'' e f'''?

6. (a) Escreva uma expressão para a linearização de f em a.
(b) Se $y = f(x)$, escreva uma expressão para diferenciar dy.
(c) Se $dx = \Delta x$, faça uma figura que mostre os significados de dy e de Δy.

TESTES FALSO-VERDADEIRO

Determine se a afirmativa é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê. Se for falsa, explique por que ou dê um contra-exemplo da afirmativa.

1. Se f e g forem diferenciáveis, então

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$

2. Se f e g forem diferenciáveis, então

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g'(x)$$

3. Se f e g forem diferenciáveis, então

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$$

4. Se f for diferenciável, então $\dfrac{d}{dx}\sqrt{f(x)} = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

5. Se f for diferenciável, então $\dfrac{d}{dx}f(\sqrt{x}) = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{x}}$.

6. Se $y = e^2$, então $y' = 2e$.

7. $\dfrac{d}{dx}(10^x) = x10^{x-1}$

8. $\dfrac{d}{dx}(\ln 10) = \dfrac{1}{10}$

9. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{tg}^2 x) = \dfrac{d}{dx}(\sec^2 x)$

10. $\dfrac{d}{dx}|x^2 + x| = |2x + 1|$

11. Se $g(x) = x^5$, então $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{g(x) - g(2)}{x - 2} = 80$.

12. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$

13. Uma equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ em $(-2, 4)$ é $y - 4 = 2x(x + 2)$.

EXERCÍCIOS

1–48 □ Calcule y'.

1. $y = \left(x^4 - 3x^2 + 5\right)^3$
2. $y = \cos(\operatorname{tg} x)$
3. $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$
4. $y = \dfrac{3x - 2}{\sqrt{2x + 1}}$
5. $y = 2x\sqrt{x^2 + 1}$
6. $y = \dfrac{e^x}{1 + x^2}$
7. $y = e^{\operatorname{sen} 2\theta}$
8. $y = e^{-t}\left(t^2 - 2t + 2\right)$
9. $y = \dfrac{t}{1 - t^2}$
10. $y = \operatorname{sen}^{-1}\left(e^x\right)$
11. $y = xe^{-1/x}$
12. $y = x^r e^{sx}$
13. $y = \operatorname{tg} \sqrt{1 - x}$
14. $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\left(x - \operatorname{sen} x\right)}$
15. $x^2 y = x + 3y$
16. $y = \ln(\operatorname{cossec} 5x)$
17. $y = \dfrac{\sec 2\theta}{1 + \operatorname{tg} 2\theta}$
18. $x^2 \cos y + \operatorname{sen} 2y = xy$
19. $y = e^{cx}(c \operatorname{sen} x - \cos x)$
20. $y = \ln\left(x^2 e^x\right)$
21. $y = e^{e^x}$
22. $y = \sec\left(1 + x^2\right)$
23. $y = \left(1 - x^{-1}\right)^{-1}$
24. $y = 1/\sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$
25. $\operatorname{sen}(xy) = x^2 - y$
26. $y = \sqrt{\operatorname{sen}\sqrt{x}}$
27. $y = \log_5(1 + 2x)$
28. $y = (\cos x)^x$
29. $y = \ln \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x$
30. $y = \dfrac{\left(x^2 + 1\right)^4}{(2x + 1)^3 (3x - 1)^5}$
31. $y = x \operatorname{tg}^{-1}(4x)$
32. $y = e^{\cos x} + \cos\left(e^x\right)$
33. $y = \ln|\sec 5x + \operatorname{tg} 5x|$
34. $y = 10^{\operatorname{tg} \pi\theta}$
35. $y = \operatorname{cotg}(3x^2 + 5)$
36. $y = \sqrt{t \ln\left(t^4\right)}$
37. $y = \operatorname{sen}\left(\operatorname{tg}\sqrt{1 + x^3}\right)$
38. $y = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{arcsen}\sqrt{x}\right)$
39. $y = \operatorname{tg}^2(\operatorname{sen} \theta)$
40. $xe^y = y - 1$
41. $y = \dfrac{\sqrt{x + 1}(2 - x)^5}{(x + 3)^7}$
42. $y = \dfrac{(x + \lambda)^4}{x^4 + \lambda^4}$
43. $y = x \operatorname{senh}\left(x^2\right)$
44. $y = \dfrac{\operatorname{sen} mx}{x}$
45. $y = \ln(\cosh 3x)$
46. $y = \ln\left|\dfrac{x^2 - 4}{2x + 5}\right|$
47. $y = \cosh^{-1}(\operatorname{senh} x)$
48. $y = x \operatorname{tgh}^{-1}\sqrt{x}$

49. Se $f(t) = \sqrt{4t + 1}$, ache $f''(2)$.

50. Se $g(\theta) = \theta \operatorname{sen} \theta$, determine $g''(\pi/6)$.

51. Encontre y'' se $x^6 + y^6 = 1$.

52. Encontre $f^{(n)}(x)$ se $f(x) = 1/(2 - x)$.

53. Use a indução matemática para mostrar que se $f(x) = xe^x$, então $f^{(n)}(x) = (x + n)e^x$.

54. Calcule $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t^3}{\operatorname{tg}^3(2t)}$.

55–59 □ Encontre uma equação da tangente à curva no ponto dado.

55. $y = 4 \operatorname{sen}^2 x, \quad (\pi/6, 1)$
56. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \quad (0, -1)$
57. $y = \sqrt{1 + 4 \operatorname{sen} x}, \quad (0, 1)$
58. $x^2 + 4xy + y^2 = 13, \quad (2, 1)$
59. $y = (2 + x)e^{-x}, \quad (0, 2)$

60. Se $f(x) = xe^{\operatorname{sen} x}$, encontre $f'(x)$. Faça o gráfico de f e f' na mesma tela e comente.

61. (a) Se $f(x) = x\sqrt{5 - x}$, encontre $f'(x)$.
    (b) Encontre as equações das retas tangentes à curva $y = x\sqrt{5 - x}$ nos pontos $(1, 2)$ e $(4, 4)$.
    (c) Ilustre a parte (b) fazendo o gráfico da curva e das retas tangentes.
    (d) Verifique se a resposta da parte (a) é razoável comparando os gráficos de f e f'.

62. (a) Se $f(x) = 4x - \operatorname{tg} x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$, encontre f' e f''.
    (b) Verifique se as respostas da parte (a) são razoáveis comparando os gráficos de f, f' e f''.

63. Em quais pontos da curva $y = \operatorname{sen} x + \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, a reta tangente é horizontal?

64. Encontre os pontos sobre a elipse $x^2 + 2y^2 = 1$ onde a reta tangente tem inclinação 1.

65. Se $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$, mostre que
$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - b} + \frac{1}{x - c}$$

66. (a) Diferenciando a fórmula do ângulo duplo
$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$
obtenha a fórmula do ângulo duplo para a função seno.

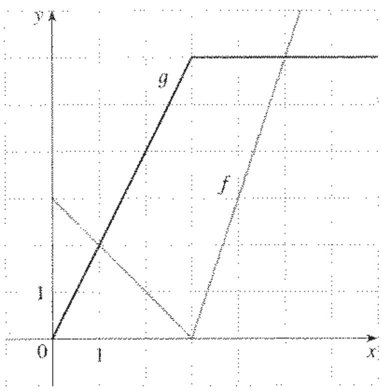
(b) Diferenciando a fórmula de adição

$$\operatorname{sen}(x + a) = \operatorname{sen} x \cos a + \cos x \operatorname{sen} a$$

obtenha a fórmula de adição para a função cosseno.

67. Suponha que $h(x) = f(x)g(x)$ e $F(x) = f(g(x))$, onde $f(2) = 3$, $g(2) = 5$, $g'(2) = 4$, $f'(2) = -2$ e $f'(5) = 11$. Encontre (a) $h'(2)$ e (b) $F'(2)$.

68. Se f e g forem as funções cujo gráfico está a seguir, seja $P(x) = f(x)g(x)$, $Q(x) = f(x)/g(x)$ e $C(x) = f(g(x))$. Encontre (a) $P'(2)$, (b) $Q'(2)$ e (c) $C'(2)$.



69–76 □ Encontre f' em termos de g'.

69. $f(x) = x^2 g(x)$

70. $f(x) = g(x^2)$

71. $f(x) = [g(x)]^2$

72. $f(x) = g(g(x))$

73. $f(x) = g(e^x)$

74. $f(x) = e^{g(x)}$

75. $f(x) = \ln |g(x)|$

76. $f(x) = g(\ln x)$

77–79 □ Encontre h' em termos de f' e g'.

77. $h(x) = \dfrac{f(x)g(x)}{f(x) + g(x)}$

78. $h(x) = \sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$

79. $h(x) = f(g(\operatorname{sen} 4x))$

80. (a) Faça o gráfico da função $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x$ na janela de inspeção $[0, 8]$ por $[-2, 8]$.
(b) Em qual intervalo a taxa média de variação é maior: $[1, 2]$ ou $[2, 3]$?
(c) Em qual valor de x a taxa instantânea de variação é maior: $x = 2$ ou $x = 5$?
(d) Verifique sua estimativa visual na parte (c) computando $f'(x)$ e comparando os valores numéricos de $f'(2)$ e $f'(5)$.

81. Em qual ponto sobre a curva $y = [\ln(x + 4)]^2$ a reta tangente é horizontal?

82. (a) Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = e^x$ que seja paralela à reta $x - 4y = 1$.
(b) Encontre uma equação da tangente à curva $y = e^x$ que passe pela origem.

83. Encontre uma parábola $y = ax^2 + bx + c$ que passe pelo ponto $(1, 4)$ e cujas retas tangentes em $x = -1$ e $x = 5$ tenham inclinações 6 e -2, respectivamente.

84. A função $C(t) = K(e^{-at} - e^{-bt})$, onde a, b e K são constantes positivas e $b > a$, é usada para modelar a concentração de uma droga injetada na corrente sangüínea no instante t.
(a) Mostre que $\lim_{t \to \infty} C(t) = 0$.
(b) Encontre $C'(t)$, a taxa segundo a qual a droga é eliminada da circulação.
(c) Quando essa taxa é igual a zero?

85. Uma equação de movimento da forma $s = Ae^{-ct}\cos(\omega t + \delta)$ representa uma oscilação amortecida de um objeto. Encontre a velocidade e a aceleração do objeto.

86. Uma partícula move-se ao longo de uma reta horizontal de forma que sua coordenada no instante t seja $x = \sqrt{b^2 + c^2t^2}$, $t \geqslant 0$, onde b e c são constantes positivas.
(a) Encontre as funções velocidade e aceleração.
(b) Mostre que a partícula se move sempre no sentido positivo.

87. Uma partícula se move sobre uma reta vertical de forma que sua coordenada no instante t seja $y = t^3 - 12t + 3$, $t \geqslant 0$.
(a) Encontre as funções velocidade e aceleração.
(b) Quando a partícula se move para cima? E para baixo?
(c) Encontre a distância percorrida pela partícula no intervalo de tempo $0 \leqslant t \leqslant 3$.

88. O volume de um cone circular reto é $V = \pi r^2 h/3$, onde r é o raio da base e h é a altura.
(a) Encontre a taxa de variação do volume em relação à altura se o raio for mantido constante.
(b) Encontre a taxa de variação do volume em relação ao raio se a altura for mantida constante.

89. A massa da parte de um fio é $x(1 + \sqrt{x})$ kg, onde x é medido em metros a partir de uma extremidade do fio. Encontre a densidade linear do fio quando $x = 4$ m.

90. O custo, em dólares, da produção de x unidades de um certo utensílio é

$$C(x) = 920 + 2x - 0{,}02x^2 + 0{,}00007x^3$$

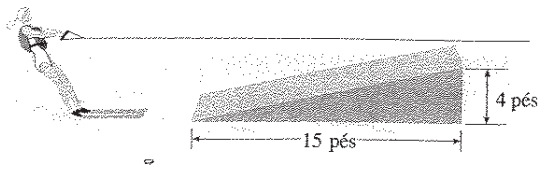
(a) Encontre a função custo marginal.
(b) Encontre $C'(100)$ e explique seu significado.
(c) Compare $C'(100)$ com o custo da produção do 101º item.

91. O volume de um cubo cresce a uma taxa de 10 cm³/min. Com que rapidez está crescendo a área superficial quando o comprimento de uma aresta é 30 cm?

92. Um copo de papel tem a forma de um cone com 10 cm de altura e 3 cm de raio (no topo). Se for colocada água dentro do copo a uma taxa de 2 cm³/s, com que rapidez o nível da água se elevará quando ela tiver 5 cm de profundidade?

93. Um balão sobe a uma velocidade constante de 5 pés/s. E um rapaz anda de bicicleta ao longo de uma estrada reta a uma velocidade de 15 pés/s. Ao passar sobre o ciclista o balão está 45 pés acima dele. Com que velocidade cresce a distância entre o balão e o rapaz 3 segundos mais tarde?

94. Uma esquiadora aquática sobe a rampa mostrada na figura a uma velocidade de 30 pés/s. Com que velocidade ela está subindo quando deixa a rampa?



95. O ângulo de elevação do Sol está decrescendo a uma taxa de 0,25 rad/h. Com que velocidade está crescendo a sombra de um prédio de 400 pés de altura quando o ângulo de elevação do Sol é $\pi/6$?

96. (a) Encontre a aproximação linear para $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ nas proximidades de 3.
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico de f e da aproximação linear.
(c) Para quais valores de x a aproximação linear é precisa dentro de 0,1?

97. (a) Encontre a linearização de $f(x) = \sqrt[3]{1 + 3x}$ em $a = 0$. Estabeleça a aproximação linear correspondente e use-a para dar um valor aproximado de $\sqrt[3]{1,03}$.
(b) Determine os valores de x para os quais a aproximação linear dada na parte (a) é precisa dentro de 0,1.

98. Calcule dy se $y = x^3 - 2x^2 + 1$, $x = 2$ e $dx = 0,2$.

99. Uma janela tem um formato de um quadrado com um semicírculo em cima. A base da janela mede 60 cm com um erro possível na medida de 0,1 cm. Use as diferenciais para estimar o máximo erro possível no cálculo da área da janela.

100–102 Expresse o limite como uma derivada e calcule-o.

100. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{17} - 1}{x - 1}$

101. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt[4]{16 + h} - 2}{h}$

102. $\lim\limits_{\theta \to \pi/3} \dfrac{\cos\theta - 0,5}{\theta - \pi/3}$

103. Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \operatorname{sen} x}}{x^3}$.

104. Suponha que f seja uma função diferenciável tal que $f(g(x)) = x$ e $f'(x) = 1 + [f(x)]^2$. Mostre que $g'(x) = 1/(1 + x^2)$.

105. Encontre $f'(x)$ sabendo-se que

$$\frac{d}{dx}[f(2x)] = x^2$$

106. Mostre que o comprimento da parte de qualquer reta tangente à astróide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ cortada fora pelos eixos coordenados é constante.