CAP. 06: CONVECÇÃO DE CALOR UNIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE COM VELOCIDADE PRESCRITA: EQUAÇÃO DE ADVECÇÃO - DIFUSÃO

CONCEITOS ENVOLVIDOS:

- EQUAÇÃO DE ADVECÇÃO - DIFUSÃO UNIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE
- CONDIÇÕES DE CONTORNO DE DIRICHLET
- MALHAS UNIFORMES
- CONDIÇÕES DE CONTORNO OBTIDAS POR INTEGRAÇÃO NOS VOLUMES ADJACENTES AOS CONTORNOS
- COORDENADAS CARTESIANAS
- SOLVER TDMA
- DIVERSAS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO
- CAMPO DE VELOCIDADES PRESCRITO (CONHECIDO)

6.1. MODELO MATEMÁTICO

CONSIDERANDO-SE A EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA ENERGIA, BASEADA NA TEMPERATURA, E:

- MODELO UNIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE;
- PROPRIEDADES TERMOFÍSICAS CONSTANTES;
- CAMPO DE VELOCIDADES u CONHECIDO E CONSTANTE;
- AUSÊNCIA DE GERAÇÃO DE CALOR;
- AUSÊNCIA DE DISSIPAÇÃO VISCOSA

TEM-SE A SEGUINTE RELAÇÃO:

$$\underbrace{\rho u c_p \frac{dT}{dx}}_{\text{ADVECÇÃO DE CALOR}} = \underbrace{k \frac{d^2T}{dx^2}}_{\text{DIFUSÃO DE CALOR}} \qquad (6.1)$$

CONVECÇÃO = ADVECÇÃO + DIFUSÃO, EMBORA MUITOS AUTORES UTILIZAM O TERMO CONVECÇÃO COMO SINÔNIMO DE ADVECÇÃO.

NA EQ. (6.1) TEM-SE:

ρ = MASSA ESPECÍFICA DO FLUIDO $[kg/m^3]$;

u = VELOCIDADE DO FLUIDO $[m/s]$;

c_p = CALOR ESPECÍFICO DO FLUIDO $[J/kgK]$;

k = CONDUTIVIDADE TÉRMICA DO FLUIDO $[W/mK]$;

x = COORDENADA ESPACIAL $[m]$;

T = TEMPERATURA $[°C$ OU $K]$.

UTILIZANDO-SE AS SEGUINTES RELAÇÕES:

$$\theta = \frac{T - T(0)}{T(L) - T(0)} \quad \text{(ADIMENSIONAL)} \qquad (6.2)$$

$$\xi = \frac{x}{L} \quad \text{(ADIMENSIONAL)} \qquad (6.3)$$

$$Pe = \frac{\rho u c_p L}{k} = \frac{u L}{\alpha} \quad \text{(ADIMENSIONAL)} \qquad (6.4)$$

ONDE $T(0)$ É A TEMPERATURA NO CONTORNO $x = 0$;

$T(L)$ É A TEMPERATURA NO CONTORNO $x = L$;

α É A DIFUSIVIDADE TÉRMICA DO FLUIDO $[m^2/s]$

L é o comprimento do domínio de cálculo [m]

Pe é o número de Peclet, que representa a razão entre os efeitos advectivos e difusivos no escoamento. Se $Pe > 1$, tem-se um escoamento com advecção dominante; caso contrário, a difusão é dominante.

θ e ξ são, respectivamente, a temperatura e a posição adimensionalizadas.

Empregando-se as Eqs. (6.2) a (6.4), pode-se então reescrever a Eq. (6.1) em sua forma adimensionalizada como

$$Pe \frac{d\theta}{d\xi} = \frac{d^2\theta}{d\xi^2} \tag{6.5}$$

sujeita às seguintes condições de contorno:

$$\theta(0) = 0 \tag{6.6}$$

$$\theta(1) = 1 \tag{6.7}$$

A Eq. (6.5), aliada às condições de contorno, Eqs. (6.6) e (6.7) tem como solução analítica

$$\theta(\xi) = \frac{e^{\xi Pe} - 1}{e^{Pe} - 1} \tag{6.8}$$

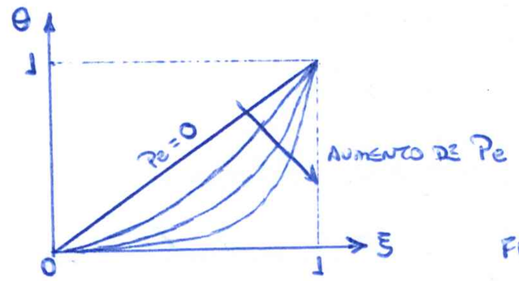

FIG. 6.1: Comportamento do perfil de temperaturas com o número de Peclet.

Uma segunda variável de interesse para este problema é a temperatura média ($\bar{\theta}$), definida por

$$\bar{\theta} = \int_0^1 \theta \, d\xi \tag{6.9}$$

e cuja expressão analítica é:

$$\bar{\theta} = \frac{(e^{Pe} - Pe - 1)}{Pe\,(e^{Pe} - 1)} \tag{6.10}$$

Uma terceira variável de interesse é a inclinação (I), definida como

$$I = \left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=1} \tag{6.11}$$

E CUJA EXPRESSÃO ANALÍTICA É:

$$I = \frac{Pe \, e^{Pe}}{\left(e^{Pe} - 1\right)} \qquad (6.12)$$

6.2. DISCRETIZAÇÃO GERAL

DEVE-SE INTEGRAR A EQ. (6.5) SOBRE O VOLUME DE CONTROLE P DA FIG. 6.2:

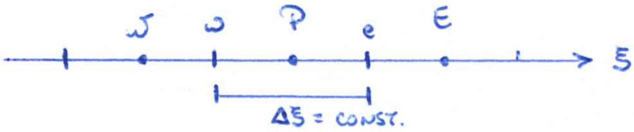

FIG. 6.2: MALHA UNIDIMENSIONAL UNIFORME

NESTE CASO, OBTÉM-SE:

$$\int_z \int_y \int_{\xi_w}^{\xi_e} \left[Pe \frac{d\theta}{d\xi} \right] d\xi \, dy \, dz = \int_z \int_y \left[\frac{d^2\theta}{d\xi^2} \right] d\xi \, dy \, dz \qquad (6.13)$$

QUE RESULTA EM

$$Pe \left(\theta_e - \theta_w \right) . A = \left[\left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)_e - \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)_w \right] A \qquad (6.14)$$

SENDO Pe E $A = \Delta y \Delta z$ CONSTANTES. NOTA-SE QUE A É A ÁREA DA SEÇÃO TRANSVERSAL AO ESCOAMENTO.

FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO OU ESQUEMAS NUMÉRICOS SÃO USADOS PARA OBTER θ E $\frac{d\theta}{d\xi}$ NAS FACES DOS VOLUMES DE CONTROLE. OBSERVA-SE, CONTUDO, QUE EM GERAL NO CASO DOS TERMOS DIFUSIVOS, O USO DE FUNÇÕES LINEARES NÃO É PROBLEMÁTICO, AO PASSO QUE PARA OS TERMOS ADVECTIVOS, O USO DE FUNÇÕES LINEARES CAUSA TRANSTORNOS.

ALGUMAS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO UNIDIMENSIONAIS PODEM SER EXPRESSAS GENERICAMENTE POR:

$$\theta_e = \left(1/2 + \alpha_e \right) \theta_P + \left(1/2 - \alpha_e \right) \theta_E \qquad (6.15)$$

$$\theta_w = \left(1/2 + \alpha_w \right) \theta_W + \left(1/2 - \alpha_w \right) \theta_P \qquad (6.16)$$

$$\left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)_e = \beta_e \left(\frac{\theta_E - \theta_P}{\Delta\xi} \right) \qquad (6.17)$$

$$\left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)_w = \beta_w \left(\frac{\theta_P - \theta_W}{\Delta\xi} \right) \qquad (6.18)$$

SENDO: α_e E α_w OS COEFICIENTES DOS TERMOS ADVECTIVOS DAS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO, ASSUMINDO VALORES ENTRE $-1/2$ E $1/2$.

β_e E β_w OS COEFICIENTES DOS TERMOS DIFUSIVOS DAS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO, ASSUMINDO VALORES ENTRE 0 E 1.

EMPREGANDO-SE AS EQS. (6.15) A (6.18) NA EQ. (6.14) CHEGA-SE A:

$$Pe\left[\left(\tfrac{1}{2}+\alpha_e\right)\theta_P+\left(\tfrac{1}{2}-\alpha_e\right)\theta_E-\left(\tfrac{1}{2}+\alpha_w\right)\theta_W-\left(\tfrac{1}{2}-\alpha_w\right)\theta_P\right]=\beta_e\frac{(\theta_E-\theta_P)}{\Delta\xi}-\beta_w\frac{(\theta_P-\theta_W)}{\Delta\xi} \quad (6.19)$$

QUE ESCRITA NA FORMA

$$a_P\theta_P = a_w\theta_W + a_e\theta_E + b_P \quad (6.20)$$

POSSUI COMO COEFICIENTES / TERMOS-FONTES

$$a_w = \frac{\beta_w}{\Delta\xi} + \left(\tfrac{1}{2}+\alpha_w\right)Pe \quad (6.21)$$

$$a_e = \frac{\beta_e}{\Delta\xi} - \left(\tfrac{1}{2}-\alpha_e\right)Pe \quad (6.22)$$

$$a_P = a_w + a_e \quad (6.23)$$

$$b_P = 0 \quad (6.24)$$

QUE SÃO VÁLIDOS PARA $P = 2, 3, \ldots, N-1$.

6.3. ESQUEMA CDS (CENTRAL DIFFERENCING SCHEME)

O ESQUEMA CDS CONSISTE EM UTILIZAR FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO LINEARES ENTRE NÓS CONSECUTIVOS, ISTO É:

$$\theta_e = \frac{\theta_P+\theta_E}{2} \quad (6.25)$$

$$\theta_w = \frac{\theta_W+\theta_P}{2} \quad (6.26)$$

$$\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_e = \frac{\theta_E-\theta_P}{\Delta\xi} \quad (6.27)$$

$$\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_w = \frac{\theta_P-\theta_W}{\Delta\xi} \quad (6.28)$$

NO CASO DAS DERIVADAS AVALIADAS NAS FACES DO VOLUME DE CONTROLE, O ESQUEMA CDS TEM SIDO UTILIZADO PARA PROBLEMAS DIFUSIVOS, COMO OS VISTOS NOS CAPS. 2, 4 E 5.

CONSIDERANDO-SE O ESQUEMA GERAL, O CDS OCORRE AO SE FAZER

$$\alpha_e = \alpha_w = 0 \quad (6.29)$$

$$\beta_e = \beta_w = 1 \quad (6.30)$$

NESTE CASO, OS COEFICIENTES E TERMO-FONTE DA EQ. (6.20) PODEM SER EXPRESSOS COMO

$$a_w = \frac{1}{\Delta\xi} + \frac{P_e}{2} \qquad (6.31)$$

$$a_e = \frac{1}{\Delta\xi} - \frac{P_e}{2} \qquad (6.32)$$

$$a_p = \frac{2}{\Delta\xi} = a_w + a_e \qquad (6.33)$$

$$b_p = 0 \qquad (6.34)$$

A APLICAÇÃO DA CONDIÇÃO DE CONTORNO EM $\xi = 0$, EQ. (6.6), É FEITO COM O AUXÍLIO DA FIG. 6.3:

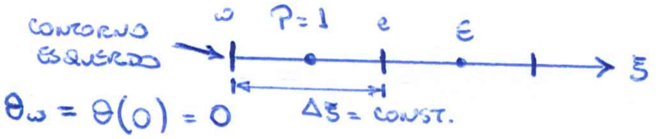

FIG. 6.3: CONDIÇÃO DE CONTORNO EM $\xi = 0$.

CONSIDERANDO-SE: $\theta_w = \theta(0) = 0$ (6.35)

E

$$\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_w = \frac{(\theta_P - \theta_w)}{\Delta\xi/2} = \frac{2(\theta_P - \theta_w)}{\Delta\xi} = \frac{2\,\theta_P}{\Delta\xi} \qquad (6.36)$$

EMPREGANDO-SE, ENTÃO, AS RELAÇÕES (6.35) E (6.36) NA EQ. (6.14), ALÉM DAS EQS. (6.25) E (6.27), TEM-SE:

$$P_e\left[\frac{(\theta_P + \theta_E)}{2} - 0\right] = \frac{(\theta_E - \theta_P)}{\Delta\xi} - \frac{2\theta_P}{\Delta\xi} \qquad (6.37)$$

QUE ESCRITA NA FORMA DA EQ. (6.20) TEM COMO COEFICIENTES/TERMO-FONTE:

$$a_w = 0 \qquad (6.38)$$

$$a_e = \frac{1}{\Delta\xi} - \frac{P_e}{2} \qquad (6.39)$$

$$a_p = \frac{3}{\Delta\xi} + \frac{P_e}{2} \qquad (6.40)$$

$$b_p = 0 \qquad (6.41)$$

QUE É VÁLIDO PARA $P = 1$.

A APLICAÇÃO DA CONDIÇÃO DE CONTORNO EM $\xi = 1$, EQ. (6.7), É FEITA COM O AUXÍLIO DA FIG. 6.4:

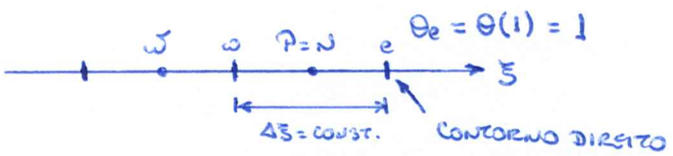

FIG. 6.4: CONDIÇÃO DE CONTORNO EM $\xi = 1$.

CONSIDERANDO-SE:

$$\theta_e = \theta(1) = 1 \qquad (6.42)$$

E

$$\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_e = \frac{(\theta_e - \theta_P)}{\Delta\xi/2} = \frac{2(\theta_e - \theta_P)}{\Delta\xi} = \frac{2(1-\theta_P)}{\Delta\xi} \qquad (6.43)$$

EMPREGANDO-SE, ENTÃO, AS EQS. (6.42) E (6.43) NA EQ. (6.14), ALÉM DAS EQS. (6.26) E (6.28), TEM-SE

$$Pe\left[1 - \frac{(\theta_P + \theta_W)}{2}\right] = 2\,\frac{(1-\theta_P)}{\Delta\xi} - \frac{(\theta_P - \theta_W)}{\Delta\xi} \qquad (6.44)$$

QUE ESCRITA NA FORMA DA EQ. (6.20) TEM COMO COEFICIENTES/TERMO-FONTE:

$$a_e = 0 \qquad (6.45)$$

$$a_w = \frac{1}{\Delta\xi} + \frac{Pe}{2} \qquad (6.46)$$

$$a_p = \frac{3}{\Delta\xi} - \frac{Pe}{2} \qquad (6.47)$$

$$b_P = \frac{2}{\Delta\xi} - Pe \qquad (6.48)$$

QUE É VÁLIDO PARA $P=N$.

A PARTIR DA EQ. (6.32), PARA QUE $a_e \geq 0$ DEVE-SE TER:

$$a_e = \frac{1}{\Delta\xi} - \frac{Pe}{2} \geq 0$$

$$\frac{1}{\Delta\xi} \geq \frac{Pe}{2}$$

COMO $\Delta\xi > 0$, TEM-SE QUE:

$$2 \geq Pe.\Delta\xi$$

OU SEJA,

$$Pe.\Delta\xi \leq 2 \qquad (6.49)$$

OU, TOMANDO-SE:

$$Pe_{\Delta\xi} = Pe.\Delta\xi \quad \text{(PECLET DE MALHA)} \qquad (6.50)$$

$$Pe_{\Delta\xi} \leq 2 \qquad (6.51)$$

SENDO

$$\Delta\xi = \frac{L}{N} \qquad (6.52)$$

ONDE L É O COMPRIMENTO DO DOMÍNIO E N É O NÚMERO DE VOLUMES DE CONTROLE NO QUAL O DOMÍNIO É PARTICIONADO.

A CONDIÇÃO DE QUE $a_e \geq 0$ É NECESSÁRIA PARA QUE A SOLUÇÃO NUMÉRICA NÃO OSCILE.

A SOLUÇÃO NUMÉRICA PARA A TEMPERATURA MÉDIA $\bar{\theta}$, DEFINIDA PELA EQ. (6.9), AO SE EMPREGAR A REGRA DO TRAPÉZIO, É DADA POR

$$\bar{\theta} = \frac{\theta_1}{2}\frac{\Delta\xi}{2} + \frac{\Delta\xi}{2}\sum_{P=2}^{N}(\theta_W + \theta_P) + \frac{(1+\theta_N)}{2}\frac{\Delta\xi}{2} \qquad (6.53)$$

E A INCLINAÇÃO, DEFINIDA PELA EQ. (6.11), EMPREGANDO-SE O ESQUEMA UDS, PODE SER AVALIADA COMO:

$$I = \frac{2(1-\theta_N)}{\Delta\xi} \qquad (6.54)$$

JÁ A MÉDIA DA NORMA l_1 DO ERRO NUMÉRICO PODE SER AVALIADO ATRAVÉS DA SEGUINTE RELAÇÃO:

$$\bar{l}_1 = \frac{\sum_{P=1}^{N}\left|\theta_P^{\text{ANALÍTICO}} - \theta_P^{\text{NUMÉRICO}}\right|}{N} \qquad (6.55)$$

ALGORITMO PARA O ESQUEMA CDS/CDS:

1) LER OS DADOS: Pe, N.

2) DISCRETIZAR O DOMÍNIO DE CÁLCULO EMPREGANDO-SE

$$\Delta\xi = \frac{1}{N} \qquad (6.56)$$

E

$$\xi_P = (P-1)\Delta\xi + \frac{\Delta\xi}{2} \qquad (6.57)$$

3) CALCULAR OS COEFICIENTES E TERMOS-FONTES, EQs. (6.31) A (6.34), (6.38) A (6.41) E (6.45) A (6.48)

4) RESOLVER O SISTEMA DE EQUAÇÕES COM O TDMA.

5) CALCULAR $\bar{\theta}$, I E $\bar{l}_1$ ATRAVÉS DAS EQs. (6.53) A (6.55).

6) IMPRIMIR OS RESULTADOS E VISUALIZAR $\theta(\xi)$.

6.4. ESQUEMA UDS (UPSTREAM DIFFERENCING SCHEME) - COURANT ET AL. (1952)

AO SE EMPREGAR ESTE ESQUEMA, AS DERIVADAS, $d\theta/d\xi$, SÃO AVALIADAS DE MODO ANÁLOGO AO VISTO PARA O ESQUEMA CDS, EQs. (6.25) E (6.26). A DIFERENÇA RECAI NA AVALIAÇÃO DE θ_e E θ_w QUE, PARA $u > 0$ OU $Pe > 0$, PASSAM A SER AVALIADAS COMO

$$\theta_e = \theta_P \qquad (6.58)$$

$$\theta_w = \theta_W \qquad (6.59)$$

TOMANDO-SE COMO BASE O ESQUEMA GERAL, O ESQUEMA UDS É OBTIDO AO SE FAZER (DESDE $Pe > 0$):

$$\alpha_e = \alpha_w = 1/2 \tag{6.60}$$

$$\beta_e = \beta_w = 1 \tag{6.61}$$

NO CASO DE $u < 0$ OU $Pe < 0$, TER-SE-IA:

$$T_e = T_E \tag{6.62}$$

$$T_w = T_P \tag{6.63}$$

$$\alpha_e = \alpha_w = -1/2 \tag{6.64}$$

PARA $Pe > 0$, UTILIZANDO-SE AS EQS. (6.58) E (6.59), ALÉM DE (6.27) E (6.28), NA EQ. (6.14), OBTÉM-SE:

$$Pe\,(\theta_P - \theta_W) = \frac{(\theta_E - \theta_P)}{\Delta\xi} - \frac{(\theta_P - \theta_W)}{\Delta\xi} \tag{6.65}$$

QUE EXPRESSA NA FORMA DA EQ. (6.20) POSSUI COMO COEFICIENTES/TERMOS-FONTES:

$$a_w = \frac{1}{\Delta\xi} + Pe \tag{6.66}$$

$$a_e = \frac{1}{\Delta\xi} \tag{6.67}$$

$$a_P = a_w + a_e \tag{6.68}$$

$$b_P = 0 \tag{6.69}$$

QUE SÃO VÁLIDOS PARA $P = 2, 3, \ldots, N-1$.

NOTA-SE, NESTE CASO, QUE $a_e \geq 0$ SEMPRE, DE MODO QUE NÃO HÁ OSCILAÇÃO DA SOLUÇÃO NUMÉRICA.

A APLICAÇÃO DA CONDIÇÃO DE CONTORNO EM $\xi = 0$, EQ. (6.6), É FEITA COM O AUXÍLIO DA FIG. 6.3 E DAS EQS (6.35), (6.36) E (6.58) SUBSTITUÍDAS NA EQ. (6.14), OBTENDO-SE:

$$Pe\,(\theta_P - 0) = \frac{(\theta_E - \theta_P)}{\Delta\xi} - \frac{2\,\theta_P}{\Delta\xi} \tag{6.70}$$

QUE REARRANJADA NA FORMA DA EQ. (6.20) APRESENTA COMO COEFICIENTES/TERMO-FONTE:

$$a_w = 0 \tag{6.71}$$

$$a_e = \frac{1}{\Delta\xi} \tag{6.72}$$

$$a_P = \frac{3}{\Delta\xi} + Pe \tag{6.73}$$

$$b_P = 0 \tag{6.74}$$

QUE SÃO VÁLIDAS PARA O VOLUME DE CONTROLE $P=1$.

DE MODO SEMELHANTE, A APLICAÇÃO DA CONDIÇÃO DE CONTORNO EM $\xi=1$, EQ. (6.7), É FEITA COM O AUXÍLIO DA FIG. 6.4 E DAS EQS. (6.42), (6.43) E (6.59), SUBSTITUÍDAS NA EQ. (6.14) RESULTA EM

$$Pe\,(T_P - T_W) = 2\,\frac{(1-T_P)}{\Delta\xi} - \frac{(T_P - T_W)}{\Delta\xi} \qquad (6.75)$$

QUE REARRANJADA NA FORMA DA EQ. (6.20) POSSUI COMO COEFICIENTES / TERMO-FONTE:

$$a_e = 0 \qquad (6.76)$$

$$a_w = \frac{1}{\Delta\xi} + Pe \qquad (6.77)$$

$$a_p = \frac{3}{\Delta\xi} + Pe \qquad (6.78)$$

$$b_p = \frac{2}{\Delta\xi} \qquad (6.79)$$

QUE SÃO VÁLIDAS PARA $P=N$.

6.5. ESQUEMA EXATO OU EXPONENCIAL - ALLAN E SOUTHWELL (1955)

NO ESQUEMA EXATO OS COEFICIENTES α E β DO ESQUEMA GERAL SÃO OBTIDOS DA SOLUÇÃO ANALÍTICA EXATA DA EQ. (6.5) ENTRE DOIS NÓS CONSECUTIVOS DA MALHA. DESTA FORMA, CONSIDERANDO-SE $Pe > 0$ $(u>0)$, OBTÉM-SE:

$$a_w = \frac{\beta_1}{\Delta\xi} + (1/2+\alpha)\,Pe \qquad (6.80)$$

$$a_e = \frac{\beta_1}{\Delta\xi} - (1/2-\alpha)\,Pe \qquad (6.81)$$

$$a_p = a_w + a_e \qquad (6.82)$$

$$b_p = 0 \qquad (6.83)$$

QUE SÃO VÁLIDOS PARA TODOS OS VOLUMES INTERNOS, $P = 2, 3, \ldots, N-1$.

NO CASO DO PRIMEIRO VOLUME, $P=1$:

$$a_w = 0 \qquad (6.84)$$

$$a_e = \frac{\beta_1}{\Delta\xi} - (1/2-\alpha)\,Pe \qquad (6.85)$$

$$a_p = \frac{\beta_1}{\Delta\xi} + 2\,\frac{\beta_0}{\Delta\xi} + (1/2+\alpha)\,Pe \qquad (6.86)$$

$$b_P = 0 \qquad (6.87)$$

E PARA O ÚLTIMO VOLUME, P = N:

$$a_w = \frac{\beta_d}{\Delta\xi} + (1/2 + \alpha) Pe \qquad (6.88)$$

$$a_e = 0 \qquad (6.89)$$

$$a_P = \frac{\beta_d}{\Delta\xi} - (1/2 - \alpha) Pe + \frac{2\beta_L}{\Delta\xi} \qquad (6.90)$$

$$b_P = \frac{2\beta_L}{\Delta\xi} - Pe \qquad (6.91)$$

SENDO

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{(e^{Pe_{\Delta\xi}/2} - 1)}{(e^{Pe_{\Delta\xi}} - 1)} \qquad (6.92)$$

$$\beta_d = Pe_{\Delta\xi} \frac{e^{Pe_{\Delta\xi}/2}}{(e^{Pe_{\Delta\xi}} - 1)} \qquad (6.93)$$

$$\beta_o = \frac{Pe_{\Delta\xi}}{2(e^{Pe_{\Delta\xi}/2} - 1)} \qquad (6.94)$$

$$\beta_L = \frac{Pe_{\Delta\xi}\, e^{Pe_{\Delta\xi}/2}}{2(e^{Pe_{\Delta\xi}/2} - 1)} = \beta_o\, e^{Pe_{\Delta\xi}/2} \qquad (6.95)$$

DESTE MODO, A SOLUÇÃO NUMÉRICA NODAL OBTIDA A PARTIR DO ESQUEMA EXATO, É IGUAL À SOLUÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA. A IDEIA UTILIZADA PARA O PROBLEMA DE ADVECÇÃO-DIFUSÃO PODE SER APLICADA A OUTROS PROBLEMAS, DESDE QUE A SOLUÇÃO ANALÍTICA SEJA CONHECIDA.

6.6. VARIANTES DOS ESQUEMAS UDS, CDS E EXATO.

- ESQUEMA HÍBRIDO: PROPOSTO POR SPALDING (1972). NESTE CASO, AS APROXIMAÇÕES PARA θ_w E θ_e SÃO FEITAS COM UDS, SE $Pe_{\Delta\xi} \geq 2$, OU CDS, CASO $Pe_{\Delta\xi} < 2$.
- ESQUEMAS WUDS (WEIGHTED UPSTREAM DIFFERENCE SCHEME) - RAITHBY (197) - E PLDS OU POW (POWER-LAW DIFFERENCING SCHEME) - PATANKAR (198): AMBOS OS

ESQUEMAS USAM FUNÇÕES MAIS SIMPLES PARA O CÁLCULO DE α E β EM RELAÇÃO ÀS EXPRESSÕES EMPREGADAS NO ESQUEMA EXATO. POR EXEMPLO, PARA O WUDS (HANDBOOK OF NUMERICAL HEAT TRANSFER, 1988, p. 253):

$$|\alpha| = \frac{Pe_{\Delta s}^2}{10 + 2 Pe_{\Delta s}^2} \tag{6.96}$$

$$\beta = \frac{1 + 0{,}005\, Pe_{\Delta s}^2}{1 + 0{,}05\, Pe_{\Delta s}^2} \tag{6.97}$$

6.7. ESQUEMA ALFA

NESTE ESQUEMA O VALOR DE α É PRESCRITO, TRATA-SE DE UM DADO DA SIMULAÇÃO.

6.8. ESQUEMAS TVD (TOTAL VARIATION DIMINISHING) – BORIS E BOOK (1973), HARTEN (1983) E OUTROS AUTORES.

O ESQUEMA TVD FOI DESENVOLVIDO COM BASE EM CRITÉRIOS MATEMÁTICOS QUE EVITAM O SURGIMENTO DE OSCILAÇÕES NUMÉRICAS EM PROBLEMAS UNIDIMENSIONAIS E PARA CAPTAR FORTES GRADIENTES DA SOLUÇÃO, COMO NO CASO DE ONDAS DE CHOQUE. EXISTE UMA GRANDE VARIEDADE DE ESQUEMAS TVD; ASSIM, NESTE CASO A ESCOLHA SERÁ PELO SUPERBEE (ROE, 1985):

DEFINIÇÃO DE VARIAÇÃO TOTAL (ANALÍTICA):

$$TV(\phi) = \int \left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right| dx \tag{6.98}$$

E (DISCRETA):

$$TV(\phi) = \sum_P |\phi_E - \phi_P| \tag{6.99}$$

SENDO ϕ A VARIÁVEL DEPENDENTE.

UM MÉTODO NUMÉRICO É DITO SER DE VARIAÇÃO TOTAL DIMINUÍDA, OU TVD, SE

$$TV(\phi^{n+1}) \leq TV(\phi^n) \tag{6.100}$$

ONDE n REPRESENTA O NÚMERO DA ITERAÇÃO.

ADAPTAÇÃO PARA USAR α:

$$\alpha_e = \frac{1}{2}(1 - \psi_e) \tag{6.101}$$

NO CASO DO ESQUEMA SUPERBEE DE ROE (1983):

$$\psi_e = \max\left[0;\ \min(2r_e; 1);\ \min(r_e; 2)\right] \qquad (6.102)$$

ASSIM:

$$\psi_e = \begin{cases} 0, & \text{ENTÃO} \quad \alpha_e = 1/2 \quad (\text{UDS}) \\ 1, & \text{ENTÃO} \quad \alpha_e = 0 \quad (\text{CDS}) \\ 2, & \text{ENTÃO} \quad \alpha_e = -1/2 \quad (\text{DDS}) \end{cases}$$

PARA $P_e > 0$,

$$r_e = \frac{\theta_P - \theta_W}{\theta_E - \theta_P} \qquad (6.103)$$

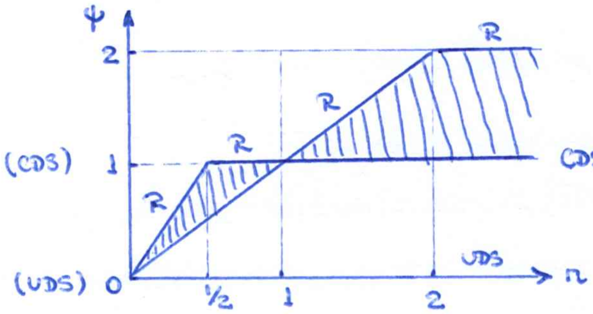

FIG. 6.5: REGIÃO TVD PARA ESQUEMAS DE 2ª ORDEM.

UMA OBSERVAÇÃO IMPORTANTE AO SE USAR O ESQUEMA TVD É QUE, MESMO QUE O PROBLEMA MATEMÁTICO SEJA LINEAR, O TVD TORNA A SOLUÇÃO NUMÉRICA NÃO LINEAR.

6.9. ESQUEMA QUICK (QUADRATIC UPSTREAM INTERPOLATION FOR CONVECTIVE KINEMATICS) – LEONARD (1979)

CONSIDERANDO-SE O VOLUME DE CONTROLE P E SUAS FACES, MOSTRADAS NA FIG. 6.6:

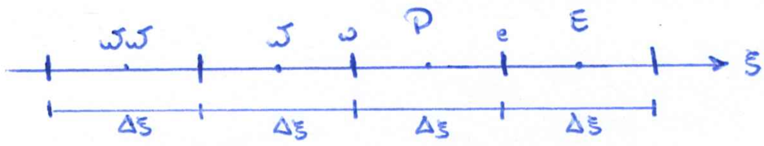

FIG. 6.6: VOLUME DE CONTROLE P, SUAS FACES E SEUS VIZINHOS

E PARA $P_e > 0$, PODE-SE USAR UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA PARA SE OBTER:

$$\theta_e = \frac{6\theta_P + 3\theta_E - \theta_W}{8} \qquad (6.104)$$

$$\theta_w = \frac{6\theta_W + 3\theta_P - \theta_{WW}}{8} \qquad (6.105)$$

MAIORES INFORMAÇÕES SOBRE O ESQUEMA QUICK PODEM SER OBTIDAS NA SEÇÃO 5.9.1 E SUBSEQUENTES DA OBRA DE VERSTEEG E MALALASEKERA (2007) - REF. 01.

6.10. DIFUSÃO E DISPERSÃO NUMÉRICAS

OS ERROS DE DISCRETIZAÇÃO PODEM SE MANIFESTAR DE DUAS FORMAS NAS SOLUÇÕES NUMÉRICAS: DIFUSÃO E DISPERSÃO.

- DIFUSÃO NUMÉRICA: SÃO OS ERROS QUE TENDEM A SUAVIZAR OS GRADIENTES EXISTENTES NA SOLUÇÃO EXATA. EXEMPLO: USO DO ESQUEMA UDS, PARA PROBLEMAS COM GRANDES GRADIENTES DE PROPRIEDADES.

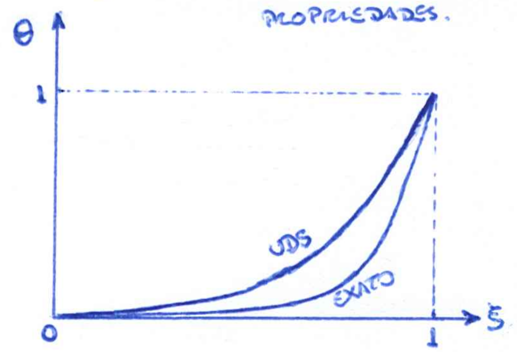

FIG. 6.7: EFEITO DE DIFUSÃO NUMÉRICA SOBRE UMA SOLUÇÃO.

- DISPERSÃO NUMÉRICA: SÃO OS ERROS QUE PROVOCAM OSCILAÇÕES NA SOLUÇÃO NUMÉRICA. EXEMPLO: USO DO ESQUEMA CDS PARA O PROBLEMA DE ADVECÇÃO-DIFUSÃO UNIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE, PARA $Pe_{\Delta x} \geq 2$.

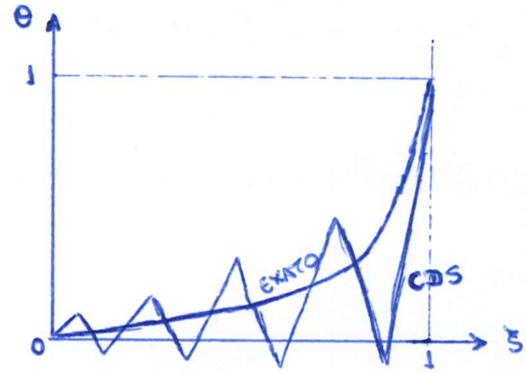

FIG. 6.8: EFEITO DE DISPERSÃO NUMÉRICA SOBRE UMA SOLUÇÃO.