Estudo do Plano

Matemática para Engenharia I

Profa. Simone

2016/2

Equação geral do plano

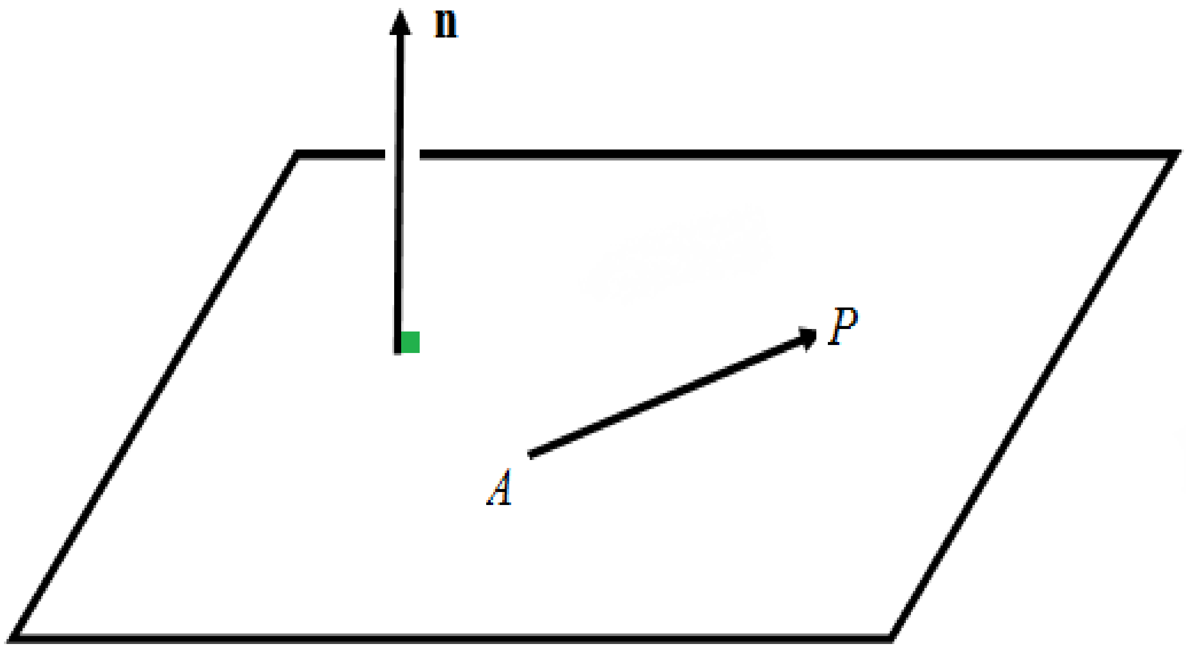
- Dados um ponto

$$A(x_1, y_1, z_1)$$

e um vetor

$$\mathbf{n} = (a, b, c)$$

ortogonal ao plano, dito vetor normal.



Equação geral do plano

Um ponto $P\,(x,\ y, z)$ qualquer pertence ao plano se, e somente se,

$$\overrightarrow{AP} \perp \mathbf{n}$$

Isto é,

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

Equação geral do plano

$$(a,b,c)\cdot(x-x_1, y-y_1, z-z_1)=0$$

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$

$$ax+by+cz-ax_1-by_1-cz_1=0$$

Considerando-se: $d=-ax_1-by_1-cz_1$

$$\boxed{ax+by+cz+d=0}$$

Exemplo 1.

- Determine a equação geral do plano que passa pelo ponto $A(1, 3,-2)$ e tem vetor normal $\mathbf{n} = (2, -3, 2)$

Exemplo 2.

- Dado o plano de equação

$$2x - 3y + 2z + 11 = 0$$

a) Verifique se o ponto $P(-5, 5, 1)$ pertence ao plano

b)Verifique se o ponto $Q(3, 2, 1)$ pertence ao plano

c) Determine dois outros pontos que pertencem ao plano dado

Obs.

- Para obter pontos arbitrários de um plano dado por uma equação geral, deve-se atribuir valores arbitrários para duas das variáveis e calcular o valor da terceira usando a equação do plano.

Exemplo 3.

- Escrever uma equação geral do plano que passa pelo ponto $A(3, 2, 1)$ e é paralelo ao plano do exemplo 2.

Exemplo 4.

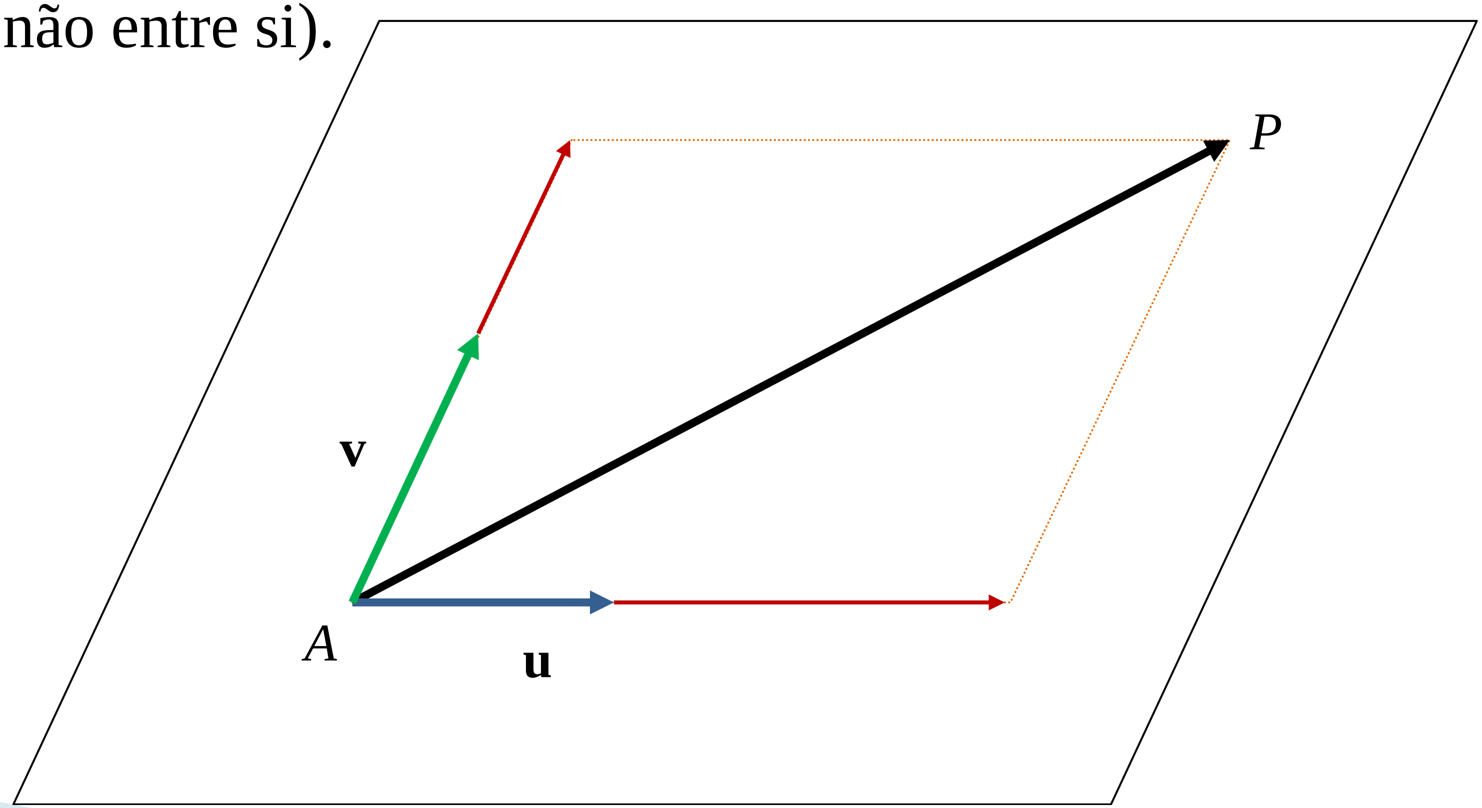
- A reta

$$r:\begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -4 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

é ortogonal ao plano π que passa por $P(2, 1, -2)$. Determinar uma equação geral para este plano e representá-lo graficamente.

Equação vetorial e equações paramétricas do plano

- Dado um ponto $A(x_0,\ y_0,\ z_0)$ pertencente a um plano π e os vetores $\mathbf{u} = (a_1,\ b_1,\ c_1)$ e $\mathbf{v} = (a_2,\ b_2,\ c_2)$ paralelos ao plano (mas não entre si).



Equação vetorial do plano

Todo ponto $P\,(x,\ y,\ z)$ do plano é tal que

$$\overrightarrow{AP} = h\mathbf{u} + t\mathbf{v}$$

$$P - A = h\mathbf{u} + t\mathbf{v}$$

$$P = A + h\mathbf{u} + t\mathbf{v}$$

$$\boxed{(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + h(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2)}$$

onde h e $t \in \mathbb{R}$

Equações paramétricas do plano

- Na equação vetorial do plano, os vetores **u** e **v** são chamados vetores diretores.
- De forma semelhante à equação vetorial da reta, pode-se escrever um conjunto de equações paramétricas para o plano:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 h + a_2 t \\ y = y_0 + b_1 h + b_2 t, \qquad t, h \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + c_1 h + c_2 t \end{cases}$$

Exemplo 5.

- Considere o plano π que passa pelo ponto $A(1, -1, 2)$ e é paralelo aos vetores $\mathbf{u} = (1, 2, -5)$ e $\mathbf{v} = (-2, -1, 4)$. Obter uma equação vetorial, um sistema de equações paramétricas e uma equação geral de π.

Casos particulares da equação geral

- Quando um ou mais coeficientes da equação geral do plano

$$ax + by + cz + d = 0$$

são nulos, o plano ocupará uma posição particular com relação aos eixos ou planos coordenados.

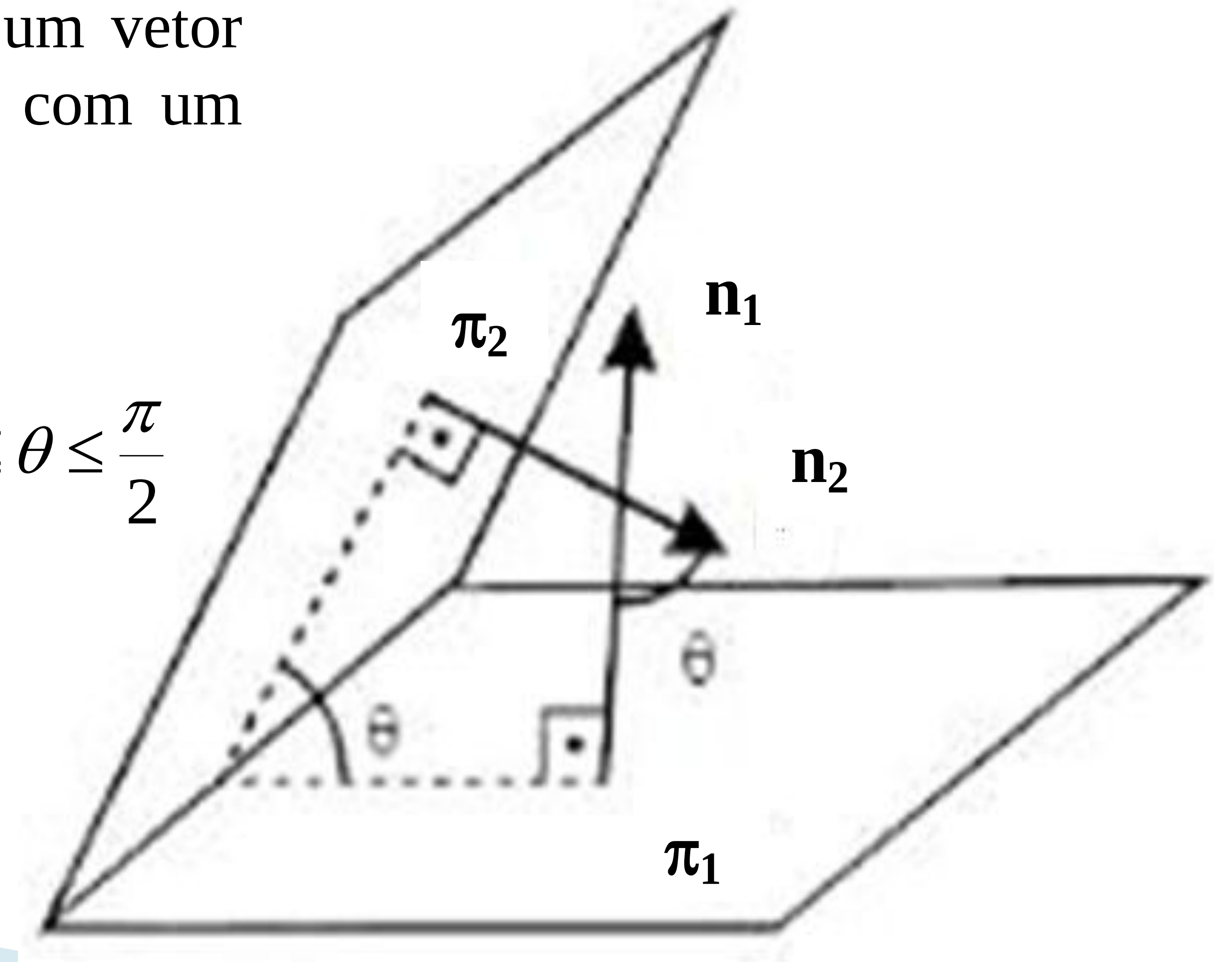
Exemplo 6.

- a) $4x+3y+6z-12=0$
- b) $5x+2y-10=0$
- c) $y+2z-4=0$
- d) $x-5=0$
- e) $z-2=0$

Ângulo de dois planos

- O ângulo de dois planos é o menor ângulo que um vetor normal a π_1 forma com um vetor normal a π_2.

$$\cos\theta = \frac{|\mathbf{n}_1.\mathbf{n}_2|}{\|\mathbf{n}_1\|\|\mathbf{n}_2\|}, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$



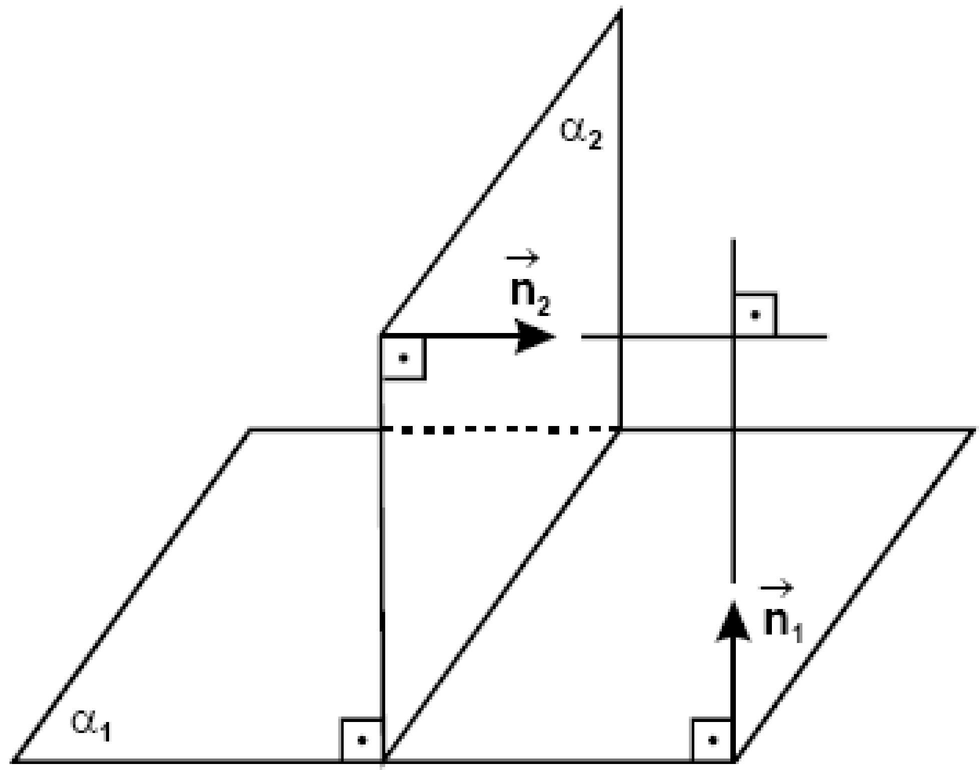
Exemplo 7.

- Determinar o ângulo entre os planos definidos por:

$\pi_1 : x - 2y + z - 6 = 0$ e $\pi_2 : 2x - y - z + 3 = 0$

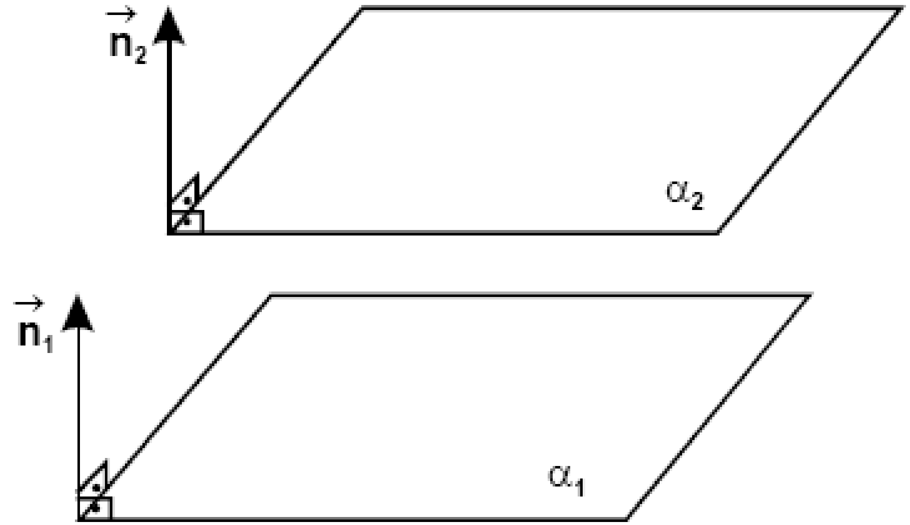
Planos perpendiculares

$$\alpha_1 \perp \alpha_2 \Rightarrow \mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2$$

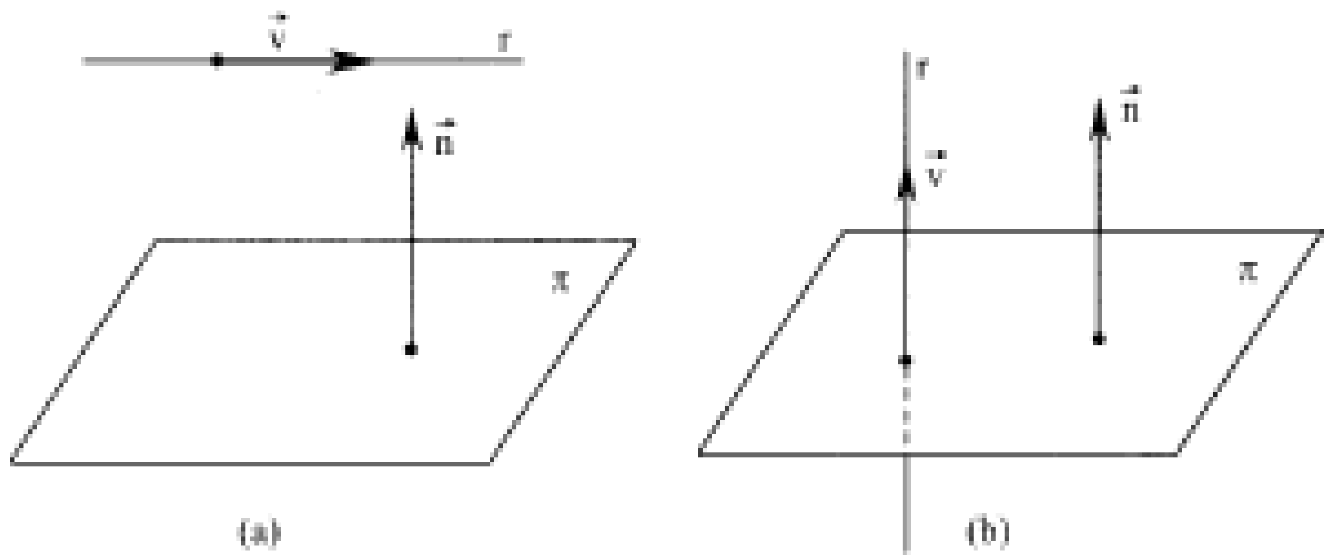


Planos paralelos

$$\alpha_1 \,/\!/\, \alpha_2 \Rightarrow \mathbf{n_1} \,/\!/\, \mathbf{n_2}$$



Paralelismo e perpendicularismo entre reta e plano



$$r \,/\!/\, \pi \Leftrightarrow \mathbf{v} \perp \mathbf{n} \Leftrightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \qquad r \perp \pi \Leftrightarrow \mathbf{v} \,/\!/\, \mathbf{n} \Leftrightarrow \mathbf{v} = \alpha \mathbf{n}$$

Exemplo 8.

- Dados a reta

$$r:\begin{cases} x = -3 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 4t \end{cases}$$

e o plano

$$\pi : mx - y - 2z - 3 = 0$$

determine o valor de *m* para que:

a) a reta seja paralela ao plano

b) a reta seja perpendicular ao plano

Posição relativa de dois planos

- Dois planos podem ser coincidentes, paralelos ou concorrentes. Para determinar a posição relativa de dois planos comparam-se seus vetores normais e verifica-se a existência de interseção.
- Considerando-se os planos π_1 e π_2 e seus respectivos vetores normais $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$:

$$\mathbf{n}_1 = \alpha\mathbf{n}_2 \Rightarrow \begin{cases} \textit{planos paralelos} \text{ (sem interseção)} \\ \textit{planos coincidentes} \text{ (com interseção)} \end{cases}$$

$$\mathbf{n}_1 \neq \alpha\mathbf{n}_2 \Rightarrow \textit{planos concorrentes} \text{ (a interseção é uma reta)}$$

Exemplo 9. Interseção de dois planos

- Determine, se existir, a reta de interseção dos planos

$\pi_1 : -x - y + 2z - 4 = 0$ e $\pi_2 : 2x + y - 3z = 0$

Exemplo 10. Interseção de reta com plano

- Determinar o ponto de interseção da reta

$$r:\begin{cases} x = t \\ y = -10 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

com o plano $\pi : 2x - y + 3z - 9 = 0$