Sistemas Lineares

Matemática para Engenharia I

Profa. Simone Tomazzoni – 2016/1

Sistemas Lineares

- *Uma equação linear em n variáveis, é uma equação da forma:*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$$

onde $a_1, a_2, ..., a_n$ *são constantes reais.*

Sistemas Lineares

- Um sistema de equações lineares ou, simplesmente, um sistema linear é um conjunto de m equações lineares com n incógnitas do tipo

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & = & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{cases}
$$

onde a_{ij} e b_k são constantes reais,

$i,k = 1,2,\ldots,m$ e $j = 1,2,\ldots,n$

Forma matricial do sistema linear

- *Todo sistema linear pode ser escrito na forma matricial ,*

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

com

$$\mathbf{A} \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \quad e \quad \mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ *é a matriz dos coeficientes*

Forma matricial do sistema linear

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

é o vetor das incógnitas

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

é o vetor dos termos independentes

Exemplo 1.

- *Escrever o sistema na forma matricial*

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 0 \\ 3x - 4x_2 = 7 \end{cases}$$

Solução de um sistema linear

- *Uma solução do sistema é vetor*

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$$

que torna cada equação matricial verdadeira quando tomamos

$$x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$$

O conjunto de todas as possíveis soluções do sistema é chamado conjunto solução do sistema linear ou solução geral.

Aplicações

- *A necessidade de resolver sistemas lineares aparece em uma grande quantidade de problemas científicos como, por exemplo, na previsão do tempo, otimização de sinais de trânsito e linhas de metrô, dinâmica de fluidos, mecânica dos sólidos, etc.*

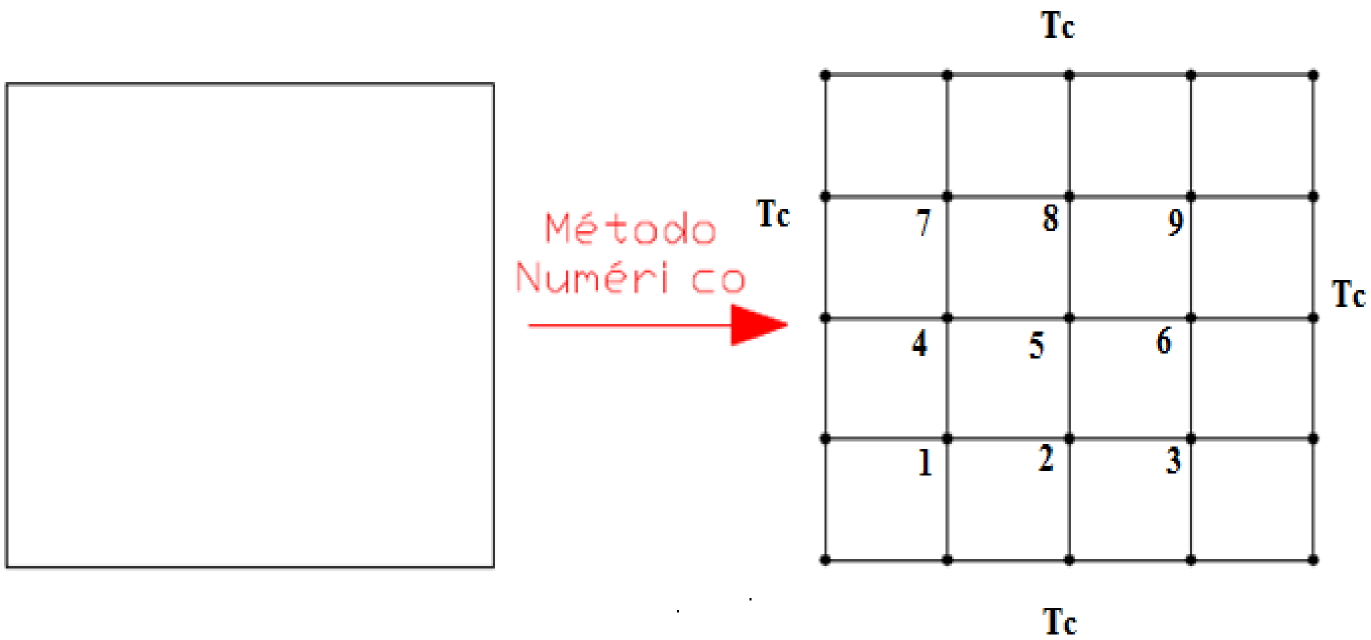
- *Existem estimativas que apontam que, a cada quatro problemas de simulação em matemática, três recaem em solução de sistemas de equações.*

Exemplo 2.

- *Em transferência de calor, um estudo importante consiste em determinar a distribuição de temperaturas em uma placa fina, quando conhecida a temperatura em suas bordas. Supondo que a placa represente a seção transversal de uma barra de metal, com fluxo de calor desprezível na direção perpendicular à placa.*

Exemplo 2. (continuação)

- *Uma regra que pode ser empregada para descrever o fluxo de calor na placa é: “A temperatura em um vértice é igual à média das temperaturas dos 4 vértices vizinhos”.*



Exemplo 2. (continuação)

$$T_1 = \frac{T_2 + T_4 + 2T_c}{4} \Rightarrow 4T_1 - T_2 - T_4 = 2T_c$$

$$T_2 = \frac{T_1 + T_3 + T_5 + T_c}{4} \Rightarrow 4T_2 - T_1 - T_3 - T_5 = T_c$$

$$T_3 = \frac{T_2 + T_6 + 2T_c}{4} \Rightarrow 4T_3 - T_2 - T_6 = 2T_c$$

$$T_4 = \frac{T_1 + T_5 + T_7 + T_c}{4} \Rightarrow 4T_4 - T_1 - T_5 - T_7 = T_c$$

$$T_5 = \frac{T_2 + T_4 + T_6 + T_8}{4} \Rightarrow 4T_5 - T_2 - T_4 - T_6 - T_8 = 0$$

Exemplo 2. (continuação)

$$T_6 = \frac{T_3 + T_5 + T_9 + T_c}{4} \Rightarrow 4T_6 - T_3 - T_5 - T_9 = T_c$$

$$T_7 = \frac{T_4 + T_8 + 2T_c}{4} \Rightarrow 4T_7 - T_4 - T_8 = 2T_c$$

$$T_8 = \frac{T_5 + T_7 + T_9 + T_c}{4} \Rightarrow 4T_8 - T_5 - T_7 - T_9 = T_c$$

$$T_9 = \frac{T_6 + T_8 + 2T_c}{4} \Rightarrow 4T_9 - T_6 - T_8 = 2T_c$$

Exercício

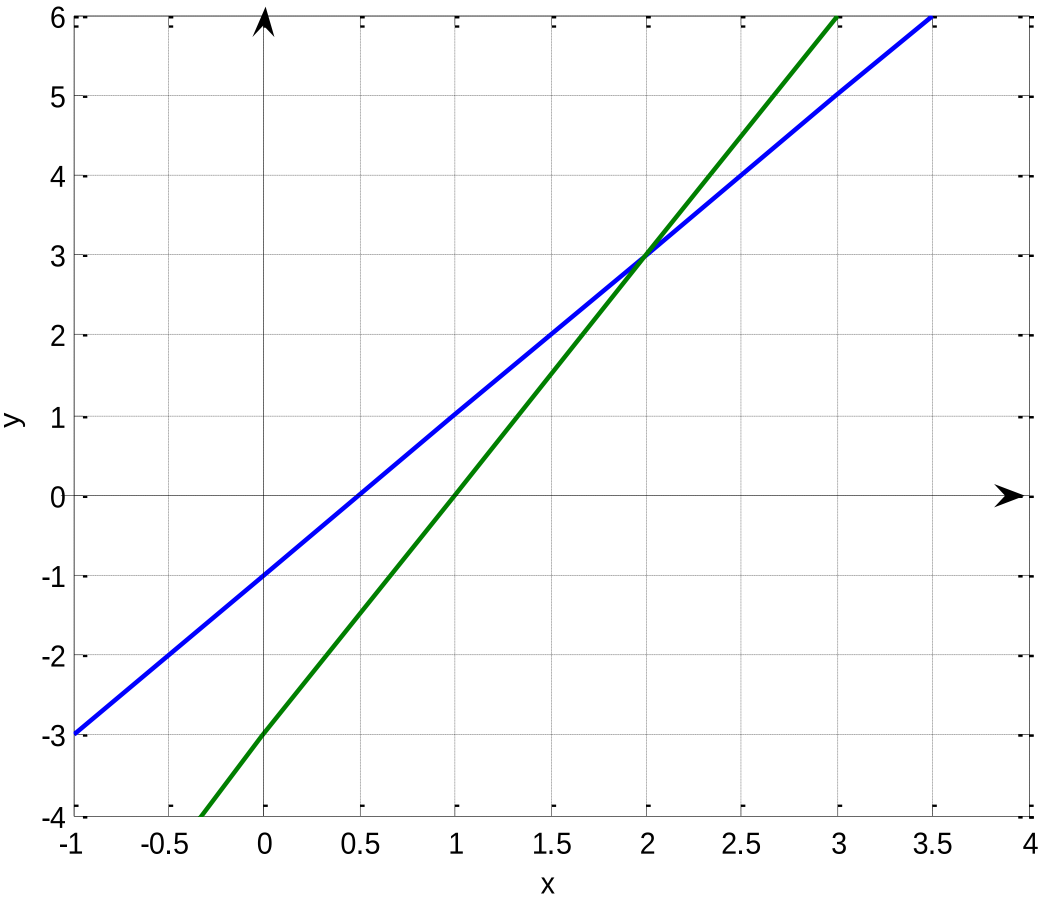
- *Escrever a forma matricial do sistema linear obtido no exemplo 2.*

Exemplo 3a. Solução de um sistema linear

- *Considere a solução do sistema linear*

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

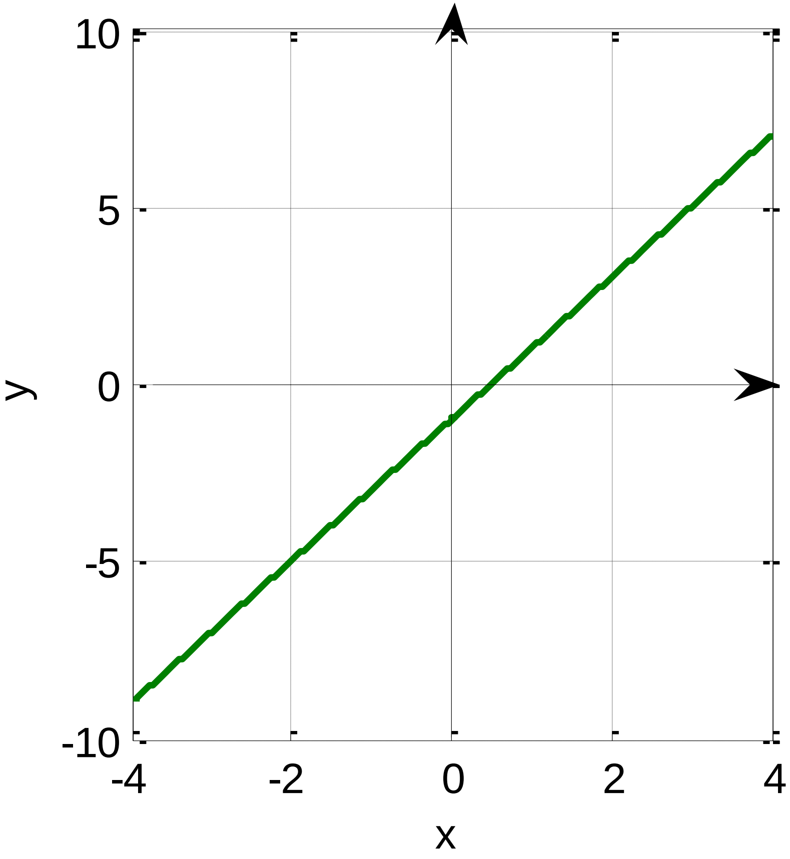


Exemplo 3b. Solução de um sistema linear

- *Considere a solução do sistema linear*

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

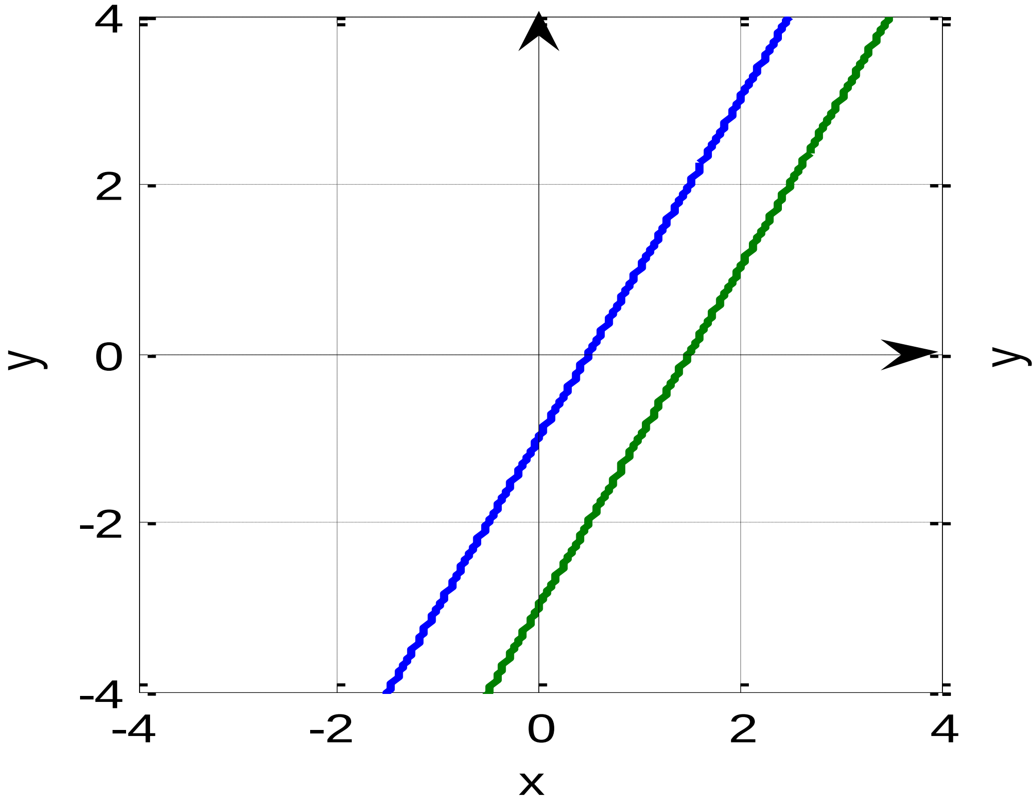


Exemplo 3c. Solução de um sistema linear

- *Considere a solução do sistema linear*

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$



Classificação de um sistema linear com relação à sua solução

- *Os exemplos anteriores ilustram o fato geral sobre sistemas lineares, descrito a seguir.*

Um sistema linear pode ter:

- *Nenhuma solução (impossível)*
- *Exatamente uma solução (possível e determinado)*
- *Infinitas soluções (possível e indeterminado)*

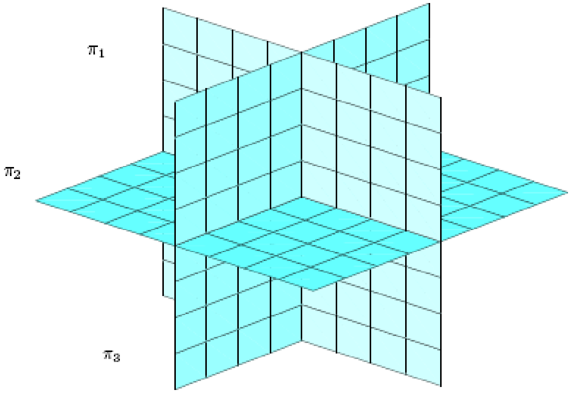
Interpretação geométrica de um sistema 3×3

- *Cada equação de um sistema linear com 3 equações e 3 incógnitas representa um plano e as soluções correspondem aos pontos em que tais planos se interceptam.*

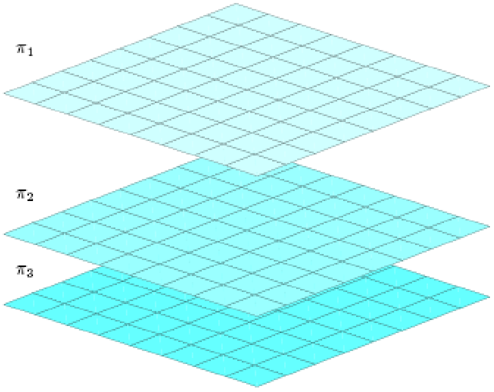
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Interpretação geométrica de um sistema 3×3

- *Solução única*

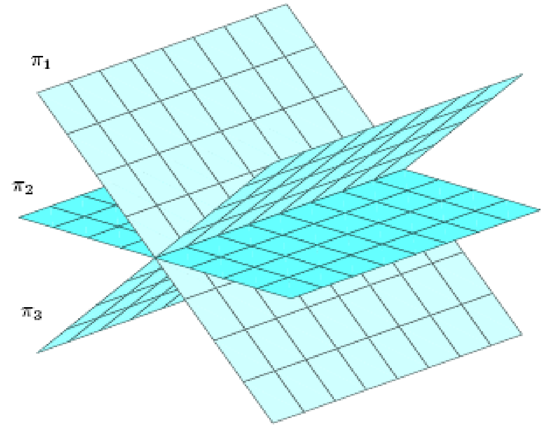


- *Nenhuma solução*

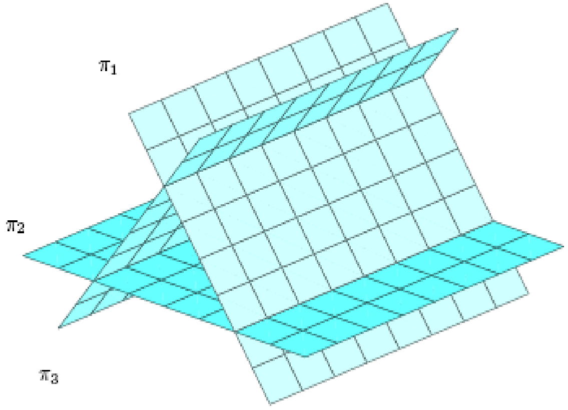


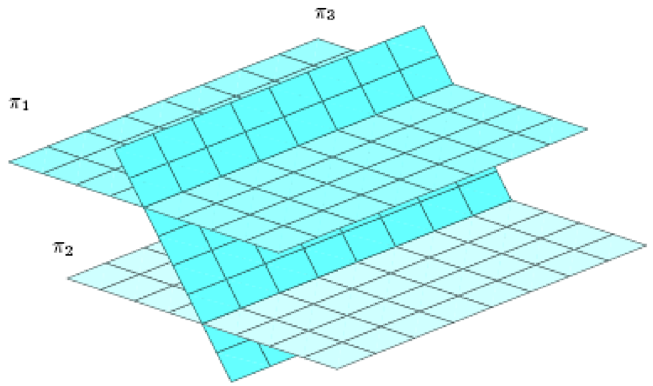
Interpretação geométrica de um sistema 3×3

- *Infinitas soluções*



- *Nenhuma solução*





Resolução de um sistema linear

- *Considere os sistemas lineares a seguir:*

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2y - 8z = 8 \\ -4x + 5y + 9z = -9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ y - 4z = 4 \\ z = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 29 \\ y = 16 \\ z = 3 \end{cases}$$

- *Verifique que* $S = \{(29,16,3)\}$ *é solução de todos.*

Resolução de um sistema linear

- *Sob o aspecto matricial, os sistemas lineares considerados têm matriz aumentada, respectivamente, da forma:*

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Forma escalonada de uma matriz

- *Uma matriz na forma escalonada deve satisfazer:*

❖ *Linhas com todos os elementos nulos ficam agrupadas abaixo de todas as outras linhas*

❖ *Considerando-se linhas sucessivas, não nulas, o primeiro elemento não nulo de cada linha (pivô) ocorre mais à direita que o da linha superior*

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Forma escalonada reduzida de uma matriz

- *Uma matriz na forma escalonada reduzida, deve satisfazer, adicionalmente:*

  - *O pivô de cada linha é 1*

  - *Cada colunas que contém um pivô têm zero nas demais posições*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolução de um sistema linear

- *Se a matriz aumentada de um sistema de equações lineares pode ser expressa na forma escalonada, ou escalonada reduzida, a solução do sistema é imediata.*

- *Dois sistemas lineares são ditos equivalentes se têm a mesma solução.*

Eliminação de Gauss

- *A estratégia do método da eliminação de Gauss consiste em transformar o sistema original num sistema equivalente com matriz dos coeficientes na forma triangular superior (ou inferior), o que corresponde a uma matriz aumentada na forma escalonada.*

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 & & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 & & & \ddots & & & \vdots & = & \vdots \\
 & & & & & & a_{nn}x_n & = & b_n
\end{cases}
$$

Eliminação de Gauss

- *A solução é obtida por retrossubstituição, iniciando-se pela última equação:*

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

$$\vdots$$

$$x_1 = \frac{b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n)}{a_{11}}$$

Eliminação de Gauss

- *Para transformar um sistema linear qualquer em um sistema triangular equivalente, podem ser empregadas três operações elementares*

- *trocar duas equações entre si;*

- *multiplicar uma equação por um escalar não nulo;*

- *somar uma equação com um múltiplo de outra equação do sistema.*

Exemplo 4.

- *Seja o sistema linear e sua respectiva matriz aumentada*

$$\begin{cases} 5x + 5y = 15 \\ 2x + 4y + z = 10 \\ 3x + 4y = 11 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 & 15 \\ 2 & 4 & 1 & 10 \\ 3 & 4 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

- *Multiplica-se a primeira linha por 1/5*

$$\begin{cases} 1x + 1y = 3 \\ 2x + 4y + z = 10 \\ 3x + 4y = 11 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 10 \\ 3 & 4 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

Exemplo 4. (continuação)

- *Devemos zerar todos os demais elementos da coluna que contém o pivô (coluna pivô)*

$$L_2 \leftarrow -2L_1 + L_2$$

$$L_3 \leftarrow -3L_1 + L_3$$

- *Obtemos*

$$\begin{cases} 1x + 1y = 3 \\ 2y + z = 4 \\ y = 2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 4. (continuação)

- *Escolhemos o pivô da segunda linha, depois de trocar as linhas 2 e 3 entre si,*

$$L_2 \leftarrow L_3$$

$$L_3 \leftarrow L_2$$

- *Obtemos*

$$\begin{cases} 1x + 1y = 3 \\ \quad\quad\; 1y = 2 \\ \quad\quad\; 2y + z = 4 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Exemplo 4. (continuação)

- *Para zerar os demais elementos da coluna do pivô realizamos as seguintes operações*

$$L_1 = -L_2 + L_1$$

$$L_3 = -2L_2 + L_3$$

- *Obtemos*

$$\begin{cases} 1x & & & = & 1 \\ & 1y & & = & 2 \\ & & 1z & = & 0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- *Cuja solução geral é dada por*

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Descrição do conjunto solução

- *Quando aplicado à matriz aumentada de um sistema linear, o algoritmo do escalonamento conduz diretamente a uma descrição explícita do conjunto solução para o sistema.*

Exemplo 5.

$$a)\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{b)}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{c)}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Variáveis livres e variáveis dependentes

- *Após o processo de redução da matriz aumentada do sistema linear pode-se estabelecer:*
- *As variáveis correspondentes às colunas pivô da matriz são chamadas* ***variáveis dependentes***
- *As demais variáveis são chamadas* ***variáveis livres***

- *Sempre que um sistema for possível e tiver variáveis livres, o conjunto solução possui* ***descrição paramétrica****, onde as* ***variáveis dependentes são escritas em função das variáveis livres****, as quais atuam como parâmetros.*

Exercício 1

- *Resolver os sistemas lineares que constam na página 1 do arquivo: Exercícios Sistemas Lineares.pdf*

Exercício 2

- *Supondo que a matriz aumentada de um sistema linear foi reduzida, mediante operações elementares sobre suas linhas, à forma escalonada dada. Resolva o sistema.*

$$a)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$b)\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$c)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$d)\begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Posto de uma matriz

- *O número de variáveis dependentes é exatamente o número de linhas não nulas na forma escalonada da matriz dos coeficientes.*

- *O **posto** de uma matriz A, denotado por **post(A)**, é o número de linhas não nulas de qualquer uma de suas formas escalonadas por linhas.*

- *Se A é a matriz dos coeficientes de um sistema linear possível, com n varíaveis, então o número de variáveis livres é dado por n – post(A)*

Sistemas Lineares Homogêneos

- *Um de equações lineares é dito* ***homogêneo*** *se os termos constantes são todos nulos; isto é, tem a forma:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

- *Sistemas homogêneos sempre possuem a solução* $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ *ou seja,* $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ *, chamada* ***solução trivial***.

Sistemas Lineares Homogêneos

Assim, sistemas lineares homogêneos podem ter:

- *Solução única (solução trivial)*

- *Infinitas soluções (além da trivial)*

Pode-se também concluir, para esses sistemas, que se o número de equações for menor do que o número de incógnitas então o sistema terá infinitas soluções.

Teorema

- *Se* $\boldsymbol{A}$ *é uma matriz* $n \times n$ *então as seguintes afirmações são equivalentes, ou seja, são todas verdadeiras ou todas falsas.*

  (a) $\boldsymbol{A}$ *é inversível*

  (b) $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ *tem solução única*

  (c) $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ *tem apenas a solução trivial*

  (d) A forma escalonada reduzida de $\boldsymbol{A}$ *é* $\boldsymbol{I}_n$

  (e) $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$

  (f) $\mathrm{post}(\boldsymbol{A}) = n$