CAP. 08: ESCOAMENTO UNIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE: EQUAÇÃO DE BURGERS

CONCEITOS ENVOLVIDOS:

- EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO LINEAR (QML): EQUAÇÃO DE BURGERS
- SOLUÇÃO DE ESCOAMENTO UNIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE
- CONDIÇÕES DE CONTORNO DE DIRICHLET APLICADAS COM VOLUMES FICTÍCIOS
- MALHAS UNIFORMES
- VARIÁVEIS DE INTERESSE: CAMPO DE VELOCIDADES, $u(x)$; VELOCIDADE MÉDIA, $\bar{u}$
- SOLVER: TDMA
- ESQUEMAS DE APROXIMAÇÃO: UDS E/OU CDS COM CORREÇÃO ADIADA – TERMOS ADVECTIVOS;

  CDS – TERMOS DIFUSIVOS;

  REGRA DO RETÂNGULO PARA O TERMO FONTE.

8.1. MODELO MATEMÁTICO:

PARTINDO-SE DA EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO LINEAR (QML) E CONSIDERANDO-SE:

- ESCOAMENTO LAMINAR;
- ESCOAMENTO UNIDIMENSIONAL;
- AUSÊNCIA DE FORÇAS DE CORPO;

TEM-SE:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)}_{\substack{\text{TERMO}\\ \text{TEMPORAL}}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(\rho u u)}_{\substack{\text{TERMO ADVECTIVO}\\ \text{(FORÇAS DE INÉRCIA)}}} = \underbrace{-\frac{\partial p}{\partial x}}_{\substack{\text{FORÇAS DEVIDO}\\ \text{À PRESSÃO}}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right)}_{\substack{\text{TERMO DIFUSIVO}\\ \text{(FORÇAS VISCOSAS)}}} \tag{8.1}$$

ADMITINDO-SE, AINDA, AS SEGUINTES CONSIDERAÇÕES:

- REGIME PERMANENTE;
- PRESENÇA DE UM TERMO-FONTE S OBTIDO PELO MÉTODO DAS SOLUÇÕES FABRICADAS;
- CAMPO DE PRESSÃO CONSTANTE;
- ESCOAMENTO INCOMPRESSÍVEL (ρ CONSTANTE);
- VISCOSIDADE (μ) CONSTANTE;

A EQ. (8.1) PODE SER REESCRITA, EM SUA FORMA ADIMENSIONALIZADA, RESULTANDO EM

$$Re \frac{du^2}{dx} = \frac{d^2 u}{dx^2} + S \tag{8.2}$$

ONDE:

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu} \quad \text{(NÚMERO DE REYNOLDS)} \tag{8.3}$$

SENDO U UMA VELOCIDADE DE REFERÊNCIA [m/s];

L O COMPRIMENTO DO DOMÍNIO DE CÁLCULO [m].

NOTA-SE QUE, POR CRITÉRIOS DE CONVENIÊNCIA, FORAM MANTIDAS AS MESMAS VARIÁVEIS NAS EQS. (8.1) E (8.2), APESAR DA PRIMEIRA ESTAR NA FORMA DIMENSIONAL E A ÚLTIMA, NA ADIMENSIONAL.

CONDIÇÕES DE CONTORNO ADOTADAS:

$$u(0) = 0 \tag{8.4}$$

$$u(1) = 1 \tag{8.5}$$

VARIÁVEIS DE INTERESSE:

- CAMPO DE VELOCIDADES u, DA EQ. (8.2);
- VELOCIDADE MÉDIA, DEFINIDA POR

$$\bar{u} = \int_0^1 u(x)\,dx \tag{8.6}$$

UMA VEZ QUE O COMPRIMENTO DO DOMÍNIO É UNITÁRIO.

CONSIDERANDO-SE O TERMO FONTE DADO POR

$$S = Re^2 \, e^{xRe} \, \frac{\left(2e^{xRe} - e^{Re} - 1\right)}{\left(e^{Re} - 1\right)^2} \tag{8.7}$$

TEM-SE QUE A SOLUÇÃO ANALÍTICA É DADA POR

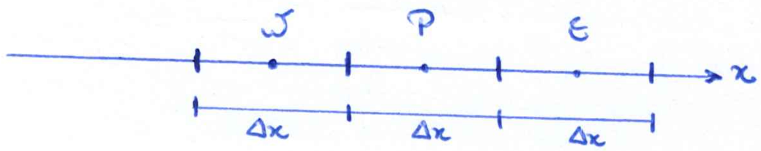
$$u(x) = \frac{\left(e^{xRe} - 1\right)}{\left(e^{Re} - 1\right)} \tag{8.8}$$

E

$$\bar{u} = \frac{\left(e^{Re} - Re - 1\right)}{Re\left(e^{Re} - 1\right)} \tag{8.9}$$

8.2. DISCRETIZAÇÃO COM UDS/CDS (UDS NA ADVECÇÃO, CDS NA DIFUSÃO).

INTEGRANDO-SE A EQ. (8.2) SOBRE O VOLUME DE CONTROLE P DA FIG. 8.1 OBTÉM-SE:



Δx = CONST.

FIG. 8.1: MALHA UNIDIMENSIONAL UNIFORME.

$$\int_z\int_y\int_{x_w}^{x_e}\left(Re\,\frac{du^2}{dx}\right)dx\,dy\,dz = \int_z\int_y\int_{x_w}^{x_e}\left(\frac{d^2u}{dx^2} + S\right)dx\,dy\,dz \tag{8.10}$$

OU SEJA,

$$Re\left(u_e^2 - u_w^2\right)\Delta y\,\Delta z = \left[\left(\frac{du}{dx}\right)_e - \left(\frac{du}{dx}\right)_w\right]\Delta y\,\Delta z + S_P\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z \tag{8.11}$$

QUE PODE SER DIVIDIDO POR $\Delta y\,\Delta z$ RESULTANDO EM:

$$Re\left(u_e^2 - u_w^2\right) = \left(\frac{du}{dx}\right)_e - \left(\frac{du}{dx}\right)_w + S_P\,\Delta x \tag{8.12}$$

OBSERVA-SE QUE, NA EQUAÇÃO ANTERIOR, A ÚNICA APROXIMAÇÃO NUMÉRICA FEITA ESTÁ NO TERMO $S_P \Delta x$, CUJA INTEGRAÇÃO FOI REALIZADA ATRAVÉS DA REGRA DO RETÂNGULO. PARA OS DEMAIS TERMOS FOI APENAS APLICADO O TEOREMA DA DIVERGÊNCIA DE GAUSS.

PARA RESOLVER u, NOS TERMOS EM QUE OCORRE u^2 É PROPOSTA UMA LINEARIZAÇÃO. NESTE CASO, MANTÉM-SE PARTE DO PRODUTO COMO INCÓGNITA NO SISTEMA DE EQUAÇÕES E A OUTRA PARTE É CONSIDERADA CONHECIDA, SENDO MANTIDA NOS COEFICIENTES. TEM-SE ASSIM:

$$u^2 = u^* u \tag{8.13}$$

NESTE CASO, u^* É CONHECIDO (POR EXEMPLO, DE ITERAÇÃO ANTERIOR) E MANTIDO NOS COEFICIENTES E u É INCÓGNITA.

APROXIMAÇÕES NUMÉRICAS ADOTADAS:

- TERMOS DIFUSIVOS: CDS:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_e \approx \frac{u_E - u_P}{\Delta x} \tag{8.14}$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_w \approx \frac{u_P - u_W}{\Delta x} \tag{8.15}$$

- TERMOS ADVECTIVOS: UDS NA PARTE IMPLÍCITA (INCÓGNITA), CONSIDERANDO-SE $u > 0$:

$$u_w \approx u_W$$

$$u_e \approx u_P \tag{8.16}$$

- TERMOS ADVECTIVOS: CDS NA PARTE EXPLÍCITA (COEFICIENTES). (8.17)

$$u_w^* \approx \frac{u_W^* + u_P^*}{2} \tag{8.18}$$

$$u_e^* = \frac{u_P^* + u_E^*}{2} \tag{8.19}$$

UTILIZANDO-SE AS EQS. (8.13) A (8.19) NA EQ. (8.12), OBTÉM-SE

$$Re\left[\frac{(u_P^* + u_E^*)}{2} \cdot u_P - \frac{(u_W^* + u_P^*)}{2} \cdot u_W\right] = \frac{(u_E - u_P)}{\Delta x} - \frac{(u_P - u_W)}{\Delta x} + S_P \Delta x \tag{8.20}$$

QUE MULTIPLICADA POR $2\Delta x$ E REARRANJANDO-SE OS TERMOS FORNECE

$$\left[Re(u_P^* + u_E^*)\Delta x + 4\right] u_P = \left[Re(u_W^* + u_P^*)\Delta x + 2\right] u_W + 2u_E + 2S_P(\Delta x)^2 \tag{8.21}$$

DESTA FORMA, ESCREVENDO-SE

$$a_P u_P = a_w u_W + a_e u_E + b_P \qquad (8.22)$$

TEM-SE COMO COEFICIENTES / TERMOS-FONTES:

$$a_w = Re\left(u_W^* + u_P^*\right)\Delta x + 2 \qquad (8.23)$$

$$a_e = 2 \qquad (8.24)$$

$$a_P = Re\left(u_P^* + u_E^*\right)\Delta x + 4 \qquad (8.25)$$

$$b_P = 2\, S_P\, (\Delta x)^2 \qquad (8.26)$$

QUE SÃO VÁLIDOS PARA $P = 1, 2, \ldots, N$, OU SEJA, TODOS OS VOLUMES REAIS. DEVE-SE NOTAR QUE OS PRÓPRIOS COEFICIENTES SÃO VARIÁVEIS, DEPENDENDO DA PRÓPRIA SOLUÇÃO (u) DO PROBLEMA, O QUE TORNA O PROCESSO ITERATIVO.

8.3. APLICAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

A APLICAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO – EQS. (8.4) E (8.5) – SERÁ FEITA EMPREGANDO-SE A TÉCNICA DE VOLUMES FICTÍCIOS. NESTE CASO, TEM-SE:

- CONTORNO ESQUERDO: $P = 0$

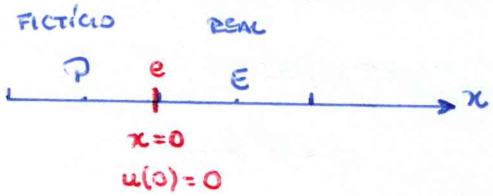


FIG. 8.2: CONDIÇÃO DE CONTORNO EM $x = 0$.

NESTE CONTORNO, TEM-SE:

$$u_e = u(0) = 0 \qquad (8.27)$$

E, AO APLICAR VOLUMES FICTÍCIOS:

$$\frac{u_P + u_E}{2} = u_e = 0 \qquad (8.28)$$

OU SEJA,

$$u_P = -u_E \qquad (8.29)$$

DE MODO QUE OS COEFICIENTES / TERMO-FONTE DA EQ. (8.22) PASSAM A SER EXPRESSOS COMO:

$$a_P = 1 \qquad (8.30)$$

$$a_e = -1 \qquad (8.31)$$

$$a_w = b_P = 0 \qquad (8.32)$$

• CONTORNO DIREITO: $P = N+1$

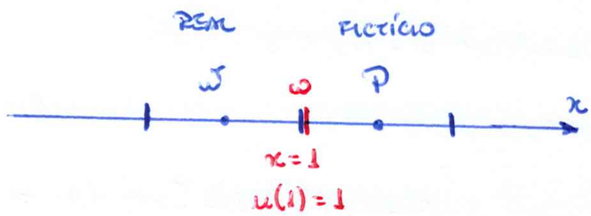


FIG. 8.3: CONDIÇÃO DE CONTORNO EM $x = 1$

NESTE CONTORNO, TEM-SE:

$$u_w = u(1) = 1 \tag{8.33}$$

E, AO SE APLICAR A TÉCNICA DE VOLUMES FICTÍCIOS:

$$\frac{u_W + u_P}{2} = u_w = 1 \tag{8.34}$$

QUE FORNECE:

$$u_P = 2 - u_W \tag{8.35}$$

DE MODO QUE OS COEFICIENTES/TERMO-FONTE DA EQ. (8.22) PASSAM A SER EXPRESSOS COMO

$$a_P = 1 \tag{8.36}$$

$$a_W = -1 \tag{8.37}$$

$$a_e = 0 \tag{8.38}$$

$$b_P = 2 \tag{8.39}$$

8.4. VELOCIDADE MÉDIA:

UTILIZANDO-SE A REGRA DO RETÂNGULO, A APROXIMAÇÃO NUMÉRICA DA INTEGRAL APRESENTADA NA EQ. (8.6) FORNECE:

$$\bar{u} = \Delta x \sum_{P=1}^{N} u_P \tag{8.40}$$

8.5. ALGORITMO:

1) LER OS DADOS: Re, N, I (NÚMERO DE ITERAÇÕES)

2) DISCRETIZAR O DOMÍNIO:

$$\Delta x = \frac{1}{N} \tag{8.41}$$

3) CALCULAR

$$x_P = \Delta x \left(P - \tfrac{1}{2}\right), \quad P = 1, 2, \ldots, N \tag{8.42}$$

4) CALCULAR A SOLUÇÃO ANALÍTICA: u_{esc}.

5) CALCULAR OS COEFICIENTES E TERMOS-FONTES DOS VOLUMES FICTÍCIOS

6) CALCULAR OS TERMOS-FONTES DOS VOLUMES REAIS, ONDE $S_P(Re, x_P)$

7) FAZER $u_{num} = u_{esc}$ (ESTIMATIVA INICIAL)

8) CALCULAR OS COEFICIENTES DOS VOLUMES REAIS

9) RESOLVER O SISTEMA DE EQUAÇÕES COM O MÉTODO TDMA

10) VOLTAR AO ITEM 8 ATÉ ATINGIR I ITERAÇÕES OU SATISFAZER OUTRO CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA

11) IMPRIMIR E VISUALIZAR OS RESULTADOS.

8.6. DISCRETIZAÇÃO COM CDS/CDS (CDS NA ADVECÇÃO, CDS NA DIFUSÃO)

CONSIDERANDO-SE $u > 0$ E LEMBRANDO-SE DA DEFINIÇÃO DE CORREÇÃO ADIADA,

$$u_i = u_{i,UDS} + \beta\left(u^*_{i,CDS} - u^*_{i,UDS}\right) \tag{8.43}$$

NA QUAL O ASTERISCO (*) INDICA RESULTADO DE ITERAÇÃO ANTERIOR. NESTE CASO, PARA A FACE OESTE (w), COM AS EQS. (8.16) E (8.18), TEM-SE:

$$u_w = u_W + \beta\left[\frac{(u_W^* + u_P^*)}{2} - u_W^*\right] = u_W + \beta\,\frac{(u_P^* - u_W^*)}{2} \tag{8.44}$$

E PARA A FACE LESTE (e), COM AS EQS. (8.17) E (8.19),

$$u_e = u_P + \beta\left[\frac{(u_P^* + u_E^*)}{2} - u_P^*\right] = u_P + \beta\,\frac{(u_E^* - u_P^*)}{2} \tag{8.45}$$

RECORDANDO-SE QUE $0 \leq \beta \leq 1$.

UTILIZANDO-SE AS EQS. (8.44) E (8.45) AO INVÉS DAS EQS. (8.16) E (8.17) NA EQ. (8.12), OBTÉM-SE

$$Re\left\{\frac{(u_P^* + u_E^*)}{2}\left[u_P + \beta\,\frac{(u_E^* - u_P^*)}{2}\right] - \frac{(u_W^* + u_P^*)}{2}\left[u_W + \beta\,\frac{(u_P^* - u_W^*)}{2}\right]\right\} = \frac{(u_E - u_P)}{\Delta x}$$

$$- \frac{(u_P - u_W)}{\Delta x} + S_P\,\Delta x \tag{8.46}$$

QUE MULTIPLICADA POR $2\Delta x$ E REAGRUPANDO-SE OS TERMOS RESULTA EM

$$\left[Re \left(u_P^* + u_E^* \right) \Delta x + 4 \right] u_P = \left[Re \left(u_W^* + u_P^* \right) \Delta x + 2 \right] u_W + 2 u_E + 2 S_P (\Delta x)^2$$

$$+ Re \frac{\beta}{2} \left(-u_E^{*2} - u_W^{*2} + 2 u_P^{*2} \right) \Delta x \qquad (8.47)$$

QUE, NA FORMA DA EQ. (8.22) FORNECE COMO COEFICIENTES AS MESMAS EXPRESSÕES APRESENTADAS ANTERIORMENTE NAS EQS. (8.23) A (8.25) E COMO TERMO-FONTE

$$b_P = 2 S_P (\Delta x)^2 + \frac{Re . \beta}{2} \left(2 u_P^{*2} - u_E^{*2} - u_W^{*2} \right) \Delta x \qquad (8.48)$$

COM RELAÇÃO AO ALGORITMO APRESENTADO NA SEÇÃO 8.5, A MODIFICAÇÃO NECESSÁRIA É A DE SUPRIMIR O ITEM (6), QUE TRATA DO CÁLCULO DOS TERMOS-FONTES DOS VOLUMES REAIS, PASSANDO-O PARA JUNTO DO ITEM (8), QUE TRATA DO CÁLCULO DOS COEFICIENTES DOS VOLUMES REAIS.