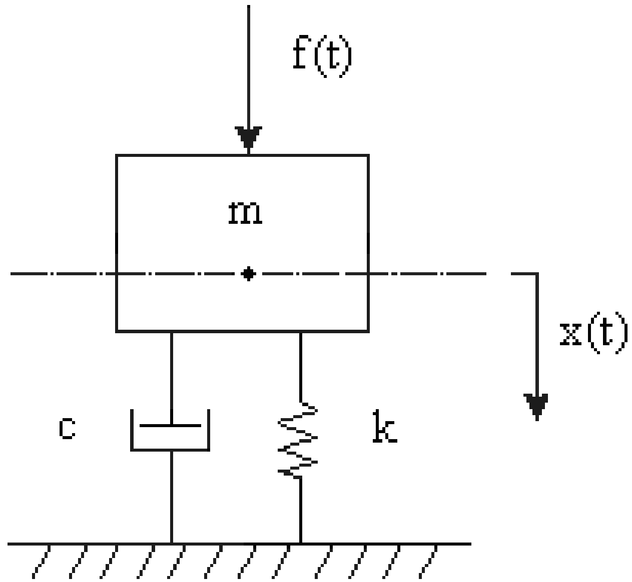
RESOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

A **equação de movimento** de um sistema linear com **um grau de liberdade** e amortecimento viscoso é

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \qquad (1)\ .$$



Dividindo todos os termos por m, obtém-se

$$\ddot{x}(t) + \frac{c}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{1}{m}f(t) \qquad (2)\ .$$

Para fins de **resolução numérica**, essa equação, de segunda ordem, deve ser inicialmente convertida num sistema com duas equações de primeira ordem.

A seguir, ela poderá ser resolvida por rotinas específicas, baseadas nos **métodos de Runge-Kutta** (que partem, por sua vez, da série de Taylor).

CONVERSÃO DA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

Para conversão da equação de movimento, visando sua resolução pela via numérica, são definidas duas novas variáveis, quais sejam

$$u_1(t) = x(t) \quad (3) \quad \text{e} \quad u_2(t) = \dot{x}(t) \quad (4) \,.$$

Decorre das definições acima que

$$\dot{u}_1(t) = \dot{x}(t) = u_2(t) \quad (5) \quad \text{e} \quad \dot{u}_2(t) = \ddot{x}(t) \quad (6) \,.$$

Levando as Eqs (3) a (6) na Eq. (2), que é

$$\ddot{x}(t) + \frac{c}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{1}{m}f(t) \quad (2) \quad \text{ou} \quad \ddot{x}(t) = -\frac{c}{m}\dot{x}(t) - \frac{k}{m}x(t) + \frac{1}{m}f(t)$$

tem-se, após as substituições, que

$$\dot{u}_2(t) = -\frac{c}{m}u_2(t) - \frac{k}{m}u_1(t) + \frac{1}{m}f(t) \quad (7) \,.$$

SISTEMA DE EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

As Eqs. (5) e (7), quais sejam,

$$\dot{u}_1(t) = u_2(t) \quad (5) \qquad e$$

$$\dot{u}_2(t) = -\frac{c}{m}u_2(t) - \frac{k}{m}u_1(t) + \frac{1}{m}f(t) \quad (7)\ ,$$

constituem um **sistema linear de 2 equações de primeira ordem**, **acopladas**, que é **equivalente à equação de movimento** original, de segunda ordem.

Nessa representação, as **condições iniciais** correspondentes à equação de movimento original, a saber, $x(0)$ e $\dot{x}(0)$, são dadas, respectivamente, por

$$u_1(0) \quad e \quad u_2(0)\ .$$

REPRESENTAÇÃO MATRICIAL

O **sistema de equações de movimento** obtido acima pode ser escrito em **forma matricial** como uma única equação, a saber,

$$\boxed{\left[\dot{u}(t)\right] = A\left[u(t)\right] + \left[v(t)\right]} \quad (8)\ ,$$

onde

$$\boxed{\left[u(t)\right] = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}} \quad (9) \qquad \boxed{A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{c}{m} \end{bmatrix}} \quad (10) \qquad \boxed{\left[v(t)\right] = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} f(t) \end{bmatrix}} \quad (11)\ .$$

As **condições iniciais**, em forma matricial, são dadas por

$$\boxed{\left[u(0)\right] = \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix}} \quad (12)\ .$$

ESPAÇO DE ESTADO

Na presente descrição, são empregadas as seguintes denominações:

– $u_1(t)$ e $u_2(t)$: **variáveis de estado**;

– $\left[u(t)\right]$: **vetor de estado**;

– A : **matriz de estado**.

Diz-se, dessa forma, que o sistema mecânico com um grau de liberdade está descrito no **espaço de estado**.

As variáveis $u_1(t)$ e $u_2(t)$, que são, respectivamente, o **deslocamento** e a **velocidade** do sistema, apresentam o **estado do sistema**.

Assim posto, o problema de valor inicial (equação diferencial + condições iniciais) pode ser solucionado via Runge-Kutta (Vargas e Araki, 2017).

EXEMPLO – SISTEMA COM 1 GDL SOB CONDIÇÕES DE INTERESSE

Seja um sistema com um grau de liberdade, em que m = 100 kg, c = 50 kg/s e k = 2000 N/m. Determinar o estado do sistema para as seguintes condições:

(a) vibração livre por deslocamento inicial

$$x(0) = -\ 0{,}01 \text{ m} \ ; \ \ \dot{x}(0) = 0 \text{m/s} \ ; \ f(t) = 0 \text{ N} \ ;$$

(b) vibração livre por velocidade inicial

$$x(0) = 0 \text{ m} \ ; \ \dot{x}(0) = 0{,}01 \text{ m/s} \ ; \ f(t) = 0 \text{ N} \ ;$$

(c) vibração forçada por excitação harmônica

$$x(0) = 0 \text{ m} \ ; \ \dot{x}(0) = 0 \text{ m/s} \ ; \ f(t) = 150 \text{sen}(3t) \text{ N} \ .$$

Fontes:

Inman, D. J., Engineering Vibration (3rd edition), Pearson/Prentice-Hall, 2007;

Moler, C. B., Numerical Computing with MATLAB®, SIAM, 2004;

Palm III, W. J., Mechanical Vibration, Wiley, 2007;

Rao, S., Vibrações Mecânicas (4a. edição), Pearson/Prentice-Hall, 2008;

Vargas, J. V. C., Araki, L. K., Cálculo Numérico Aplicado, Manole, 2017.