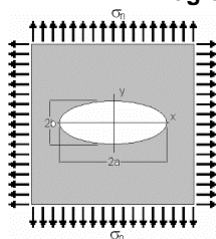


4. MECÂNICA DA FRATURA ELÁSTICA LINEAR - MFEL

Prof. Dr. Julio Almeida

Universidade Federal do Paraná

Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica



PGMEC



1

ENERGIA DE UM SISTEMA

Segundo o 1º Princípio da Termodinâmica, quando um sistema passa de um estado de não-equilíbrio para um estado de equilíbrio, produz-se uma diminuição da energia do sistema.

2

FORMULAÇÃO DE GRIFFITH



Griffith (1923), a partir do trabalho de Inglis, quando da análise de uma placa plana com um furo elíptico, definiu:

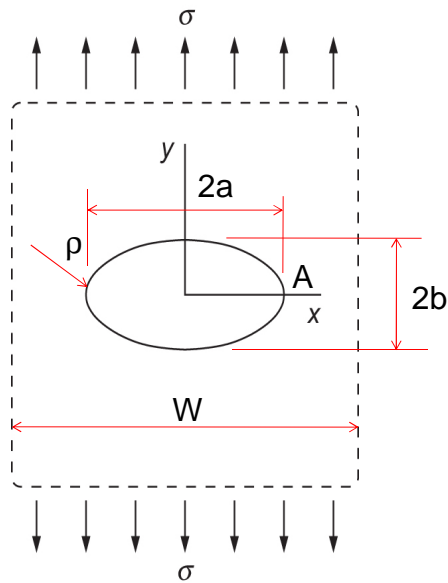
“seja um sólido linear elástico, deformado por forças de contato aplicadas à sua superfície. A soma da energia potencial das forças aplicadas e da energia de deformação elástico do corpo será diminuída (ou permanecerá inalterada) pela introdução de uma trinca, cuja superfície não esteja submetida à trações”

FORMULAÇÃO DE GRIFFITH



O fundamento do modelo de Griffith consistiu, assim, em calcular essa parcela de energia ganha pela introdução da trinca.

FORMULAÇÃO DE GRIFFITH



$$W \ggg 2a$$

$$W \ggg 2b$$

.....
paradoxo da Mecânica dos Sólidos

5

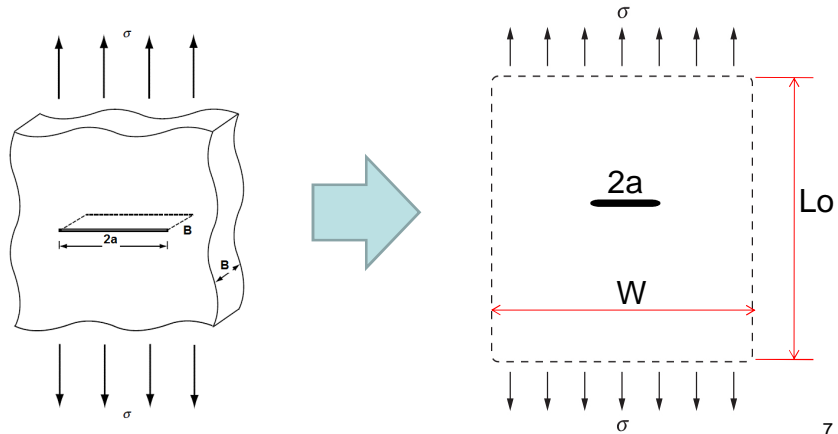
FORMULAÇÃO DE GRIFFITH

- tais conclusões fizeram com que *Griffith* avaliasse a fratura a partir de conceitos energéticos ao invés das premissas da concentração de tensões.

6

BALANÇO DE ENERGIA DE GRIFFITH

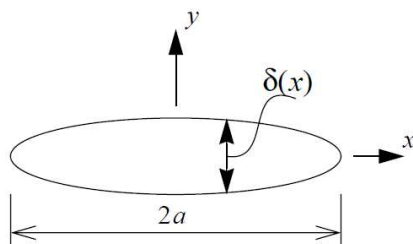
- o Placa finita, em material dúctil



7

BALANÇO DE ENERGIA DE GRIFFITH

Da Teoria da Elasticidade, a abertura da trinca (δ) vale:



$$\delta = \frac{4\sigma(1-\nu^2)}{E} \sqrt{\frac{L^2}{4} - x^2}$$

$$2a = L$$

e o trabalho realizado pela tensão σ :

$$W_\sigma = \int_{-L/2}^{L/2} \sigma \delta dx$$

8

BALANÇO DE ENERGIA DE GRIFFITH

logo:

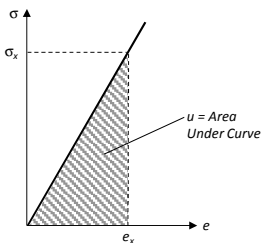
$$W_{\sigma} = \int_{-L/2}^{L/2} \sigma \delta dx = \frac{\sigma^2 (1-\nu^2)}{E} \int_{-L/2}^{L/2} 4 \sqrt{\frac{L^2}{4} - x^2} dx$$

Fazendo: $\sin^2 u = \frac{4x^2}{L^2} \Rightarrow W_{\sigma} = \frac{\sigma^2 (1-\nu^2)}{E} \left(\frac{\pi}{2} L^2 \right)$

9

BALANÇO DE ENERGIA DE GRIFFITH

Como, ainda, a energia armazenada no corpo é equivalente à metade do total das cargas externas:



$$W_{SE} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{1}{2} W_{\sigma}$$

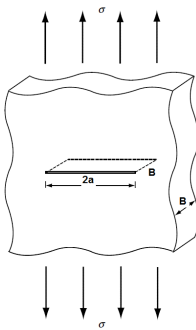
$$W_{SE} = \frac{1}{2} W_{\sigma} = \frac{\sigma^2 (1-\nu^2)}{E} \left(\frac{\pi}{4} L^2 \right)$$

$$W = W_{SE} - W_{\sigma} + W_o = W_o - \frac{\sigma^2 (1-\nu^2)}{E} \left(\frac{\pi}{4} L^2 \right) \quad 10$$

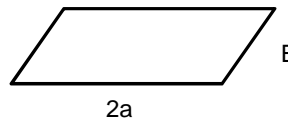
BALANÇO DE ENERGIA DE GRIFFITH

Energia total do sistema:

$$\phi = W + 2\gamma_s L = W_o - \frac{\sigma^2(1-\nu^2)}{E} \left(\frac{\pi}{4} L^2 \right) + 2\gamma_s L$$



Energia superficial



$$E_s = (2aB)2\gamma_s = 4aB\gamma_s$$

$\gamma_s =$ densidade de energia de superfície

11

ENERGIA SUPERFICIAL – VALORES TÍPICOS

TABLE 2.1 Surface energy of some commonly used materials

Material	Surface Energy (J/m ²)
Copper	0.98
Mild Steel	1.20
Aluminum	0.60
NaCl	1.35
MgO	3.30
Glass pane	2.30
Ice	0.07
Diamond	5.50

12

BALANÇO DE ENERGIA DE GRIFFITH

Equilíbrio termodinâmico:

$$\frac{\partial \phi}{\partial L} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial L} = -\frac{\pi \sigma^2 (1-\nu^2)}{2E} L + 2\gamma_s = 0$$

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{4 E \gamma_s}{\pi (1-\nu^2) L}} \quad \Rightarrow \quad \sigma_c = \sqrt{\frac{2 E \gamma_s}{\pi a (1-\nu^2)}} \quad \text{EPD}$$

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2 E \gamma_s}{\pi a}} \Rightarrow \sigma_c = f(\gamma_s) \quad \text{EPT}$$

13

TENSÃO CRÍTICA – TRABALHOS RECENTES

Para trabalhos, considerando o equilíbrio a nível atômico:

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2 E \gamma_s}{\pi a (1-\nu^2)}} \quad \Rightarrow \quad \sigma_c = \sqrt{\frac{E \gamma_s}{4 a (1-\nu^2)}}$$

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2 E \gamma_s}{\pi a}} \quad \Rightarrow \quad \sigma_c = \sqrt{\frac{E \gamma_s}{4 a}}$$

14

LIMITAÇÕES DA EQUAÇÃO DE GRIFFITH

O modelo de *Griffith* foi baseado num equilíbrio global de energia. Como, porém, a fratura contempla a quebra de ligações atômicas locais, experimentos demonstram assim uma diferença de até 40% entre o critério de tensões locais e o critério de *Griffith*.

15

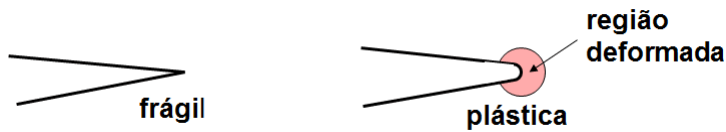
LIMITAÇÕES DA EQUAÇÃO DE GRIFFITH

A formulação de *Griffith* foi, assim, considerada totalmente consistente apenas para o caso de materiais idealmente frágeis.

16

EQUAÇÃO DE *GRIFFITH* MODIFICADA

Como a equação original de *Griffith* apresentou problemas para o caso dos metais, Irwin propôs em 1948, uma equação modificada contemplando a região plastificada em frente da trinca.



17

EQUAÇÃO DE *GRIFFITH* MODIFICADA

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2E(\delta_s + \delta_p)}{\pi a}}$$

δ_p = trabalho plástico por unidade de superfície

$$\delta_p \gg \delta_s$$

Generalizando, ainda:

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2E\omega_f}{\pi a}}$$

ω_f = energia de fratura (contempla efeitos plásticos, viscoplásticos ou viscoelásticos)

18

GRIFFITH x IRWIN

Griffith - “toda energia liberada é usada na criação de nova superfície livre nas faces de uma trinca”.

Irwin - “para materiais dúcteis, como os metais, a maior parte da energia liberada é usada para deformar o material na zona plástica da ponta da trinca”

19

EXEMPLO 01

Um componente de poliestireno não deve falhar ao se aplicar uma tensão de tração de 1,25 MPa. Determinar, segundo *Griffith*, o máximo comprimento permitido para uma fissura localizada na borda da chapa e de forma perpendicular ao carregamento. A energia superficial do poliestireno vale 0,50 J/m² e o módulo de elasticidade longitudinal 3,0 GPa.

20

EXEMPLO 02

Uma fina chapa de um aço especial tem uma resistência à tração de 1950 MPa. Calcule a porcentagem de redução de força devido à presença de uma fenda central na mesma, com 4 mm de comprimento e orientada de forma perpendicular à direção do carregamento. Para este aço, o módulo de elasticidade longitudinal pode ser tomado como 200 GPa, a energia superficial como 2 J/m² e o trabalho plástico de cada ponta da trinca é 2x10⁴ J/m².

21

TAXA DE LIBERAÇÃO DE ENERGIA

Adicionalmente à equação modificada de *Griffith*, *Irwin* apresentou agora em 1956, um modelo equivalente ao modelo de *Griffith*, ou seja, o conceito da taxa de liberação de energia (G):

$$U = W_o - \frac{\sigma^2(1-\nu^2)}{E} \left(\frac{\pi}{4} L^2 \right) = W_o \cdot B - \frac{\sigma^2(1-\nu^2)}{E} (\pi a^2) \cdot B$$

$$\frac{dU}{dA} = 0 + \frac{\pi\sigma^2 a}{E} (1-\nu^2)$$

$$G = -\frac{dU}{dA} = -\frac{\pi\sigma^2 a}{E} (1-\nu^2) \quad (EPD)$$

22

TAXA DE LIBERAÇÃO DE ENERGIA

Analogamente:

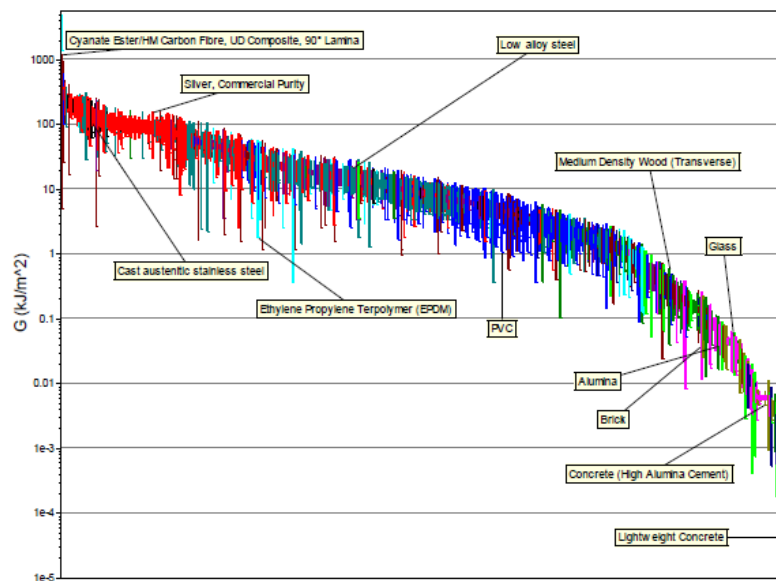
$$U = W_o - \frac{\sigma^2}{E} \left(\frac{\pi}{4} L^2 \right) = W_o \cdot B - \frac{\sigma^2}{E} (\pi a^2) \cdot B$$

$$G = - \frac{dU}{dA} = - \frac{\pi \sigma^2 a}{E} \quad (EPT)$$

G, corresponde a uma reta (que passa pela origem) em função do tamanho da trinca e cujo coeficiente angular aumenta à medida que a tensão aumenta.

23

TAXA DE LIBERAÇÃO DE ENERGIA - EXEMPLOS



24

TAXA DE LIBERAÇÃO DE ENERGIA

Essa liberação de energia corresponde à medida de energia disponível para a propagação do incremento da trinca a partir de um elemento diferencial “ da ”.

$$\frac{\partial W}{\partial a} = R \Rightarrow \text{energia absorvida durante o aumento da trinca}$$

25

TAXA DE LIBERAÇÃO DE ENERGIA

R , ou resistência ao crescimento da trinca, não conhecida *à priori*, deve apresentar um comportamento não linear com o tamanho da trinca, dado que a mesma depende da formação da zona plástica na ponta da trinca.

26

TAXA DE LIBERAÇÃO DE ENERGIA

No limite para propagação:

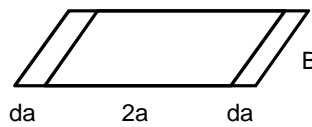
$$G = R$$

$$G_c = \frac{\pi\sigma^2 a}{E} \quad (EPT)$$

$$G_c = \frac{\pi\sigma^2 a}{E} (1 - \nu^2) \quad (EPD)$$

27

RESISTÊNCIA À FRATURA DO MATERIAL



$$G_c = 2\omega_f$$

Energia superficial por área de trinca, surgida pela propagação do elemento diferencial “ da ”.

28

RESISTÊNCIA À FRATURA DO MATERIAL

No limite: $G = G_c$, ou seja, a propagação da trinca ocorre quando a taxa de liberação de energia se iguala à resistência à fratura do material.

Ocorre, porém, que o crescimento da trinca pode ser de forma estável ou instável, dependendo de como G e ω_f variam com o tamanho da trinca.

29

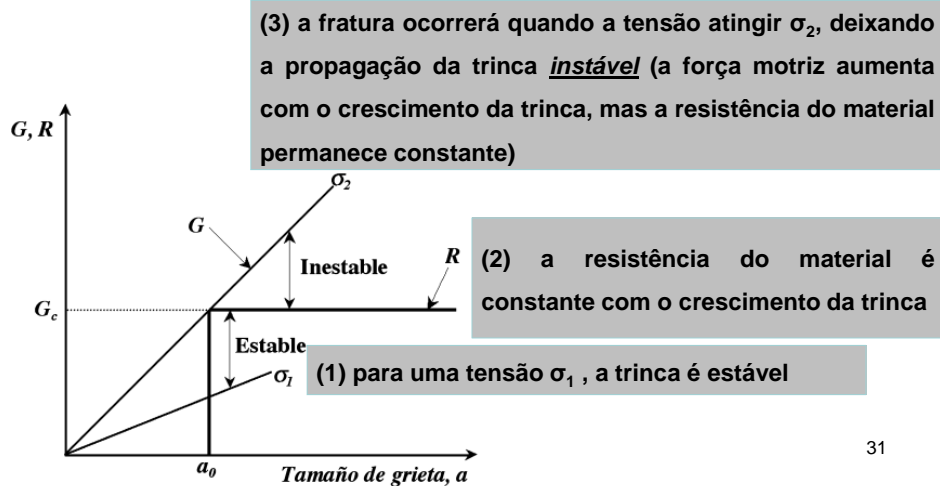
CURVAS R

A representação esquemática da condição de estabilidade da trinca, feita relacionando G e R com o tamanho da trinca, recebe o nome de curva R.

30

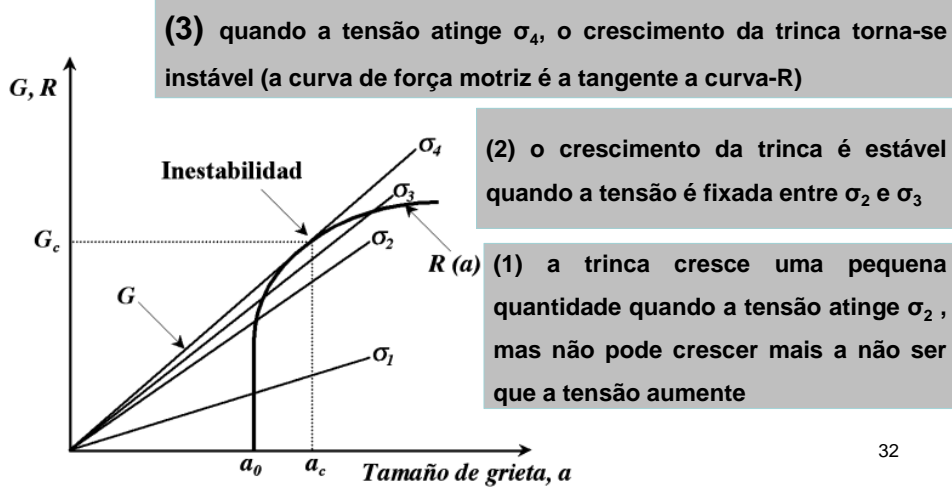
CURVAS - R

Curva R-Plana



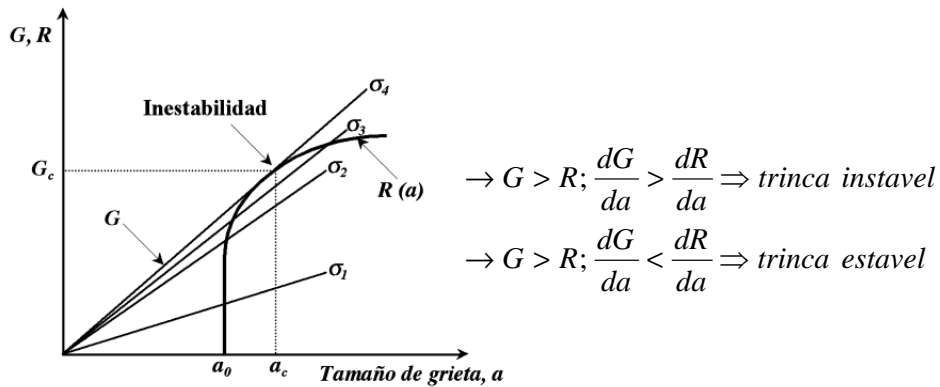
CURVAS - R

Curva R-Crescente



CURVAS - R

Curva R-Crescente – Conclusões:



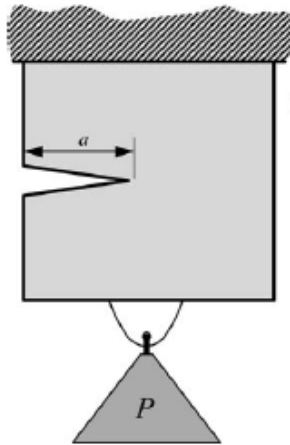
33

FORMAS DA CURVA - R

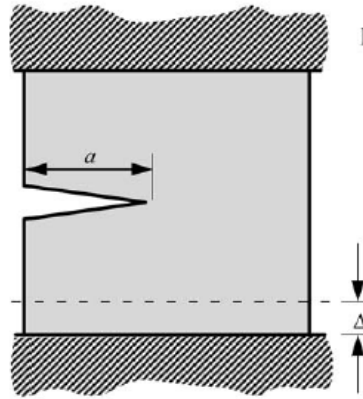
- materiais frágeis – curvas planas
- materiais dúcteis – curvas crescentes
- curvas decrescentes – falha por clivagem (fratura transgranular em materiais cristalinos)

34

CRESCIMENTO DA TRINCA



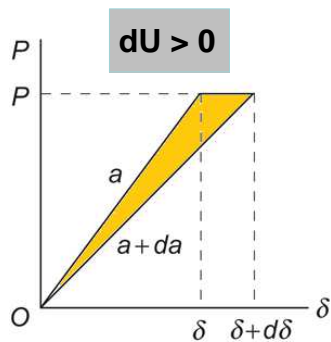
a) tensão constante



b) deformação constante

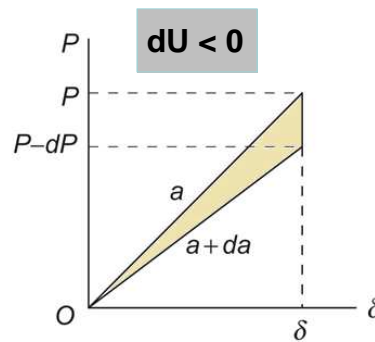
35

CRESCIMENTO DA TRINCA



a) tensão constante

.....



b) deformação constante

.....

36

EXEMPLO 03

Um material apresenta o seguinte comportamento em relação à resistência ao crescimento de trincas:

$$R = 6,95(a - a_0)^{0,5} \Rightarrow (kJ / m^2)$$

sendo a_0 o tamanho inicial da trinca (em mm). Considere uma placa com uma fissura central ($a \ll W$) feita a partir deste material ($E = 207 \text{ GPa}$).

37

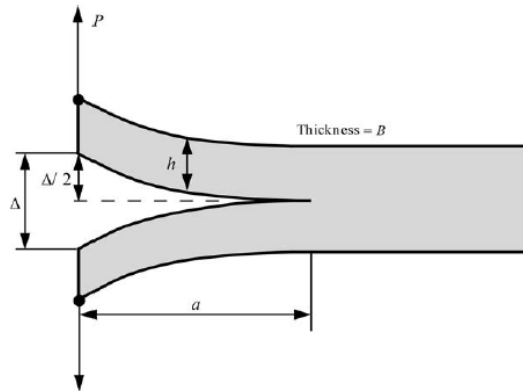
EXEMPLO 03 - continuação

- (a) Se a placa fratura em 138 MPa, determine: o tamanho da fissura inicial (em cada ponta da trinca);
- (b) Se esta placa tem um comprimento de fissura inicial ($2a_0$) de 50,8 mm e a placa é carregada ao fracasso, determine: a tensão de ruptura correspondente.

38

EXEMPLO 04

Determine a taxa de liberação de energia para a viga esquematizada em figura.



39

BIBLIOGRAFIA DE REFERÊNCIA

Arana, J. L. e **González**, J.J., *Mecánica de Fractura*, Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco.

Anderson, T.L., *Fracture Mechanics – Fundamentals and Applications*, 3a Ed., Taylor & Francis, USA (2005).

<http://www.ltas-cm3.ulg.ac.be/classes.htm>

40