**Matrizes**

**Def.** Uma *matriz* é uma tabela de elementos dispostos em **m** linhas e **n** colunas.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Os elementos da matriz são chamados *escalares* e, a menos que se diga o contrário, tais escalares são números reais.
- O elemento de **A** na *linha i* e *coluna j* é denotado por $a_{ij}$.
- Uma notação compacta para uma matriz pode ser **A** = $[a_{ij}]$ ou **A** = $[a_{ij}]_{m \times n}$..
- O tamanho de uma matriz é descrito em termos do número de linhas e colunas que ela possui. Uma matriz é dita de tamanho $m \times n$ quando tem $m$ linhas e $n$ colunas.
- Uma matriz $1 \times n$ é chamada **matriz linha** (ou vetor linha) e é representada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

- Uma matriz $m \times 1$ é chamada **matriz coluna** (ou vetor coluna) e é representada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

- Se $m = n$ dizemos que a matriz é *quadrada* e, neste caso, os elementos $a_{11}$, $a_{22}$, $a_{33}$,... formam a *diagonal principal* da matriz.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

O *traço* de uma matriz quadrada **A** é definido e denotado por

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

**Exemplo.** Uma matriz quadrada $3 \times 3$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 5 & 7 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{tr}(\mathbf{A})=4+7+(-1)=10$$

- **Matriz nula ou matriz zero** - Uma matriz zero apresenta todos os elementos nulos e é representada pelo símbolo **0**.

- **Matriz diagonal** - É toda matriz $n \times n$ tal que $a_{ij}=0 \quad se \quad i \neq j$, $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

- **Matriz identidade** – É toda matriz $n \times n$, denotada por $\mathbf{I_n}$ ,tal que

$$\begin{cases} a_{ij}=1 \quad se \quad i=j \\ a_{ij}=0 \quad se \quad i \neq j \end{cases}$$

**Exemplos.**

$$\mathbf{I}_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{I}_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{I}_4=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Matriz triangular inferior** – É toda matriz $n \times n$ tal que $a_{ij}=0 \quad se \quad i<j$

**Exemplo.**

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

- **Matriz triangular superior** - É toda matriz $n \times n$ tal que $a_{ij}=0 \quad se \quad i>j$

**Exemplo.**

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

**Operações com Matrizes**

**Igualdade de Matrizes**

Duas matrizes **A** e **B** são ditas iguais se tem o mesmo tamanho e seus elementos correspondentes são iguais, isto é, $a_{ij} = b_{ij}$ para quaisquer $i$ e $j$.

**Adição de Matrizes**

Se **A** e **B** são matrizes de mesmo tamanho, então a adição (e subtração) destas matrizes é definida por

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}+(-\mathbf{B})=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -b_{11} & -b_{12} & \cdots & -b_{1n} \\ -b_{21} & -b_{22} & \cdots & -b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_{m1} & -b_{m2} & \cdots & -b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{bmatrix}$$

**Exemplo.**

Sejam $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

**a)** $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 4+1 & 0+1 & 5+1 \\ -1+3 & 3+5 & 2+7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 2 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

b) **A** + **C** não é definida

**Multiplicação de matriz por escalar**

Se $\alpha$ um escalar, o produto $\alpha\mathbf{A}$ é definido por

$$\alpha\mathbf{A}=\alpha\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

**Exemplos.**

Sejam $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}4 & 0 & 5\\ -1 & 3 & 2\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 5 & 7\end{bmatrix}$ e $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

**a)** $2\mathbf{A}=2\begin{bmatrix}4 & 0 & 5\\ -1 & 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 0 & 10\\ -2 & 6 & 4\end{bmatrix}$

**b)** $3\mathbf{A}-4\mathbf{B}=3\begin{bmatrix}4 & 0 & 5\\ -1 & 3 & 2\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 5 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & 0 & 15\\ -3 & 9 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & -4 & -4\\ -12 & -20 & -28\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & -4 & 11\\ -15 & -11 & -22\end{bmatrix}$

**Multiplicação de matriz por matriz**

Se **A** é uma matriz $m \times r$ e **B** é uma matriz $r \times n$ então a *matriz produto* **C = AB** é uma matriz $m \times n$ cujos elementos são calculados por

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ir}b_{rj}$$

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}_{mxr}\mathbf{B}_{rxm}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn}\end{bmatrix}$$

$c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+...+a_{1r}b_{r1}$

$c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+...+a_{1r}b_{r2}$

$c_{1n}=a_{11}b_{1n}+a_{12}b_{2n}+...+a_{1r}b_{rn}$

$c_{21}=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+...+a_{2r}b_{r1}$

$c_{22}=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\ldots a_{2r}b_{r2}$

$c_{2n}=a_{21}b_{1n}+a_{22}b_{2n}+\ldots a_{2r}b_{rn}$

$c_{m1}=a_{m1}b_{11}+a_{m2}b_{21}+\ldots a_{mr}b_{r1}$

$c_{m2}=a_{m1}b_{12}+a_{m2}b_{22}+\ldots a_{mr}b_{r2}$

$c_{mn}=a_{m1}b_{1n}+a_{m2}b_{2n}+...+a_{mr}b_{rn}$

**Obs.** Conforme a definição, na multiplicação de matrizes, o número de colunas do primeiro fator deve ser igual ao número de linhas do segundo fator.

**Exercício.**

a) Sejam $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, calcule **AB**

b) Sejam $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$**,** calcule **AB** e **BA**

**Propriedades da álgebra matricial**

Admitindo que as matrizes **A,B** e **C** são tais que as operações indicadas são definidas e sendo $\alpha$ e $\beta$ escalares, valem as seguintes propriedades:

a) **A+B =B+A** propriedade comutativa da adição

b) **A+(B+C) =(A+B)+C** propriedade associativa da adição

c)**A(BC) = (AB)C** propriedade associativa da multiplicação

d) **(A+B)C=AC+BC** propriedade distributiva à direita

e) **A(B+C) =AB+AC** propriedade distributiva à esquerda

f) $(\alpha\beta)\mathbf{A} = \alpha(\beta\mathbf{A})$

g) $\alpha(\mathbf{AB}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B})$

h) $(\alpha+\beta)\mathbf{A} = \alpha A+\beta\mathbf{A}$

i) $\alpha(\mathbf{A+B}) = \alpha\mathbf{A}+\alpha\mathbf{B}$

j) **IA = AI = A**

k) **A + 0 = A**

l) **A + (-A) = 0**

**Observações**

- Em geral, **AB**$\neq$**BA**.
- As leis de cancelamento não valem para a multiplicação de matrizes. Isto é, se **AB** = **AC**, então não é verdade, em geral, que **B** = **C**.
- Se o produto **AB** for a matriz nula, não se pode concluir, em geral, que **A = 0** ou **B** = **0**.

**Exemplo.**

Dadas as matrizes $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ e $\mathbf{D}=\begin{bmatrix}3 & 7\\ 0 & 0\end{bmatrix}$**,** calcule **AB, BA, AC** e **AD** e verifique as afirmações nas observações anteriores.

**Matriz Transposta**

A *transposta* da matriz $\mathbf{A}_{m\times n}=(a_{ij})$ é a matriz definida e denotada por

$$\mathbf{A}^t=(a_{ji})$$

para todo $i = 1,...,m$ e $j = 1,...,n$

**Exemplo.**

a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ -10 & 5 & 3\end{bmatrix}$ e $\mathbf{A}^t=\begin{bmatrix}1 & -10\\ 4 & 5\\ 2 & 3\end{bmatrix}$

b) $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$ e $\mathbf{B}^t=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}$

c) $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}4\end{bmatrix}$ e $\mathbf{C}^t=\begin{bmatrix}4\end{bmatrix}$

**Propriedades da matriz transposta**

Se **A** e **B** são tais que as operações indicadas são definidas e sendo $\alpha$ um escalar real qualquer, então:

a) $(\mathbf{A}^t)^t = \mathbf{A}$

b) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^t = \mathbf{A}^t + \mathbf{B}^t$

c)) $(\alpha\mathbf{A})^t = \alpha\mathbf{A}^t$

d) $(\mathbf{AB})^t = \mathbf{B}^t\mathbf{A}^t$

A matriz transposta de **A** é algumas vezes usada como definição alternativa para o produto escalar de dois vetores, em termos de multiplicação matricial.

Se $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$, então $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n = \mathbf{u}^t \mathbf{v}$

**Observações.**

- Se $\mathbf{A^t} = \mathbf{A}$ então **A** é uma matriz simétrica;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 7 \\ -1 & 7 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{A}^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 7 \\ -1 & 7 & 5 \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

- $\mathbf{A^t} = -\mathbf{A}$ então **A** é uma matriz anti-simétrica;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -9 \\ 4 & 0 & 3 \\ 9 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{A}^t = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 9 \\ -4 & 0 & -3 \\ -9 & 3 & 0 \end{bmatrix} = -\mathbf{A}$$

- $\mathbf{A^t A}$ e $\mathbf{A A^t}$ resultam em matrizes simétricas

Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{AA^t} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 11 \\ 11 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A^t A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 10 & 14 \\ 4 & 14 & 20 \end{bmatrix}$$

**Matriz Inversa**

Se **A** é uma matriz $n \times n$, uma *inversa* de **A** é uma matriz $n \times n$, denotada por $\mathbf{A}^{-1}$, que satisfaz

$$\mathbf{AA^{-1}} = \mathbf{I} \quad \text{e} \quad \mathbf{A^{-1}A} = \mathbf{I}$$

onde **I** é a matriz identidade. Se $\mathbf{A}^{-1}$ existir então **A** é dita *inversível*. Senão, é dita não inversível ou *singular*.

**Exemplos**.

a) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ é inversa de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, pois

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I} \quad \text{e} \quad \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

**Alguns resultados importantes sobre a matriz inversa**

Se **A** e **B** são tais que as operações indicadas são definidas e sendo $\alpha$ um escalar real qualquer, então:

a) $\mathbf{A}^{-1}$ é única

b) $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

c) Se **A** é inversível, então $\mathbf{A}^{t}$ é inversível e $(\mathbf{A}^{t})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{t}$

**Potência de uma matriz**

Se **A** é uma matriz quadrada, definimos suas potências inteiras não-negativas por

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{A}^n = \underbrace{\mathbf{AAA}\ldots\mathbf{A}}_{\text{n fatores}}, \qquad n > 0$$

Se, além de quadrada, a matriz for inversível, então definimos as potências inteiras negativas por

$$\mathbf{A}^{-n} = (\mathbf{A}^{-1})^n = \underbrace{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\ldots\mathbf{A}^{-1}}_{\text{n fatores}}$$

Valem as regras usuais de expoentes:

a) $\mathbf{A}^r\mathbf{A}^s = \mathbf{A}^{r+s}$ b) $(\mathbf{A}^r)^s = \mathbf{A}^{rs}$

c) $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$ d) $(\mathbf{A}^n)^{-1} = \mathbf{A}^{-n}$

e) $(\alpha\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\alpha}\mathbf{A}^{-1}$

**Exemplos**.

Sejam $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

a) $\mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 & 120 \\ 24 & 67 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{A}^{-3} = (\mathbf{A}^{-1})^3 = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 67 & -120 \\ -24 & 43 \end{bmatrix}$

**Determinante**

O *determinante* de uma matriz é uma função que associa a toda matriz quadrada um número real denotado por det(**A**).

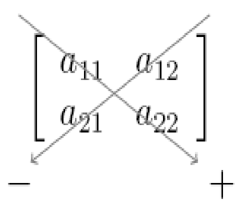
**Fórmula de Leibnitz**

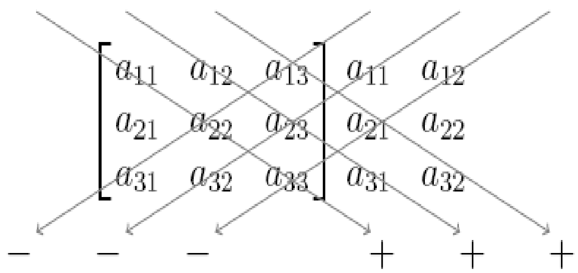
- O determinante é calculado pela soma (com sinal) de todos os produtos elementares de **A**.

$$\det(\mathbf{A})_{2\times2} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- $$\det(\mathbf{A})_{3\times3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Uma regra prática para obter determinantes de matrizes 2 x 2 e 3 x 3 é a *Regra de Sarrus*, ilustrada a seguir.





**Fórmula de Laplace**

Também designada como *expansão em co-fatores* ao longo da *i*-ésima linha (ou da *j*-ésima coluna).

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij}, \qquad \text{onde} \quad \underbrace{C_{ij}}_{\text{co-fator ij de } \mathbf{A}} = (-1)^{i+j}.\ \underbrace{M_{ij}}_{\text{determinante menor}}$$

**Exemplo.**

A expansão de Laplace ao longo da linha i = 2, para a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{3} a_{2j}C_{2j} = a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23}$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \qquad C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 11 \qquad C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Então,

$$\det(\mathbf{A}) = 1(7) + 0(11) + 2(-1) = 5$$

**Exercício**.

a) Calcule o determinante da matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$.

b) Escreva uma expansão de Laplace para o cálculo do determinante da matriz $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

**Obs.** Pelos padrões atuais, uma matriz 25 x 25 é pequena. No entanto, seria impossível calcular um determinante 25 x 25 pela expansão em cofator. Em geral, a expansão em cofator requer $n!$ multiplicações, e 25! é aproximadamente igual a 1,5 x $10^{25}$. Para ter uma ideia, se um supercomputador pudesse realizar um trilhão de multiplicações por segundo, ele levaria cerca de 500 000 anos para calcular um determinante por esse método. (*Fonte: Álgebra Linear e suas Aplicações – David C. Lay*)

**Propriedades dos Determinantes**

1) **Casos em que o determinante é igual a zero:**

- Quando todos os elementos de uma linha (coluna) são nulos;
- Quando duas linhas (colunas) paralelas são múltiplas;
- Quando uma de suas linhas (colunas) é uma combinação linear de outras paralelas a ela.

**2) Transformações que alteram o determinante:**

- Trocar de posição duas linhas (colunas) paralelas $\Rightarrow$ mudança de sinal
- Multiplicar uma linha (coluna) por um escalar $\alpha \Rightarrow \alpha\ \det(\mathbf{A})$.

**3) Transformações que não alteram o determinante**

- Trocar ordenadamente as linhas pelas colunas;
- Somar a uma linha (coluna) um múltiplo de outra linha (coluna).

Outras propriedades:

- $\det(\alpha\mathbf{A}) = \alpha^n \det(\mathbf{A})$
- $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$
- $\det(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \neq \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})$ quase sempre
- $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \dfrac{1}{\det(\mathbf{A})}$
- $\det(\mathbf{A}^t) = \det(\mathbf{A})$
- Se **A** é uma matriz triangular superior (ou inferior), $\det(\mathbf{A})$ é o produto dos elementos da diagonal principal.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ddots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}...a_{nn}$$

**Exercícios**

1) Calcule **A** + **B**, **A** – **B** e 5**A** – 3**B** se $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}$.

**2)** Caso seja possível encontre os produtos de **AB** e **BA.**

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}$ c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

3) Encontre a matriz **X**, na equação **AX** = **B**, onde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

4) Resolva a equação $\frac{3}{2}A + 2B = \frac{X}{2} - B$, sabendo que $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

5) Calcule **A- 2I₃** quando $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}4 & -5 & 3\\ 5 & 7 & -2\\ -3 & 2 & -1\end{bmatrix}$

6) Para que valores de $a$ a matriz $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a & a^2-1 & -3\\ a+1 & 2 & a^2+4\\ -3 & 4a & -1\end{bmatrix}$ é simétrica?

7) Calcule os seguintes determinantes, pelo método da expansão em cofatores (Laplace).

a) $\begin{vmatrix}2 & 3 & -1 & 2\\ 0 & 4 & -3 & 5\\ 1 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 4 & 1 & 0\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & 3\\ -1 & 2 & 1 & 4\\ 3 & 4 & 6 & -1\\ 2 & 0 & 4 & 1\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}8 & 9 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$

8) Resolva as equações:

a) $\begin{vmatrix}x+3 & 2x-1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=0$ b) $\begin{vmatrix}2 & x & x\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}=12$

9) Seja $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & 3 & 4\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}$

a) Verifique que $\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 3\end{bmatrix}$

b) Use $\mathbf{A}^{-1}$ para resolver a equação **AX** = **b**, onde **b = [** 1, 1, 1]$^{T}$

10) Determine λ tal que $\begin{vmatrix}2-\lambda & 4\\ 3 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0$

11) Determine $k$ de modo que a matriz dos coeficientes do sistema linear a seguir seja inversível.

$$\begin{cases}x+y+z=0\\ y+kz=0\\ kx+ky+k^2z=0\end{cases}$$