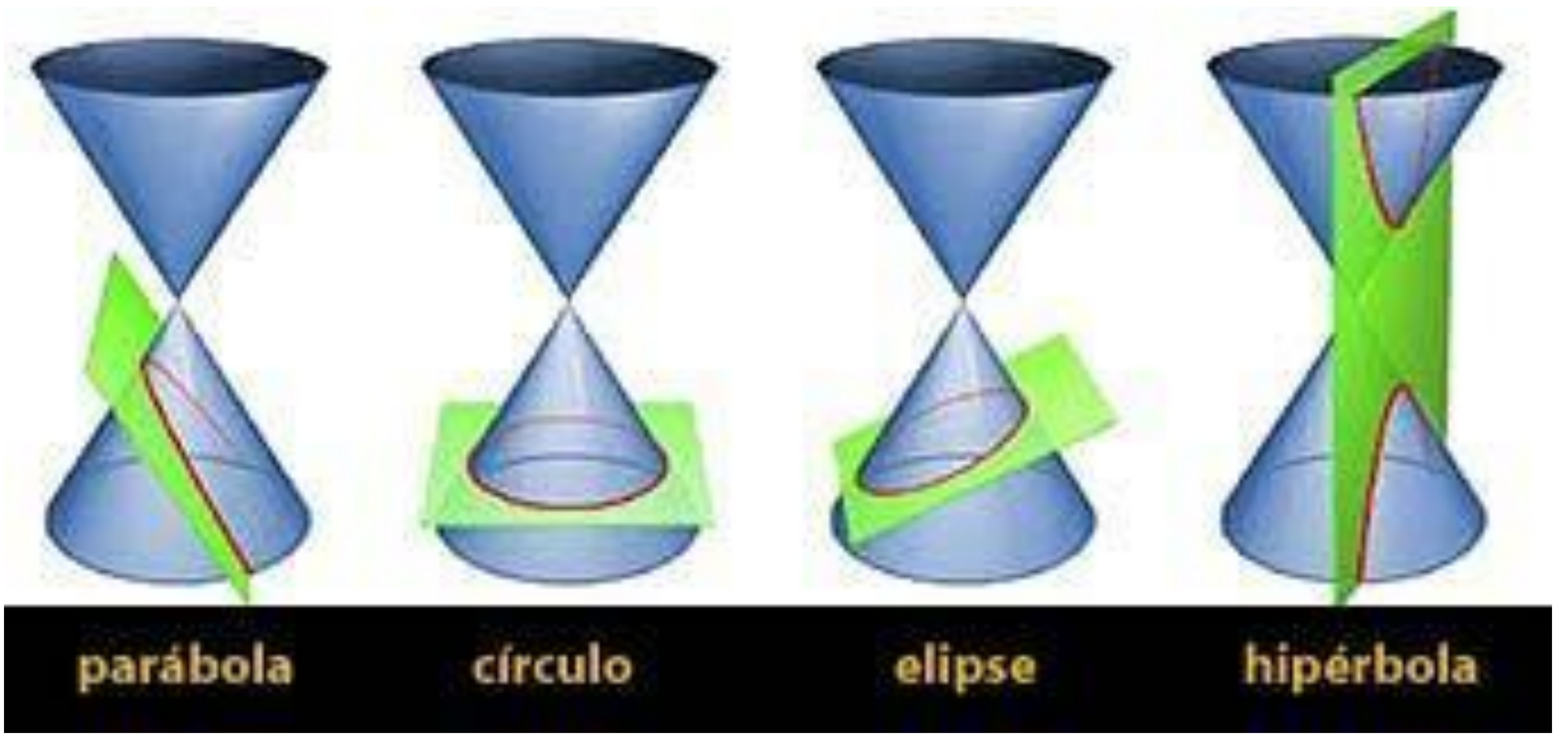
Seções Cônicas

Matemática para Engenharia I

2016/1 – Profa. Simone

Seções Cônicas

- *As curvas obtidas pela interseção de uma plano secante com uma superfície cônica são denominadas seções cônicas:*



Seções Cônicas
Equação geral do 2º grau

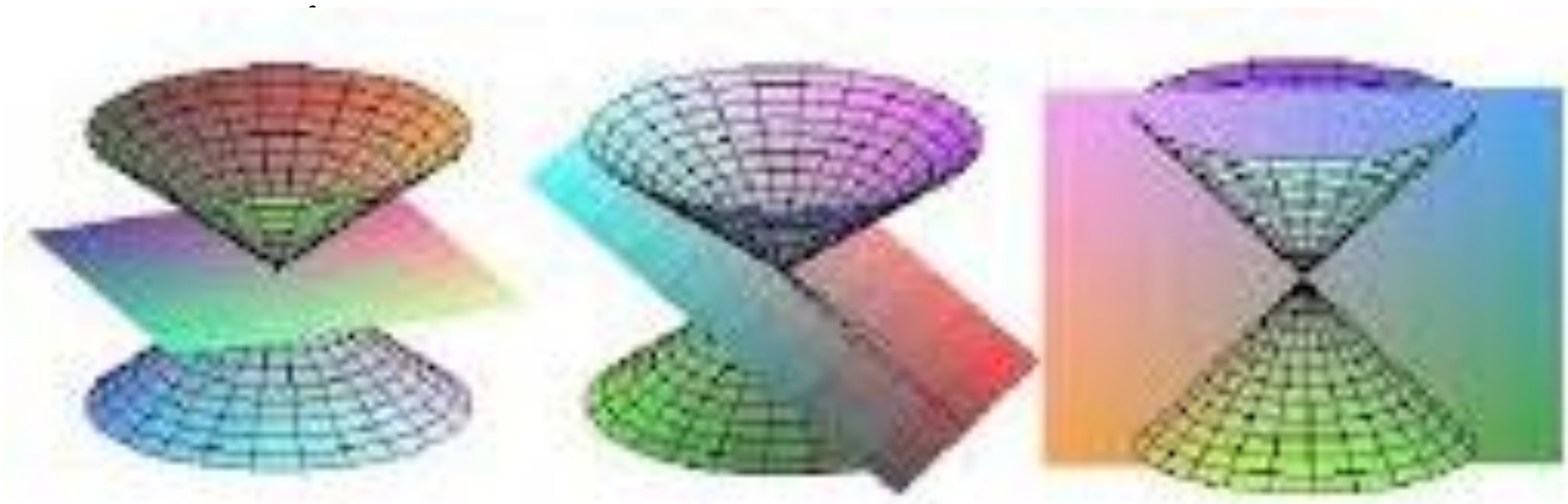
- *A equação de qualquer seção cônica pode ser escrita como uma equação do 2º grau nas variáveis x e y, da forma:*

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + Exy + F = 0$$

onde A e B não são simultaneamente nulos.

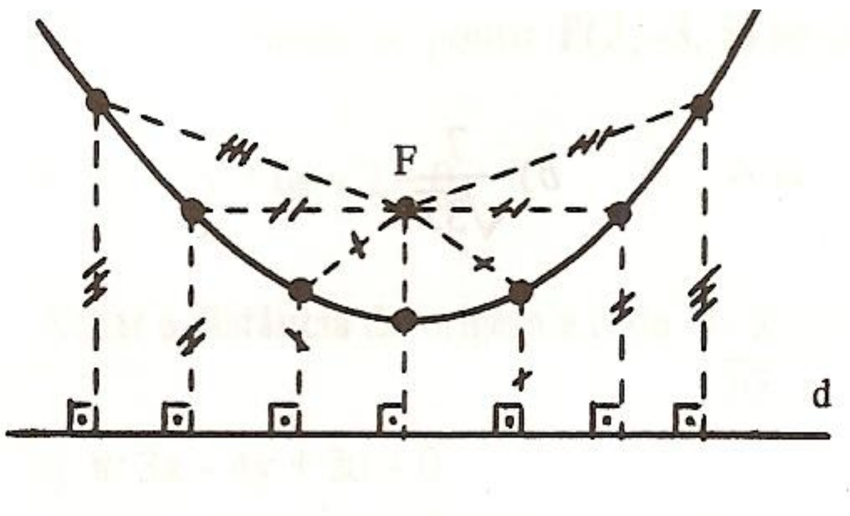
Seções Cônicas
Equação geral do 2º grau

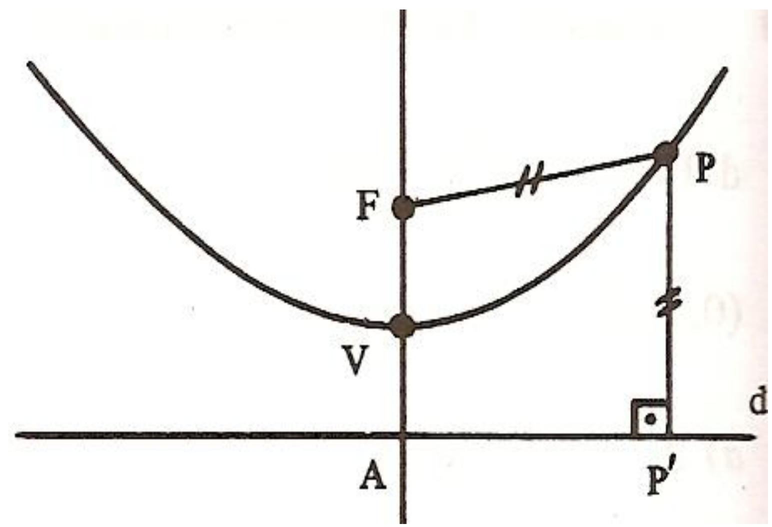
- *A recíproca não é verdadeira, uma equação 2º grau nas variáveis x e y, da forma pode descrever uma cônica degenerada – ponto, reta, par de retas ou, ainda, não descrever um lugar*



Parábola

- *Parábola é o lugar geométrico dos pontos de um plano que são equidistantes de um ponto fixo (foco) e de uma reta (diretriz).*

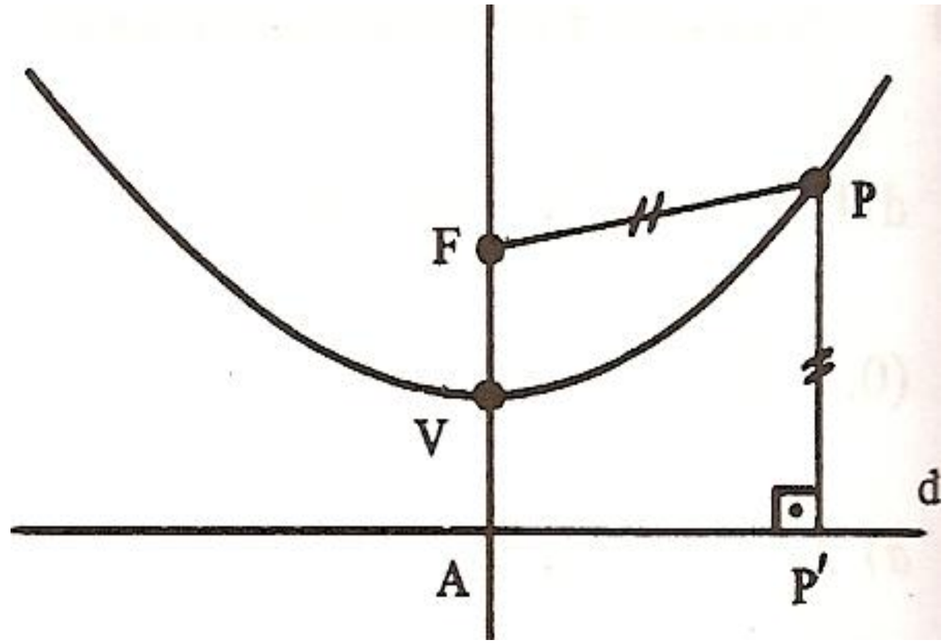




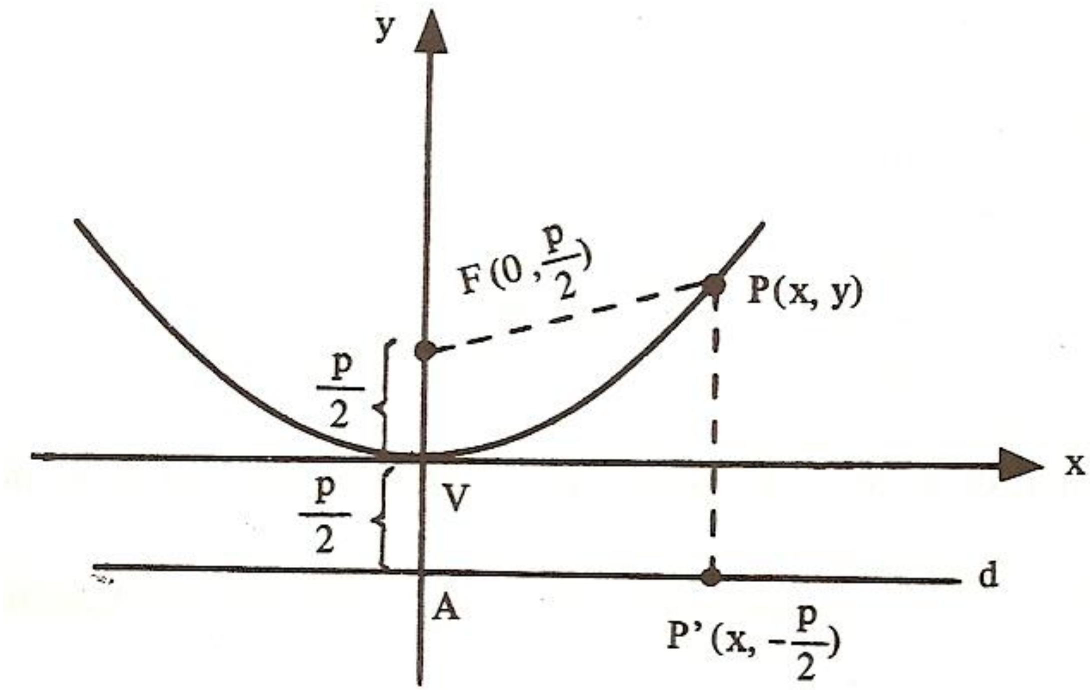
Parábola - propriedade

Elementos da Parábola

- *Foco:* ponto F
- *Diretriz:* reta d
- *Eixo:* reta que passa pelo foco e é perpendicular à diretriz
- *Vértice:* ponto V, interseção da parábola com o seu eixo



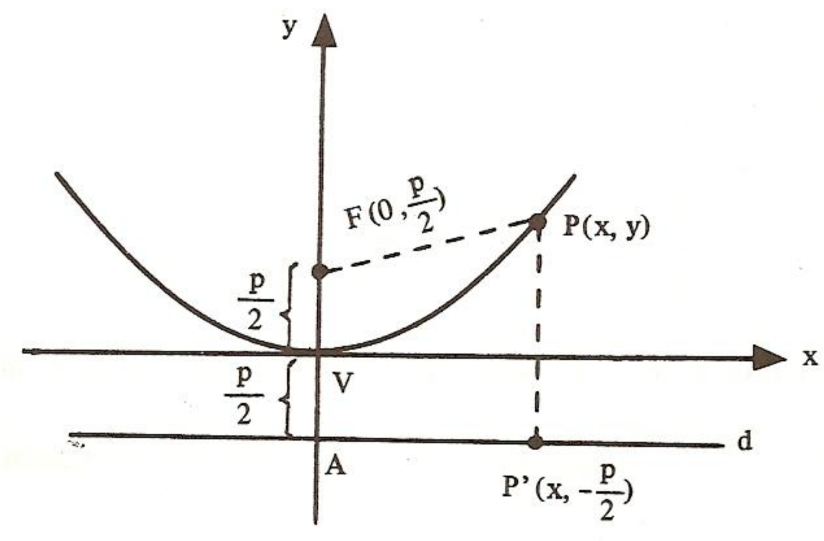
Equação reduzida: vértice na origem e eixo sobre o eixo dos y



$$d(P,F) = d(P,P')$$

$$\left\|\overrightarrow{FP}\right\| = \left\|\overrightarrow{P'P}\right\|$$

Equação reduzida: vértice na origem e eixo sobre o eixo dos y

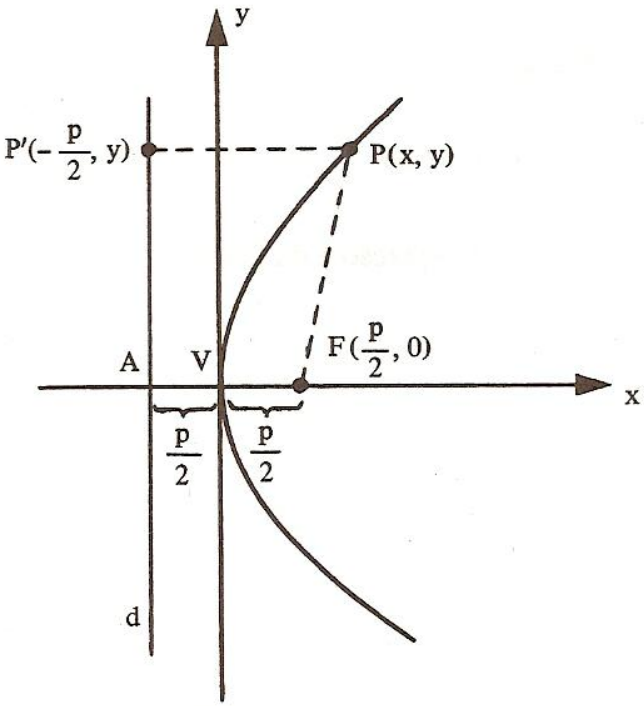


$$x^2 = 2py$$

$$p > 0 \ e \ y > 0 \Rightarrow concavidade \ para \ cima$$

$$p < 0 \ e \ y < 0 \Rightarrow concavidade \ para \ baixo$$

Equação reduzida: vértice na origem e eixo sobre o eixo dos x



$$y^2 = 2px$$

$$p > 0 \text{ e } x > 0 \Rightarrow \textit{concavidade para direita}$$

$$p < 0 \text{ e } x < 0 \Rightarrow \textit{concavidade para esquerda}$$

Exemplo 1.

- *Para cada uma das parábolas definidas a seguir, construir o gráfico e encontrar o foco e uma equação da diretriz.*

- a) $x^2 - 10y = 0$

- b) $x = -y^2/8$

Elipse

- *Elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos (focos) é constante.*

Elementos da Elipse

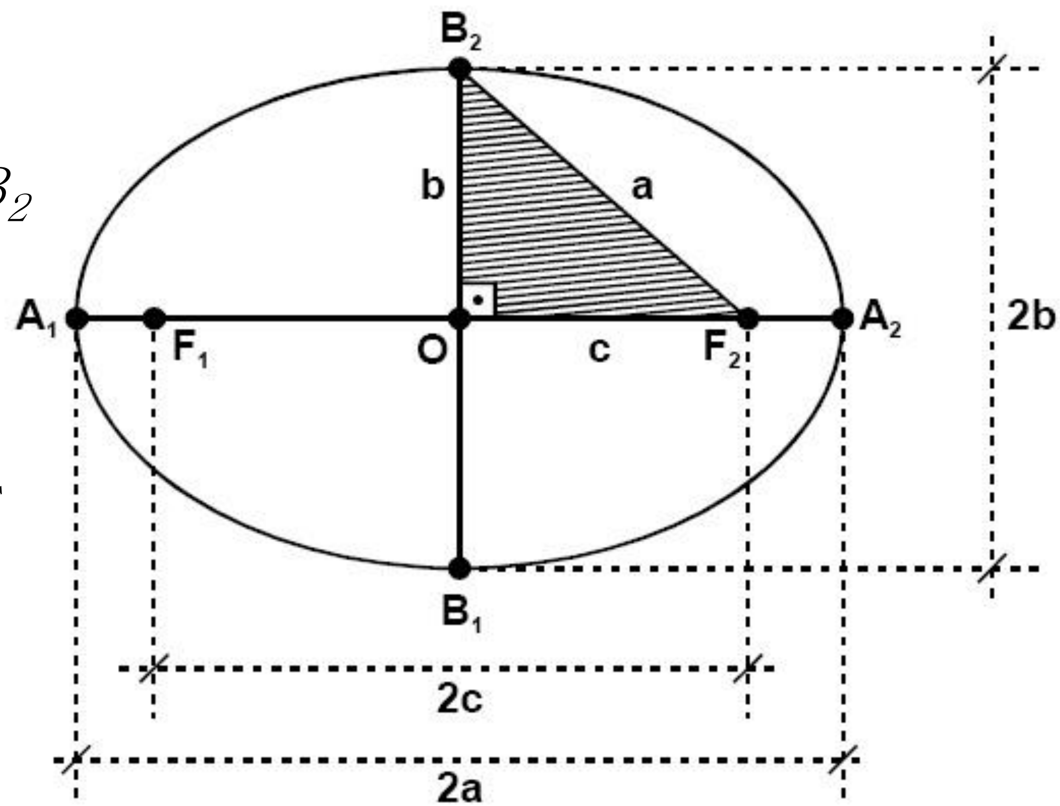
- *Focos:* pontos F_1 e F_2

- *Eixo maior:* segmento A_1A_2 que passa pelos focos

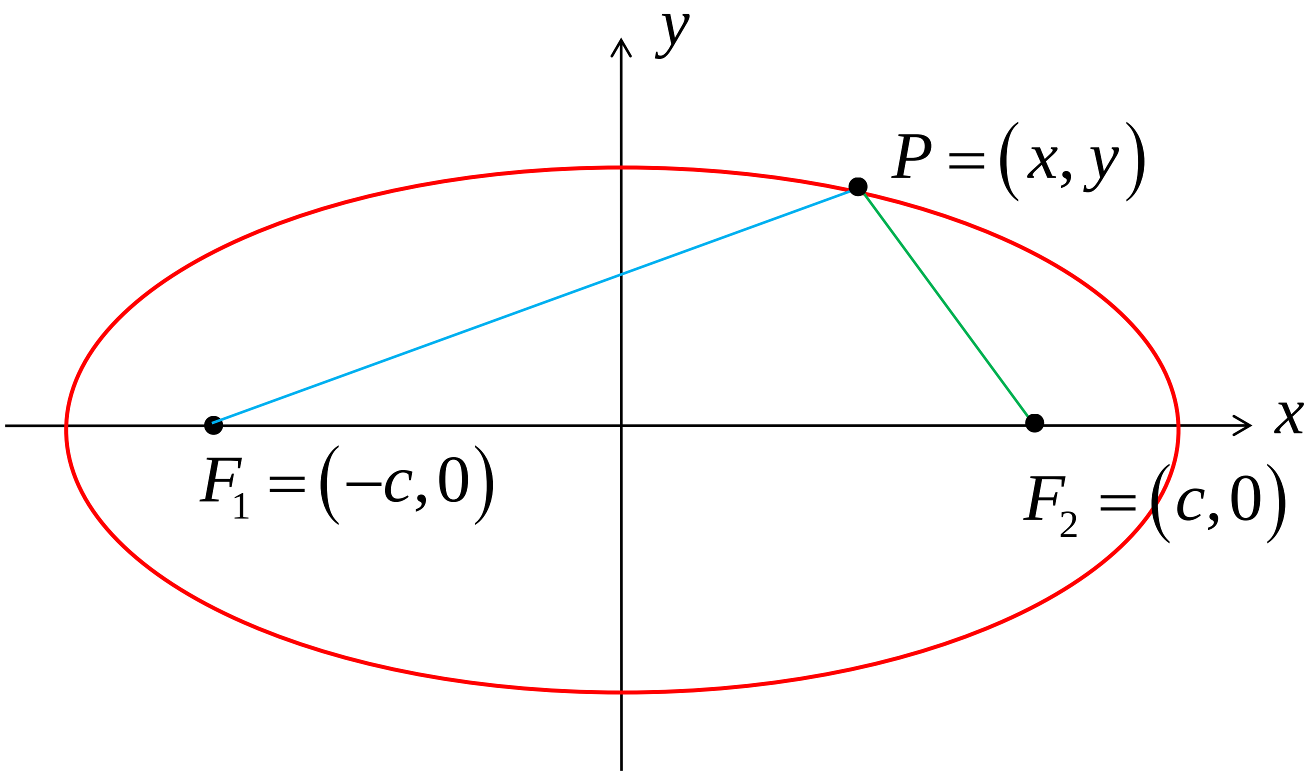
- *Eixo menor:* segmento B_1B_2

- *Vértices:* pontos A_1, A_2, B_1 e B_2
- *Centro:* ponto médio C dos focos e dos vértices

- *Distância Focal:* distância entre os focos



Equação reduzida: centro na origem e eixo maior sobre o eixo dos x



$$d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$$

$$\left\|\overrightarrow{PF_1}\right\|+\left\|\overrightarrow{PF_2}\right\|=2a$$

Equação reduzida: centro na origem e eixo maior sobre o eixo dos x

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$x^2+2xc+c^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2xc+c^2$$

$$\left(a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2=\left(a^2-xc\right)^2$$

$$a^2\left((x-c)^2+y^2\right)=a^4-2a^2xc+x^2c^2$$

Equação reduzida: centro na origem e eixo maior sobre o eixo dos x

$$a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

$$a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$\left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right)$$

$Como \ a^2 = b^2 + c^2,$

$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Equações Reduzidas

- *Eixo maior sobre o eixo dos x e C(0,0)*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

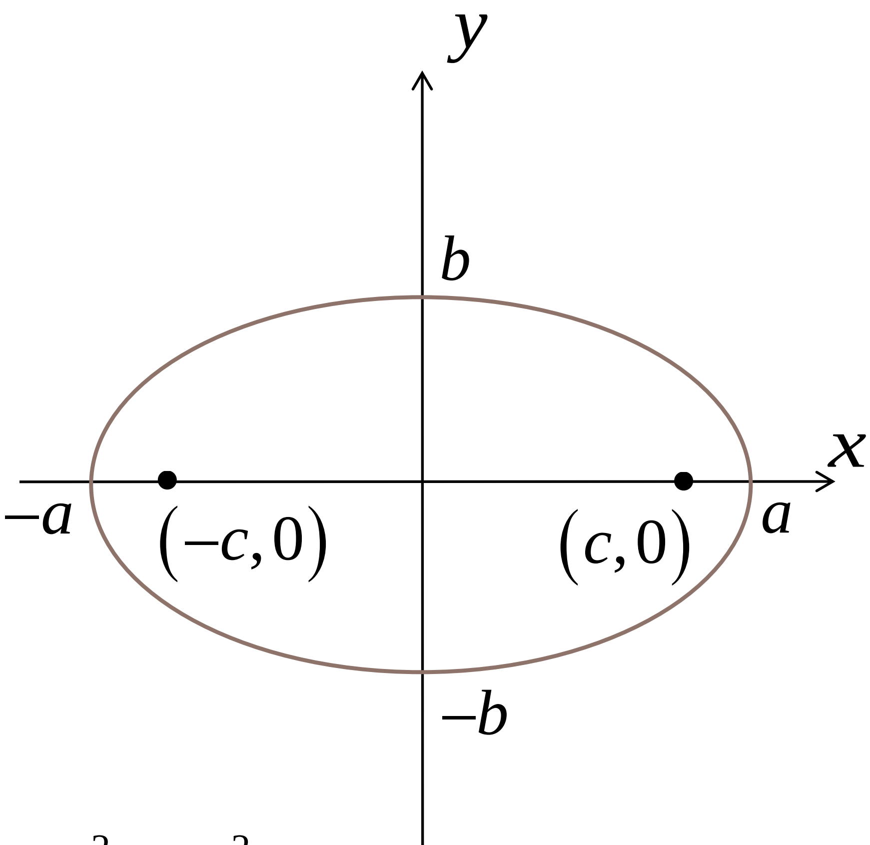
- *Eixo maior sobre o eixo dos y e C(0,0)*

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

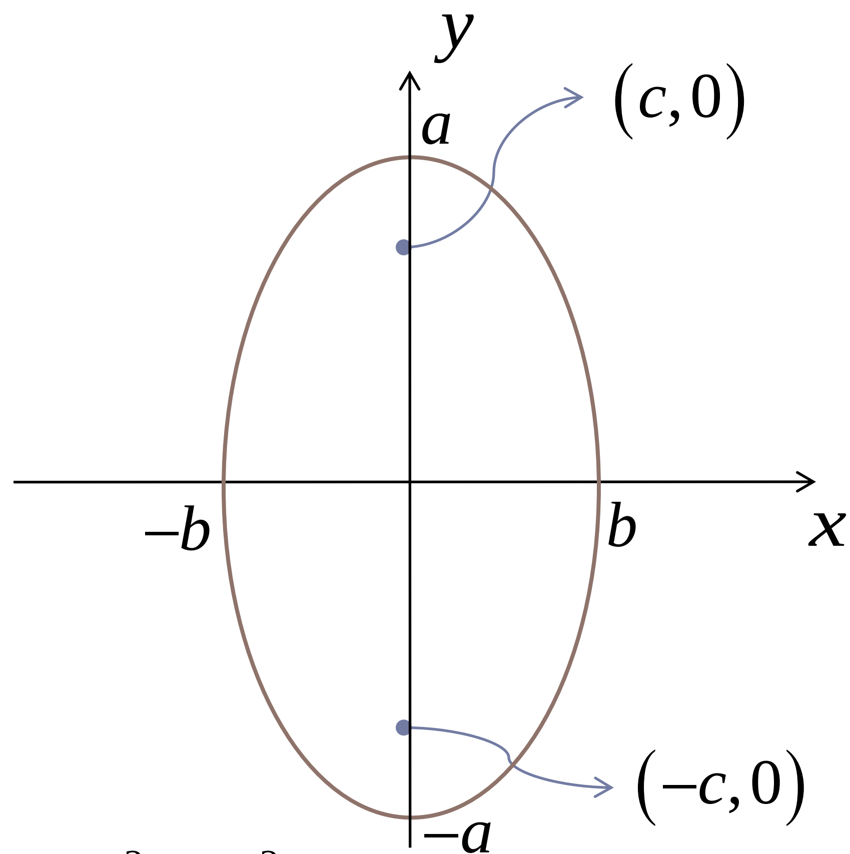
- *Relação fundamental*

$$a^2=b^2+c^2$$

Equações Reduzidas



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$$

Observações

- *Como* $a^2 = b^2 + c^2$ *temos que*

$$a^2 > b^2 \Rightarrow a > b$$

- *Assim, o maior dos denominadores da equação reduzida representa o número* a^2 *, onde* a *é a medida do semi-eixo maior.*

- *Se na equação da elipse o número* a^2 *é denominador de* x^2 *, a elipse tem seu eixo maior sobre o eixo x.*

Exemplo 2

- *Para cada elipse, definida pelas equações a seguir, determine a medida dos semi-eixos, as coordenadas dos focos e um esboço do gráfico.*

a) $9x^2 + 25y^2 = 225$

b) $4x^2 + y^2 - 16 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 9 = 0$

d) $4x^2 + \dfrac{y^2}{3} = 1$

Exemplo 3

- *Esboce o gráfico e deduza uma equação para cada elipse que satisfaça as condições dadas.*

  a) Centro $C(0,0)$, focos $F_1(-4,\ 0)$ *e* $F_2(4,\ 0)$ *e eixo maior igual a* 10

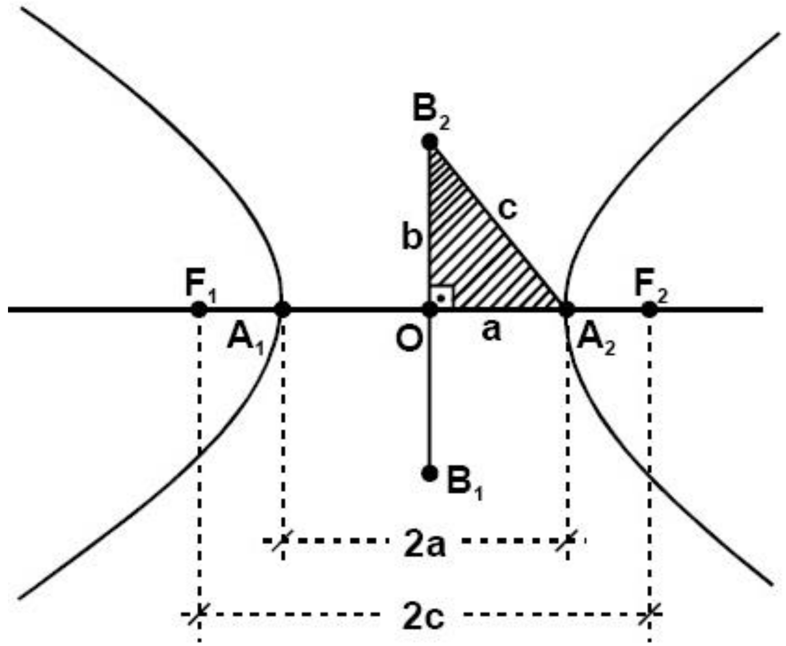
  b) Centro $C(0,0)$, *eixo menor igual a 6, focos no eixo x e passando pelo ponto* $P\left(2\sqrt{5},2\right)$

Hipérbole

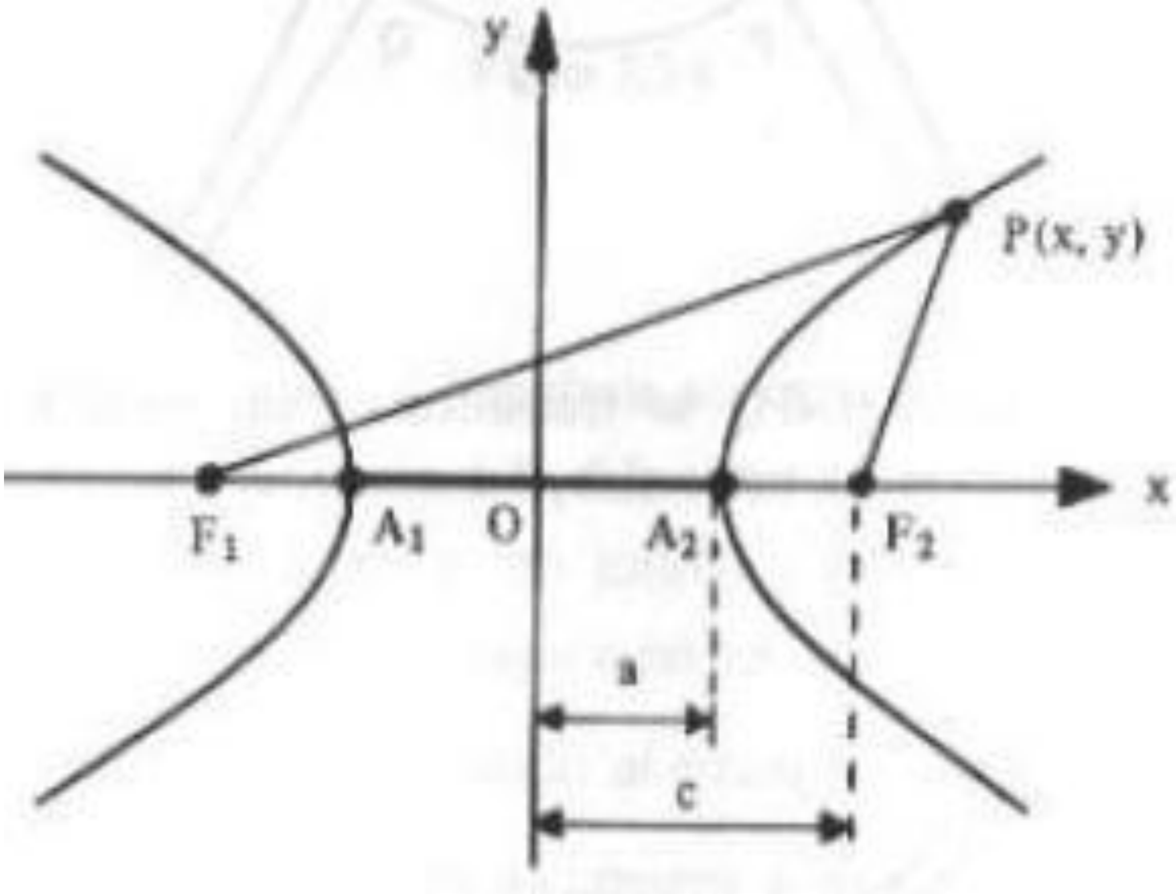
- *Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos de um plano cujo módulo da diferença das distâncias a dois pontos fixos (focos) é constante.*

Elementos da Hipérbole

- *Focos:* pontos F_1 e F_2
- *Distância Focal:* é a distância $2c$ entre os focos
- *Centro:* ponto médio C do segmento F_1F_2
- *Vértices:* pontos A_1 e A_2
- *Eixo Real(transverso):* segmento A_1A_2
- *Eixo* imaginário(c*onjugado): é o segmento* B_1B_2



Equação reduzida: centro na origem e eixo real sobre o eixo dos x



$$\left| d\left(P, F_1\right) - d\left(P, F_2\right) \right| = 2a$$

$$\left\| \overrightarrow{PF}_1 \right\| - \left\| \overrightarrow{PF}_2 \right\| = \pm 2a$$

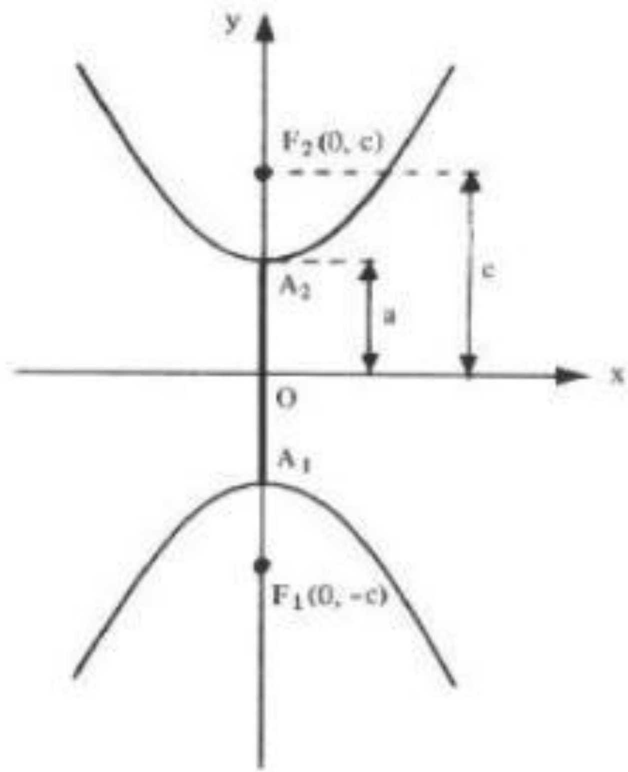
Equação Reduzida da Hipérbole

- *Eixo real sobre o eixo dos x*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

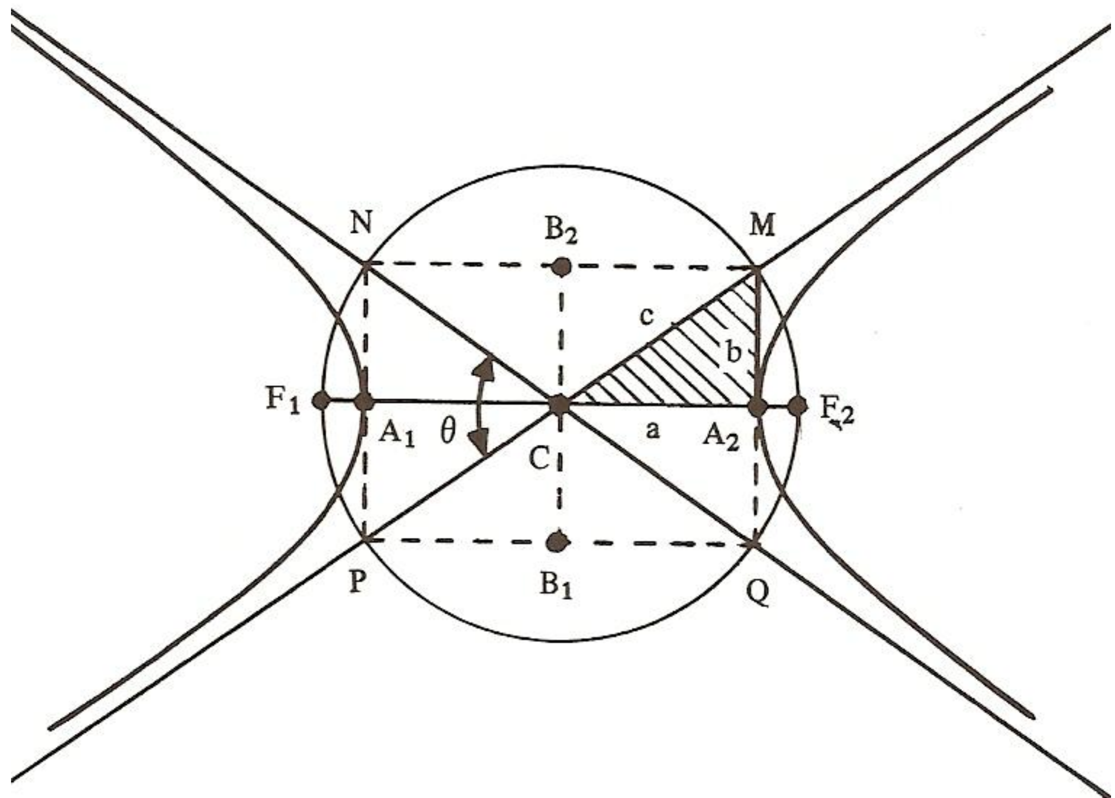
- *Eixo real sobre o eixo dos y*

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$



Assíntotas

- *As retas* $y = \pm\frac{b}{a}x$ *são chamadas assíntotas da hipérbole.*



- *São retas das quais a hipérbole se aproxima cada vez mais à medida que os pontos se afastam dos focos.*

Exemplo 4.

- *Para as hipérboles definidas a seguir, determine:*

$$9x^2 - 7y^2 - 63 = 0 \qquad e \qquad \frac{y^2}{100} - \frac{x^2}{64} = 1$$

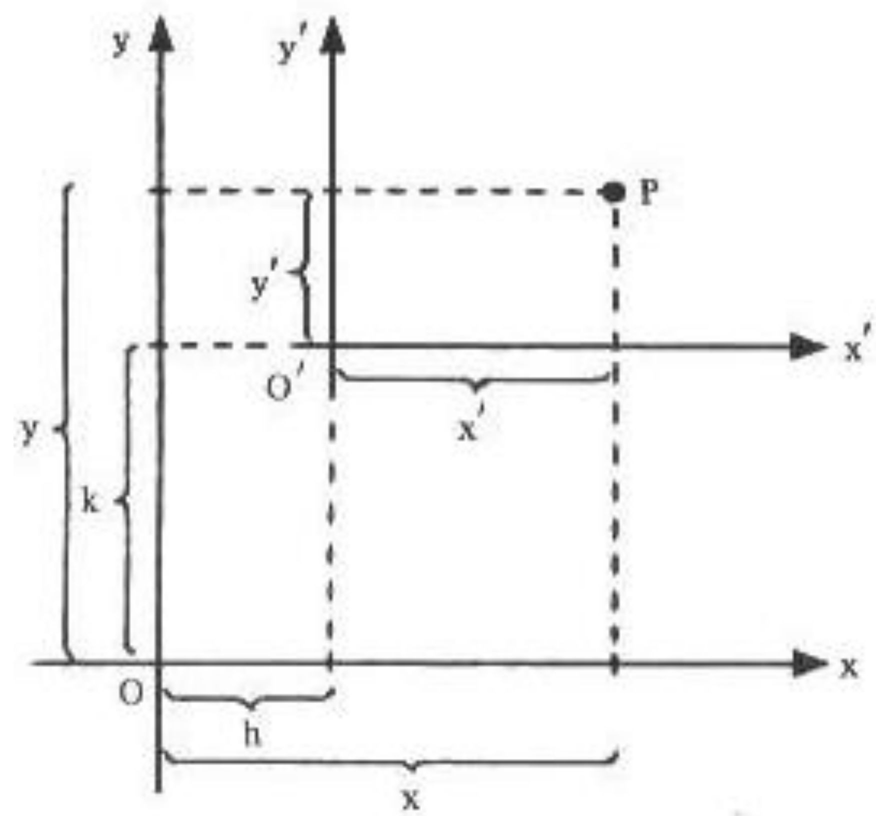
a) *A medida dos semi-eixos*
b) *Um esboço gráfico*
c) *Os vértices*
d) *Os focos*
e) *As equações das assíntotas*

Translação de Eixos

Considere no plano xoy um ponto o'(h,k), arbitrário.

Considere um sistema de coordenadas x'o'y' tal que os eixos o'x', o'y' tenham a mesma unidade de medida, a mesma direção e o mesmo sentido dos eixos ox e oy.

Nestas condições, um sistema pode ser obtido do outro, através de uma translação de eixos.



Translação de Eixos

- Seja um ponto P qualquer do plano tal que suas coordenadas são:

$$P(x, y) \quad \text{em relação ao sistema } xoy$$

$$P(x', y') \text{ em relação ao sistema } x'o'y'$$

Da figura anterior, obtém-se que são as *fórmulas de translação*

$$x = x' + h \qquad e \qquad y = y' + k$$

ou

$$x' = x - h \qquad e \qquad y' = y - k$$

Equação da Parábola de vértice V(h,k)

- *Parábola de vértice V(h,k) e eixo paralelo ao eixo dos y*

$$(x-h)^2 = 2p(y-k)$$

- *Parábola de vértice V(h,k) e eixo paralelo ao eixo dos x*

$$(y-k)^2 = 2p(x-h)$$

Equação da Parábola na forma explícita

- *As equações da parábola obtidas nas anteriormente podem ser escritas na forma explícita:*

$$y = ax^2 + bx + c$$ *eixo paralelo ao eixo dos y*

$$x = ay^2 + by + c$$ *eixo paralelo ao eixo dos x*

Equação da Elipse de centro C(h,k)

- *Eixo maior paralelo ao eixo dos x*

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

- *Eixo maior paralelo ao eixo y*

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Equação da Hipérbole de centro C(h,k)

- *Eixo maior paralelo ao eixo dos x*

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

- *Eixo maior paralelo ao eixo y*

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

Exercícios

- *Livro: Vetores e Geometria Analítica – Paulo Winterle*

  Capítulo 8

  P. 173 – Exercícios 1,3,11,13,32,36, 39, 40 e 52
  P. 189 – Exercícios 2, 6, 21, 28 e 31
  P. 207 – Exercícios 2, 4, 14, 38 e 42