Espaços e Subespaços Vetoriais

PROFA. SIMONE

2016/2

Espaço Vetorial

- Seja um conjunto V no qual duas operações, chamadas de *adição* e *multiplicação por escalar*, estão definidas.

- Se **u** e **v** estão em V, a *soma* de **u** e **v** é denotada por **u** + **v**, e se α é um escalar, o *múltiplo escalar* de **v** é denotado por α**v**.

- Se os axiomas a seguir são verdadeiros para todo **u**, **v** e **w** em V e para todos os escalares α e β, então V é chamado ***espaço vetorial*** e seus elementos são chamados vetores.

Axiomas do Espaço Vetorial

1) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ está em V — *fechado sob adição*
2) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ — *comutatividade*
3) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ — *associatividade*
4) Existe um elemento $\mathbf{0}$ em V, chamado de *vetor nulo*, tal que $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$. — *elemento neutro*
5) Para cada $\mathbf{u}$ em V, existe o elemento $-\mathbf{u}$ em V tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ — *inverso aditivo*
6) $\alpha\mathbf{v}$ está em V — *fechado sob multiplicação escalar*
7) $\alpha(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \alpha\mathbf{v} + \alpha\mathbf{w}$ — *distributividade*
8) $(\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$ — *distributividade*
9) $\alpha(\beta\mathbf{v}) = (\alpha\beta)\mathbf{v}$ — *associatividade*
10) $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$ — *identidade*

Observações

- Na maioria das aplicações, os *escalares* são números reais. Neste caso, V é dito um *espaço vetorial sobre os números reais*.
- Os escalares podem ser tomados de qualquer sistema numérico no qual, informalmente falando, possamos subtrair, multiplicar e dividir de acordo com as regras habituais da aritmética (***corpo***).
- Note que a definição não especifica quais elementos formam o conjunto V.
- A definição também não especifica o que as operações de *adição* e *multiplicação por escalar* devem ser. Em geral, são as usuais, mas não precisam ser. *Nos exemplos a seguir, consideraremos as operações usuais*.

Exemplo 1

- O conjunto de todas as sequências ordenadas de n elementos, $n \in \mathbb{N}$, é definido e denotado por:

$$\mathbb{R}^n : \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,/\, x_i \in \mathbb{R}\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Exemplo 1

- O conjunto

$$V = \mathbb{R}^n$$

com $n \geq 1$, com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar é um espaço vetorial, dito ***espaço vetorial euclidiano.***

$$\mathbb{R}^1$$

$$\mathbb{R}^2 : \{(x, y) \,/\, x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^3 : \{(x, y, z) \,/\, x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$\vdots$$

$$\mathbb{R}^n : \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,/\, x_i \in \mathbb{R}\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Exemplo 2

- O conjunto de todas as matrizes $m \times n$ forma um espaço vetorial com as operações usuais de adição de matrizes e multiplicação de matrizes por escalar, o qual será denotado por M_{mn}.

Exemplo 2

- Considere o conjunto

$$M_{2\times 2} : \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} / \, a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$$

- Sejam

$$M_i = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix} \in M_{2\times 2},\ i = 1,2,3,\ldots \text{ e } \alpha,\beta \in \mathbb{R}$$

- 1) $M_1 + M_2 = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}$ está em $M_{2\times 2}$
- 2) $M_1 + M_2 = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 + a_1 & b_2 + b_1 \\ c_2 + c_1 & d_2 + d_1 \end{bmatrix} = M_2 + M_1$

Exemplo 2

- 3) $$(M_1 + M_2) + M_3 = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + a_3 & b_1 + b_2 + b_3 \\ c_1 + c_2 + c_3 & d_1 + d_2 + d_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 + a_3 & b_2 + b_3 \\ c_2 + c_3 & d_2 + d_3 \end{bmatrix}$$

$$= M_1 + (M_2 + M_3)$$

Exemplo 2

- 4) Existe a matriz $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ em $M_{2\times 2}$ que satisfaz

$$\begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix}$$ para todo elemento M_i de $M_{2\times 2}$

- 5) Para cada M_i de $M_{2\times 2}$ existe o elemento -M_i em $M_{2\times 2}$ que satisfaz:

$$\begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_i & -b_i \\ -c_i & -d_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2

- 6) $\alpha M_i = \alpha \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix}$ está em $M_{2\times 2}$ qualquer que seja M_i

- 7) $\alpha(M_1 + M_2) = \begin{bmatrix} \alpha(a_1 + a_2) & \alpha(b_1 + b_2) \\ \alpha(c_1 + c_2) & \alpha(d_1 + d_2) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha c_1 & \alpha d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha a_2 & \alpha b_2 \\ \alpha c_2 & \alpha d_2 \end{bmatrix}$$

$$= \alpha M_1 + \alpha M_2$$

Exemplo 2

- 8)

$$(\alpha+\beta)M_1=\begin{bmatrix}(\alpha+\beta)a_1 & (\alpha+\beta)b_1\\ (\alpha+\beta)c_1 & (\alpha+\beta)d_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha a_1 & \alpha b_1\\ \alpha c_1 & \alpha d_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta a_1 & \beta b_1\\ \beta c_1 & \beta d_1\end{bmatrix}$$

$$=\alpha M_1+\beta M_1$$

- 9)

$$\alpha(\beta M_1)=\alpha\begin{bmatrix}\beta a_1 & \beta b_1\\ \beta c_1 & \beta d_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha\beta a_1 & \alpha\beta b_1\\ \alpha\beta c_1 & \alpha\beta d_1\end{bmatrix}=\alpha\beta\begin{bmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{bmatrix}=(\alpha\beta)M_1$$

- 10) $1M_1=1\begin{bmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{bmatrix}=M_1$

Exemplo 2

- Como o conjunto

$$M_{2\times 2}:\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} / \, a,b,c,d \in \mathbb{R}\right\}$$

satisfaz todas as propriedades, dizemos que o mesmo constitui um espaço vetorial com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar.

Exemplo 3.

- O conjunto de todas as funções a valores reais, definidas na reta real, denotado por F, é um espaço vetorial.

Exemplo 4.

- Para todo $n \geq 0$ o conjunto $\boldsymbol{P}_n$ de todos os polinômios de **grau igual a *n*** não constitui um espaço vetorial.

Exemplo 4.

- Para todo $n \geq 0$ o conjunto $\boldsymbol{P}_n$ de todos os polinômios de **grau menor ou igual a $\boldsymbol{n}$** é um espaço vetorial.

Exemplo 5.

- Todo plano que passa pela origem constitui um espaço vetorial.

$$V = \{(x, y, z) \,/\, ax + by + cz = 0\}$$

Exemplo 6.

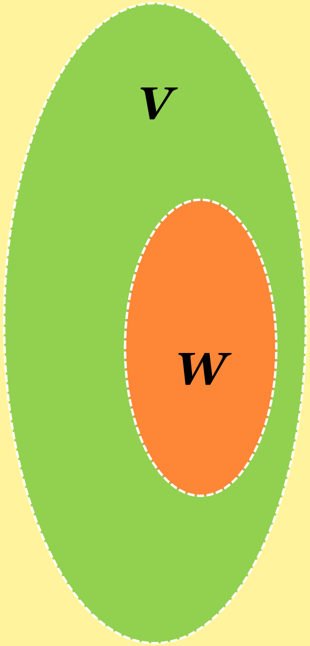
- O conjunto $\mathbb{Z}$, dos inteiros, com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar, **não** é um espaço vetorial.

Observação

- A ideia abstrata de espaço vetorial generaliza o conceito de vetores no sentido de que espaços vetoriais podem ter dimensão maior que três e, também, podem ser constituídos de diferentes objetos matemáticos (escalares, matrizes, polinômios, funções) – os quais podem ser tratados de forma unificada.

Subespaços Vetoriais

Um subconjunto W de um espaço vetorial V é dito ***subespaço vetorial*** de V se W é um espaço vetorial com relação às operações de adição e multiplicação por escalar definidas em V.



Subespaços Vetoriais

Um ***subespaço vetorial*** de um espaço vetorial V é um subconjunto W de V que satisfaz as seguintes condições:

- Para cada $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em W, então $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ está em W
- Para cada $\mathbf{v}$ em W, então $\alpha\mathbf{v}$ está em W

Exemplo 7.

- Se V é um espaço vetorial, então V é um ***subespaço vetorial*** de si mesmo. O conjunto formado apenas pelo vetor nulo, é também um subespaço de V (subespaço nulo). Esses subespaços são ditos ***subespaços triviais*** de V.

- Toda reta e todo plano que passa pela origem em $\mathbb{R}^3$ é um ***subespaço*** vetorial do $\mathbb{R}^3$

- O conjunto **D,** de todas as funções diferenciáveis a valores reais definidas em $\mathbb{R}$ é um ***subespaço vetorial de* F**, o espaço vetorial de todas as funções a valores reais definidas em $\mathbb{R}$.

Exemplo 8.

- Um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^n$, dito ***espaço nulo*** de **A**, é definido e denotado por

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \middle| \mathbf{Ax} = \mathbf{0} \right\}$$

- O conjunto $W : \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$ é um subespaço vetorial de M_{22}

Combinação Linear

- Dizemos que um vetor **w** é combinação linear dos vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_n$ se pode ser escrito na forma

$$\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n$$

Exemplo 9.

Dados os vetores do IR², $\mathbf{v}_1 = (1,5)$ e $\mathbf{v}_2 = (-1,2)$

- O vetor (-3, 20) é combinação linear dos vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ pois,
$$(-3, 20) = 2(1, 5) + 5(-1, 2) = 2\mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2$$

- O vetor $\mathbf{u} = (7, 2)$ é combinação linear de dos vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$?

- Qualquer vetor $\mathbf{v} = (x, y)$, do IR², é combinação linear dos vetores e $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$?

Exemplo 10.

- Todo polinômio em $\boldsymbol{P_2}$ é combinação linear dos vetores do conjunto $\{1, x, x^2\}$

Espaço Gerado e Conjunto Gerador

- O conjunto *W*, que consiste em todas as combinações lineares dos vetores do conjunto

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$$

de um espaço vetorial *V*, é chamado ***espaço gerado*** por $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ e é denotado por $W = ger\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$

- O conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é chamado ***conjunto gerador*** se todo elemento de *V* pode ser escrito como combinação linear de $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$.

Exemplo 11.

- Determine o espaço gerado pelos conjuntos a seguir:

a) $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$

b) $\{(1,1), (-2,3)\}$

c) $\{(3,1), (6,2)\}$

Exemplo 12.

- Mostre que o espaço gerado por

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

é o conjunto todas as matrizes simétricas 2×2.

Dependência e Independência Linear

- O conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ de vetores é dito ***linearmente independente*** (l. i.) se, e somente se, a equação

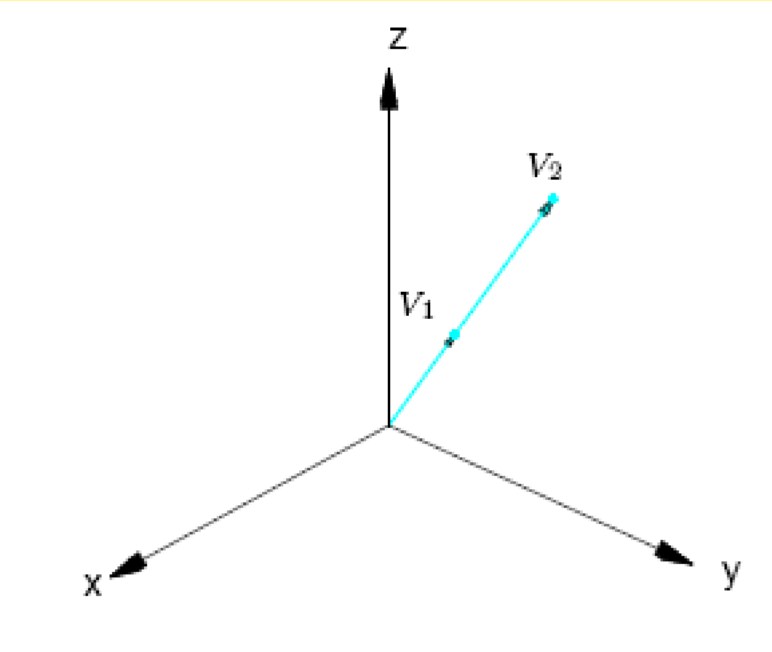
$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

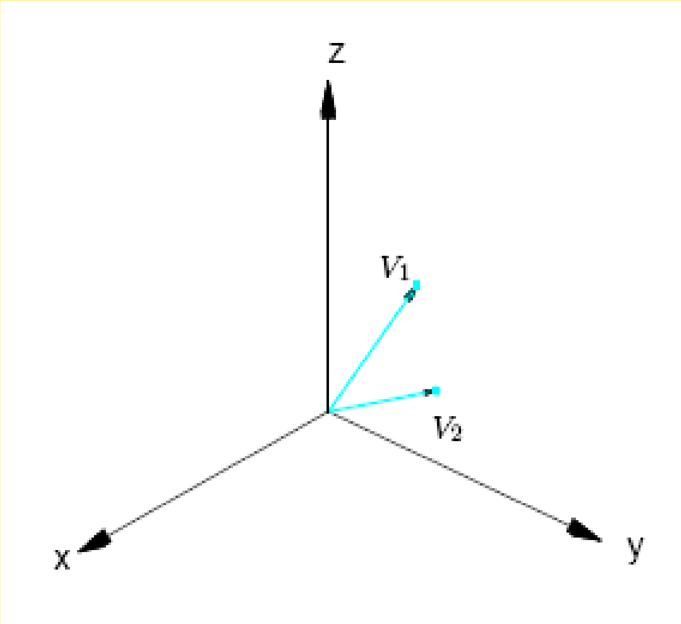
tem apenas a solução trivial

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$

Se existirem outras soluções, além da trivial, o conjunto é dito ***linearmente dependente***.

Dependência e Independência Linear





Exemplo 13.

- Os vetores (1,1,1), (1,1,0) e (1,0,0) formam um conjunto linearmente independente;

- Os vetores (1,2,4), (2,1,3) e (4,-1,1) formam um conjunto linearmente dependente;

Exemplo 14.

- O conjunto $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ é linearmente independente.

- O conjunto $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$, onde

$$\mathbf{p}_1 = x^2 - 2x + 3$$
$$\mathbf{p}_2 = 2x^2 + x + 8$$
$$\mathbf{p}_3 = x^2 + 8x + 7$$

é linearmente dependente.

Dependência e Independência Linear

- Um conjunto $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ em um espaço vetorial V, é linearmente dependente se, e somente se, pelo menos um dos vetores pode ser expresso como combinação linear dos demais.

- Se $\mathbf{0} \in S$, então o conjunto é l.d.

- Se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ então o conjunto é l.i. se $\mathbf{v}_1 \neq \alpha\, \mathbf{v}_2$

- No $\mathbb{R}^n$, se o conjunto S tem mais do que n elementos então o conjunto é l.d.

Exemplo 15.

- O conjunto $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ no $\mathbb{R}^3$ é l.i.
- O conjunto $\left\{ sen^2 x, \cos^2 x, \cos 2x \right\}$ em ***F***, é l.d.

Base

Se V é um espaço vetorial qualquer e

$$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$$

é um conjunto de vetores em V, dizemos que S é uma **base** de V se, e somente se,

- S é linearmente independente
- S gera V

Neste caso, cada vetor **w** em V pode ser expresso na forma ,

$$\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n$$

de forma única.

Exemplo 16.

- O conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

  onde

$$\mathbf{v}_1 = (2,1) \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2 = (1,7)$$

  é uma **base** para o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

Exemplo 17.

- Os conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ e $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$

  onde

$$\mathbf{v}_1 = (1,3) \text{ e } \mathbf{v}_2 = (-1/5,-3/5)$$

e

onde $\mathbf{w}_1 = (1,3)$, $\mathbf{w}_2 = (1, 5)$ e $\mathbf{w}_3 = (2, -4)$

não são bases para o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

Exemplo 18.

- O conjunto $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$

  onde

$$\mathbf{e}_1 = (1,0) \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_2 = (0,1)$$

  é uma base (canônica) para o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

Exemplo 19.

- O conjunto

$$\{\mathbf{E}_{11}, \mathbf{E}_{12}, \mathbf{E}_{21}, \mathbf{E}_{22}\}$$

onde

$$\mathbf{E}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{E}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é uma base (canônica) para o espaço vetorial $\mathbf{M}_{2\times 2}$.

Base e Dimensão

Se um espaço vetorial V tem uma base com n vetores, então:

- Todo o subconjunto de V que contém mais do que n vetores é l.d.

- Todo subconjunto de V contém menos do que n vetores não pode gerar V

Base e Dimensão

- Se um espaço vetorial V tem uma base com n vetores, então toda base para V tem exatamente n vetores.

- A **dimensão** de um espaço vetorial V é definida como o *número de vetores de qualquer base* de V, denotada por $dim(V)$.

Exemplo 20.

- O conjunto

$$\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}$$

é uma base para o $\mathbf{M}_{2\times 2}$. Assim, $dim(\mathbf{M}_{2\times 2}) = 4$

- O conjunto $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base para o $\mathbb{R}^3$. Assim, $dim(\mathbb{R}^3) = 3$

- O conjunto $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ é uma base para o $\boldsymbol{P}_4$. Assim, $dim(\boldsymbol{P}_4) = 5$

Base e Dimensão

- Em geral,

$$dim(\mathbb{R}^n) = n$$

$$\dim(\mathbf{P}_n) = n + 1$$

$$dim(\mathbf{M}_{m\times n}) = mn$$

Exemplo 21.

- O espaço solução do sistema linear de ordem $n \times n$ é um subespaço do $\mathbb{R}^n$. Determine uma base e a dimensão do espaço solução do sistema linear homogêneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, nos casos.

$$a)\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \dim(E) = 1, t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$b)\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \dim(E) = 2, t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Representando um vetor em termos de uma base

- Seja um espaço vetorial V com uma base $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$

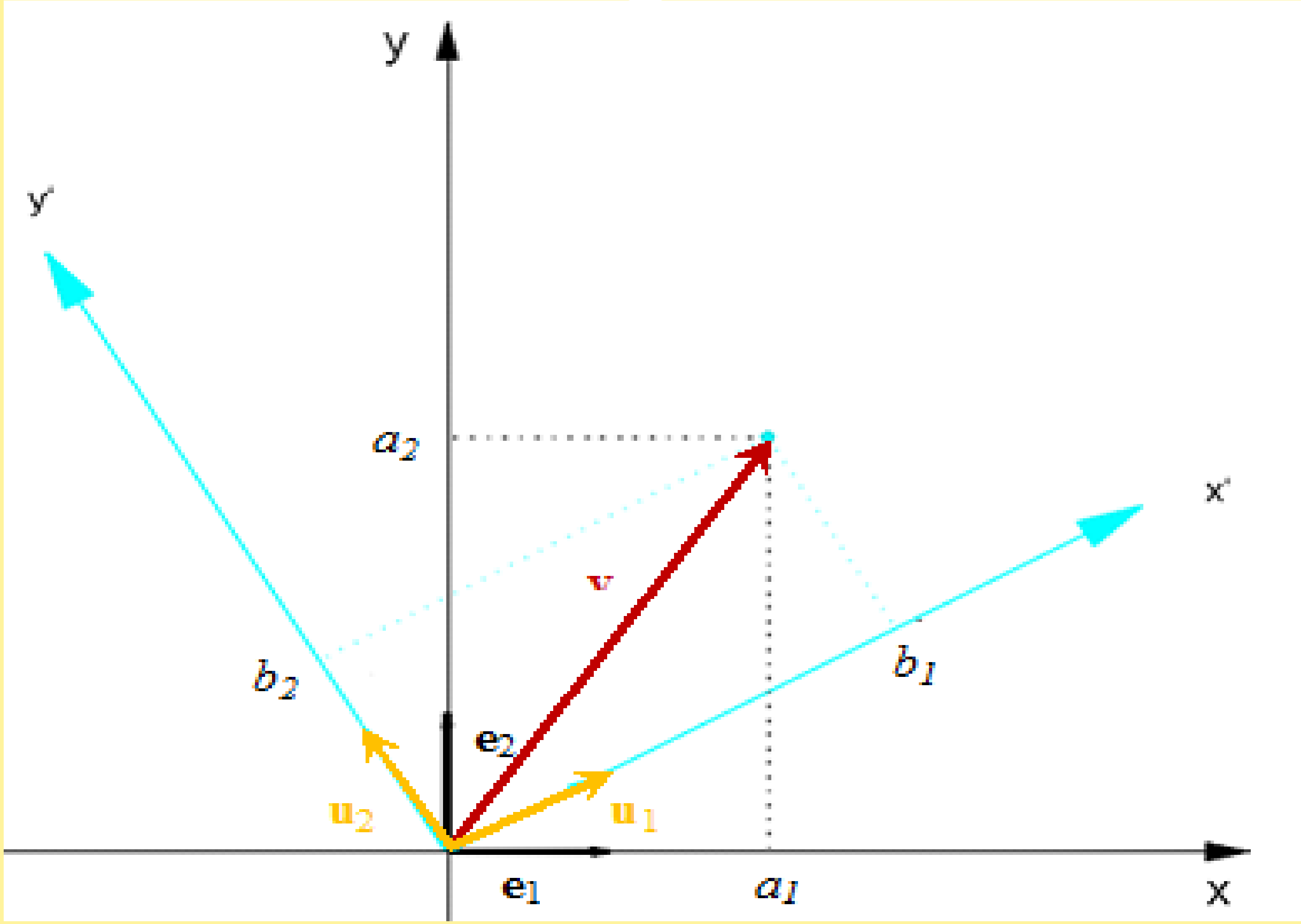
Todo vetor **w** de V pode ser escrito como combinação linear dos vetores desta base. Isto é,

$$\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + ... + c_n\mathbf{v}_n$$

Os coeficientes c_1 , c_2,..., c_n são as **coordenadas de v relativas à base *S***, denotadas pelo vetor de coordenadas

$$[\mathbf{w}]_s = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Representação de um vetor v em diferentes bases



Exemplo 21.

- Escrever o vetor de coordenadas de

$$\mathbf{v} = (5, -1)$$

a) com relação à base canônica do $\mathbb{R}^2$

b) com relação à base definida pelos vetores $\mathbf{v}_1 = (-1,2)$ e $\mathbf{v}_2 = (2,-1)$

Representar geometricamente o vetor **v** e os vetores de cada base.