

CAP. 09: ESCOAMENTO UNIDIMENSIONAL INCOMPRESSÍVEL DE FLUIDO (PROBLEMA DE MOODY):

EQUAÇÕES DA CONSERVAÇÃO DA MASSA E DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO LINEAR

CONCEITOS ENVOLVIDOS:

- EQUAÇÕES DA CONSERVAÇÃO DA:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ MASSA} \rightarrow p(x) \\ \bullet \text{ QML} \rightarrow u(x) \end{array} \right\} \text{INCÓGNITAS}$$

- PROPRIEDADES CONSTANTES:  $\rho, \mu, f$

- FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO UDS E CDS.

- APLICAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTOURNO COM JOWMES FICTÍCIOS

- MALHA UNIFORME

- ACOPLAMENTO PRESSÃO-VELOCIDADE: MÉTODO SIMPLEC

- SOLVER: TDMA

- O TEMPO É UTILIZADO COMO PARÂMETRO DE RELAXAÇÃO E NÃO PARA SE OBTER O REGIME TRANSIENTE

- SOLUÇÃO SEGREGADA (SEQUENCIAL) DAS EQUAÇÕES

- ARRANJO CO-LOCALIZADO DE VARIÁVEIS

9.1. MODELO MATEMÁTICO:

LEVANDO-SE EM CONSIDERAÇÃO AS SEGUINTESS HIPÓTESES/CONDIÇÕES:

- ESCOAMENTO LAMINAR OU TURBULENTO, COM EMPREGO DO PARÂMETRO  $f$ .
- ESCOAMENTO QUASE UNIDIMENSIONAL: ÁREA DE SEÇÃO TRANSVERSAL VARIÁVEL.
- ESCOAMENTO INCOMPRESSÍVEL ( $\rho$  CONSTANTE).
- CAMPO DE VELOCIDADES TAL QUE  $u > 0$ .

NESTE CASO, AS EQUAÇÕES GOVERNANTES DO ESCOAMENTO SÃO:

- EQUAÇÃO DE CONSERVAÇÃO DA MASSA (MASSA):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho A) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u A) = 0 \quad (9.1)$$

- EQUAÇÃO DE CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO LINEAR NA DIREÇÃO  $x$  (SML  $x$ ):

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} (\rho u A)}_{\text{TERMO TEMPORAL}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} (\rho u A u)}_{\text{FORÇAS DE INÉRCIA}} = - A \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{\text{FORÇA DEVIDO À PRESSÃO}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( \mu A \frac{\partial u}{\partial x} \right)}_{\text{FORÇAS VISCOSAS}} - \underbrace{\frac{\pi}{8} f \rho u^2 D}_{\text{FORÇAS DEVIDO AO ATRITO SUPERFICIAL}} \quad (9.2)$$

ONDE:

$$A = \frac{\pi D^2}{4} \quad (9.3)$$

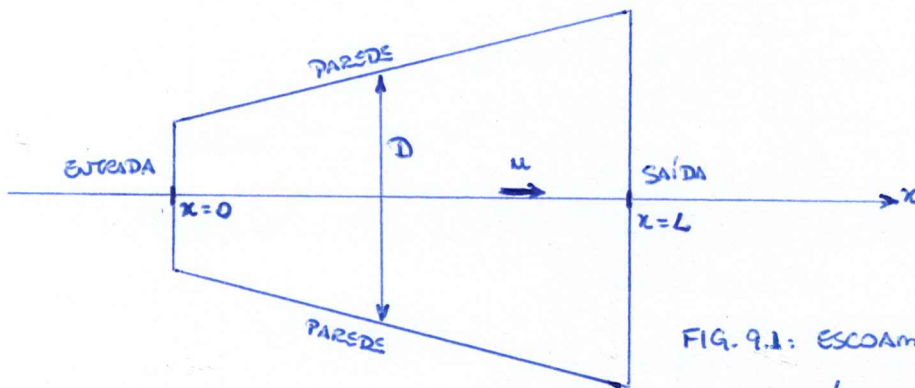


FIG. 9.1: ESCOAMENTO EM UM DUTO DE ÁREA VARIÁVEL

NOMENCLATURA:

- $x$ : COORDENADA ESPACIAL [m]
- $t$ : COORDENADA TEMPORAL [s]
- $\rho$ : MASSA ESPECÍFICA DO FLUIDO [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ]

$u$ : VELOCIDADE DO FLUIDO [m/s]

$\mu$ : VISCOSIDADE ABSOLUTA DO FLUIDO [Pa.s]

$p$ : PRESSÃO ESTÁTICA DO FLUIDO [Pa]

$A$ : ÁREA LOCAL DA SEÇÃO TRANSVERSAL DO DUTO [m<sup>2</sup>]

$D$ : DIÂMETRO LOCAL DO DUTO [m]

$f$ : FATOR DE ATRITO DE DARCY

SÃO CONSIDERADAS CONSTANTES:  $\rho, \mu, f$ .

9.2. DISCRETIZAÇÃO DA QML COM VDS/CDS (VDS NOS TERMOS ADJECTIVOS; CDS NOS TERMOS DIFUSIVOS E DE PRESSÃO).

A INTEGRAÇÃO DA EQ. (9.2) SOBRE O VOLUME DE CONTROLE P DA FIG. 9.2 RESULTA EM:

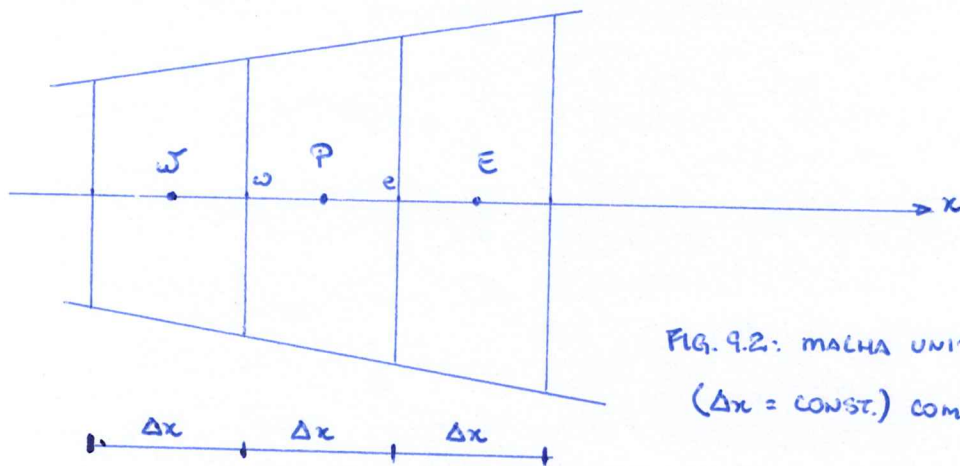


FIG. 9.2: MALHA UNIDIMENSIONAL UNIFORME ( $\Delta x = \text{CONST.}$ ) COM ÁREA VARIÁVEL

$$\int_{t-\Delta t}^t \int_{x_w}^{x_e} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mu A) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \mu A u) \right] dx dt = \int_{t-\Delta t}^t \int_{x_w}^{x_e} \left[ -A \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu A \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\pi}{8} f \rho \mu^2 D \right] dx dt \quad (9.4)$$

O QUE ORIGINA:

$$\rho A_p (\mu_p - \mu_p^0) \Delta x + \left[ (\rho \mu A)_e u_e - (\rho \mu A)_w u_w \right] \Delta t = -A_p (p_e - p_w) \Delta t + \mu \left[ \left( A \frac{\partial u}{\partial x} \right)_e - \left( A \frac{\partial u}{\partial x} \right)_w \right] \Delta t - \frac{\pi}{8} f \rho \mu_p^2 D_p \Delta x \Delta t \quad (9.5)$$

ONDE  $\mu_p^0$  É AVALIADO NO INSTANTE DE TEMPO  $(t - \Delta t)$  ENQUANTO  $\mu$  E  $p$  SÃO AVALIADOS NO INSTANTE  $(t)$ , AO SE EMPREGAR A FORMULAÇÃO TOTALMENTE IMPLÍCITA.

DIVIDINDO-SE A EQ. (9.5) POR  $\Delta t$ , OBTÉM-SE:

$$\frac{m_p}{\Delta t} (u_p - u_p^0) + \dot{m}_e u_e - \dot{m}_w u_w = -A_p (p_e - p_w) + \mu A_e \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_e - \mu A_w \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_w - \frac{\pi}{8} f \rho u_p^2 D_p \Delta x \quad (9.6)$$

ONDE:

$$m_p = \rho A_p \Delta x \quad (\text{MASSA DO VOLUME DE CONTROLE P}) \quad [\text{kg}] \quad (9.7)$$

$$\dot{m}_e = \rho u_e A_e \quad (\text{FLUXO DE MASSA NA FACE LESTE DO VOLUME DE CONTROLE P}) \quad [\text{kg/s}] \quad (9.8)$$

$$\dot{m}_w = \rho u_w A_w \quad (\text{FLUXO DE MASSA NA FACE OESTE DO VOLUME DE CONTROLE P}) \quad [\text{kg/s}] \quad (9.9)$$

NOTA-SE QUE FOI REALIZADA UMA LINEARIZAÇÃO DOS TERMOS DE VELOCIDADE: UMA PARCELA DE  $u_e$  E  $u_w$  SÃO MANTIDOS COMO INCÓGNITAS (EXPLÍCITAS), ENQUANTO A OUTRA PARCELA FOI INCLuíDA EM  $\dot{m}_e$  E  $\dot{m}_w$  (COEFICIENTES).

APROXIMAÇÃO DOS TERMOS VISCOSOS (DIFUSIVOS) COM CDS:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_e \approx \frac{u_e - u_p}{\Delta x} \quad (9.10)$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_w \approx \frac{u_p - u_w}{\Delta x} \quad (9.11)$$

APROXIMAÇÃO DOS TERMOS DE PRESSÃO COM CDS:

$$p_e \approx \frac{p_p + p_e}{2} \quad (9.12)$$

$$p_w \approx \frac{p_p + p_w}{2} \quad (9.13)$$

APROXIMAÇÃO DOS TERMOS DE INÉRCIA (ADJECTIVOS) COM VDS:

ADMITINDO-SE  $u > 0$ :

$$u_e \approx u_p \quad (9.14)$$

$$u_w \approx u_p \quad (9.15)$$

EMPREGANDO-SE AS EQS. (9.10) A (9.15) NA EQ. (9.6), OBTÉM-SE:

$$\frac{m_p}{\Delta t} (u_p - u_p^0) + \dot{m}_e u_p - \dot{m}_w u_w = -A_p \frac{(p_e - p_w)}{2} + \mu A_e \frac{(u_e - u_p)}{\Delta x} - \mu A_w \frac{(u_p - u_w)}{\Delta x} - \frac{\pi}{8} f \rho u_p^2 D_p \Delta x \quad (9.16)$$

NOTA-SE QUE NO TERMO  $-\frac{\bar{u}}{g} \rho u_p^2 D_p \Delta x$ , É NECESSÁRIO REALIZAR UMA LINEARIZAÇÃO DE  $u_p^2$ , POR EXEMPLO, FAZENDO-SE:  $u_p^2 = u_p^* u_p$ , ONDE O ASTERISCO (\*) INDICA ITERAÇÃO ANTERIOR (VALOR CONHECIDO PREVIAMENTE).

A EQ. (9.16) PODE, ENTÃO, SER REESCRITA COMO:

$$a_p^u u_p^* = a_w^u u_w^* + a_e^u u_e^* + b_p^u \tag{9.17}$$

OBSEVA-SE QUE, NESTE CASO, EQ. (9.17), O ASTERISCO É USADO PARA DEFINIR  $u^*$  COMO A VELOCIDADE CORRESPONDENTE A UM CAMPO DE PRESSÃO ESTIMADO ( $p^*$ ) E OBTIDO DA SIML. OS COEFICIENTES / TERMOS-FONTES DA EQ. (9.17) SÃO DADOS POR:

$$a_w^u = \dot{m}_w + \mu \frac{A_w}{\Delta x} \tag{9.18}$$

$$a_e^u = \mu \frac{A_e}{\Delta x} \tag{9.19}$$

$$a_p^u = a_w^u + a_e^u + a_f^u + a_t^u \tag{9.20}$$

$$b_p^u = b_t^u + b_{pp}^u \tag{9.21}$$

$$a_t^u = \frac{m_p}{\Delta t} \tag{9.22}$$

$$a_f^u = \frac{\bar{u}}{g} \rho u_p D_p \Delta x \tag{9.23}$$

$$b_t^u = \frac{m_p}{\Delta t} u_p^0 \tag{9.24}$$

$$b_{pp}^u = -A_p \frac{(p_e^* - p_w^*)}{2} \tag{9.25}$$

AS EQS. (9.18) A (9.25) VALEM PARA OS JOGOS REAIS,  $P=2, 3, \dots, N-1$ , SENDO  $N$  O NÚMERO TOTAL DE JOGOS DE CONTROIS, INCLUINDO OS FICTÍCIOS.

CONDIÇÃO DE CONTOURNO NA ENTRADA: VELOCIDADE PRESCRITA ( $U_{in}$ ). - JOGO FICTÍCIO  $P=1$ :

CONSIDERANDO-SE  $u(0) = U_{in}$  (9.26)

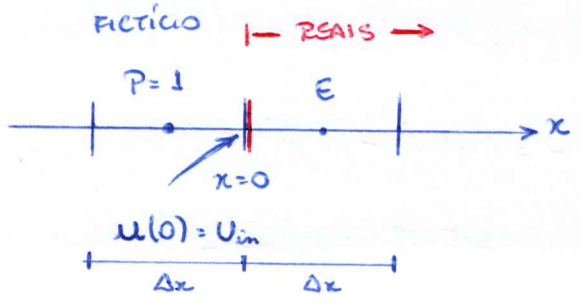


FIG. 9.3: CONDIÇÃO DE CONTOURNO EM  $x=0$ .

TEM-SE:

$$\frac{u_p + u_e}{2} = u_{in} \tag{9.27}$$

OU SEJA,

$$u_p = -u_e + 2u_{in} \tag{9.28}$$

QUE NA FORMA DA EQ. (9.17) FORNECE COMO COEFICIENTES/TERMO-FONTE:

$$a_p^u = 1 \tag{9.29}$$

$$a_w^u = 0 \tag{9.30}$$

$$a_e^u = -1 \tag{9.31}$$

$$b_p^u = 2u_{in} \tag{9.32}$$

CONDIÇÃO DE CONTOURO NA SAÍDA: EXTRAPOLAÇÃO LINEAR DA VELOCIDADE - JOWME FICTÍCIO: P=N

NESTE CASO, TEM-SE:  $\left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right)_{x=L} = 0$  (9.33)

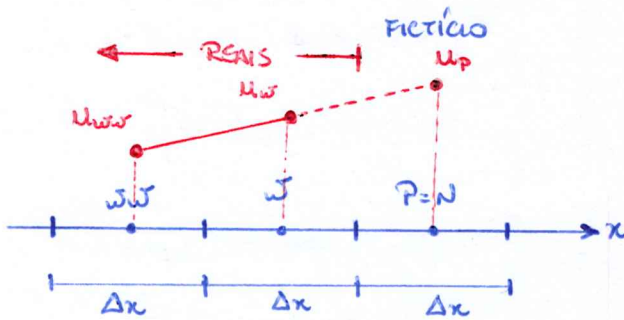


FIG. 9.4: CONDIÇÃO DE CONTOURO PARA  $x=L$ .

ASSIM, PARA MALHA UNIFORME,

$$u_p = u_w + (u_j - u_{w,j}) \tag{9.34}$$

OU, NA FORMA DA EQ. (9.17) TEM-SE COMO COEFICIENTES/TERMO-FONTE:

$$a_p^u = 1 \tag{9.35}$$

$$a_w^u = 1 \tag{9.36}$$

$$a_e^u = 0 \tag{9.37}$$

$$b_p^u = u_j - u_{w,j} \tag{9.38}$$

### 9.3. DISCRETIZAÇÃO DA MASSA:

A INTEGRAÇÃO DA EQ. (9.1) SOBRE O JOWME DE CONTROLE P DA FIG. 9.2 RESULTA EM

$$\int_{t-\Delta t}^t \int_{x_0}^{x_e} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho A) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u A) \right] dx dt = 0 \tag{9.39}$$

O QUE FORNECE:

$$[(pA_p) - (pA_p)^0] \Delta x + [(p\mu A)_e - (p\mu A)_\omega] \Delta t = 0 \tag{9.40}$$

NOTA-SE QUE A DIFERENÇA  $(pA_p) - (pA_p)^0$  É NULA, POIS NEM  $p$  NEM  $A_p$  SÃO DEPENDENTES DO TEMPO. NESTE CASO, A EQ. (9.40) PODE SER REESCRITA COMO

$$\dot{m}_e - \dot{m}_\omega = 0 \tag{9.41}$$

OU AINDA

$$\rho u_e A_e - \rho u_\omega A_\omega = 0 \tag{9.42}$$

QUE, AO SE ADMITIR  $\rho$  CONSTANTES FORNECE:

$$u_e A_e - u_\omega A_\omega = 0 \tag{9.43}$$

A APROXIMAÇÃO DAS VELOCIDADES NAS FACES DOS JOGUES DE CONTROLE É FEITA UTILIZANDO-SE O MÉTODO DE ACOPLAMENTO PRESSÃO-VELOCIDADE CHAMADO SIMPLEC. NESTE CASO,

$$u_e = u_e^* - d_e (p_e^i - p_p^i) \tag{9.44}$$

$$u_\omega = u_\omega^* - d_\omega (p_p^i - p_w^i) \tag{9.45}$$

ONDE

$$p_p^i = p_p - p_p^* \quad (\text{CORREÇÃO DE PRESSÃO}) \tag{9.46}$$

$d_e$  E  $d_\omega$  SÃO COEFICIENTES DO MÉTODO SIMPLEC

$u^*$  É A VELOCIDADE RESULTANTE DA QML (SATISFAZ A QML)

$p^*$  É A PRESSÃO UTILIZADA NA QML.

$u$  É A VELOCIDADE RESULTANTE DA MASSA (SATISFAZ À MASSA).

$p$  É A PRESSÃO QUE SATISFAZ A MASSA.

EMPREGANDO-SE AS EQS. (9.44) E (9.45) NA EQ. (9.43), CHEGA-SE A:

$$[u_e^* - d_e (p_e^i - p_p^i)] A_e - [u_\omega^* - d_\omega (p_p^i - p_w^i)] A_\omega = 0 \tag{9.47}$$

QUE PODE SER ESCRITA NA FORMA

$$a_p^p p_p^i = a_\omega^p p_w^i + a_e^p p_e^i + b_p^p \tag{9.48}$$

TEM COMO COEFICIENTES / TERMO-FONTE:

$$Q_w^p = d_w A_w \tag{9.49}$$

$$Q_e^p = d_e A_e \tag{9.50}$$

$$Q_p^p = Q_w^p + Q_e^p \tag{9.51}$$

$$N_p^p = M_w^* A_w - M_e^* A_e \tag{9.52}$$

NOTA-SE QUE A EQ. (9.52), NA PRÁTICA, CORRESPONDE À PRÓPRIA CONSERVAÇÃO DA MASSA; ASSIM, IDEALMENTE SE TEM  $N_p^p \rightarrow 0$  QUANDO O NÚMERO DE ITERAÇÕES TENDE AO INFINITO).

AS EQS. (9.49) A (9.52) SÃO VÁLIDAS PARA OS VOLUMES DE CONTROLE REAIS,  $P=2, 3, \dots, N-1$ . PARA SE UTILIZAR O TDMA NA SOLUÇÃO DA EQ. (9.48), É NECESSÁRIO APONER EXPLICITAMENTE AS CONDIÇÕES DE CONTOURNO DE  $p^i$ . ISSO É FEITO EM DOIS PASSOS:

- PRIMEIRO (ANTES DE RESOLVER O SISTEMA DE  $p^i$ ):  
CONDIÇÕES DE CONTOURNO NOS VOLUMES  $P=1$  E  $P=N$ .

$$Q_p^p = 1 \tag{9.53}$$

$$Q_e^p = Q_w^p = N_p^p = 0 \tag{9.54}$$

ISTO É FEITO APENAS PARA QUE O PROCESSO ITERATIVO NÃO DIVIRJA COM O TDMA.

- SEGUNDO (APÓS RESOLVER O SISTEMA DE  $p^i$ ):  
SÃO EMPREGADAS EXTRAPOLAÇÕES LINEARES PARA OS DOIS VOLUMES DE CONTROLE FICTÍCIOS. ESTAS SÃO AS CONDIÇÕES DE CONTOURNO REALMENTE DESEJADAS.

PARA  $P=1$ :

$$p_1^i = 2p_{e1}^i - p_{ee}^i \tag{9.55}$$

PARA  $P=N$ :

$$p_N^i = 2p_{wN}^i - p_{ww}^i \tag{9.56}$$

### 9.4. ACOPLAMENTO PRESSÃO-VELOCIDADE COM O MÉTODO SIMPLEX

OBJETIVO DE UM MÉTODO DE ACOPLAMENTO PRESSÃO-VELOCIDADE: TRANSFORMAR A EQUAÇÃO DE CONSERVAÇÃO DA MASSA EM UMA EQUAÇÃO PARA A PRESSÃO. COM ESSE INTUÍTO, DIFERENTES FORMAS DE ACOPLAMENTO FORAM PROPOSTAS NA LITERATURA: SIMPLE, SIMPLER, SIMPLEX, PRIME, ENTRE OUTRAS.

A SEGUIR, APRESENTA-SE UM PROCEDIMENTO GERAL APLICANDO-SE O MÉTODO SIMPLEX.



A EQ. (9.17) PODE SER REESCRITA COMO

$$a_p^u \mu_p = a_w^u \mu_w + a_e^u \mu_e + \nu_e^u - A_p \frac{(p_e - p_w)}{2} \tag{9.57}$$

TAL EQUAÇÃO RESULTA DA DISCRETIZAÇÃO DA QML. AO OBTER SUA SOLUÇÃO, O OBJETIVO É QUE A VARIÁVEL  $\mu$  SATISFAÇA TANTO A QML QUANTO A MASSA. SUPONHA, ENTÃO, QUE ESTE SEJA O CASO DA EQ. (9.57). ELA SERÁ ESCRITA, NA SEQUÊNCIA, PARA UM CAMPO ESTIMADO DE PRESSÃO ( $p^*$ ), QUE NÃO SATISFAZ A MASSA, MAS CUYA SOLUÇÃO ( $\mu^*$ ) SATISFAZ A QML:

$$a_p^u \mu_p^* = a_w^u \mu_w^* + a_e^u \mu_e^* + \nu_e^u - A_p \frac{(p_e^* - p_w^*)}{2} \tag{9.58}$$

SUBTRAINDO-SE A EQ. (9.58) DA EQ. (9.57), OBTÉM-SE

$$a_p^u \mu_p - a_p^u \mu_p^* = a_w^u \mu_w - a_w^u \mu_w^* + a_e^u \mu_e - a_e^u \mu_e^* + \nu_e^u - \nu_e^u - A_p \frac{(p_e - p_w)}{2} + A_p \frac{(p_e^* - p_w^*)}{2} \tag{9.59}$$

OU SEJA,

$$a_p^u \mu_p^i = a_w^u \mu_w^i + a_e^u \mu_e^i - A_p \frac{(p_e^i - p_w^i)}{2} \tag{9.60}$$

ONDE

$$\mu_p^i = \mu_p - \mu_p^* \tag{9.61}$$

$$\mu_w^i = \mu_w - \mu_w^* \tag{9.62}$$

$$\mu_e^i = \mu_e - \mu_e^* \tag{9.63}$$

E  $p_e^i$  E  $p_w^i$  SEGUEM A EQ. (9.46).

O MÉTODO SIMPLEX CONSISTE EM ADMITIR QUE:

$$\mu_w^i = \mu_e^i = \mu_p^i \tag{9.64}$$

DE MODO QUE A EQ. (9.60) PODE SER REESCRITA COMO

$$a_p^u \mu_p^i = a_w^u \mu_p^i + a_e^u \mu_p^i - A_p \frac{(p_e^i - p_w^i)}{2} \tag{9.65}$$

QUE, AO AGRUPAR OS TERMOS RESULTA EM

$$(a_p^u - a_w^u - a_e^u) \mu_p^i = - A_p \frac{(p_e^i - p_w^i)}{2} \tag{9.66}$$

OU

$$u_p' = - \frac{A_p}{(a_p^u - a_w^u - a_e^u)} \frac{(p_e' - p_w')}{2} \tag{9.67}$$

OU AINDA,

$$u_p = u_p^* - d_p \frac{(p_e' - p_w')}{2}, \text{ VÁLIDA PARA } P = 2, 3, \dots, N-1 \tag{9.68}$$

ONDE

$$d_p = \frac{A_p}{(a_p^u - a_w^u - a_e^u)}, \text{ TAMBÉM VÁLIDA PARA } P = 2, 3, \dots, N-1 \tag{9.69}$$

SENDO  $d_p$  O COEFICIENTE DO MÉTODO SIMPSON PARA O VOLUME DE CONTROLE P.

### 9.5. CÁLCULO DAS VELOCIDADES NAS FACES.

AS VELOCIDADES  $u_e$  E  $u_w$  QUE APARECEM NOS COEFICIENTES E TERMOS-FONTE DA SML E DA MASSA, RELACIONADAS A FLUXOS DE MASSA OU JAZSES, SÃO OBTIDAS ATRAVÉS DE UM CÁLCULO DIRETO.

REESCREVENDO-SE A EQ. (9.17) PARA UM VOLUME DE CONTROLE P, TEM-SE:

$$(a_p^u)_p u_p^* = (a_w^u)_p u_w^* + (a_e^u)_p u_e^* + \frac{m_p}{\Delta t} u_p^o - A_p \frac{(p_e^* - p_p^*)}{2} + S_p \tag{9.70}$$

AO SE CONSIDERAR A MESMA EQUAÇÃO, EQ. (9.17), MAS PARA UM VOLUME DE CONTROLE E, OBTÉM-SE:

$$(a_p^u)_e u_e^* = (a_w^u)_e u_p^* + (a_e^u)_e u_{ee}^* + \frac{m_e}{\Delta t} u_e^o - A_e \frac{(p_{ee}^* - p_p^*)}{2} + S_e \tag{9.71}$$

ONDE  $S_p$  E  $S_e$  REPRESENTAM OUTROS TERMOS-FONTE POSSÍVEIS. NESTE CASO, A VELOCIDADE NA FACE LESTE DO VOLUME DE CONTROLE P,  $u_e$ , PODE SER OBTIDA ATRAVÉS DE UMA ESPÉCIE DE MÉDIA ENTRE AS EQS. (9.70) E (9.71), OU SEJA,

$$\frac{[(a_p^u)_p + (a_p^u)_e]}{2} u_e^* = \frac{(\sum_p^u + \sum_e^u)}{2} + \frac{(m_p + m_e)}{2\Delta t} u_e^o - A_e (p_e^* - p_p^*) + \frac{(S_p + S_e)}{2} \tag{9.72}$$

ONDE

$$\sum_p^u = (a_w^u)_p u_w^* + (a_e^u)_p u_e^* \tag{9.73}$$

E

$$\sum_e^u = (a_w^u)_e u_p^* + (a_e^u)_e u_{ee}^* \tag{9.74}$$

ISOLANDO-SE  $u_e^*$  DA EQ. (9.72) OBTÉM-SE:

$$u_e^* = \frac{\left[ \sum_p^u + \sum_e^u + \frac{(m_p + m_e)}{\Delta t} u_e^0 + S_p + S_e - 2A_e (p_e^* - p_p^*) \right]}{\left[ (a_p^u)_p + (a_p^u)_e \right]} \quad (9.75)$$

QUE É VÁLIDA PARA  $p = 2, 3, \dots, N-2$ . NOTA-SE QUE  $S_p$  E  $S_e$  ENVOLVEM OUTROS TERMOS-FONTES QUE NÃO SÃO EXPLICITAMENTE APRESENTADOS NA EQ. (9.75).

A EQ. (9.44), PARA  $u_e$ , PODE SER DEDUZIDA DE MODO SEMELHANTE AO QUE FOI REALIZADO PARA OBTZER A EQ. (9.68).

UMA FORMA SIMPLES E EFETIVA PARA CALCULAR O COEFICIENTE  $(d_e)$  DO MÉTODO SIMPLES PARA AS VELOCIDADES DAS FACES  $(u_e)$  É:

$$d_e = \frac{d_p + d_e}{2} \quad (9.76)$$

VÁLIDA PARA  $p = 2, 3, \dots, N-2$  E OBSERVANDO-SE QUE:

$$(d_w)_p = (d_e)_w \quad (9.77)$$

SENDO  $(d_e)$  OBTIDA PARA OS CONTORNOS ATRAVÉS DAS SEGUINTE EXPRESSÕES:

$$(d_e)_{p=1} = d_e \quad (9.78)$$

$$(d_e)_{p=N-1} = d_p \quad (9.79)$$

PARA O PROBLEMA EM CONSIDERAÇÃO, NOS CONTORNOS,  $u_e^*$  PODE SER ESTIMADO ATRAVÉS DAS SEGUINTE RELAÇÕES:

• PARA  $p=1$ :  $u_e^* = u_{in}$  (CONDIÇÃO DE CONTORNO) (9.80)

• PARA  $p=N-1$ :  $u_e^* = \frac{(u_p^* + u_e^*)}{2}$  (9.81)

$$F_{tot} = \frac{\dot{m}_{in}}{\dot{m}_{out}} = \frac{\rho u_{in} A_{in}}{\rho u_{out} A_{out}} = \frac{u_{in} A_{in}}{u_e^* A_{out}} \quad (9.82)$$

$$u_e^* = F_{tot} \cdot u_e^* \quad (9.83)$$

ESTE PROCEDIMENTO PODE ACELERAR A CONVERGÊNCIA, PODENDO SER APLICADO TAMBÉM A PROBLEMAS 2D E TRIDIMENSIONAIS.

### 9.6. ALGORITMO

1) USE OS DADOS:  $N$ ,  $\Delta t$ ,  $I$  (NÚMERO DE ITERAÇÕES),  $L$ ,  $\mu$ ,  $p$ ,  $f$ ,  $u_{in}$ ,  $D_0$  E  $C_D$  (PARA CÍRCULO

## 2) INICIALIZAÇÕES:

$$\Delta x = \frac{L}{N-2} \quad (9.84)$$

$$x_p = (P - 3/2) \Delta x, \text{ PARA } P = 2, 3, \dots, N-1 \quad (9.85)$$

$$x_1 = 0 \quad (9.86)$$

$$x_p = L \quad (9.87)$$

$$D_p = D_0 + C_D x_p, \text{ PARA } P = 1, 2, \dots, N \quad (9.88)$$

$$p_p = p_p^i = u_p = u_p^o = u_e = u_e^o = 0 \quad (9.89)$$

3) CALCULAR OS COEFICIENTES E TERMOS-FONTES DE  $u_p^*$  (QML) COM AS EQS. (9.18) A (9.25), (9.29) A (9.32) E (9.35) A (9.38).

4) RESOLVER O SISTEMA DA EQ. (9.17) PARA  $u_p^*$  (QML) COM O TDMA.

5) CALCULAR AS VELOCIDADES NAS FACES ( $u_e^*$ ) COM AS EQS. (9.75), (9.80) E (9.83).

6) CALCULAR OS COEFICIENTES DO SIMPLEC ( $d_p$  E  $d_e$ ) COM AS EQS. (9.69) E (9.76) A (9.79).

7) CALCULAR OS COEFICIENTES E TERMOS-FONTES DE  $p_p^i$  (MASSA) COM AS EQS. (9.49) A (9.54).

8) RESOLVER O SISTEMA DA EQ. (9.48) PARA  $p_p^i$  (MASSA) COM O TDMA.

9) ATUALIZAR OS VOLUMES FICTÍCIOS DE  $p_p^i$  COM AS EQS. (9.55) E (9.56).

10) OBTER  $p_p$  AO CORRIGIR A PRESSÃO  $p_p^*$  COM  $p_p^i$  ATRAVÉS DA SEGUINTE RELAÇÃO:

$$p_p = p_p^* + p_p^i \quad (9.90)$$

VÁLIDA PARA  $P = 1, 2, \dots, N$ .

11) OBTER  $u_p$  AO CORRIGIR AS VELOCIDADES NODAIS  $u_p^*$  COM  $p_p^i$  ATRAVÉS DAS EQS. (9.68), (9.28) E (9.34).

12) OBTER  $u_e$  AO CORRIGIR AS VELOCIDADES DAS FACES  $u_e^*$  COM  $p_p^i$  ATRAVÉS DA EQ. (9.44) SOMENTE PARA  $P = 2, 3, \dots, N-2$ . PARA  $u_e(1)$  E  $u_e(N-1)$ , NÃO É NECESSÁRIA CORREÇÃO.

13) ATUALIZAR OS CAMPOS PARA NOVO AVANÇO NO TEMPO:

$$u_p^o = u_p \quad (9.91)$$

$$u_e^o = u_e \quad (9.92)$$

14) RETORNAR AO PASSO 3 ATÉ ATINGIR I ITERAÇÕES OU SATISFAZER A ALGUM CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA.

15) ESCREVER OS CAMPOS DE  $u_p, u_e, p_p, \dot{m}_e, p_p', \dot{m}_p'$ .

16) VISUALIZAR OS CAMPOS DE  $u_p, p_p$  E  $\dot{m}_e$ .

OBSERVAÇÃO: É COMUM FAZER 2 OU 3 ITERAÇÕES NO CICLO COMPREENDIDO ENTRE OS PASSOS 7 E 12 PARA ACELERAR OU GARANTIR A CONVERGÊNCIA DO PROCESSO ITERATIVO.

SE O FOCO FOR O REGIME TRANSIENTE, DEVE-SE GARANTIR QUE O CICLO COMPREENDIDO ENTRE OS PASSOS 3 E 12 SATISFAÇA A ALGUM CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA.

9.7. DISCRETIZAÇÃO DA QML COM CDS COM CORREÇÃO ADIADA / CDS (CDS COM CORREÇÃO ADIADA NOS TERMOS ADVECTIVOS; CDS NOS TERMOS DIFUSIVOS E DE PRESSÃO).

PARA SE EMPREGAR O ESQUEMA CDS NO TERMO ADVECTIVO DA QML, ATRAVÉS DE CORREÇÃO ADIADA, BASTA REESCREVER A EQ. (9.21) COMO

$$\dot{m}_p^u = \dot{m}_e^u + \dot{m}_{pp}^u + \dot{m}_c^u \tag{9.93}$$

ONDE:

$$\dot{m}_c^u = \frac{\beta}{2} \left[ \dot{m}_e (u_p^* - u_e^*) - \dot{m}_{w0} (u_w^* - u_p^*) \right] \tag{9.94}$$

E:

$$\beta = \begin{cases} 0, & \text{ESQUEMA UDS} \\ 0 < \beta < 1, & \text{ESQUEMA MISTO} \\ 1, & \text{ESQUEMA CDS} \end{cases} \tag{9.95}$$

TEM-SE, AINDA, QUE NA EQ. (9.75) DEVE-SE CONSIDERAR:

$$S_p = (\dot{m}_c^u)_p \tag{9.96}$$

$$S_e = (\dot{m}_c^u)_e \tag{9.97}$$

9.8. ARRANJOS COLOCALIZADO E DESENCONTRADO DE VARIÁVEIS.

NO DESENVOLVIMENTO DESSE CAPÍTULO, FOI EMPREGADO O ARRANJO COLOCALIZADO DE VARIÁVEIS:

FIG. 9.5: NELE, TODAS AS VARIÁVEIS SÃO ESTIMADAS PARA UMA ÚNICA MALHA, SENDO FEITAS APROXIMAÇÕES PARA AS VELOCIDADES NAS FACES DOS VOLUMES DE CONTROLE.

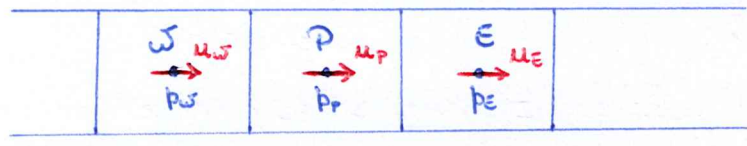


FIG. 9.5: MALHA COLOCALIZADA.

Um outro arranjo de malha possível é chamado de malha desencontrada, que pode ser vista em Patankar (1980) e Maliska (2004). Neste arranjo, cada variável é calculada para uma malha própria, FIG. 9.6. Neste caso, não há necessidade de estimativa da velocidade nas faces dos volumes de controle para determinação da pressão, uma vez que os nós dos volumes que compõem a malha para estimativa de  $u$  coincidem com as faces dos volumes que compõem a malha para cálculo de  $p$ .

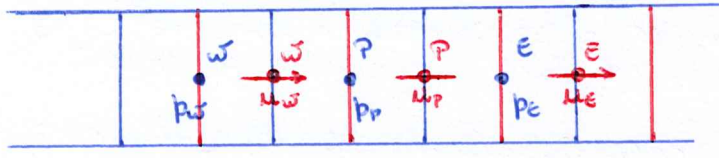


FIG. 9.6: MALHA DESENCONTRADA.