CAPÍTULO 11: ESCOAMENTO BIDIMENSIONAL DE FLUIDO INCOMPRESSÍVEL: EQUAÇÕES DA MASSA E DE NAVIER-STOKES

CONSIDERAÇÕES / HIPÓTESES:

- EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO DA:
  - MASSA → $p(x,y)$
  - QUANTIDADE DE MOVIMENTO LINEAR NA DIREÇÃO x → $u(x,y)$
  - QUANTIDADE DE MOVIMENTO LINEAR NA DIREÇÃO y → $v(x,y)$

  INCÓGNITAS
- PROPRIEDADES CONSTANTES: ρ E μ
- FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO:
  - UDS E CDS NOS TERMOS ADVECTIVOS
  - CDS NOS TERMOS DIFUSIVOS E DE PRESSÃO
- VOLUMES FICTÍCIOS
- MALHA UNIFORME POR DIREÇÃO
- ACOPLAMENTO PRESSÃO - VELOCIDADE: SIMPLEC
- SOLVER: GAUSS-SEIDEL
- O TEMPO É EMPREGADO COMO PARÂMETRO DE RELAXAÇÃO OU PARA OBTER O REGIME TRANSIENTE
- SOLUÇÃO SEGREGADA DAS EQUAÇÕES
- ARRANJO CO-LOCALIZADO DE VARIÁVEIS

II.1. MODELO MATEMÁTICO

CONSIDERAÇÕES:

- FLUIDO INCOMPRESSÍVEL
- ESCOAMENTO LAMINAR BIDIMENSIONAL

EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA MASSA (MASSA):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \qquad (II.1)$$

EQUAÇÃO DE CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO LINEAR NA DIREÇÃO x (QML-x)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v u) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right] \qquad (II.2)$$

EQUAÇÃO DE CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO LINEAR NA DIREÇÃO y (QML-y)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v v) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu \frac{\partial v}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right] - S \qquad (II.3)$$

SENDO:

x E y AS COORDENADAS ESPACIAIS (VARIÁVEIS INDEPENDENTES) [m]

t A COORDENADA TEMPORAL (VARIÁVEL INDEPENDENTE) [s]

ρ A MASSA ESPECÍFICA DO FLUIDO [kg/m³]

u E v: AS COMPONENTES DO VETOR VELOCIDADE $\vec{V}$ NAS DIREÇÕES x E y [m/s]

p: A PRESSÃO ESTÁTICA DO FLUIDO [Pa]

μ: A VISCOSIDADE ABSOLUTA DO FLUIDO [Pa.s]

S: TERMO-FONTE, NO CASO, OBTIDO DO ARTIGO DE SHIH ET AL. (1989)

CONDIÇÕES DE CONTORNO:

$$u(0,y) = u(1,y) = u(x,0) = 0 \qquad (II.4)$$

$$u(x,1) = 16\,(x^4 - 2x^3 + x^2) \qquad (II.5)$$

$$v(0,y) = v(1,y) = v(x,0) = v(x,1) = 0 \qquad (II.6)$$

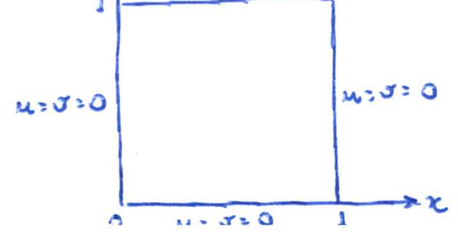

FIG. II.1: DOMÍNIO DE CÁLCULO E CONDIÇÕES DE CONTORNO

AS EQS. (11.1) A (11.3) PODEM SER REPRESENTADAS POR:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v\phi) = P^{\phi} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) + S^{\phi} \qquad (11.7)$$

ONDE:

EQUAÇÃO	ϕ	P^{ϕ}	S^{ϕ}	
MASSA	1	0	0	(11.8)
QML-x	u	$-\partial p/\partial x$	0	(11.9)
QML-y	v	$-\partial p/\partial y$	$-S$	(11.10)

11.2. SOLUÇÃO ANALÍTICA:

PARA O TERMO-FONTE DADO POR SHIH ET AL. (1989), p. 195, CHAMADO $B(x,y,Re)$, A SOLUÇÃO ANALÍTICA DAS EQS. (11.1) A (11.3), PARA REGIME PERMANENTE, COM ρ E μ CONSTANTES, É:

$$u(x,y) = 8\left(x^4 - 2x^3 + x^2\right)\left(4y^3 - 2y\right) \qquad (11.11)$$

$$v(x,y) = -8\left(4x^3 - 6x^2 + 2x\right)\left(y^4 - y^2\right) \qquad (11.12)$$

E $p(x,y)$ É DADO POR SHIH ET AL. (1989), p. 195.

11.3. DISCRETIZAÇÃO DA QML:

A INTEGRAÇÃO DA EQ. (11.7) SOBRE O VOLUME DE CONTROLE P DA FIG. 11.2 É DADA POR:

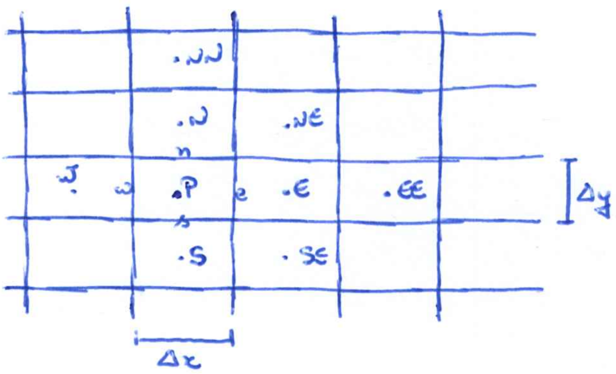

FIG. 11.2: MALHA BIDIMENSIONAL UNIFORME POR DIREÇÃO

$$\int_t\int_z\int_{y_s}^{y_n}\int_{x_w}^{x_e}\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v\phi)\right]dx\,dy\,dz\,dt =$$

$$\int_t\int_z\int_{y_s}^{y_n}\int_{x_w}^{x_e}\left[P^{\phi} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) + S^{\phi}\right]dx\,dy\,dz\,dt \qquad (11.13)$$

QUE RESULTA EM:

$$\left[(\rho\phi)_P - (\rho\phi)_P^0\right]\Delta x\Delta y\Delta z + \left[(\rho u\phi)_e - (\rho u\phi)_w\right]\Delta y\Delta z\Delta t + \left[(\rho v\phi)_n - (\rho v\phi)_s\right]\Delta x\Delta z\Delta t$$

$$= L[P^{\phi}]_P\,\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t + \left[\left(\mu\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_e - \left(\mu\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_w\right]\Delta y\Delta z\Delta t + \left[\left(\mu\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_n - \left(\mu\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_s\right]\Delta x\Delta y\Delta t$$

$$+\mathcal{L}\left[S^{\phi}\right]_P \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \qquad (11.14)$$

ONDE $\mathcal{L}[P^{\phi}]_P$ E $\mathcal{L}[S^{\phi}]_P$ REPRESENTAM AS APROXIMAÇÕES NUMÉRICAS DE P^{ϕ} E S^{ϕ} NO VOLUME P; ϕ_P^0 É AVALIADO NO INSTANTE DE TEMPO ANTERIOR $(t-\Delta t)$, E ϕ_P EM t (FORMULAÇÃO TOTALMENTE IMPLÍCITA).

DIVIDINDO-SE TODA A EQ. (11.14) POR Δt E CONSIDERANDO-SE:

- ρ E μ CONSTANTES;
- $m_P = \rho \Delta x \Delta y \Delta z$ (MASSA DO VOLUME DE CONTROLE P); (11.15)
- $\dot{m}_e = \rho u_e \Delta y \Delta z$ (FLUXO DE MASSA NA FACE LESTE); (11.16)
- $\dot{m}_w = \rho u_w \Delta y \Delta z$ (FLUXO DE MASSA NA FACE OESTE); (11.17)
- $\dot{m}_n = \rho v_n \Delta x \Delta z$ (FLUXO DE MASSA NA FACE NORTE); (11.18)
- $\dot{m}_s = \rho v_s \Delta x \Delta z$ (FLUXO DE MASSA NA FACE SUL); (11.19)

OBTÉM-SE:

$$\frac{m_P}{\Delta t}(\phi_P - \phi_P^0) + \dot{m}_e \phi_e - \dot{m}_w \phi_w + \dot{m}_n \phi_n - \dot{m}_s \phi_s = \left\{\mathcal{L}[P^{\phi}]_P + \mathcal{L}[S^{\phi}]_P\right\}\Delta x \Delta y \Delta z$$

$$+\mu\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_e - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_w\right]\Delta y \Delta z + \mu\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_n - \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_s\right]\Delta x \Delta z \qquad (11.20)$$

APROXIMAÇÃO DOS TERMOS VISCOSOS COM CDS:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_e \approx \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x} \qquad (11.21)$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_w \approx \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x} \qquad (11.22)$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_n \approx \frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta y} \qquad (11.23)$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_s \approx \frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta y} \qquad (11.24)$$

APROXIMAÇÃO DOS TERMOS DE PRESSÃO COM CDS:

$$\mathcal{L}[P^u]_P = \mathcal{L}\left[-\frac{\partial p}{\partial x}\right]_P \approx -\frac{(p_E - p_W)}{2\Delta x} \qquad (11.25)$$

$$\mathcal{L}[P^v]_P = \mathcal{L}\left[-\frac{\partial p}{\partial y}\right]_P \approx -\frac{(p_N - p_S)}{2\Delta y} \qquad (11.26)$$

APROXIMAÇÃO DOS TERMOS ADVECTIVOS COM UDS:

$$\phi_e = (1/2 + \alpha_e)\,\phi_P + (1/2 - \alpha_e)\,\phi_E \qquad (11.27)$$

$$\phi_w = (1/2 + \alpha_w)\,\phi_W + (1/2 - \alpha_w)\,\phi_P \qquad (11.28)$$

$$\phi_n = (1/2 + \alpha_n)\,\phi_P + (1/2 - \alpha_n)\,\phi_N \qquad (11.29)$$

$$\phi_s = (1/2 + \alpha_s)\,\phi_S + (1/2 - \alpha_s)\,\phi_P \qquad (11.30)$$

ONDE:

$$\alpha_e = \frac{1}{2}\,\text{SIGN}\,(u_e) \qquad (11.31)$$

$$\alpha_w = \frac{1}{2}\,\text{SIGN}\,(u_w) \qquad (11.32)$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2}\,\text{SIGN}\,(v_n) \qquad (11.33)$$

$$\alpha_s = \frac{1}{2}\,\text{SIGN}\,(v_s) \qquad (11.34)$$

COM AS EQS. (11.21) A (11.24) E (11.27) A (11.30) EM (11.20), OBTÉM-SE

$$\frac{M_P}{\Delta t}(\phi_P - \phi_P^o) + \dot{m}_e\left[(1/2 + \alpha_e)\,\phi_P + (1/2 - \alpha_e)\,\phi_E\right] - \dot{m}_w\left[(1/2 + \alpha_w)\,\phi_W + (1/2 - \alpha_w)\,\phi_P\right]$$
$$+ \dot{m}_n\left[(1/2 + \alpha_n)\,\phi_P + (1/2 - \alpha_n)\,\phi_N\right] - \dot{m}_s\left[(1/2 + \alpha_s)\,\phi_S + (1/2 - \alpha_s)\,\phi_P\right] = \left\{L\left[P^\phi\right]_P + L\left[S^\phi\right]_P\right\}\Delta x \Delta y \Delta z$$
$$+ \mu\,\frac{(\phi_W + \phi_E - 2\phi_P)}{\Delta x}\,\Delta y \Delta z + \mu\,\frac{(\phi_S + \phi_N - 2\phi_P)}{\Delta y}\,\Delta x \Delta z \qquad (11.35)$$

QUE PODE SER REESCRITA COMO

$$a_P^v \phi_P^* = a_w^v \phi_W^* + a_e^v \phi_E^* + a_s^v \phi_S^* + a_n^v \phi_N^* + b_P^\phi \qquad (11.36)$$

(VÁLIDA PARA $P = 2, 3, \dots, N-1$, COM $N = N_x$ OU N_y)

SENDO:

$$a_w^v = \dot{m}_w\,(1/2 + \alpha_w) + \mu\,\frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x} \qquad (11.37)$$

$$a_e^v = -\dot{m}_e\,(1/2 - \alpha_e) + \mu\,\frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x} \qquad (11.38)$$

$$a_s^v = \dot{m}_s\,(1/2 + \alpha_s) + \mu\,\frac{\Delta x \Delta z}{\Delta y} \qquad (11.39)$$

$$a_n^v = -\dot{m}_n\,(1/2 - \alpha_n) + \mu\,\frac{\Delta x \Delta z}{\Delta y} \qquad (11.40)$$

$$a_P^v = a_w^v + a_e^v + a_s^v + a_n^v + \frac{M_P}{\Delta t} \qquad (11.41)$$

$$b_P^\phi = b_t^\phi + b_{PP}^\phi + b^{S\phi} \qquad (11.42)$$

ONDE

$$b_t^{\phi} = \frac{m_P}{\Delta t}\,\phi_P^{0} \qquad (11.43)$$

$$b_{pp}^{u} = -\frac{(p_E^{*} - p_W^{*})}{2}\,\Delta y\,\Delta z \qquad (11.44)$$

$$b_{pp}^{v} = -\frac{(p_N^{*} - p_S^{*})}{2}\,\Delta x\,\Delta z \qquad (11.45)$$

$$b^{Su} = 0 \qquad (11.46)$$

$$b^{Sv} = L\left[S^{v}\right]_P \Delta x\,\Delta y\,\Delta z \qquad (11.47)$$

AS EQS. (11.36) A (11.47) VALEM PARA OS VOLUMES REAIS.

A APLICAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO DE DIRICHLET, DADAS PELAS EQS. (11.4) A (11.6) É FEITA UTILIZANDO-SE VOLUMES FICTÍCIOS, CONFORME EXEMPLIFICADO A SEGUIR PARA O CONTORNO NORTE.

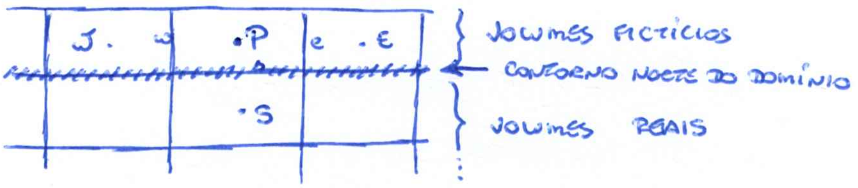

FIG. 11.3: APLICAÇÃO DE CONDIÇÕES DE CONTORNO COM VOLUMES FICTÍCIOS NO CONTORNO NORTE.

$$\phi_s = \frac{(\phi_P + \phi_S)}{2} = \phi_{c.c.} \ \text{(CONHECIDO)} \qquad (11.48)$$

OU

$$\phi_P = -\phi_S + 2\,\phi_{c.c.} \qquad (11.49)$$

QUE NA FORMA DA EQ. (11.36) RESULTA EM:

$$a_P^{v} = 1\,;\quad a_w^{v} = a_e^{v} = a_n^{v} = 0\,;\quad a_s^{v} = -1\,;\quad b_P^{\phi} = 2\,\phi_{c.c.} \qquad (11.50).$$

11.4. DISCRETIZAÇÃO DA MASSA:

A DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DE CONSERVAÇÃO DA MASSA, EQ. (11.1), SEGUE AS EQS. (11.13) A (11.20). CONSIDERANDO AS RELAÇÕES DADAS NA EQ. (11.8), OBTÉM-SE:

$$\dot{m}_e - \dot{m}_w + \dot{m}_n - \dot{m}_s = 0 \qquad (11.51)$$

OU, COM AS EQS. (11.16) A (11.19),

$$\rho u_e \Delta y \Delta z - \rho u_w \Delta y \Delta z + \rho v_n \Delta x \Delta z - \rho v_s \Delta x \Delta z = 0$$

OU AINDA,

$$u_e \Delta y - u_w \Delta y + v_n \Delta x - v_s \Delta x = 0 \qquad (11.52)$$

APROXIMAÇÃO DAS VELOCIDADES NAS FACES COM O MÉTODO SIMPLEC:

$$u_e = u_e^* - d_e(p_P' - p_E') \quad (11.53)$$

$$u_w = u_w^* - d_w(p_W' - p_P') \quad (11.54)$$

$$v_n = v_n^* - d_n(p_P' - p_N') \quad (11.55)$$

$$v_s = v_s^* - d_s(p_S' - p_P') \quad (11.56)$$

ONDE d_i É O COEFICIENTE DO MÉTODO SIMPLEC.

EMPREGANDO-SE AS EQS. (11.53) A (11.56) NA EQ. (11.52),

$$[u_e^* - d_e(p_P' - p_E')]\Delta y - [u_w^* - d_w(p_W' - p_P')]\Delta y + [v_n^* - d_n(p_P' - p_N')]\Delta x$$
$$- [v_s^* - d_s(p_S' - p_P')]\Delta x = 0$$

OU NA FORMA,

$$a_P^p p_P' = a_w^p p_W' + a_e^p p_E' + a_s^p p_S' + a_n^p p_N' + b_p^p \quad (11.57)$$

(VÁLIDA PARA $p = 2, 3, \ldots, N-1$, COM $N = N_x$ OU N_y)

COM OS COEFICIENTES:

$$a_w^p = d_w \Delta y \quad (11.58)$$

$$a_e^p = d_e \Delta y \quad (11.59)$$

$$a_s^p = d_s \Delta x \quad (11.60)$$

$$a_n^p = d_n \Delta x \quad (11.61)$$

$$a_P^p = a_w^p + a_e^p + a_s^p + a_n^p \quad (11.62)$$

$$b_P^p = (u_w^* - u_e^*)\Delta y + (v_s^* - v_n^*)\Delta x \quad (11.63)$$

OBSERVA-SE QUE A EQ. (11.63), DE b_P^p, É A PRÓPRIA EQUAÇÃO DE CONSERVAÇÃO DA MASSA, EQ. (11.52), MULTIPLICADA POR (-1).

AS EQS. (11.57) A (11.63) SÃO VÁLIDAS PARA OS VOLUMES REAIS.

NÃO É NECESSÁRIO APLICAR CONDIÇÕES DE CONTORNO DE PRESSÃO NA METODOLOGIA QUE SE ESTÁ USANDO, EXCETO SE FOR NECESSÁRIO PRESCREVER A PRESSÃO EM ALGUM CONTORNO.

PORÉM, PARA FACILITAR A IMPLEMENTAÇÃO DO PROGRAMA E DEVIDO À NECESSIDADE DA PRESSÃO NOS VOLUMES FICTÍCIOS NAS EQS. (11.44) E (11.45), SERÁ UTILIZADA EXTRAPOLAÇÃO LINEAR NOS QUATRO CONTORNOS:

• CONTORNO ESQUERDO: $p'_P = p'_E - (p'_{EE} - p'_E)$ (11.64)
(P=1 em x)

OU NA FORMA DA EQ. (11.57):

$$a_P^p = a_e^p = 1; \quad a_w^p = a_s^p = a_n^p = 0; \quad b_P^p = -(p'_{EE} - p'_E) \tag{11.65}$$

• CONTORNO DIREITO: $p'_P = p'_W + (p'_W - p'_{WW})$ (11.66)
(P = Nx)

OU

$$a_P^p = a_w^p = 1; \quad a_e^p = a_s^p = a_n^p = 0; \quad b_P^p = p'_W - p'_{WW} \tag{11.67}$$

• CONTORNO SUL: $p'_P = p'_N - (p'_{NN} - p'_N)$ (11.68)
(P=1 em y)

OU

$$a_P^p = a_n^p = 1; \quad a_w^p = a_e^p = a_s^p = 0; \quad b_P^p = -(p'_{NN} - p'_N) \tag{11.69}$$

• CONTORNO NORTE: $p'_P = p'_S + (p'_S - p'_{SS})$ (11.70)
(P = Ny)

OU

$$a_P^p = a_s^p = 1; \quad a_w^p = a_e^p = a_n^p = 0; \quad b_P^p = p'_S - p_{SS} \tag{11.71}$$

11.5. ACOPLAMENTO PRESSÃO-VELOCIDADE COM O MÉTODO SIMPLEC

SEGUINDO O PROCEDIMENTO APRESENTADO NA SEÇÃO 9.4 DAS NOTAS DE AULA, OBTÉM-SE:

$$u_P = u_P^* - d_P^u \frac{(p'_E - p'_W)}{2} \tag{11.72}$$

$$v_P = v_P^* - d_P^v \frac{(p'_N - p'_S)}{2} \tag{11.73}$$

} VOLUMES REAIS

ONDE:

$$d_P^u = \frac{\Delta y \, \Delta z}{(a_P^v - \sum a_{nb}^v)} \tag{11.74}$$

$$d_P^v = \frac{\Delta x \, \Delta z}{(a_P^v - \sum a_{nb}^v)} \tag{11.75}$$

$$\sum a_{nb}^v = a_w^v + a_e^v + a_s^v + a_n^v \tag{11.76}$$

COM AS EQS. (11.41), (11.76) E (11.15) NAS EQS. (11.74) E (11.75), CHEGA-SE A:

$$d_P^u = \frac{\Delta t}{\rho \Delta x} \tag{11.77}$$

$$d_P^v = \frac{\Delta t}{\rho \Delta y} \tag{11.78}$$

ONDE d_P^u E d_P^v SÃO OS COEFICIENTES DO MÉTODO SIMPLEC PARA AS VELOCIDADES NODAIS. ELES SÃO NECESSÁRIOS APENAS PARA OS VOLUMES REAIS.

II.6. CÁLCULO DAS VELOCIDADES NAS FACES DOS VOLUMES DE CONTROLE

AS VELOCIDADES u_e, u_w, v_n E v_s QUE APARECEM NOS COEFICIENTES E FONTES DAS EQUAÇÕES DA QML E DA MASSA SÃO OBTIDAS ATRAVÉS DE CÁLCULOS DIRETOS, CONFORME DEDUZ-SE A SEGUIR:

REESCREVENDO-SE A EQ. (II.36) PARA O VOLUME DE CONTROLE P E $\phi = u$,

$$(a_P^v)_P \, u_P^* = \sum (a_{nb}^v \, u_{NB}^*)_P + \frac{m_P}{\Delta t} u_P^o - \frac{(p_E^* - p_W^*)}{2} \Delta y \Delta z \tag{II.79}$$

E PARA O VOLUME DE CONTROLE E:

$$(a_P^v)_E \, u_E^* = \sum (a_{nb}^v \, u_{NB}^*)_E + \frac{m_E}{\Delta t} u_E^o - \frac{(p_{EE}^* - p_P^*)}{2} \Delta y \Delta z \tag{II.80}$$

ONDE:

$$\sum (a_{nb}^v u_{NB}^*)_P = (a_w^v)_P \, u_W^* + (a_e^v)_P \, u_E^* + (a_s^v)_P \, u_S^* + (a_n^v)_P \, u_N^* \tag{II.81}$$

$$\sum (a_{nb}^v u_{NB}^*)_E = (a_w^v)_E \, u_P^* + (a_e^v)_E \, u_{EE}^* + (a_s^v)_E \, u_{SE}^* + (a_n^v)_E \, u_{NE}^* \tag{II.82}$$

A VELOCIDADE NA FACE LESTE DE CADA VOLUME DE CONTROLE P, u_e^*, É OBTIDA POR MEIO DE UMA ESPÉCIE DE MÉDIA DAS EQS. (II.79) E (II.80), RESULTANDO EM:

$$\frac{[(a_P^v)_P + (a_P^v)_E]}{2} u_e^* = \frac{[\sum (a_{nb}^v u_{NB}^*)_P + \sum (a_{nb} u_{NB}^*)_E]}{2} + \frac{(m_P + m_E)}{2 \Delta t} u_e^o - (p_E^* - p_P^*) \Delta y \Delta z$$

OU

$$u_e^* = \frac{\left[\sum (a_{nb} u_{NB}^*)_P + \sum (a_{nb} u_{NB}^*)_E + \frac{(m_P + m_E)}{\Delta t} u_e^o - 2 (p_E^* - p_P^*) \Delta y \Delta z\right]}{[(a_P^v)_P + (a_P^v)_E]} \tag{II.83}$$

$$\begin{cases} P = 2, 3, \ldots, N_x - 2 \\ P = 2, 3, \ldots, N_y - 1 \end{cases}$$

PARA O PROBLEMA EM CONSIDERAÇÃO, EQS. (II.4) E (II.5), A VELOCIDADE u_e^* É NULA NOS CONTORNOS, ISTO É,

$$u_e^* = 0 \qquad (P = 1 \text{ E } N_x - 1) \tag{II.84}$$

REESCREVENDO-SE, AGORA, A EQ. (II.36) PARA O VOLUME DE CONTROLE P E $\phi = v$,

$$(a_P^v)_P\, v_P^* = \sum (a_{nb}^v\, v_{nb}^*)_P + \frac{m_P}{\Delta t} v_P^0 - \frac{(p_N^* - p_S^*)}{2} \Delta x \Delta z + L[S^v]_P\, \Delta x \Delta y \Delta z \qquad (11.85)$$

E PARA O VOLUME DE CONTROLE N:

$$(a_P^v)_N\, v_N^* = \sum (a_{nb}^v\, v_{nb}^*)_N + \frac{m_N}{\Delta t} v_N^0 - \frac{(p_{NN}^* - p_P^*)}{2} \Delta x \Delta z + L[S^v]_N\, \Delta x \Delta y \Delta z \qquad (11.86)$$

ONDE:

$$\sum (a_{nb}^v\, v_{nb}^*)_P = (a_w^v)_P v_W^* + (a_e^v)_P v_E^* + (a_s^v)_P v_S^* + (a_n^v)_P v_N^* \qquad (11.87)$$

$$\sum (a_{nb}^v\, v_{nb}^*)_N = (a_w^v)_N v_{NW}^* + (a_e^v)_N v_{NE}^* + (a_s^v)_N v_P^* + (a_n^v)_N v_{NN}^* \qquad (11.88)$$

A VELOCIDADE NA FACE NORTE DE CADA VOLUME DE CONTROLE P, v_n^*, É OBTIDA DE FORMA ANÁLOGA A u_e^*, COM AS EQS. (11.85) E (11.86), O QUE RESULTA EM:

$$\frac{[(a_P^v)_P + (a_P^v)_N]}{2} v_n^* = \frac{\left[\sum (a_{nb}^v v_{nb}^*)_P + \sum (a_{nb}^v v_{nb}^*)_N\right]}{2} + \frac{(m_P + m_N)}{2\Delta t} v_n^0 - (p_N^* - p_P^*)\Delta x \Delta z$$
$$+ \frac{(L[S^v]_P + L[S^v]_N)}{2} \Delta x \Delta y \Delta z$$

OU SEJA,

$$v_n^* = \frac{\left[\sum (a_{nb}^v v_{nb}^*)_P + \sum (a_{nb} v_{nb}^*)_N + \frac{(m_P + m_N)}{\Delta t} v_n^0 - 2(p_N^* - p_P^*)\Delta x \Delta z + (L[S^v]_P + L[S^v]_N)\Delta x \Delta y \Delta z\right]}{[(a_P^v)_P + (a_P^v)_N]} \qquad (11.89)$$

$$P = 2, 3, \ldots, N_y - 2$$
$$P = 2, 3, \ldots, N_x - 1$$

PARA O PROBLEMA EM CONSIDERAÇÃO, EQ. (11.6), A VELOCIDADE v_n^* É NULA NOS CONTORNOS, ISTO É,

$$v_n^* = 0 \qquad (P = 1 \text{ e } N_y - 1) \qquad (11.90)$$

OS COEFICIENTES DO MÉTODO SIMPLEC PARA AS EQS. (11.53) A (11.56) SÃO DADOS POR

$$(d_e)_P = \frac{(d_P^u + d_E^u)}{2} \qquad [P = 2, 3, \ldots, N_x - 2] \qquad (11.91)$$

$$(d_w)_P = (d_e)_W \qquad (11.92)$$

$$(d_n)_P = \frac{(d_P^v + d_N^v)}{2} \qquad [P = 2, 3, \ldots, N_y - 2] \qquad (11.93)$$

$$(d_s)_P = (d_n)_S \qquad (11.94)$$

NOS CONTORNOS,

$$d_e = 0 \qquad [P = 1 \text{ E } N_x - 1] \qquad (11.95)$$

$$d_n = 0 \qquad [P = 1 \text{ E } N_y - 1] \qquad (11.96)$$

11.7. ALGORITMO:

1) LER OS DADOS: N_x E N_y (COM FICTÍCIOS); Δt, μ, ρ, CONDIÇÕES DE CONTORNO E FONTE S^v (FUNÇÕES); I_v, I_p, I_t, I_m, ONDE:

I_v É O NÚMERO DE ITERAÇÕES INTERNAS PARA u^* E v^* } DENTRO DO GAUSS-SEIDEL
I_p É O NÚMERO DE ITERAÇÕES INTERNAS PARA p' }

I_t É O NÚMERO DE ITERAÇÕES TOTAL

I_m É O NÚMERO DE ITERAÇÕES NO CICLO DA MASSA

2) INICIALIZAÇÕES:

- CALCULAR Δx E Δy COM AS EQs. (7.31) E (7.32) E FAZER $\Delta z = 1$ m.
- FAZER:

$$\phi_P = \phi_P^0 = \phi_P^{EXATO} \qquad (11.97)$$

$$\text{ONDE } \phi_P = u_P, v_P, p_P$$

$$p'_P = u_e = u_e^0 = v_n = v_n^0 = 0 \qquad (11.98)$$

3) CALCULAR OS COEFICIENTES DE u_P^* E v_P^* (QUE SÃO IGUAIS), NOS VOLUMES REAIS, COM AS EQs. (11.37) A (11.41)

4) CALCULAR OS FONTES DE u_P^*, COM AS EQs. (11.42) A (11.44) E (11.46)

5) CALCULAR OS COEFICIENTES E FONTES DE u_P^* PARA OS VOLUMES FICTÍCIOS.

6) RESOLVER O SISTEMA DA EQ. (11.36) PARA u_P^* COM O MÉTODO GAUSS-SEIDEL, EQ. (5.11), FAZENDO I_v ITERAÇÕES

7) CALCULAR OS FONTES DE v_P^* COM AS EQs. (11.42), (11.43), (11.45) E (11.47)

8) CALCULAR OS COEFICIENTES E FONTES DE v_P^* PARA OS VOLUMES FICTÍCIOS

9) RESOLVER O SISTEMA DA EQ. (11.36) PARA v_P^* COM O MÉTODO GAUSS-SEIDEL, EQ. (5.11), FAZENDO I_v ITERAÇÕES.

10) CALCULAR AS VELOCIDADES u_e^* E v_n^*, COM AS EQs. (11.83) E (11.89), SÓ NAS FACES INTERNAS DO DOMÍNIO DE CÁLCULO.

11) CALCULAR OS COEFICIENTES DO SIMPLEC (d_P^u, d_P^v, d_e, d_n).

12) CALCULAR OS COEFICIENTES E FONTES DE p'_P COM AS EQs. (11.58) A (11.63), NOS VOLUMES REAIS

13) CALCULAR OS COEFICIENTES E FONTES DE p'_P PARA OS VOLUMES FICTÍCIOS, EQs. (11.65), (11.67), (11.69) E (11.71)

14) RESOLVER O SISTEMA DA EQ. (11.57) PARA p_P' COM O MÉTODO GAUSS-SEIDEL, EQ. (5.11), FAZENDO I_p ITERAÇÕES.

15) OBTER p_P AO CORRIGIR p_P^* COM p_P' ATRAVÉS DE

$$p_P = p_P^* + p_P' \tag{11.99}$$

E APLICAR AS EQS. (11.64), (11.66), (11.68) E (11.70) PARA p_P (E NÃO p_P').

16) OBTER u_P E v_P AO CORRIGIR AS VELOCIDADES u_P^* E v_P^* COM p_P' ATRAVÉS DAS EQS. (11.72) E (11.73) NOS VOLUMES REAIS

17) APLICAR AS CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA OBTER u_P E v_P NOS FICTÍCIOS.

18) OBTER u_e E v_n AO CORRIGIR AS VELOCIDADES u_e^* E v_n^* COM p_P' ATRAVÉS DAS EQS. (11.53) E (11.55), NAS FACES INTERNAS DO DOMÍNIO DE CÁLCULO.

19) ATUALIZAR OS CAMPOS PARA NOVO AVANÇO NO TEMPO:

$$u_P^0 = u_P \ ; \ u_e^0 = u_e, \ \ v_P^0 = v_P, \ \ v_n^0 = v_n \tag{11.100}$$

20) VOLTAR AO PASSO 3 ATÉ ATINGIR I_t.

21) ESCREVER OS CAMPOS DE u_P, u_e, v_P, v_n, p_P, p_P', d_P^p

22) VISUALIZAR OS RESULTADOS.

OBSERVAÇÕES:

- O CICLO DA MASSA, ENTRE OS PASSOS 12 E 18, PODE SER REPETIDO 2 OU 3 VEZES (ITERAÇÕES – I_m) PARA ACELERAR OU GARANTIR A CONVERGÊNCIA DO PROCESSO ITERATIVO.
- PARA SE OBTER O REGIME TRANSIENTE, É NECESSÁRIO INCLUIR UM CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA PARA VERIFICAR QUANDO O CICLO ENTRE OS PASSOS 3 A 18 ESTÁ CONVERGIDO EM UM DETERMINADO INSTANTE DE TEMPO.

11.8. CDS COM CORREÇÃO ADIADA

PARA USAR O ESQUEMA CDS NOS TERMOS ADVECTIVOS DA QML EM x E y, ATRAVÉS DE CORREÇÃO ADIADA, BASTA REESCREVER A EQ. (11.42) COMO

$$b_P^{\phi} = b_t^{\phi} + b_{pp}^{\phi} + b^{S\phi} + b_c^{\phi} \qquad (11.101)$$

ONDE

$$b_c^{\phi} = \beta \left[\dot{m}_e \alpha_e (\phi_P^* - \phi_E^*) - \dot{m}_w \alpha_w (\phi_W^* - \phi_P^*) + \dot{m}_n \alpha_n (\phi_P^* - \phi_N^*) - \dot{m}_s \alpha_s (\phi_S^* - \phi_P^*) \right] \qquad (11.102)$$

COM:

$$\beta = \begin{cases} 0, & \text{UDS} \qquad (11.103) \\ \text{ENTRE } 0 \text{ E } 1: & \text{MISTO} \qquad (11.104) \\ 1, & \text{CDS} \qquad (11.105) \end{cases}$$

$$\phi = u \;(\text{QML-}x) \;\text{ E }\; v\,(\text{QML-}y) \qquad (11.106)$$

ALÉM DISSO, NO CÁLCULO DE u_e^*, EQ. (11.83), E v_n^*, EQ. (11.89), É NECESSÁRIO INCLUIR DENTRO DOS COLCHETES:

$$u_e^*: \quad (b_c^u)_P + (b_c^u)_E \qquad (11.107)$$

$$v_n^*: \quad (b_c^v)_P + (b_c^v)_N \qquad (11.108)$$