CAP. 07: CONVECÇÃO DE CALOR BIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE

CONCEITOS ENVOLVIDOS:

- MALHAS CARTESIANAS BIDIMENSIONAIS, UNIFORMES POR DIREÇÃO
- CONDIÇÕES DE CONTORNO APLICADAS COM VOLUMES FICTÍCIOS
- CAMPO DE VELOCIDADES PRESCRITO
- PROPRIEDADES TERMOFÍSICAS CONSTANTES
- FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO: UDS, CDS COM CORREÇÃO ADIADA – TERMOS ADVECTIVOS; CDS – TERMOS DIFUSIVOS

7.1. MODELO MATEMÁTICO

CONSIDERANDO-SE:

- ESCOAMENTO BIDIMENSIONAL;
- REGIME PERMANENTE;
- AUSÊNCIA DE EFEITOS VISCOSOS;
- AUSÊNCIA DE GERAÇÃO DE CALOR;
- PROPRIEDADES TERMOFÍSICAS CONSTANTES;

TEM-SE QUE A EQUAÇÃO DE CONSERVAÇÃO DA ENERGIA TÉRMICA PODE SER ESCRITA COMO

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(uT) + \frac{\partial}{\partial y}(vT)}_{\text{ADVECÇÃO}} = \underbrace{\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}}_{\text{DIFUSÃO}} \qquad (7.1)$$

SENDO: x E y COORDENADAS ESPACIAIS (VARIÁVEIS INDEPENDENTES);

u E v COMPONENTES DO VETOR VELOCIDADE $\vec{V}$ NAS DIREÇÕES x E y; NESTE CASO, SÃO PRESCRITAS (CONHECIDAS): $\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j}$;

T A TEMPERATURA (VARIÁVEL DEPENDENTE)

α A DIFUSIVIDADE TÉRMICA (CONSTANTE):

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} \qquad (7.2)$$

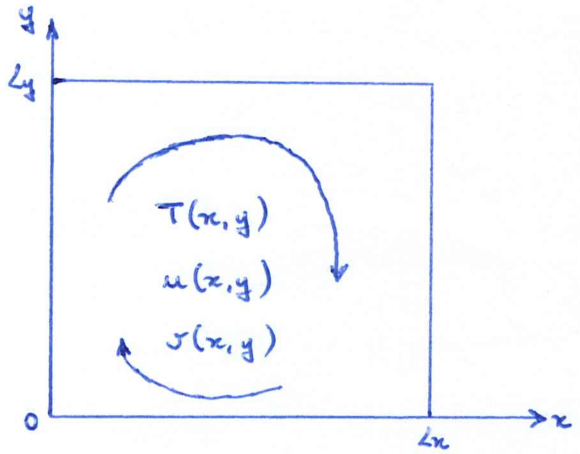

FIG. 7.1: ESCOAMENTO E CONVECÇÃO DE CALOR DENTRO DE UMA CAVIDADE BIDIMENSIONAL.

CAMPO DE VELOCIDADES PRESCRITO:

$$u = 8(x^4 - 2x^3 + x^2)(4y^3 - 2y) \qquad (7.3)$$

$$v = -8(4x^3 - 6x^2 + 2x)(y^4 - y^2) \qquad (7.4)$$

CONDIÇÕES DE CONTORNO:

$$T(0,y) = T(1,y) = T(x,0) = 0 \tag{7.5}$$

$$T(x,1) = 100 \operatorname{sen}(\pi x) \tag{7.6}$$

7.2. MODELO NUMÉRICO – EQUAÇÕES DISCRETIZADAS COM UDS/CDS (ADVECÇÃO/DIFUSÃO)

INTEGRANDO-SE A EQ. (7.1) NO VOLUME DE CONTROLE P DA FIG. 7.2

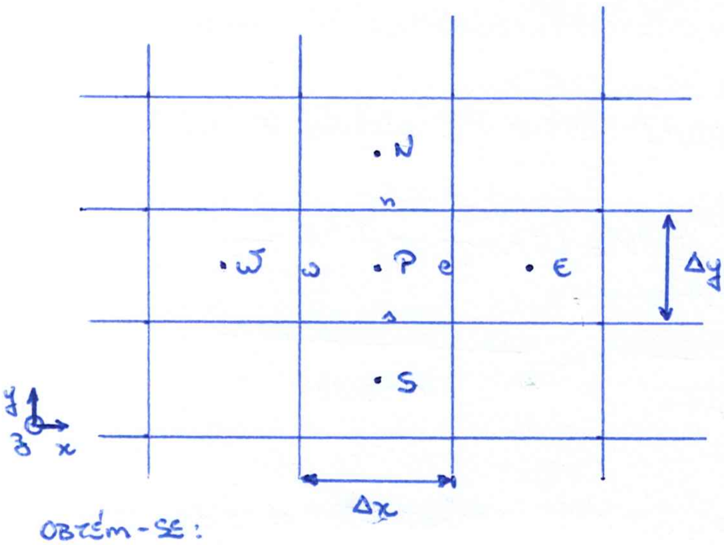

FIG. 7.2: MALHA CARTESIANA BIDIMENSIONAL UNIFORME POR DIREÇÃO.

OBTÉM-SE:

$$\int_z \int_{y_s}^{y_n} \int_{x_w}^{x_e} \left[\frac{\partial}{\partial x}(uT) + \frac{\partial}{\partial y}(vT) \right] dx\, dy\, dz = \int_z \int_{y_s}^{y_n} \int_{x_w}^{x_e} \gamma \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] dx\, dy\, dz \tag{7.7}$$

O QUE FORNECE:

$$\left[(uT)_e - (uT)_w \right] \Delta y \Delta z + \left[(vT)_n - (vT)_s \right] \Delta x \Delta z = \gamma \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right] \Delta y \Delta z$$

$$+ \gamma \left[\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_n - \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_s \right] \Delta x \Delta z \tag{7.8}$$

OS VALORES DE u_e, u_w, v_n E v_s SÃO OBTIDOS DAS EQS. (7.3) E (7.4), SEM APROXIMAÇÕES, UMA VEZ QUE O CAMPO DE VELOCIDADES É CONHECIDO. EXISTE, CONTUDO, UMA APROXIMAÇÃO FEITA AO SE CONSIDERAR QUE A COMPONENTE DA VELOCIDADE EM UMA FACE QUALQUER POSSUI VALOR CONSTANTE NAQUELA FACE E IGUAL AO VALOR OBTIDO NO CENTRO DA RESPECTIVA FACE.

- APROXIMAÇÃO DOS TERMOS DIFUSIVOS – ESQUEMA CDS:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \approx \frac{T_P - T_W}{\Delta x} \tag{7.9}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_e \approx \frac{T_E - T_P}{\Delta x} \tag{7.10}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_s \approx \frac{T_P - T_S}{\Delta y} \qquad (7.11)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_n \approx \frac{T_N - T_P}{\Delta y} \qquad (7.12)$$

• APROXIMAÇÃO DOS TERMOS ADVECTIVOS – ESQUEMA UDS:

$$T_w = (1/2 + \alpha_w)\,T_W + (1/2 - \alpha_w)\,T_P \qquad (7.13)$$

$$T_e = (1/2 + \alpha_e)\,T_P + (1/2 - \alpha_e)\,T_E \qquad (7.14)$$

$$T_s = (1/2 + \alpha_s)\,T_S + (1/2 - \alpha_s)\,T_P \qquad (7.15)$$

$$T_n = (1/2 + \alpha_n)\,T_P + (1/2 - \alpha_n)\,T_N \qquad (7.16)$$

ONDE

$$\alpha_w = \frac{1}{2}\,\mathrm{SIGN}\,(u_w) \qquad (7.17)$$

$$\alpha_e = \frac{1}{2}\,\mathrm{SIGN}\,(u_e) \qquad (7.18)$$

$$\alpha_s = \frac{1}{2}\,\mathrm{SIGN}\,(v_s) \qquad (7.19)$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2}\,\mathrm{SIGN}\,(v_n) \qquad (7.20)$$

SENDO SIGN (ψ) O SINAL DE ψ. NOTA-SE QUE A DETERMINAÇÃO DO SINAL DA COMPONENTE DO VETOR VELOCIDADE EM UMA FACE É IMPORTANTE PARA QUE SE SAIBA DE QUAL DIREÇÃO O FLUXO DE MASSA É PROVENIENTE, E ASSIM, DE ONDE DEVE SER ORIGINADA A INFORMAÇÃO PARA O ESQUEMA UDS.

EMPREGANDO-SE AS EQS. (7.9) A (7.16) NA EQ. (7.8), OBTÉM-SE:

$$\left\{u_e\left[(1/2+\alpha_e)\,T_P + (1/2-\alpha_e)\,T_E\right] - u_w\left[(1/2+\alpha_w)\,T_W + (1/2-\alpha_w)\,T_P\right]\right\}\Delta y\,\Delta z \;+$$

$$+\left\{v_n\left[(1/2+\alpha_n)\,T_P + (1/2-\alpha_n)\,T_N\right] - v_s\left[(1/2+\alpha_s)\,T_S + (1/2-\alpha_s)\,T_P\right]\right\}\Delta x\,\Delta z \;=$$

$$= \gamma\left[\frac{T_E - T_P}{\Delta x} - \frac{T_P - T_W}{\Delta x}\right]\Delta y\,\Delta z + \gamma\left[\frac{T_N - T_P}{\Delta y} - \frac{T_P - T_S}{\Delta y}\right]\Delta x\,\Delta z \qquad (7.21)$$

QUE PODE SER SIMPLIFICADA, DIVIDINDO-SE TODOS OS TERMOS POR Δz. ALÉM DISSO, COLOCANDO-SE A EQ. (7.21) NA FORMA:

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_S T_S + a_N T_N + b_P \qquad (7.22)$$

TEM-SE COMO COEFICIENTES / TERMOS-FONTES:

$$a_W = \gamma \frac{\Delta y}{\Delta x} + u_w \left(1/2 + \alpha_w\right) \Delta y \qquad (7.23)$$

$$a_E = \gamma \frac{\Delta y}{\Delta x} - u_e \left(1/2 - \alpha_e\right) \Delta y \qquad (7.24)$$

$$a_S = \gamma \frac{\Delta x}{\Delta y} + v_s \left(1/2 + \alpha_s\right) \Delta x \qquad (7.25)$$

$$a_N = \gamma \frac{\Delta x}{\Delta y} - v_n \left(1/2 - \alpha_n\right) \Delta x \qquad (7.26)$$

$$a_P = 2\gamma \frac{\Delta y}{\Delta x} + u_e \left(1/2 + \alpha_e\right) \Delta y - u_w \left(1/2 - \alpha_w\right) \Delta y + 2\gamma \frac{\Delta x}{\Delta y} + v_n \left(1/2 + \alpha_n\right) \Delta x - v_s \left(1/2 - \alpha_s\right) \Delta x \qquad (7.27)$$

$$b_P = 0 \qquad (7.28)$$

A EQ. (7.27) PODE SER REESCRITA COM O APOIO DA EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA MASSA, QUE PARA AS CONSIDERAÇÕES EMPREGADAS NA EQ. (7.1) É DADA POR:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (7.29)$$

AO SE INTEGRAR A EQ. (7.29) PARA O VOLUME DE CONTROLE P DA FIG. 7.2, OBTÉM-SE:

$$\left(u_e - u_w\right) \Delta y + \left(v_n - v_s\right) \Delta x = 0 \qquad (7.30)$$

MULTIPLICANDO-SE ESTE RESULTADO POR (−1) E SUBSTITUINDO O RESULTADO NA EQ. (7.27) CHEGA-SE A:

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N \qquad (7.31)$$

ALGORITMO:

1) LER OS DADOS: $T_{c.c.}$ (FUNÇÕES), γ, u E v (FUNÇÕES), N_x E N_y (COM FICTÍCIOS), I (NÚMERO DE ITERAÇÕES)

2) DISCRETIZAR O DOMÍNIO DE CÁLCULO COM

$$\Delta x = \frac{1}{N_x - 2} \tag{7.32}$$

$$\Delta y = \frac{1}{N_y - 2} \tag{7.33}$$

3) CALCULAR x_w, y_w, x_e, y_e ; u_w E u_e – COM EQ. (7.3); α_w E α_e – COM EQS. (7.17) E (7.18)

4) CALCULAR x_n, y_n, x_s, y_s; v_s E v_n – COM EQ. (7.4); α_s E α_n – COM EQS. (7.19) E (7.20)

5) APLICAR AS CONDIÇÕES DE CONTORNO – EQS. (7.5) E (7.6) COM O PROCEDIMENTO APRESENTADO NA SEÇÃO 5.3 DAS NOTAS DE AULA PARA A OBTENÇÃO DOS COEFICIENTES E TERMOS-FONTES DOS VOLUMES FICTÍCIOS

6) CALCULAR OS COEFICIENTES E TERMOS-FONTES DOS VOLUMES REAIS COM AS EQS. (7.23) A (7.26), (7.28) E (7.31)

7) FAZER $T_P = 0$ (ESTIMATIVA INICIAL)

8) RESOLVER O SISTEMA – EQ. (7.22) – COM O MÉTODO DE GAUSS SEIDEL BIDIMENSIONAL – EQ. (5.43)

9) VOLTAR AO ITEM 8 ATÉ ATINGIR I ITERAÇÕES (OU ATENDER ALGUM OUTRO CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA).

10) IMPRIMIR E VISUALIZAR OS RESULTADOS.

7.3. EQUAÇÕES DISCRETIZADAS COM CDS/CDS (CDS NOS TERMOS ADVECTIVOS / CDS NOS TERMOS DIFUSIVOS)

SERÁ APRESENTADO, NESTA SEÇÃO, O QUE DEVE SER ALTERADO, EM RELAÇÃO À SEÇÃO ANTERIOR, PARA QUE SE POSSA UTILIZAR O ESQUEMA CDS TAMBÉM AOS TERMOS ADVECTIVOS, UTILIZANDO-SE, PORÉM, O RECURSO DA CORREÇÃO ADIADA. SEM A CORREÇÃO ADIADA, EM GERAL O PROCESSO ITERATIVO DIVERGE.

CORREÇÃO ADIADA:

$$T_f = T_{f,UDS} + \beta \left(T^*_{f,CDS} - T^*_{f,UDS} \right) \tag{7.34}$$

SENDO: f A FACE DO VOLUME DE CONTROLE;

$*$ VALORES CONHECIDOS (EXPLÍCITOS) DA ITERAÇÃO ANTERIOR; ASSIM, ACABAM SENDO POSTOS NO TERMO-FONTE;

$T_{f,UDS}$: VALOR (IMPLÍCITO) A SER OBTIDO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

β : FATOR DE MISTURA DOS ESQUEMAS UDS/CDS :

$$\beta = \begin{cases} 0: & \text{ESQUEMA UDS} \\ 0<\beta<1: & \text{ESQUEMA MISTO} \\ 1: & \text{ESQUEMA CDS} \end{cases} \quad \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{ESQUEMAS DE } 1^{\underline{a}} \text{ ORDEM} \\ \left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} \text{ESQUEMA DE } 2^{\underline{a}} \text{ ORDEM} \end{matrix} \quad \Bigg\} \text{ MALHAS UNIFORMES} \tag{7.35}$$

PARA O ESQUEMA UDS, T_f É DADO PELAS EQS. (7.13) A (7.20). JÁ NO CASO DO ESQUEMA CDS, TEM-SE:

$$T_{w,CDS} = \frac{(T_W + T_P)}{2} \tag{7.36}$$

$$T_{e,CDS} = \frac{(T_P + T_E)}{2} \tag{7.37}$$

$$T_{s,CDS} = \frac{(T_S + T_P)}{2} \tag{7.38}$$

$$T_{n,CDS} = \frac{(T_P + T_N)}{2} \tag{7.39}$$

EMPREGANDO-SE, ENTÃO, AS EQS. (7.13) A (7.16) E (7.36) A (7.39) NA EQ. (7.34), OBTÉM-SE PARA CADA FACE:

$$T_w = (1/2 + \alpha_w)\, T_W + (1/2 - \alpha_w)\, T_P + \alpha_w \left(T_P^* - T_W^*\right)\beta \tag{7.40}$$

$$T_e = (1/2 + \alpha_e)\, T_P + (1/2 - \alpha_e)\, T_E + \alpha_e \left(T_E^* - T_P^*\right)\beta \tag{7.41}$$

$$T_s = (1/2 + \alpha_s)\, T_S + (1/2 - \alpha_s)\, T_P + \alpha_s \left(T_P^* - T_S^*\right)\beta \tag{7.42}$$

$$T_n = (1/2 + \alpha_n)\, T_P + (1/2 - \alpha_n)\, T_N + \alpha_n \left(T_N^* - T_P^*\right)\beta \tag{7.43}$$

SENDO α_w, α_e, α_s E α_n AVALIADOS ATRAVÉS DAS EQS. (7.17) A (7.20).

EMPREGANDO-SE, ENTÃO, AS EQS. (7.9) A (7.12) E (7.40) A (7.43) NA EQ. (7.8), OBTÉM-SE OS MESMOS COEFICIENTES DADOS PELAS EQS. (7.23) A (7.26) E (7.31); O TERMO-FONTE, PORÉM, DEVE SER MODIFICADO PARA:

$$\begin{aligned} b_P = \beta \Big\{ & \left[u_e \alpha_e \left(T_P^* - T_E^*\right) - u_w \alpha_w \left(T_W^* - T_P^*\right)\right] \Delta y \\ & + \left[v_n \alpha_n \left(T_P^* - T_N^*\right) - v_s \alpha_s \left(T_S^* - T_P^*\right)\right] \Delta x \Big\} \end{aligned} \tag{7.44}$$

NOTA-SE, ASSIM, QUE O EMPREGO DA CORREÇÃO ADIADA ALTERA APENAS O TERMO-FONTE DURANTE O PROCESSO DE DISCRETIZAÇÃO. CONTUDO, DEVE-SE OBSERVAR, TAMBÉM, QUE SE

O PROBLEMA É LINEAR MATEMATICAMENTE, ELE PASSA A SER NÃO-LINEAR NUMERICAMENTE, SENDO NECESSÁRIO RECALCULAR OS TERMOS-FONTES DE CADA VOLUME DE CONTROLE A CADA ITERAÇÃO. A VANTAGEM DESTE PROCEDIMENTO, PORÉM, É QUE SE CONSEGUE SOLUÇÕES COM 2ª ORDEM DE ACURÁCIA AO EMPREGAR $\beta = 1$.

ALGORITMO: ALTERAÇÕES NECESSÁRIAS EM RELAÇÃO ÀQUELE MOSTRADO NA SEÇÃO ANTERIOR:

- PASSO 1: LER TAMBÉM β.
- PASSO 6: CALCULAR APENAS OS COEFICIENTES.
- SUBSTITUIR OS PASSOS 8 A 10 DO ALGORITMO ANTERIOR PELOS SEGUINTES PASSOS:

8) CALCULAR OS TERMOS-FONTES, EQ. (7.44), PARA OS VOLUMES REAIS.

9) RESOLVER O SISTEMA – EQ. (7.22) – COM O MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL BIDIMENSIONAL – EQ. (5.43)

10) RETORNAR AO ITEM 8 ATÉ ATINGIR I ITERAÇÕES (OU ATENDER ALGUM OUTRO CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA).

11) IMPRIMIR E VISUALIZAR OS RESULTADOS.