CAPÍTULO 10: ESCOAMENTO BIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE: EQUAÇÕES DE BURGERS

CONSIDERAÇÕES / HIPÓTESES:

- EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO DA:
  - QUANTIDADE DE MOVIMENTO LINEAR NA DIREÇÃO $x \rightarrow u(x,y)$
  - QUANTIDADE DE MOVIMENTO LINEAR NA DIREÇÃO $y \rightarrow v(x,y)$

  } INCÓGNITAS
- PROPRIEDADES CONSTANTES: ρ E μ
- FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO:
  - CDS NOS TERMOS DIFUSIVOS E DE PRESSÃO
  - UDS NOS TERMOS ADVECTIVOS
- VOLUMES FICTÍCIOS
- MALHA UNIFORME POR DIREÇÃO
- SOLUÇÃO SEGREGADA DAS EQUAÇÕES
- ARRANJO CO-LOCALIZADO DE VARIÁVEIS

10.1. MODELO MATEMÁTICO

CONSIDERAÇÕES:

- ESCOAMENTO LAMINAR, BIDIMENSIONAL, EM REGIME PERMANENTE
- ESCOAMENTO INCOMPRESSÍVEL
- CAMPO DE PRESSÕES CONHECIDO.

EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO LINEAR NA DIREÇÃO x (QMLx)

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v u) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (10.1)$$

EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO LINEAR NA DIREÇÃO y (QMLy)

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v v) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right) - S \qquad (10.2)$$

ONDE: ρ É A MASSA ESPECÍFICA DO FLUIDO

u E v SÃO AS COMPONENTES DO VETOR VELOCIDADE NAS DIREÇÕES x E y.

μ É A VISCOSIDADE ABSOLUTA DO FLUIDO

S É UM TERMO-FONTE

CONDIÇÕES DE CONTORNO:

$$\left.\begin{aligned} u(0,y) &= u(1,y) = u(x,0) = 0 \\ u(x,1) &= 16\left(x^4 - 2x^3 + x^2\right) \end{aligned}\right\} \qquad (10.3)$$

$$v(0,y) = v(1,y) = v(x,0) = v(x,1) = 0 \qquad (10.4)$$

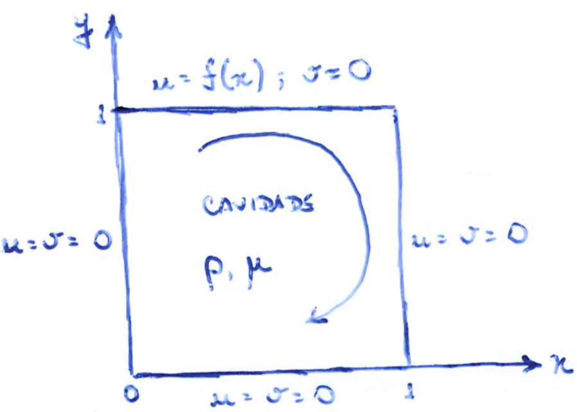

FIG. 10.1: DOMÍNIO DE CÁLCULO E CONDIÇÕES DE CONTORNO

AS EQS. (10.1) E (10.2) PODEM SER REPRESENTADAS POR

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho u \phi\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\rho v \phi\right] = P^{\phi} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + S^{\phi} \qquad (10.5)$$

ONDE:

EQUAÇÃO	ϕ	P^{ϕ}	S^{ϕ}
QML x	u	$-\frac{\partial p}{\partial x}$	0
QML y	v	$-\frac{\partial p}{\partial y}$	$-S$

10.2. DISCRETIZAÇÃO DA QML:

A INTEGRAÇÃO DA EQ. (10.5) SOBRE O VOLUME DE CONTROLE P DA FIG. 10.2 É DADA POR:

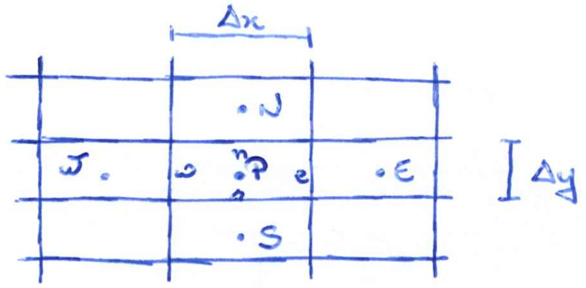

FIG. 10.2: MALHA BIDIMENSIONAL UNIFORME EM CADA DIREÇÃO.

$$\int_z \int_{y_s}^{y_n} \int_{x_w}^{x_e} \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u \phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \phi)\right] dx\, dy\, dz = \int_z \int_{y_s}^{y_n} \int_{x_w}^{x_e} \left[P^{\phi} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + S^{\phi}\right] dx\, dy\, dz$$

QUE RESULTA EM:

$$\left[(\rho u \phi)_e - (\rho u \phi)_w\right] \Delta y \Delta z + \left[(\rho v \phi)_n - (\rho v \phi)_s\right] \Delta x \Delta z = L\left[P^{\phi}\right]_P \Delta x \Delta y \Delta z$$
$$+ \left[\left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_e - \left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_w\right] \Delta y \Delta z + \left[\left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_n - \left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_s\right] \Delta x \Delta z +$$
$$L\left[S^{\phi}\right]_P \Delta x \Delta y \Delta z \qquad (10.6)$$

ONDE $L[P^\phi]_P$ E $L[S^\phi]_P$ REPRESENTAM AS APROXIMAÇÕES NUMÉRICAS DE P^ϕ E S^ϕ SOBRE O VOLUME DE CONTROLE P.

CONSIDERANDO-SE, NA EQ. (10.6), QUE:

- ρ E μ SÃO CONSTANTES;

$$\left.\begin{aligned}
&- \dot{m}_e = \rho u_e \Delta y \Delta z \quad \text{(FLUXO DE MASSA NA FACE LESTE)}\\
&- \dot{m}_w = \rho u_w \Delta y \Delta z \quad \text{(FLUXO DE MASSA NA FACE OESTE)}\\
&- \dot{m}_n = \rho v_n \Delta x \Delta z \quad \text{(FLUXO DE MASSA NA FACE NORTE)}\\
&- \dot{m}_s = \rho v_s \Delta x \Delta z \quad \text{(FLUXO DE MASSA NA FACE SUL)}
\end{aligned}\right\} \qquad (10.7)$$

OBTÉM-SE:

$$\dot{m}_e \phi_e - \dot{m}_w \phi_w + \dot{m}_n \phi_n - \dot{m}_s \phi_s = \left\{ L[P^\phi]_P + L[S^\phi]_P \right\} \Delta x \Delta y \Delta z$$
$$+ \mu \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_e - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_w \right] \Delta y \Delta z + \mu \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_n - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_s \right] \Delta x \Delta z \qquad (10.8)$$

APROXIMAÇÃO DOS TERMOS DE PRESSÃO COM CDS:

$$L[P^u]_P = L\left[-\frac{\partial p}{\partial x}\right]_P \approx -\frac{(p_E - p_W)}{2\Delta x} \qquad (10.9)$$

$$L[P^v]_P = L\left[-\frac{\partial p}{\partial y}\right]_P \approx -\frac{(p_N - p_S)}{2\Delta y} \qquad (10.10)$$

ONDE A PRESSÃO p EM CADA NÓ É OBTIDA DA SOLUÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA.

COM AS EQS. (10.9), (10.10) E (7.8) A (7.15), APROXIMAÇÕES DOS TERMOS DIFUSIVOS COM CDS E DOS TERMOS ADVECTIVOS COM UDS, OBTÉM-SE:

$$\dot{m}_e \left[(\tfrac{1}{2} + \alpha_e)\phi_P + (\tfrac{1}{2} - \alpha_e)\phi_E \right] - \dot{m}_w \left[(\tfrac{1}{2} + \alpha_w)\phi_W + (\tfrac{1}{2} - \alpha_w)\phi_P \right] +$$
$$\dot{m}_n \left[(\tfrac{1}{2} + \alpha_n)\phi_P + (\tfrac{1}{2} - \alpha_n)\phi_N \right] - \dot{m}_s \left[(\tfrac{1}{2} + \alpha_s)\phi_S + (\tfrac{1}{2} - \alpha_s)\phi_P \right] =$$
$$\left\{ L[P^\phi]_P + L[S^\phi]_P \right\} \Delta x \Delta y \Delta z + \mu \left[\frac{(\phi_E - \phi_P)}{\Delta x} - \frac{(\phi_P - \phi_W)}{\Delta x} \right] \Delta y \Delta z +$$

$$\mu \left[\frac{(\phi_N - \phi_P)}{\Delta y} - \frac{(\phi_P - \phi_S)}{\Delta y} \right] \qquad (10.11)$$

ONDE OS COEFICIENTES α SÃO FORNECIDOS PELAS EQS. (7.16) A (7.19).

A EQ. (10.11) PODE SER REESCRITA NA FORMA:

$$a_P \phi_P = a_w \phi_W + a_e \phi_E + a_s \phi_S + a_n \phi_N + b_P^{\phi} \qquad (10.12)$$

ONDE:

$$\left.\begin{aligned} a_w &= (1/2 + \alpha_w)\, \dot{m}_w + \mu \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x} \\ a_e &= -(1/2 - \alpha_e)\, \dot{m}_e + \mu \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x} \\ a_s &= (1/2 + \alpha_s)\, \dot{m}_s + \mu \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta y} \\ a_n &= -(1/2 - \alpha_n)\, \dot{m}_n + \mu \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta y} \\ a_p &= a_w + a_e + a_s + a_n \end{aligned}\right\} \qquad (10.13)$$

$$b_P^{u} = - \frac{(p_E - p_W)}{2} \Delta y \Delta z \qquad (10.14)$$

$$b_P^{v} = - \frac{(p_N - p_S)}{2} \Delta x \Delta z + L[S^v]_P \Delta x \Delta y \Delta z \qquad (10.15)$$

DEVE-SE PERCEBER QUE OS COEFICIENTES DE u E v SÃO IGUAIS PARA OS VOLUMES REAIS.

AS CONDIÇÕES DE CONTORNO DAS EQS. (10.3) E (10.4) PODEM SER APLICADAS COM VOLUMES FICTÍCIOS CONFORME VISTO NO CAP. 5.

PARA APLICAR AS EQS. (10.14) E (10.15) NOS VOLUMES DE CONTROLE REAIS QUE POSSUEM UMA FACE COINCIDINDO COM UM DOS CONTORNOS DO DOMÍNIO, DEVE-SE EXTRAPOLAR LINEARMENTE A PRESSÃO PARA OBTÊ-LA NOS FICTÍCIOS.

AS VELOCIDADES NAS FACES, PARA OS FLUXOS DE MASSA $\dot{m}$, PODEM SER OBTIDOS COM FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO DO TIPO CDS:

$$\left.\begin{array}{ll} u_w = \dfrac{u_P + u_W}{2} & u_e = \dfrac{u_E + u_P}{2} \\ \\ v_s = \dfrac{v_P + v_S}{2} & v_n = \dfrac{v_P + v_N}{2} \end{array}\right\} \qquad (10.16)$$

10.3. VARIÁVEIS DE INTERESSE SECUNDÁRIAS

• FLUXO DE MASSA ($\dot{m}$) NA LINHA $y = 1/2$ PARA A REGIÃO DE $x = 0$ A $x = 1/2$:

$$\dot{m} = \rho \, \Delta z \int_0^{1/2} v_{y=1/2} \, dx \qquad (10.17)$$

APROXIMANDO-SE A EQ. (10.17) PELA REGRA DO RETÂNGULO PARA UM NÚMERO ÍMPAR DE VOLUMES DE CONTROLE REAIS (N_x) EM y TEM-SE

$$\dot{m} = \rho \, \Delta z \, \Delta x \left[\sum_{P=1}^{N_x/2} \left(v_{P,\, y=1/2} \right) + \frac{v_{\frac{N_x}{2}+1,\, y=1/2}}{2} \right] \qquad (10.18)$$

• FORÇA (F) DA TAMPA DA CAVIDADE SOBRE O FLUIDO:

$$F = \mu \, \Delta z \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=1} dx \qquad (10.19)$$

APROXIMANDO-SE A DERIVADA DA EQ. (10.19) POR CDS, TEM-SE:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=1} = \frac{(u_N - u_P)}{\Delta y} \qquad (10.20)$$

ONDE $P = 1$ A N_x (PARA TODOS OS VOLUMES REAIS CUJA FACE NORTE COINCIDE COM O CONTORNO NORTE DO DOMÍNIO).

COM A EQ. (10.20) E A REGRA DO RETÂNGULO NA EQ. (10.19) OBTÉM-SE:

$$F = \mu \, \frac{\Delta z \, \Delta x}{\Delta y} \sum_{P=1}^{N_x} (u_N - u_P) \qquad (10.21)$$

10.4. SOLUÇÃO ANALÍTICA

PARA O TERMO FONTE S E O CAMPO DE PRESSÕES p DADOS POR SHIH ET AL. (1989) [p. 195, ONDE $S = B$], A SOLUÇÃO ANALÍTICA DAS EQS. (10.1) A (10.4),

(10.17) E (10.19) É DADA POR:

$$\left.\begin{aligned} u &= 8\left(x^4 - 2x^3 + x^2\right)\left(4y^3 - 2y\right) \\ v &= -8\left(4x^3 - 6x^2 + 2x\right)\left(y^4 - y^2\right) \\ \dot{m} &= \frac{3}{32} \\ F &= \frac{8}{3}\mu \end{aligned}\right\} \qquad (10.22)$$

10.5. ALGORITMO:

1) LER OS DADOS: NÚMERO DE VOLUMES DE CONTROLE EM x E EM y, μ, ρ, CONDIÇÕES DE CONTORNO, S^v, NÚMERO DE ITERAÇÕES (I_v, I_t), CAMPO DE PRESSÕES $p(x,y)$
2) INICIALIZAÇÕES: $u = v = 0$
3) CALCULAR OS COEFICIENTES E TERMOS FONTES DE u.
4) RESOLVER O SISTEMA DE EQUAÇÕES, EQ. (10.12), COM GAUSS-SEIDEL POR I_v VEZES
5) CALCULAR OS COEFICIENTES E TERMOS FONTES DE v.
6) RESOLVER O SISTEMA DE EQUAÇÕES, EQ. (10.12), COM GAUSS-SEIDEL POR I_v VEZES.
7) VOLTAR AO ITEM 3 POR I_t VEZES.
8) CALCULAR $\dot{m}$ E F.
9) IMPRIMIR E VISUALIZAR OS RESULTADOS.