ANÁLISE NUMÉRICA DE FOURIER – FUNÇÕES GENÉRICAS

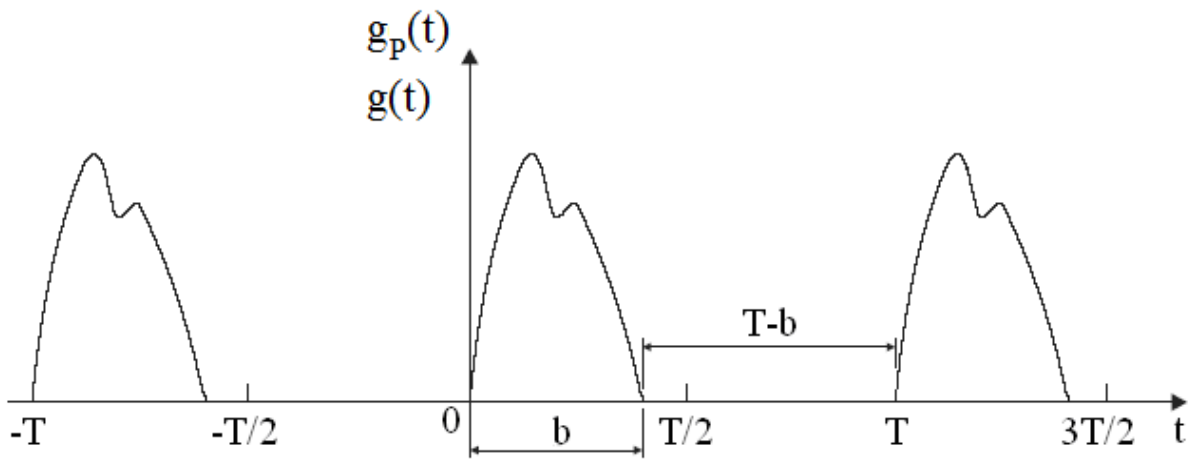
TRANSFORMADA ATRAVÉS DE SÉRIE

O **cômputo numérico** e aproximado da **transformada de Fourier** também é feito pela **transformada discreta de Fourier** (TDF), como se verá nesse módulo.

Para tanto, sejam inicialmente duas **funções contínuas**: $g_P(t)$, que é periódica de período T, e g(t), que é definida a partir de $g_P(t)$ da seguinte forma:

$$g(t) = \begin{cases} g_P(t), & t \in [0, T) \\ 0, & t \notin [0, T) \end{cases} \qquad (1)$$

As funções $g_P(t)$ e g(t) são ilustradas na figura ao lado.



Funções $g_P(t)$ e g(t) (Espíndola, 1986)

TRANSFORMADA ATRAVÉS DE SÉRIE (cont.)

Como $\mathbf{g_P(t)}$ é **periódica**, ela pode ser representada através da **forma complexa da série de Fourier** por

$$g_P(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \bar{G}_{Pj} e^{i\omega_j t} \quad (2)$$

onde $\bar{G}_{Pj} = \frac{1}{T}\int_0^T g_P(t) e^{-i\omega_j t} dt \quad (3)$ e $\omega_j = j\omega_1 = j\left(\frac{2\pi}{T}\right) \quad (4)$

Já **g(t)**, que é **aperiódica**, possui **transformada de Fourier** $\bar{G}(\omega)$, que é dada por

$$\bar{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^T g_P(t) e^{-i\omega t} dt \quad (5)$$ $\rightarrow$ T : duração, por definição!

A transformada $\bar{G}(\omega)$ é **contínua**, definida em todo o intervalo $-\infty < \omega < +\infty$.

TRANSFORMADA ATRAVÉS DE SÉRIE (cont.)

Se, na Eq. (5), qual seja,

$$\bar{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{0}^{T} g_P(t)e^{-i\omega t}dt \quad (5)$$

são computados os valores nos pontos $\omega = \omega_j = j\omega_1 = j(2\pi/T)$, obtém-se

$$\bar{G}(\omega_j) = \int_{0}^{T} g_P(t)e^{-i\omega_j t}dt \quad (6) \qquad j = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ ...$$

A Eq. (6), logo acima, pode ser comparada com a Eq. (3), vista antes, em que

$$\bar{G}_{Pj} = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} g_P(t)e^{-i\omega_j t}dt \quad (3)\ .$$

Dessa comparação, decorre a seguinte relação:

$\bar{G}_{Pj} = \frac{1}{T}\bar{G}(\omega_j)$ $\rightarrow$ coeficientes da série de $g_P(t)$ e transformada de $g(t)$ em ω_j .

TRANSFORMADA ATRAVÉS DE SÉRIE (cont.)

Manipulando a relação anterior, resulta que

$$\boxed{\bar{G}(\omega_j) = \bar{G}\left(j\frac{2\pi}{T}\right) = \bar{G}_{Pj}T} \quad (7)$$

→ **Em $\omega = j2\pi/T$, a transformada de Fourier de uma função pode ser obtida dos coeficientes da série de Fourier de uma função periódica associada**.

Assim, para uma função contínua de duração T, pode-se obter uma sequência de valores de sua transformada de Fourier da seguinte forma (indireta):

→ idealizar que a função se repete, gerando uma nova função, agora periódica, e

→ usar os coeficientes da série de Fourier da função idealizada para determinar a transformada da função original em frequências particulares.

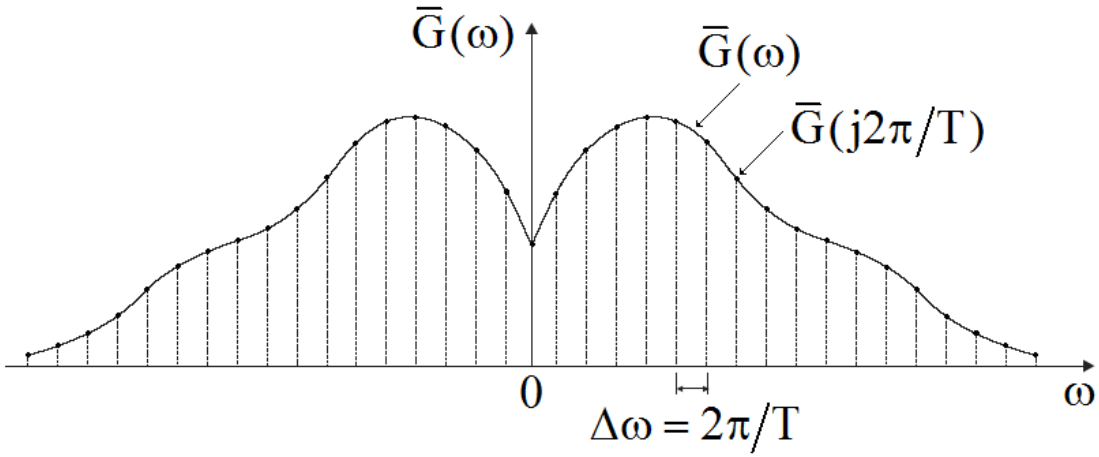
TRANSFORMADA ATRAVÉS DE SÉRIE (cont.)

Os passos da abordagem indicada acima (que é exata!) são os seguintes:

1º.) **Computam-se** os **coeficientes** $\bar{G}_{Pj}$ **da função periódica idealizada**;

2º.) **Obtêm-se** os **valores** $\bar{G}\left(j2\pi/T\right)$ **da transformada de Fourier**, via Eq. (7).

Mostra-se abaixo, para uma transformada real $\bar{G}(\omega)$, a sucessão de valores $\bar{G}\left(j2\pi/T\right)$ que, ligados, aproximam $\bar{G}(\omega)$ no intervalo $-\infty < \omega < +\infty$.



Transformada de Fourier $\bar{G}(\omega)$ de uma função g(t) (Espíndola, 1986)

RECONSTITUIÇÃO DA FUNÇÃO TEMPORAL

Por outro lado, caso se conheça a transformada de Fourier $\overline{G}(\omega)$ apenas em

$j\frac{2\pi}{T}$, onde $j = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$ (frequências particulares!),

a **função de interesse** $g(t)$ (aperiódica) pode ser reconstituída a partir da reconstrução da **função idealizada** $g_P(t)$ (periódica), pois

$$g(t) = \begin{cases} g_P(t), & t \in [0,T) \\ 0, & t \notin [0,T) \end{cases} \qquad (1)$$

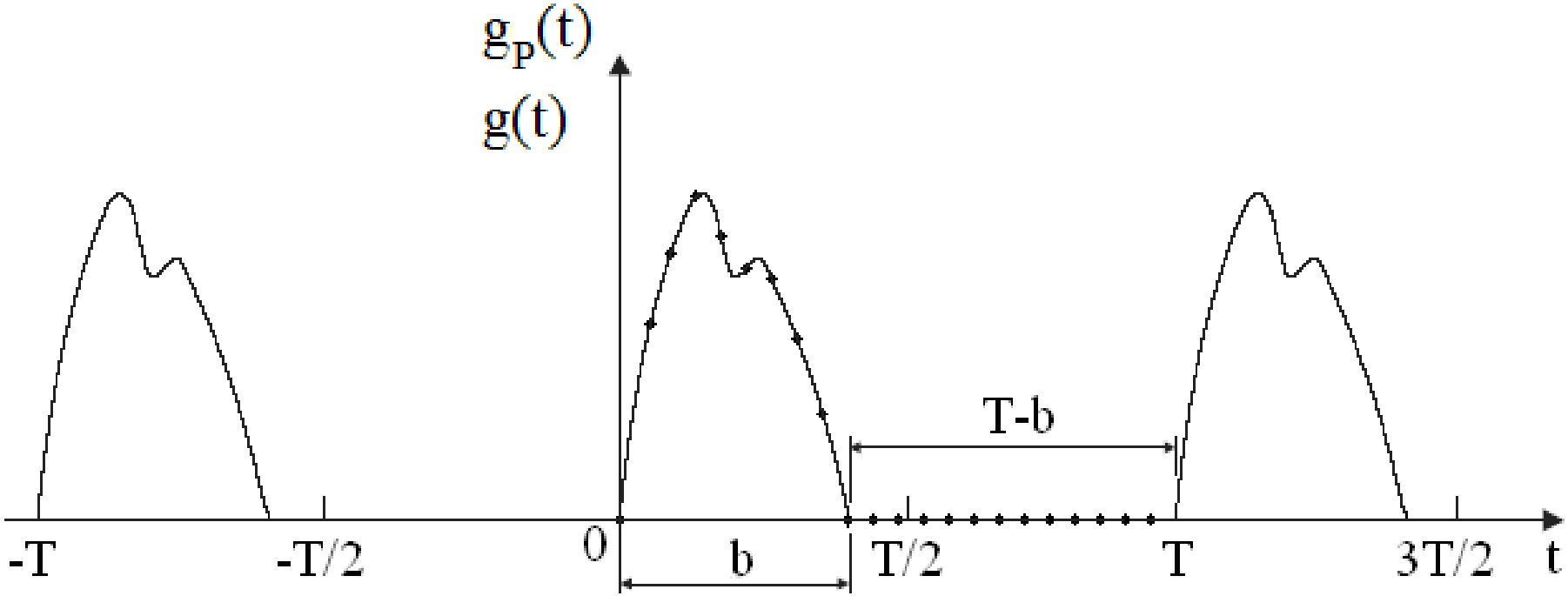
e

$$g_P(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \overline{G}_{Pj} e^{i\omega_j t} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\overline{G}(\omega_j)}{T} e^{i\omega_j t} = \frac{1}{T} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \overline{G}\left(j\frac{2\pi}{T} \right) e^{i\left(j\frac{2\pi}{T} \right)t} \qquad (8)\ .$$

TRANSFORMADA DE FOURIER VIA TDF

Considere-se, agora, que a **função** de interesse **g(t)** tenha sido **amostrada**, tal como mostrado na figura abaixo, fornecendo uma sequência de valores discretos.

Esses valores também descrevem a função idealizada $g_P(t)$ em um período.



Função g(t) amostrada (Espíndola, 1986)

TRANSFORMADA DE FOURIER VIA TDF (cont.)

A Eq. (7) relaciona os coeficientes complexos de Fourier $\bar{G}_{Pj}$, de $g_P(t)$, com os valores da transformada de Fourier $\bar{G}(\omega)$, de $g(t)$, nos pontos $(j2\pi/T)$, de modo que

$$\bar{G}\left(j2\pi/T\right) = \bar{G}_{Pj}T \quad (7) \qquad (\rightarrow \text{relação exata vista anteriormente!})$$

Ora, sabe-se, do cômputo numérico dos coeficientes da série de Fourier, que

$$\bar{G}_{Pj} \approx \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(g_P)_k e^{-i\left(j\frac{2\pi}{N}k\right)} \quad (9), \quad \text{em que} \quad j = 0, \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ldots .$$

Assim, substituindo (9) em (7) e notando que $(g_P)_k = g_k$ em $[0,T)$, resulta que

$$\boxed{\bar{G}\left(j2\pi/T\right) \approx \frac{T}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(g_P)_k e^{-i\left(j\frac{2\pi}{N}k\right)} = \frac{T}{N}\sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{-i\left(j\frac{2\pi}{N}k\right)}} \quad (10)$$

TRANSFORMADA DE FOURIER VIA TDF (cont.)

A expressão (10) permite o **cômputo numérico** de um conjunto de **valores da transformada de Fourier** de g(t), **a partir de** uma **sequência de valores discretos** dessa função, que é o que se obtém, via de regra, em experimentos.

Como a **transformada discreta de Fourier** $\bar{D}_j$ de uma sequência de valores g_k é

$$\boxed{\bar{D}_j = \sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{-i\left(j\frac{2\pi}{N}k\right)}} \quad (11)$$

(notação diferente, definição igual) ,

tem-se que

$$\boxed{\bar{G}\left(j\frac{2\pi}{T}\right) \approx \left(\frac{T}{N}\right)\bar{D}_j} \quad (12)$$

→ **O valor da transformada de Fourier é aproximadamente (T/N) vezes o valor da transformada discreta de Fourier (TDF) correspondente.**

RECONSTITUIÇÃO VIA TRANSF. INVERSA DISCRETA DE FOURIER

Os valores g_k de g(t) podem ser reconstituídos dos valores de $\overline{D}_j$ correspondentes pela **transformada inversa discreta de Fourier (TIDF)**, em que

$$\boxed{g_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\overline{D}_j e^{i\left(j\frac{2\pi}{N}k\right)}} \quad (13)$$

sendo que $k = 0, 1, 2, ..., N-1$.

As expressões (12) e (13) permitem, respectivamente, o **cômputo numérico da transformada de Fourier e da transformada inversa de Fourier**.

→ Verifica-se que tanto a **sequência** $\overline{D}_j$, dada por (11), quanto a **sequência** g_k, dada por (13), são **periódicas**, de período igual a N (número de amostras).

EXEMPLO – FUNÇÃO EXPONENCIAL DECRESCENTE

Seja a função exponencial decrescente dada por

$$x(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t \geq 0,\ \alpha > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} .$$

A transformada de Fourier dessa função é

$$\bar{X}(\omega) = \frac{1}{\alpha + i\omega} .$$

Suponha-se, agora, que a função x(t), com $\alpha = 2$, seja representada por uma sequência de 128 pontos, obtidos por amostragem uniforme, ao longo de um intervalo de tempo T = 5 s.

Como se comparam os espectros de amplitude e fase correspondentes às transformadas de Fourier obtidas pelas vias analítica e numérica?