

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

CARLOS ALBERTO REZENDE DE CARVALHO JUNIOR

**EXPERIMENTOS COM EXTRAPOLAÇÃO DE RICHARDSON
COMPLETA E ALGUMAS VARIAÇÕES**

Curitiba

2020

CARLOS ALBERTO REZENDE DE CARVALHO JUNIOR

**EXPERIMENTOS COM EXTRAPOLAÇÃO DE RICHARDSON
COMPLETA E ALGUMAS VARIAÇÕES**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Métodos Numéricos em Engenharia, do Setor
de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal
do Paraná, como requisito para a obtenção do
título de Doutor em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Henrique Marchi

Curitiba

2020

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, irmãos, família e amigos, pelo incentivo e apoio incondicional. Em especial para o meu pai (in memorian), por não poder estar presente neste momento especial, sem ele nada disso seria possível.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Carlos Henrique Marchi pela dedicação, sabedoria compartilhada, amizade, paciência e acima de tudo confiança.

Agradeço aos membros da banca examinadora, Prof. Dr. Luciano Kiyoshi Araki, Prof. Dr. Geovani Nunes Grapiglia, Prof. Dr. Guilherme Bertoldo, Prof. Dr. Diogo B. Pitz e Prof. Dr. Francisco Marcondes pelo tempo dispensado à leitura deste trabalho.

Agradeço aos meus colegas e amigos do laboratório de experimentação numérica da UFPR (LENA).

Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia (PPGMNE) da Universidade Federal do Paraná (UFPR), à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela oportunidade de cursar o doutorado.

*“No xadrez, como na vida,
o adversário mais perigoso é você mesmo”
Vasily Vasiliyevich Smyslov*

RESUMO

Este trabalho tem como base a Extrapolação de Richardson (ER) e sua versão aprimorada a Multiextrapolação de Richardson (MER), cujo objetivo é aperfeiçoar as soluções numéricas sem a necessidade de novas simulações, funcionando como um pós-processamento de dados. Em condições ideais estas técnicas são excelentes aliadas para melhoria das simulações, devido ao fato de ter um baixíssimo custo computacional. Entretanto, não é possível aplicar ER ou MER de forma efetiva em campos. Neste cenário, surgiu a Extrapolação de Richardson Completa (CRE), técnica voltada para campos, baseada em ER. Desde então, este método tem sido estudado, aprimorado, ou simplesmente utilizado. São abordadas algumas variações desta técnica e são feitas adaptações, introduzindo o conceito de submalhas, baseados em MER e ER, tendo como intuito estender este conceito. Para os experimentos são utilizados diversos modelos matemáticos com soluções analíticas: Poisson 1D com dois termos fontes, Burgers 1D e 2D, Laplace 2D e Navier-Stokes 2D, onde são testadas estas técnicas. As discretizações são realizadas através da técnica de Diferenças Finitas. Para os modelos unidimensionais e Laplace 2D, foram utilizadas além das malhas usuais uniformes, empregou-se malhas não uniformes. As simulações foram realizadas em Fortran com precisão quádrupla. Através do conceito de submalha foram obtidos resultados expressivos atingindo em alguns casos erros com grandezas superiores a 10^{-20} , muito superior aos erros iniciais. Além de considerável aumento nas ordens de acurácia, nos modelos matemáticos empregados. Em alguns casos se mostraram consideravelmente superiores em comparação com as técnicas já existentes. Em geral, apresentaram grande estabilidade em todos os modelos utilizados, apresentando redução do erro e aumento das ordens de acurácia em todos os casos.

Palavras-chave: Erro numérico. Multiextrapolação de Richardson. Diferenças Finitas. SubMalhas. Extrapolação de Richardson Completa.

ABSTRACT

This work is based on Richardson's Extrapolation (ER) and its improved version, Richardson's Multiextrapolation (MER), whose objective is to improve numerical solutions without the need for new simulations, working as a post-processing of data. In ideal conditions these techniques are excellent allies for improving the simulations, due to the fact of having a very low computational cost. However, it is not possible to apply ER or MER effectively in fields. In this scenario, Richardson Completed Extrapolation (CRE), a field-oriented technique based on ER, appeared. Since then, this method has been studied, improved, or simply used. Some variations of this technique are addressed and adaptations are made, introducing the concept of submeshes, based on MER and ER, in order to extend this concept. For the experiments several mathematical models with analytical solutions are used: Poisson 1D with two source terms, Burgers 1D and 2D Laplace 2D and Navier-Stokes 2D, where these techniques are tested. Discretization is performed using the Finite Difference technique. For the one-dimensional and Laplace models, in addition to the usual uniform meshes, non-uniform meshes were used. The simulations were performed in Fortran with quadruple precision. Through the sub-mesh concept, expressive results were obtained, reaching in some cases errors with quantities greater than 10^{-20} , much higher than the initial errors. In addition to a considerable increase in orders of accuracy, in the mathematical models employed. In some cases, they have been shown to be considerably superior compared to existing techniques. Generally, showed great stability in all the models used, showing a reduction in error and an increase in accuracy orders in all cases.

Keywords: Numerical error. Richardson extrapolation. Finite Difference. Completed Richardson Extrapolation. Submeshes.

LISTA DE ALGORITMOS

1	Algoritmo base - MER.	39
2	Algoritmo base: CRE1D, adaptado de Roache e Knupp (1993).	44
3	CRE 2D, adaptado de Roache e Knupp (1993).	45
4	Algoritmo base - SMER.	53
5	Algoritmo SER 1D, para diferenças finitas.	55
6	Algoritmo base SMER Interpolado.	56
7	Algoritmo alternativo de interpolação das correções 2D, adaptado de Moro (2018).	60
8	Resolução numérica da Equação de Laplace.	129
9	Resolução numérica da Equação de Burgers 1D.	131
10	Resolução numérica da Equação de Poisson 1D.	133
11	Algoritmo SUBER 2D, para diferenças finitas.	134
12	Algoritmo SMER 1D, para diferenças finitas.	135
13	Algoritmo SMER 2D, para diferenças finitas.	136
14	CRE clássico com Interpolação e FRE 1D (adaptado de Roache e Knupp (1993)).	137
15	Algoritmo cálculo da correção (C) por interpolação, para os nós não coincidentes, caso unidimensional.	138

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Métodos de solução de problemas de engenharia (MARCHI, 2001).	19
Figura 2 – Exemplo de desempenho de MER em condições ideais.	21
Figura 3 – Exemplos de malhas, para discretização de um mesmo domínio unidimensional.	22
Figura 4 – Exemplos de malhas para discretização de um mesmo domínio bidimensional.	22
Figura 5 – Efeito da precisão de armazenamento utilizada no desempenho das variáveis $Em1$ e Eh . Adaptado de Marchi et al. (2013).	28
Figura 6 – Malha unidimensional, discretizada em diferenças finitas.	32
Figura 7 – Exemplos de discretização em diferenças finitas para problemas bidimensionais, adaptado de Schneider (2007).	32
Figura 8 – Tipos de variáveis, adaptado de Martins (2013), Martins et al. (2013).	40
Figura 9 – Malhas unidimensionais discretizadas para Diferenças finitas.	42
Figura 10 – Esquema de obtenção de soluções numéricas unidimensional com CRE.	43
Figura 11 – Esquema de obtenção de soluções numéricas bidimensional com CRE.	43
Figura 12 – Malhas genéricas discretizadas em diferenças finitas.	46
Figura 13 – Exemplo de Aplicação de CRE e algumas variações.	48
Figura 14 – Passo 1, SMER 1D.	52
Figura 15 – SMER: Configuração final da malha M1 com seus pontos e coincidentes nas malhas M2 , M3 e M4 já extrapolados.	53
Figura 16 – SER, Malha M1	54
Figura 17 – SER, Malha M2	54
Figura 18 – SER, Malha M3	55
Figura 19 – Exemplo de aplicações: SMER Interpolado.	57
Figura 20 – Exemplos de nós vizinhos para interpolação em torno do nó P , malha cartesiana.	59
Figura 21 – Distribuição dos pontos para interpolação 2D de grau máximo 10, adaptado de Steffensen (1950).	59
Figura 22 – Distribuição dos pontos para interpolação 1D de grau máximo 10, adaptado de Steffensen (1950).	59
Figura 23 – Malha discretizada inicial (g), intervalo $[a,b]$	61
Figura 24 – Exemplo do esquema de refino uniforme com razão 2, aplicado em malhas não uniformes unidimensionais para Diferenças Finitas.	63
Figura 25 – Malhas iniciais bidimensionais, utilizadas nos experimentos.	64
Figura 26 – Resultados: SMER, Malhas Base 1, Variável l_1 , Burgers 1D com solução $T(x) = \frac{e^{xRe} - 1}{e^{Re} - 1}$, $Re = 1$, Malha uniforme.	72

Figura 27 – Resultados: SMER, Malha Base 2, Variável l_1 , Burgers 1D com solução $T(x) = \frac{e^{xRe} - 1}{e^{Re} - 1}$, $Re = 1$, Malha uniforme.	73
Figura 28 – Resultados: SMER, Malhas Base 7, Variável l_1 , Poisson 1D com solução $T = \sin(\pi x)$, Malha uniforme.	73
Figura 29 – Resultados: SMER, Malha Base 8, Variável l_1 , Poisson 1D com solução $T = \sin(\pi x)$, Malha uniforme.	74
Figura 30 – Resultados: SMER, Malhas $g = 1, 2, \dots, 14$, Variável l_1 , Poisson 1D com solução $T = \frac{-1}{5}e^{3x} + 3x + 2$, Malha uniforme.	74
Figura 31 – Resultados: SMER INTERPOLADO (SMER-I), Poisson 1D, $T = \frac{-1}{5}e^{3x} + 3x + 2$, Variável l_1 , Malha uniforme, conjunto β_1	76
Figura 32 – Resultados: Normas l_1 e p_E^* , CRE com FRE (FRE), Poisson 1D, Malha uniforme.	78
Figura 33 – Resultados: CRE clássico (CRE), Poisson 1D, Variável l_1 , $T = \frac{-1}{5}e^{3x} + 3x + 2$, Malha uniforme.	79
Figura 34 – Resultados: CRE com interpolação (CRE-I), Variável l_1 , Burgers 1D, $Re = 1$, $T = \frac{e^{xRe} - 1}{e^{Re} - 1}$, Malha uniforme.	79
Figura 35 – Resultados: SER, Variável l_1 , Burgers 1D, $Re = 1$, $T = \frac{e^{xRe} - 1}{e^{Re} - 1}$, Malha uniforme.	82
Figura 36 – Resultados: SMER, Malhas 1-2, Variável l_1 , Burgers 1D com solução $T(x) = \frac{e^{xRe} - 1}{e^{Re} - 1}$, $Re = 1$, Malha não uniforme.	85
Figura 37 – Resultados: SMER, Malhas 7-8, Variável l_1 , Poisson 1D com solução $T(x) = \sin(\pi x)$, Malha não uniforme.	86
Figura 38 – Resultados: SMER, Malhas $g = 1, 2, \dots, 14$, Variável l_1 , Poisson 1D com solução $T = \frac{-1}{5}e^{3x} + 3x + 2$, Malha não uniforme.	87
Figura 39 – Resultados: CRE-I, Variável l_1 , Burgers 1D com solução $T(x) = \frac{e^{xRe} - 1}{e^{Re} - 1}$, $Re = 1$, Malha não uniforme.	89
Figura 40 – Resultados: FRE, Variável l_1 , Poisson 1D com solução $T(x) = \sin(\pi x)$, Malha não uniforme.	90
Figura 41 – Resultados: SER, Variável l_1 , Burgers 1D com solução $T(x) = \frac{e^{xRe} - 1}{e^{Re} - 1}$, $Re = 1$, Malha não uniforme.	91
Figura 42 – Resultados: SMER, Malhas $g = 1, 2, \dots, 9$, Variável l_1 , Laplace 2D, Malha uniforme.	93
Figura 43 – Resultados: SMER, Malhas 1 e 6, Variável l_1 , Laplace 2D, Malha uniforme.	94
Figura 44 – Resultados: SMER-I, Conjunto β_3 , Variável l_1 , Laplace 2D, Malha uniforme.	95
Figura 45 – Resultados: CRE, Variável l_1 , Laplace 2D, Malha uniforme.	96

Figura 46 – Resultados: CRE-I, Variável l_1 , Laplace 2D, Malha uniforme.	97
Figura 47 – Resultados: SER, Variável l_1 , Laplace 2D, Malha uniforme.	98
Figura 48 – Resultados: SMER, Malhas 1 e 4, Variável l_1 , Laplace 2D, Malha não uniforme.	99
Figura 49 – Resultados: SMER, Malhas $g = 1, 2, \dots, 9$, Variável l_1 , Laplace 2D, Malha não uniforme.	100
Figura 50 – Resultados: SMER-I, Conjunto β_2 , Variável l_1 , Laplace 2D, Malha não uniforme.	101
Figura 51 – Resultados: CRE, Variável l_1 , Laplace 2D, Malha não uniforme.	102
Figura 52 – Resultados: CRE-I, Variável l_1 , Laplace 2D, Malha não uniforme.	102
Figura 53 – Resultados: SER, Variável l_1 , Laplace 2D, Malha não uniforme.	103
Figura 54 – Resultados: SMER, Variável l_1 , Malhas $g = 1, 2, \dots, 9$, Burgers 2D, $Re = 1$	104
Figura 55 – Resultados: SMER, Malha base 1, Variável l_1 , Burgers 2D, $Re = 1$, velocidade u	105
Figura 56 – Resultados: SMER, Malha base 1, Variável l_1 , Burgers 2D, $Re = 1$, velocidade v	105
Figura 57 – Resultados: SMER-I, Conjunto β_2 , Variável l_1 , Burgers 2D, $Re = 1$, velocidade u	106
Figura 58 – Resultados: SMER-I, Conjunto β_2 , Variável l_1 , Burgers 2D, $Re = 1$, velocidade v	106
Figura 59 – Resultados: CRE, Variável l_1 , Burgers 2D, $Re = 1$, velocidade u	107
Figura 60 – Resultados: CRE, Variável l_1 , Burgers 2D, $Re = 1$, velocidade v	108
Figura 61 – Resultados: CRE-I, Variável l_1 , Burgers 2D, $Re = 1$, velocidade u	108
Figura 62 – Resultados: CRE-I, Variável l_1 , Burgers 2D, $Re = 1$, velocidade v	109
Figura 63 – Resultados: SER, Variável l_1 , Burgers 2D, $Re = 1$, velocidade u	109
Figura 64 – Resultados: SER, Variável l_1 , Burgers 2D, $Re = 1$, velocidade v	110
Figura 65 – Resultados: SMER, Variável l_1 , Malhas $g = 1, 2, \dots, 8$, Navier-Stokes 2D.	111
Figura 66 – Resultados: SMER, Malha base 1, Variável l_1 , Navier-Stokes 2D, velocidade u	112
Figura 67 – Resultados: SMER, Malha base 1, Variável l_1 , Navier-Stokes 2D, velocidade v	112
Figura 68 – Resultados: SMER-I, Conjunto β_2 , Variável l_1 , Navier-Stokes 2D, velocidade u	113
Figura 69 – Resultados: SMER-I, Conjunto β_2 , Variável l_1 , Navier-Stokes 2D, velocidade v	113
Figura 70 – Resultados: CRE-I, Variável l_1 , Navier-Stokes 2D, velocidade u	114
Figura 71 – Resultados: CRE-I, Variável l_1 , Navier-Stokes 2D, velocidade v	114
Figura 72 – Resultados: CRE, Variável l_1 , Navier-Stokes 2D, velocidade u	115

Figura 73 – Resultados: CRE, Variável l_1 , Navier-Stokes 2D, velocidade v .	115
Figura 74 – Resultados: SER, Variável l_1 , Navier-Stokes 2D, velocidade u .	116
Figura 75 – Resultados: SER, Variável l_1 , Navier-Stokes 2D, velocidade v .	116
Figura 76 – SER, excluindo a malha mais fina em cada extrapolação, Navier-Stokes, velocidade u , variável l_1 .	119
Figura 77 – Malha não uniforme, discretizada para diferenças finitas.	126
Figura 78 – Resultados: SMER, Malhas 7-8, Variável l_∞ , Poisson 1D com solução $T(x) = \sin(\pi x)$, Malha não uniforme.	140
Figura 79 – Resultados: SMER, Malhas $g = 1, 2, \dots, 14$, Variável l_∞ , Poisson 1D com solução $T = \frac{-1}{5}e^{3x} + 3x + 2$, Malha não uniforme.	141
Figura 80 – Resultados: FRE, Variável l_∞ , Poisson 1D com solução $T(x) = \sin(\pi x)$, Malha não uniforme.	141
Figura 81 – Resultados: SMER, Malhas 1-2, Variável l_∞ , Burgers 1D com solução $T(x) = \frac{e^{xRe} - 1}{e^{Re} - 1}$, $Re = 1$, Malha não uniforme.	142
Figura 82 – Resultados: CRE-I, Variável l_∞ , Burgers 1D com solução $T(x) = \frac{e^{xRe} - 1}{e^{Re} - 1}$, $Re = 1$, Malha não uniforme.	143
Figura 83 – Resultados: SER, Variável l_∞ , Burgers 1D com solução $T(x) = \frac{e^{xRe} - 1}{e^{Re} - 1}$, $Re = 1$, Malha não uniforme.	143
Figura 84 – Resultados: SMER, Malhas 7-8, Variável l_∞ , Poisson 1D com solução $T = \sin(\pi x)$, Malha uniforme.	144
Figura 85 – Resultados: SMER, Malhas $g = 1, 2, \dots, 14$, Variável l_∞ , Poisson 1D com solução $T = \frac{-1}{5}e^{3x} + 3x + 2$, Malha uniforme.	145
Figura 86 – Resultados: SMER INTERPOLADO (SMER-I), Poisson 1D, $T = \frac{-1}{5}e^{3x} + 3x + 2$, Variável l_∞ , Malha uniforme, conjunto β_1 .	146
Figura 87 – Resultados: CRE clássico (CRE), Variável l_∞ , Poisson 1D, $T = \frac{-1}{5}e^{3x} + 3x + 2$, Malha uniforme.	146
Figura 88 – Resultados: Normas l_∞ e p_E^* , CRE com FRE (FRE), Poisson 1D, Malha uniforme.	147
Figura 89 – Resultados: SMER, Malhas 1-2, Variável l_∞ , Burgers 1D com solução $T(x) = \frac{e^{xRe} - 1}{e^{Re} - 1}$, $Re = 1$, Malha uniforme.	148
Figura 90 – Resultados: CRE com interpolação (CRE-I), Variável l_∞ , Burgers 1D, $Re = 1$, $T = \frac{e^{xRe} - 1}{e^{Re} - 1}$, Malha uniforme.	149
Figura 91 – Resultados: SER, Variável l_∞ , Burgers 1D, $Re = 1$, $T = \frac{e^{xRe} - 1}{e^{Re} - 1}$, Malha uniforme.	149
Figura 92 – Resultados: SMER, Malhas 1 e 6, Variável l_∞ , Laplace 2D, Malha uniforme.	150

Figura 93 – Resultados: SMER, Malhas $g = 1, 2, \dots, 9$, Variável l_∞ , Laplace 2D, Malha uniforme.	151
Figura 94 – Resultados: SMER-I, Conjunto β_3 , Variável l_∞ , Laplace 2D, Malha uniforme.	151
Figura 95 – Resultados: CRE, Variável l_∞ , Laplace 2D, Malha uniforme.	152
Figura 96 – Resultados: CRE-I, Variável l_∞ , Laplace 2D, Malha uniforme.	152
Figura 97 – Resultados: SER, Variável l_∞ , Laplace 2D, Malha uniforme.	153
Figura 98 – Resultados: SMER, Malhas $g = 1, 2, \dots, 9$, Variável l_∞ , Laplace 2D, Malha não uniforme.	153
Figura 99 – Resultados: SMER, Malhas 1 e 4, Variável l_∞ , Laplace 2D, Malha não uniforme.	154
Figura 100 – Resultados: SMER-I, Conjunto β_2 , Variável l_∞ , Laplace 2D, Malha não uniforme.	155
Figura 101 – Resultados: CRE, Variável l_∞ , Laplace 2D, Malha não uniforme.	155
Figura 102 – Resultados: CRE-I, Variável l_∞ , Laplace 2D, Malha não uniforme.	156
Figura 103 – Resultados: SER, Variável l_∞ , Laplace 2D, Malha não uniforme.	156
Figura 104 – Resultados: SMER, Malhas $g = 1, 2, \dots, 9$, Burgers 2D, Variável l_∞ , $Re = 1$	157
Figura 105 – Resultados: SMER, Malha base 1, Variável l_∞ , Burgers 2D, $Re = 1$, velocidade u	157
Figura 106 – Resultados: SMER, Malha base 1, Variável l_∞ , Burgers 2D, $Re = 1$, velocidade v	158
Figura 107 – Resultados: SMER-I, Conjunto β_2 , Variável l_∞ , Burgers 2D, $Re = 1$, velocidade u	158
Figura 108 – Resultados: SMER-I, Conjunto β_2 , Variável l_∞ , Burgers 2D, $Re = 1$, velocidade v	159
Figura 109 – Resultados: CRE, Variável l_∞ , Burgers 2D, $Re = 1$, velocidade u	159
Figura 110 – Resultados: CRE, Variável l_∞ , Burgers 2D, $Re = 1$, velocidade v	160
Figura 111 – Resultados: CRE-I, Variável l_∞ , Burgers 2D, $Re = 1$, velocidade u	160
Figura 112 – Resultados: CRE-I, Variável l_∞ , Burgers 2D, $Re = 1$, velocidade v	161
Figura 113 – Resultados: SER, Variável l_∞ , Burgers 2D, $Re = 1$, velocidade u	161
Figura 114 – Resultados: SER, Variável l_∞ , Burgers 2D, $Re = 1$, velocidade v	162
Figura 115 – Resultados: SMER, Variável l_∞ , Malhas $g = 1, 2, \dots, 8$, Navier-Stokes 2D.	162
Figura 116 – Resultados: SMER, Malha base 1, Variável l_∞ , Navier-Stokes 2D, velocidade u	163
Figura 117 – Resultados: SMER, Malha base 1, Variável l_∞ , Navier-Stokes 2D, velocidade v	163

Figura 118—Resultados: SMER-I, Conjunto β_2 , Variável l_∞ , Navier-Stokes 2D, velocidade u	164
Figura 119—Resultados: SMER-I, Conjunto β_2 , Variável l_∞ , Navier-Stokes 2D, velocidade v	164
Figura 120—Resultados: CRE-I, Variável l_∞ , Navier-Stokes 2D, velocidade u	165
Figura 121—Resultados: CRE-I, Variável l_∞ , Navier-Stokes 2D, velocidade v	165
Figura 122—Resultados: CRE, Variável l_∞ , Navier-Stokes 2D, velocidade u	166
Figura 123—Resultados: CRE, Variável l_∞ , Navier-Stokes 2D, velocidade v	166
Figura 124—Resultados: SER, Variável l_∞ , Navier-Stokes 2D, velocidade u	167
Figura 125—Resultados: SER, Variável l_∞ , Navier-Stokes 2D, velocidade v	167

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Esquema de obtenção de resultados com MER, variável de interesse ϕ , ordem de acurácia máxima p_G , onde $0 < p_0 < p_1 < p_2 < \dots < p_G$, para G malhas com $m = G - 1$ extrapolações.	38
Tabela 2	– Metodologia para o emprego de MER (MARTINS et al., 2013).	41
Tabela 3	– Exemplo de aplicação de ER sobre o campo unidimensional.	42
Tabela 4	– Exemplo de aplicação de CRE sobre o campo unidimensional.	43
Tabela 5	– Esquema de obtenção de resultados com CRE e algumas variações, para $G = 4$ malhas com $m = 3$ extrapolações e ordem de acurácia máxima p_3 , onde $0 < p_0 < p_1 < p_2 < p_3$; $p_i \in \mathbb{Z}, i = 0, 1, 2, 3$	49
Tabela 6	– Esquema de obtenção de resultados com CRE e algumas variações, para G malhas com $m = G - 1$ extrapolações, e ordem de acurácia máxima p_{G-1} , onde $0 < p_0 < p_1 < p_2 < \dots < p_{G-1}$; $p_i \in \mathbb{Z}, i = 0, 1, \dots, G - 1$	50
Tabela 7	– Esquema de obtenção de resultados com SER e SMER , para G malhas, $m = G - 1$ extrapolações com ordem de acurácia máxima p_{G-1} , em que $0 < p_0 < p_1 < p_2 < \dots < p_G$; $p_i \in \mathbb{Z}, i = 0, 1, \dots, G - 1$	50
Tabela 8	– Esquema de obtenção de resultados com SMER, variável σ	51
Tabela 9	– Identificação de variáveis da Equação de Burgers 2D.	67
Tabela 10	– Resultados: SMER, Malha base 13, Variável l_1 , Poisson 1D com solução $T = \frac{-1}{5}e^{3x} + 3x + 2$, Malha uniforme.	71
Tabela 11	– Resultados: SMER, Malha base 14, Variável l_1 , Poisson 1D com solução $T = \frac{-1}{5}e^{3x} + 3x + 2$, Malha uniforme.	71
Tabela 12	– SER com uma extrapolação ($m = 1$), Poisson 1D, $T = \sin(\pi x)$, malha uniforme.	81
Tabela 13	– SER com duas extrapolações ($m = 2$), Variável l_1 , Poisson 1D, $T = \sin(\pi x)$, Malha uniforme.	81
Tabela 14	– Resultados: SMER INTERPOLADO, conjunto β_2 , Variável l_1 , Malha não uniforme, Poisson1D, $T = \frac{-1}{5}e^{3x} + 3x + 2$	88
Tabela 15	– Resultados: SMER INTERPOLADO, conjunto β_2 , Variável l_1 , Malha uniforme, Poisson1D, $T = \frac{-1}{5}e^{3x} + 3x + 2$	88
Tabela 16	– Resultados: SMER INTERPOLADO, conjunto β_2 , Variável l_∞ , Malha não uniforme, Poisson1D, $T = \frac{-1}{5}e^{3x} + 3x + 2$	139
Tabela 17	– Resultados: SMER, Malha base 13, Variável l_∞ , Poisson 1D com solução $T = \frac{-1}{5}e^{3x} + 3x + 2$, Malha uniforme.	145
Tabela 18	– Resultados: SMER, Malha base 14, Variável l_∞ , Poisson 1D com solução $T = \frac{-1}{5}e^{3x} + 3x + 2$, Malha uniforme.	145

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CDS	<i>Central Differencing Scheme</i>
CRE	<i>Completed Richardson Extrapolation</i>
CRE-I	CRE com interpolação
DDN	Diferenças Divididas de Newton
ER	Extrapolação de Richardson
MER	Multiextrapolação de Richardson
MFD	Método de Diferenças Finitas
MFV	Método de Volumes Finitos
V&V	Verificação e Validação
FRE	<i>Full Richardson Extrapolation</i>
MSI	<i>Modified Strongly Implicity</i>
SER	SUBMALHA com ER
SMER	SUBMALHA com MER
SMER-I	SMER interpolado
SM	SUBMALHA sem SMER
SM-I	SUBMALHA interpolada sem SMER-I
TDMA	<i>TriDiagonal Matrix Algorithm</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

$T_{\text{CDS}}^{(i)}$	Aproximação do tipo CDS para a derivada de primeira ordem.
$T_{\text{CDS}}^{(ii)}$	Aproximação do tipo CDS para a derivada de segunda ordem.
h	Espaçamento entre os pontos.
ε_T	Erro de truncamento.
ε_n	Erro de iteração.
ε_π	Erro de arredondamento.
ε_p	Erro de programação.
$ Eh$	Erro de discretização
C	Termo de correção de CRE.
Φ	Solução analítica exata.
Φ_∞	Solução analítica estimada.
p_U	Ordem aparente da variável de interesse.
p_E	Ordem efetiva da variável de interesse.
p_0	Ordem assintótica.
φ_p	Polinômio de ordem p .
P_i	Pontos nodais com exceção dos extremos da malha inicial.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	MOTIVAÇÃO E DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA	21
1.2	OBJETIVOS	23
1.3	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	23
1.4	ORGANIZAÇÃO DO TEXTO	25
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	26
2.1	ERRO NUMÉRICO	26
2.1.1	Erro de truncamento e ordens verdadeiras	26
2.1.2	Erro de iteração	27
2.1.3	Erro de arredondamento	27
2.1.4	Erro de programação	28
2.1.5	Erro de discretização e ordem efetiva	28
2.2	DIFERENÇAS FINITAS	31
2.2.1	Resolução de sistemas lineares	33
2.3	INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL	33
2.3.1	Abordagem Unidimensional	34
2.3.2	Abordagem Bidimensional	35
2.3.3	Erro de Interpolação	36
2.4	EXTRAPOLAÇÃO DE RICHARDSON E MER	36
2.4.1	Metodologia para o emprego de MER	39
2.4.2	Extrapolação de Richardson Completa	41
3	METODOLOGIA	46
3.1	CRE clássico com interpolação e FRE	47
3.2	SMER	50
3.3	SER	54
3.4	SMER INTERPOLADO	56
3.5	INTERPOLAÇÕES	58
3.5.1	SMER INTERPOLADO	58
3.5.2	CRE com interpolação	60
3.6	MODELOS MATEMÁTICOS E NUMÉRICOS	61
3.6.1	Poisson 1D	65
3.6.2	Laplace 2D	66
3.6.3	Burgers	66
3.6.4	Navier-Stokes (Problema de Shih)	68

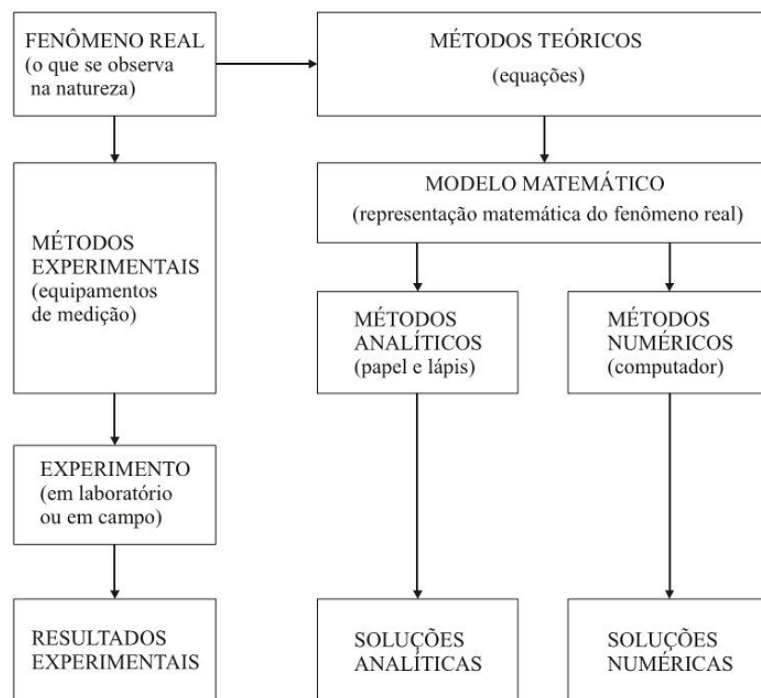
4	RESULTADOS - MALHA UNIFORME 1D	70
4.1	SMER	70
4.2	SMER INTERPOLADO	74
4.3	CRE clássico com interpolação e FRE	76
4.4	SER	80
4.5	Resumo do capítulo e conclusões	82
5	RESULTADOS - MALHA NÃO UNIFORME 1D	84
5.1	SMER	84
5.2	SMER INTERPOLADO	87
5.3	CRE clássico com interpolação e FRE	89
5.4	SER	90
5.5	Resumo do capítulo e conclusões	91
6	RESULTADOS - LAPLACE 2D	93
6.1	MALHA UNIFORME	93
6.1.1	SMER	93
6.1.2	SMER INTERPOLADO	94
6.1.3	CRE clássico e com interpolação	95
6.1.4	SER	97
6.2	MALHA NÃO UNIFORME	98
6.2.1	SMER	98
6.2.2	SMER INTERPOLADO	100
6.2.3	CRE clássico e com interpolação	101
6.2.4	SER	101
6.3	Resumo do capítulo e conclusões	103
7	RESULTADOS: EQUAÇÃO DE BURGERS 2D	104
7.1	SMER	104
7.2	SMER-I	105
7.3	CRE clássico e com interpolação	107
7.4	SER	107
7.5	Resumo do capítulo e conclusões	110
8	RESULTADOS - NAVIER-STOKES	111
8.1	SMER	111
8.2	SMER INTERPOLADO	112
8.3	CRE clássico e com interpolação	113
8.4	SER	115
8.5	Resumo do capítulo e conclusões	117

9	CONCLUSÃO	118
9.1	CONTRIBUIÇÕES PARA LITERATURA	120
9.2	TRABALHOS FUTUROS	120
	REFERÊNCIAS	121
	APÊNDICE A – DISCRETIZAÇÕES	126
A.1	Laplace 2D	128
A.2	Burgers 1D	130
A.3	Poisson 1D	131
	APÊNDICE B – ALGORITMOS GERAIS	134
	APÊNDICE C – RESULTADOS ADICIONAIS	139
C.1	MALHA NÃO UNIFORME 1D	139
C.1.1	Poisson	139
C.1.2	Burgers	142
C.2	MALHA UNIFORME 1D	144
C.2.1	Poisson	144
C.2.2	Burgers	148
C.3	LAPLACE 2D	150
C.3.1	Malha uniforme	150
C.3.2	Malha não uniforme	153
C.4	BURGERS 2D	157
C.5	NAVIER-STOKES	162

1 INTRODUÇÃO

Existem três métodos que podem ser empregados na solução de um problema de engenharia: experimentais, analíticos e numéricos. Marchi (2001) apresenta o diagrama (Figura 1) que exemplifica o sistema de funcionamento destes três métodos.

Figura 1 – Métodos de solução de problemas de engenharia (MARCHI, 2001).



Cada técnica apresenta suas vantagens e desvantagens sobre os demais, dependendo do problema e dos recursos disponíveis para resolvê-lo. Neste contexto, surgiu a área de Dinâmica dos Fluidos Computacional (em inglês, *Computational Fluid Dynamics* (CFD)). Segundo Fortuna (2000), **CFD** consiste basicamente na aplicação de métodos numéricos para resolver equações que representam problemas envolvendo fluidos em movimento, com ou sem troca de calor, onde o interesse principal é obter as distribuições de velocidade, pressão, temperatura e região de escoamento.

Segundo Maliska (2004) a relativa facilidade de aplicação dos métodos numéricos, mesmo em problemas complexos, e a grande disseminação do computador foram os responsáveis pelo avanço desta área. Atualmente, as demandas em CFD requerem o uso de métodos que forneçam soluções numéricas cada vez mais acuradas. Para atingir este objetivo, é necessário controlar o erro numérico (E), definido como a diferença entre a

solução analítica exata (Φ) da variável interesse para sua numérica (ϕ), isto é:

$$E(\phi) = \Phi - \phi. \quad (1.1)$$

Muitas vezes, a solução Φ é difícil de ser encontrada. Neste caso, pode-se aproximá-la com métodos de aproximação, obtendo uma solução analítica “quase” exata (Φ_∞), e diante disso é calculado a estimativa (U) do erro numérico através de

$$U(\phi) = \Phi_\infty - \phi. \quad (1.2)$$

No entanto, neste trabalho utiliza-se somente modelos matemáticos que possuem solução analítica, porque é possível mensurar exatamente qual será o erro numérico, objeto de estudo dos experimentos.

O interesse principal dos testes é reduzir E ao mínimo possível. Para tanto, segundo Marchi (2001), Schneider (2007), Martins (2013) entre outros autores, o erro numérico (E) é causado por quatro fontes, são elas: **erro de truncamento** (ε_T), **erro de iteração** (ε_n), **erro de arredondamento** (ε_π) e **erro de programação** (ε_p); simbolicamente

$$E(\phi) = E(\varepsilon_T, \varepsilon_n, \varepsilon_\pi, \varepsilon_p). \quad (1.3)$$

Quando ε_n , ε_p e ε_π são minimizadas ou até mesmo inexistentes, o erro de truncamento (ε_T) passa a ser o principal causador do erro numérico. Diante disso, ε_T passa a ser denominado “erro de discretização” (Uh); neste âmbito Uh pode ser calculado diretamente pela Equação (1.1) ou estimado pela Equação (1.2), caso não se conheça Φ . Agora, busca-se alternativas para diminuir Uh . Segundo Martins (2013), é possível resolver o problema de três formas:

- **Refinamento da malha;**
- **Métodos de alta ordem;**
- **Técnicas de extrapolação.**

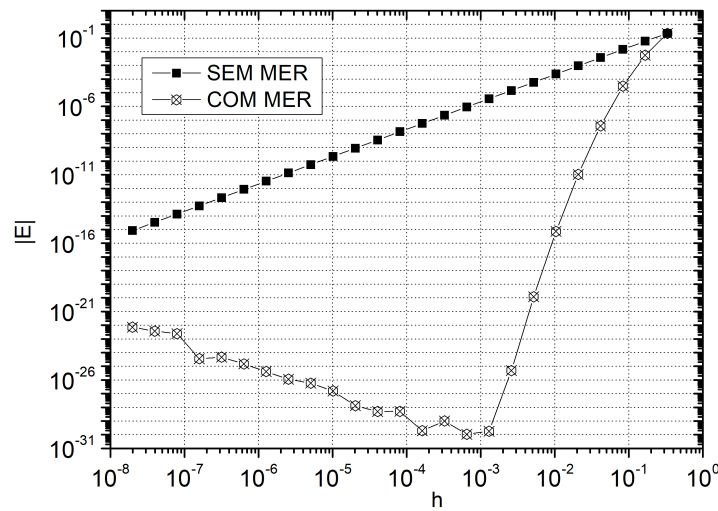
Neste trabalho emprega-se técnicas de extrapolação. Dentro destas, a Extrapolação de Richardson (ER) é uma possibilidade. Quando utiliza-se ER de forma recursiva, isto é, em que cada aplicação representa um nível de extrapolação, este processo é chamado de Multiextrapolação de Richardson (MER) ou em inglês *Repeated Richardson Extrapolation* (RRE).

Neste trabalho, utiliza-se MER em problemas uni e bidimensionais, empregando dois tipos malhas: uniforme e não uniforme, visando a redução de Uh .

1.1 MOTIVAÇÃO E DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA

O estímulo da pesquisa se deve aos resultados significativos de MER, na redução de Eh e aumento da ordem de acurácia, em condições ideais com um custo computacional extremamente baixo. Por exemplo na Figura 2 é mostrado o gráfico bilogarítmico entre “ h :distância entre os nós X $|E|:Eh$ em módulo” de uma variável de interesse, é possível verificar a notória diferença nas grandezas de Eh . Para obter estes resultados não é necessário realizar novas simulações, são utilizadas somente as soluções numéricas já obtidas, funcionando como um pós-processamento de dados.

Figura 2 – Exemplo de desempenho de MER em condições ideais.



Entretanto, não é possível aplicar ER em campos de forma efetiva, isto é, em todos os pontos do domínio, conforme é mostrado no trabalho de Roache e Knupp (1993), e consequentemente MER também não se aplica. Neste caso, os autores propõem uma solução a “Extrapolação de Richardson Completa”, cujo o problema é resolvido e os autores obtêm resultados significativos em seus experimentos.

Deste então, esta técnica tem sido estudada e aprimorada. Neste trabalho, abordar-se sua utilização em problemas envolvendo malhas uniformes e não uniformes, para os casos uni e bidimensionais. Comparando seu desempenho, com algumas variações e posteriormente será proposto outras adaptações para esta técnica.

A motivação principal do trabalho se deve pela influência ocasionada no erro numérico ao utilizar uma simples malha não uniforme no lugar da tradicional (uniforme), para discretizar o domínio, já para o caso mais simples unidimensional (Figura 3).

Naturalmente, o problema cresce em casos bi (Figura 4) e tridimensionais, por exemplo. Investigar esta questão se faz necessário, uma vez que segundo Maliska (2004) em

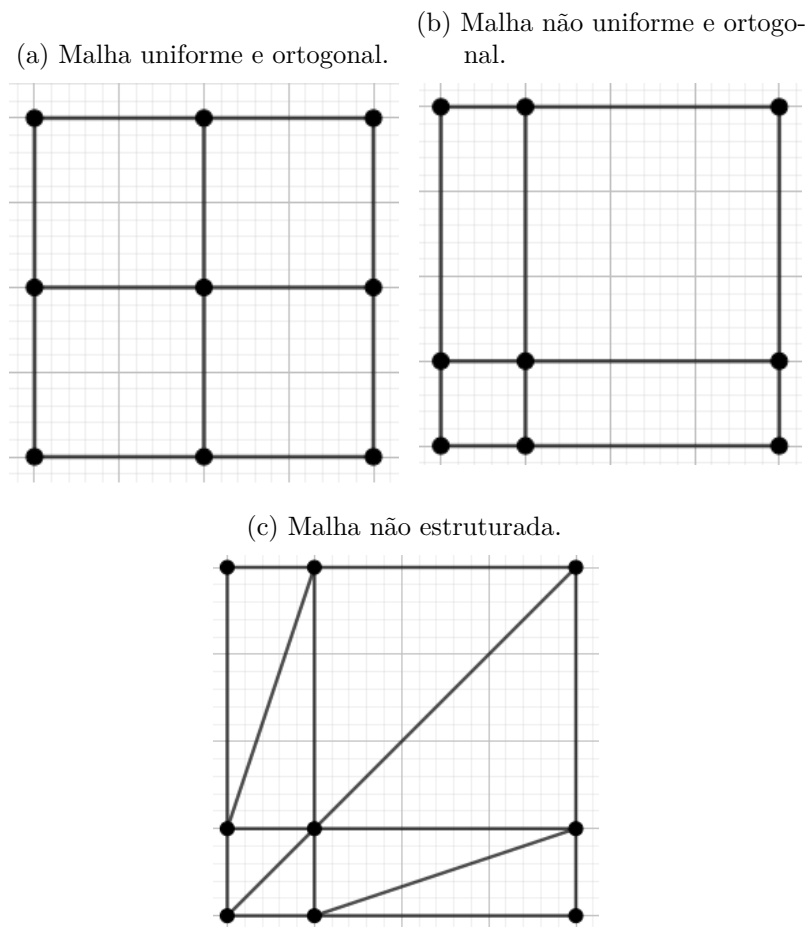
CFD existe a necessidade de discretizar problemas que envolvam grande complexabilidade geométrica, onde as malhas uniformes e ortogonais se tornam ineficazes em adaptar com êxito o fenômeno físico em questão. Consequentemente melhorar as soluções obtidas para essas situações se torna fundamental. Portanto, adaptar MER para tais eventos torna-se essencial.

Neste trabalho é iniciado um estudo referente ao tema. Nele serão utilizados as malhas exemplificadas nas figuras 3, 4a e 4b.

Figura 3 – Exemplos de malhas, para discretização de um mesmo domínio unidimensional.



Figura 4 – Exemplos de malhas para discretização de um mesmo domínio bidimensional.



1.2 OBJETIVOS

O **objetivo geral** deste trabalho é contribuir no estudo do emprego de MER para campos em CFD. Pode-se estabelecer como **objetivos específicos**:

1. Reduzir o erro de discretização para as variáveis de interesse estudadas, abordando malhas uni e bidimensionais uniformes e não uniformes.
2. Estudar e investigar os efeitos ocasionados em MER pelo tipo de malha empregado no campo.
3. Desenvolver novas técnicas para complementar ou simplesmente melhorar resultados já existentes na literatura.
4. Estabelecer novos conceitos sobre o tema.

1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este trabalho é baseado na Extrapolação de Richardson (ER), criada e desenvolvida inicialmente em Richardson (1910) e Richardson e Gaunt (1927), tendo como objetivo aperfeiçoar as aproximações numéricas, isto é aumentar sua ordem de acurácia e reduzir o erro numérico envolvidos na resolução de equações diferenciais pelo método de Diferenças Finitas. As necessidades da época já demandavam métodos rápidos, fáceis de serem entendidos e aplicáveis às equações estudadas. Richardson e Gaunt (1927) já consideravam a aplicação de ER de maneira repetida (MER), com dois níveis de extrapolação.

Existem vários trabalhos na literatura que tem ER ou MER como base, para problemas uni e bidimensionais, em que estas técnicas foram analisadas, estendidas ou simplesmente utilizadas na redução ou estimação do erro numérico: Roache e Knupp (1993), Richards (1997), Sidi (1997), Celik e Karatekin (1997), Andreev e Popov (1999), Munyakazi e Patidar (2008), Franke e Frank (2008), Celik et al. (2005), Wang e Zhang (2009), Germer e Marchi (2009), Alves (2010), Vargas (2013), Martins (2013), Marchi, Giacomini e Santiago (2016), Marchi e Giacomini (2014), Martins et al. (2014), Dai, Zhang e Wang (2013) Carvalho Junior, Marchi e Martins (2015), Zhang e Zhang (2016), Dai e Lin (2018), Dick, Goda e Yoshiki (2019) e Silva et al. (2020), são alguns exemplos de trabalhos nós últimos anos. Em todos os casos, mostram que em condições ideais esta técnica é uma poderosa aliada na melhora e estimação do erro numérico com custo computacional extremamente baixo.

Para utilizar ER ou algumas das suas variações é necessário contar com soluções numéricas acuradas. Para garantir este requisito básico, são empregadas técnicas de **Verificação e Validação numérica** (V & V). Usualmente as palavras “Verificação” e “Validação” são tratadas como sinônimos, no entanto, no âmbito da engenharia atual, elas

tem significados distintos. Segundo Roy (2005), **Verificação** é um processo puramente matemático, que tem como ocupação avaliar o quão bem o método numérico resolve um modelo matemático - avalia a resolução numérica de equações. **Validação**, por sua vez, trata da adequação do modelo matemático em reproduzir a realidade - avalia se as equações descrevem corretamente o fenômeno físico estudado.

No trabalho de Roache (2004) é mostrado a importância de um código verificável e validável. Segundo Vista (2010) deve ser ressaltado que o objetivo das etapas de Verificação e Validação (V & V) não é responder se a simulação funciona ou não, mas quão bem ela trata os diversos fenômenos físicos de previsão. V & V é uma das áreas de estudo em CFD, devido à imensa importância de dar credibilidade as simulações realizadas.

Neste trabalho como é focado em pós-processamento de dados, aborda-se somente a parte de verificação. Utiliza-se dois procedimentos básicos em V & V: são as estimativas a **priori** e a **posteriori**. Segundo Germer (2009), na estimativa a *priori* procura-se avaliar qualitativamente as dimensões do erro gerado pelas aproximações numéricas utilizadas. Já na estimativa a *posteriori*, faz-se a análise do erro de forma quantitativa, bastando para isto determinar a diferença entre a solução analítica e a solução numérica obtida, o que nem sempre é possível pois as soluções analíticas do problema são desconhecidas para boa parte dos casos. Quando não é conhecida a solução analítica, é necessário então de estimativas de erro com base em soluções exatas estimadas, ou também conhecidas como incertezas da solução.

Para mais detalhes sobre os procedimentos de V & V recomenda-se a leitura do manual AIAA (2002) e Oberkampf e Roy (2010), por exemplo. Verificada a confiança do código, a acurácia das soluções numéricas deve ser investigada e consequentemente técnicas de pós processamento de dados como MER podem ser aplicadas, no intuito de melhorar as soluções obtidas sem a necessidade da realização de novas simulações.

A versão estendida de ER para campos a “Extrapolação de Richardson Completa”, foco do trabalho, foi proposta por Roache e Knupp (1993), abordando as equações de Poisson 1D com termos fontes diferentes, Advecção-Difusão 1D com número de Peclet 1,16 e 100, Poisson 2D em um domínio unitário. Neste trabalho os autores descrevem a técnica e aplicam em modelos testes já comentados anteriormente. Deste então, estes são alguns trabalhos que abordam o assunto nos últimos anos: Richards (1997), Giacomini (2013), Dai, Zhang e Wang (2016), Marchi, Giacomini e Santiago (2016), Moro (2018) e Silva et al. (2020).

Comparativos serão feitos posteriormente, com alguns trabalhos, em questão de resultados e análises, porém na pesquisa realizada, não foram encontrados estudos referentes sobre abordagens utilizando malhas diferentes das usuais (uniformes), além dos trabalhos de Celik e Karatekin (1997) e Carvalho Junior, Marchi e Martins (2015) que

abordam o assunto com resultados promissores, porém não abordou-se extrapolações no campo. Tornando a relevância do estudo primordial, como já comentado na Seção 1.1.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

A continuidade do texto consiste da seguinte forma:

- Capítulo 2: conceitos fundamentais para o desenvolvimento do trabalho, como erro numérico, interpolação polinomial, método de diferenças finitas, entre outros.
- Capítulo 3: metodologia utilizada, isto é, modelos matemáticos e numéricos utilizados, técnicas empregadas, variáveis de interesse, etc.
- Capítulos 4, 5, 7, 6 e 8: resultados com análises.
- Capítulo 9: Conclusão, análises gerais dos testes, trabalhos futuros e contribuições do trabalho para literatura.
- Apêndices A, B, C: discretizações, algoritmos e alguns resultados adicionais, respectivamente.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo são tratados alguns fundamentos importantes que constituem a base teórica do trabalho: Erro Numérico, Diferenças Finitas, Resolução de Equações Algébricas, Interpolação Polinomial, Extrapolação e Multiextrapolação de Richardson e Extrapolação de Richardson Completa. Nas próximas seções são apresentados de forma breve e resumida cada conceito.

2.1 ERRO NUMÉRICO

Defini-se como erro numérico (E): a diferença entre a solução analítica exata (Φ) de uma variável de interesse com sua solução numérica (ϕ):

$$E(\phi) = \Phi - \phi. \quad (2.1)$$

Segundo Marchi (2001), Schneider (2007), Martins (2013), Vargas (2013) entre outros autores, o erro numérico também pode ser gerado por quatro fontes: erro truncamento (ε_T), erro de iteração (ε_n), erro de arredondamento (ε_π) e erro de programação (ε_p). Neste cenário, pode-se reescrever a Equação (2.1) de forma simbólica:

$$E(\phi) = E(\varepsilon_T, \varepsilon_n, \varepsilon_\pi, \varepsilon_p). \quad (2.2)$$

Conforme estas fontes de erro são diminuídas, tornando algumas até inexistentes, a solução numérica (ϕ) estará cada vez mais acurada. Se conhecida a solução analítica exata (Φ), ϕ tenderá para Φ , isto é

$$\lim_{(\varepsilon_T, \varepsilon_n, \varepsilon_\pi, \varepsilon_p) \rightarrow (0,0,0,0)} \phi = \Phi. \quad (2.3)$$

A seguir é mostrado um breve resumo destas fontes de erros.

2.1.1 Erro de truncamento e ordens verdadeiras

O erro de truncamento (ε_T) de uma aproximação numérica é o resíduo, resultante da substituição da solução analítica exata de uma variável dependente (T) na equação discretizada do modelo matemático (MARCHI, 2001).

Considerando uma aproximação numérica realizadas através da Série de Taylor, e admitindo-se inicialmente um espaçamento uniforme (h) entre os nós da malha, pode-se representar a equação geral do erro de truncamento por:

$$\varepsilon_T = c_0 h^{p_0} + c_1 h^{p_1} + c_2 h^{p_2} + \dots, \quad (2.4)$$

em que os coeficientes c_i são constantes, não necessariamente positivas. Por definição as ordens verdadeiras são os expoentes de h dos termos não nulos da Equação (2.4), sendo números inteiros positivos, que seguem a relação $1 \leq p_0 < p_1 < p_2 < p_3 < \dots < \text{etc.}$. Esta sequência constitui geralmente uma série arimética, isto é, a diferença entre ordens subsequentes é constante. Em geral é uma sequência infinita, porque é constituída por uma quantidade infinita de termos. O menor expoente de h (p_0), por definição, é chamado de ordem assintótica (p_0). Este inteiro positivo tem a propriedade $p_0 \geq 1$.

Quando o tamanho (h) dos elementos da malha tende a zero, ou seja $h \rightarrow 0$, o primeiro termo da Equação (2.4) é o principal componente, isto é, ele domina o valor de ε_T . Neste caso, em gráficos logarítmicos de ε_T versus h , a inclinação em relação ao eixo das abscissas da curva ε_T para $h \rightarrow 0$ tende ao valor da ordem assintótica (MARCHI, 2001).

A ordem assintótica pode ser obtida através de uma estimativa de erro a priori, sendo muito importante para o desenvolvimento deste trabalho. Para mais detalhes sobre o assunto, veja Roache (2009).

2.1.2 Erro de iteração

O erro de iteração (ε_n) ocorre quando utilizam-se métodos iterativos para obtenção da solução numérica (ϕ). Métodos como Gauss-Seidel e Jacobi-Richardson são exemplos de métodos numéricos utilizados para resolução de sistemas lineares, em que se obtém a solução numérica (ϕ_n) por iterações. Em geral, quanto maior o número de iterações (n), melhor a solução numérica e consequentemente menor o seu erro de iteração (ε_n).

Essencialmente é definido o erro de iteração (ε_n), de uma variável de interesse (ϕ), como a diferença entre a solução exata (Φ) e a solução numérica em uma determinada iteração n (ϕ_n), isto é:

$$\varepsilon_n(\phi) = \Phi - \phi_n, \quad (2.5)$$

e em geral

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = \Phi. \quad (2.6)$$

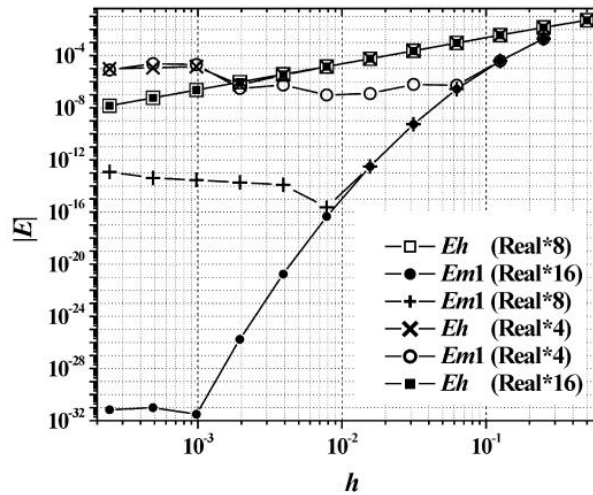
Na área de CFD, o trabalho de Martins e Marchi (2008) é um exemplo de trabalho que aborda o assunto.

2.1.3 Erro de arredondamento

Os erros de arredondamento (ε_π) são os erros que ocorrem principalmente devido à representação finita dos números reais na computação, ou seja, também são erros de truncamento, porém oriundos da necessidade de se limitar o número de dígitos usados para armazenar os valores das variáveis. Eles dependem do compilador (*software*) usado para gerar o código computacional e do computador (*hardware*) empregado em sua execução (MARCHI, 2001).

Este erro tende a crescer conforme é diminuído o espaçamento entre os nós da malha discretizada. ε_π pode até afetar o desempenho de MER; por exemplo na Figura 5 é apresentada a influência da precisão utilizada de armazenamento no desempenho de “ $Em1$ ” e “ Eh ”, isto é: precisão simples (Real*4), dupla (Real*8) e quádrupla (Real*16) em um gráfico bilogarítmico entre “ $|E|$: módulo do erro X h : distância entre os nós da malha”. Portanto recomenda-se utilizar a precisão máxima disponível no computador, para evitar o máximo possível este erro.

Figura 5 – Efeito da precisão de armazenamento utilizada no desempenho das variáveis $Em1$ e Eh . Adaptado de Marchi et al. (2013).



2.1.4 Erro de programação

O erro de programação (ε_p) é ocasionado pelo programador na implementação da simulação. Existem várias explicações que levam a esse erro, por exemplo: falta de conhecimento teórico do algoritmo, distração e inexperiência com a linguagem de programação utilizada, etc.

2.1.5 Erro de discretização e ordem efetiva

Quando ε_n , ε_p e ε_π são minimizadas ou até mesmo inexistentes, o erro de truncamento (ε_T) passa a ser o principal causador do erro numérico. Neste caso, ε_T passa a ser denominado erro de discretização (Eh). Para que o erro numérico seja gerado apenas pelo erro de discretização, deve-se verificar se (MARCHI, 2001):

- os modelos matemáticos abordados sejam simples o suficiente para evitar os erros de programação;

- a precisão computacional adotada para armazenamento das variáveis seja adequada para minimizar erros de arredondamento;
- no caso de soluções iterativas, o número de iterações seja suficiente para se atingir o erro de máquina ou para reduzir ao mínimo os erros de iteração.

Assumindo que as fontes de erros estão controladas, a Equação (2.4), pode ser reescrita da forma:

$$Eh = c_0 h^{p_0} + c_1 h^{p_1} + c_2 h^{p_2} + \dots \quad (2.7)$$

$$1 \leq p_0 < p_1 < p_2 < p_3 < \dots \quad (2.8)$$

Se conhecida a solução analítica exata (Φ), neste cenário Eh pode ser calculado pela Equação (2.1)

$$Eh = E(\phi) = \Phi - \phi \quad (2.9)$$

e pode-se calcular a ordem efetiva (p_E), definida como a inclinação local do erro de discretização (Eh) da solução numérica (ϕ) versus o tamanho (h) dos elementos da malha em um gráfico bilogarítmico. Seu cálculo permite verificar na prática, isto é, a *posteriori* das soluções numéricas, se p_E tende à ordem assintótica dos erros de truncamento, ordem esta que é um resultado teórico, obtido a *priori* das soluções numéricas.

Para obter a ordem efetiva é necessário ao menos duas soluções numéricas ϕ_1 e ϕ_2 obtidas nas malhas Ω^{h_1} (grossa) e Ω^{h_2} (fina), respectivamente, em que a relação entre as duas é a razão de refino (r):

$$r = \frac{h_1}{h_2} \quad (r > 1). \quad (2.10)$$

As constantes h_1 e h_2 são os espaçamentos uniformes entre os nós das malhas Ω^{h_1} e Ω^{h_2} . A expressão de p_E é dada por

$$p_E = \frac{\log \left[\frac{\Phi - \phi_1}{\Phi - \phi_2} \right]}{\log(r)}. \quad (2.11)$$

No caso de malhas não uniformes, se o refino é uniforme, a variável r também é dada pela Equação (2.10), em que as variáveis h_1 e h_2 representam o espaçamento médio necessário entre os nós das malhas Ω^{h_1} e Ω^{h_2} , neste caso. Existem outras formas de se refinar uma malha não uniforme, como pode ser visto em Schneider (2007) e consequentemente r sofre alteração. Neste trabalho utiliza-se somente refino uniforme; esta escolha é justificada mais adiante.

Dando continuidade ao assunto, conforme utiliza-se duas soluções ϕ_1 e ϕ_2 obtidas em duas malhas superfina, para o cálculo da ordem efetiva (p_E), isto é com espaçamentos

(h) bem pequenos, é esperado que p_E tenda à ordem assintótica (p_0); em outras palavras

$$\lim_{h \rightarrow 0} p_E = p_0. \quad (2.12)$$

A Equação (2.12) diz que a ordem efetiva pode ser encarada como a ordem de acurácia do método escolhido. Ele serve para medir a velocidade em que o método converge. Neste aspecto, a ordem assintótica (p_0) seria a ordem de acurácia estimada a priori do método. Em geral a Equação (2.12) é satisfeita; quando isto ocorre é um indicativo que a aproximação utilizada esta funcionando adequadamente. Vale ressaltar que esta análise a posteriori só é possível quando o erro numérico está apenas dominado pelo erro de truncamento.

Um exemplo de quando a Equação (2.12) não é válida esta no trabalho de Marchi (2001), ao se utilizar malhas não uniformes, com refino uniforme. Caso a Equação (2.12) não seja satisfeita, primeiramente deve-se verificar se Eh não esta afetada por algum outro tipo de erro (Ex: Erro de programação). Caso não seja esta opção, deve-se verificar na literatura a ocorrência de casos semelhantes e em seguida investigar, procurando justificativas matemáticas para explicar o ocorrido. Vale ressaltar, caso não seja conhecida solução analítica Φ , é possível medir a acurácia de Eh através análises semelhantes ao que foi mostrado anteriormente. Para tanto, utilizam-se estimadores do erro discretização, também conhecido na literatura por estimativa (U). Além disso, pode-se obter a ordem aparente (p_U) da estimativa, dada pela equação

$$p_U = \frac{\log \left[\frac{\phi_2 - \phi_1}{\phi_3 - \phi_2} \right]}{\log(r)}, \quad (2.13)$$

em que ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 correspondem, respectivamente, às soluções numéricas obtidas nas malhas Ω^{h_1} (grossa), Ω^{h_2} (fina), Ω^{h_3} (superfina); com $r = h_1/h_2 = h_2/h_3$ (razão de refino constante). Em geral vale

$$\lim_{h \rightarrow 0} p_U = p_0, \quad (2.14)$$

isto é, a análise da acurácia do método pode ser realizada através do cálculo de p_U . Portanto, em outras palavras p_U tem função similar a p_E , tornando-se fundamental para eventuais análises, quando Φ não é conhecida.

Estabelecido o conceito de erro numérico, obtêm-se as ferramentas necessárias para os modelos numéricos. Para mais detalhes sobre erro numérico, incertezas, ordens efetivas e aparentes, podem ser vistas nos trabalhos de Roache (2009) e AIAA (2002). No presente trabalho não são calculados U e p_U porque todos os modelos matemáticos utilizados possuem solução analítica. Na próxima seção é apresentado o método numérico utilizado nas discretizações.

2.2 DIFERENÇAS FINITAS

O método numérico utilizado neste trabalho, para obtenção das soluções numéricas, chama-se Método de Diferenças Finitas (MDF). Seu princípio básico consiste em aproximar através de expressões algébricas cada termo do modelo matemático em cada nó da malha discretizada. As discretizações podem ser feitas em domínios com várias dimensões, conforme é ilustrado pelas Figuras 6 e 7, em que são apresentados exemplos de malhas discretizadas para problemas uni e bidimensionais, abordados neste trabalho.

As aproximações utilizadas são do tipo CDS (*Central Difference Scheme*), para aproximar as derivadas de primeira e segunda ordens avaliadas no nó (ou ponto) j , que envolvem a variável dependente T e independentes x e y (caso bidimensional).

Para obtê-las, considere sem perda de generalidade a malha discretizada ilustrada na Figura 6, considerando o nó j , com coordenada x_j . As aproximações são feitas, através de expansões da série de Taylor em torno do ponto j , para os seus nós vizinhos:

$$T_{j-1} = T_j - \left(\frac{dT}{dx}\right)_j h_j + \left(\frac{d^2T}{dx^2}\right)_j \frac{h_j^2}{2} - \left(\frac{d^3T}{dx^3}\right)_j \frac{h_j^3}{6} + \dots, \quad (2.15)$$

$$T_{j+1} = T_j + \left(\frac{dT}{dx}\right)_j h_{j+1} + \left(\frac{d^2T}{dx^2}\right)_j \frac{h_{j+1}^2}{2} + \left(\frac{d^3T}{dx^3}\right)_j \frac{h_{j+1}^3}{6} + \dots. \quad (2.16)$$

As constantes h_{j+1} e h_j , são os espaçamentos entre eles, não necessariamente uniformes. Utiliza-se a notação $T_j = T(x_j)$.

Para aproximar as derivadas de primeira e segunda ordens, avaliadas no nó j , soma-se as equações (2.15) e (2.16), para cada caso, isolando os termos $\left(\frac{d^2T}{dx^2}\right)_j$ e $\left(\frac{dT}{dx}\right)_j$, isto é:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_j &= \frac{T_{j+1} - T_{j-1}}{h_j + h_{j+1}} - \left(\frac{d^2T}{dx^2}\right)_j \frac{(h_{j+1}^2 - h_j^2)}{2(h_j + h_{j+1})} - \left(\frac{d^3T}{dx^3}\right)_j \frac{h_{j+1}^3 + h_j^3}{6(h_j + h_{j+1})} \\ &\dots = (T_{\text{CDS}}^i)_j + \varepsilon(T_{\text{CDS}}^i)_j. \end{aligned} \quad (2.17)$$

e

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2T}{dx^2}\right)_j &= 2 \frac{[h_{j+1}T_{j-1} + h_jT_{j+1} - (h_j + h_{j+1})T_j]}{(h_j + h_{j+1})h_jh_{j+1}} + \left(\frac{d^3T}{dx^3}\right)_j \frac{h_j - h_{j+1}}{3} \\ &- \left(\frac{d^4T}{dx^4}\right)_j \frac{h_j^3 + h_{j+1}^3}{12(h_j + h_{j+1})} + \dots = (T_{\text{CDS}}^{ii})_j + \varepsilon(T_{\text{CDS}}^{ii})_j \end{aligned} \quad (2.18)$$

Portanto obtêm-se as aproximações de primeira (T_{CDS}^i) e segunda ordens (T_{CDS}^{ii}), avaliadas

no nó j , do tipo CDS, dadas pelas equações

$$\left(\frac{d^2T}{dx^2}\right)_j \approx (T_{\text{CDS}}^{ii})_j = 2 \frac{[h_{j+1}T_{j-1} + h_jT_{j+1} - (h_j + h_{j+1})T_j]}{(h_j + h_{j+1})h_jh_{j+1}} \quad (2.19)$$

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_j \approx (T_{\text{CDS}}^i)_j = \frac{T_{j+1} - T_{j-1}}{h_j + h_{j+1}} \quad (2.20)$$

e seus erros de truncamento $\varepsilon(T_{\text{CDS}}^i)_j$, $\varepsilon(T_{\text{CDS}}^{ii})_j$, são respectivamente

$$\varepsilon(T_{\text{CDS}}^i)_j = - \left(\frac{d^2T}{dx^2}\right)_j \frac{(h_{j+1}^2 - h_j^2)}{2(h_j + h_{j+1})} - \left(\frac{d^3T}{dx^3}\right)_j \frac{h_{j+1}^3 + h_j^3}{6(h_j + h_{j+1})} - \dots \quad (2.21)$$

$$\varepsilon(T_{\text{CDS}}^{ii})_j = \left(\frac{d^3T}{dx^3}\right)_j \frac{h_j - h_{j+1}}{3} - \left(\frac{d^4T}{dx^4}\right)_j \frac{h_j^3 + h_{j+1}^3}{12(h_j + h_{j+1})} + \dots \quad (2.22)$$

No entanto as ordens verdadeiras não estão claras. Por este motivo, neste caso seriam $p_0 = 1, p_1 = 2, p_2 = 3, \dots, \text{etc.}$, mas ao utilizar refino uniforme em vários testes, foi verificado a posteriori que as ordens verdadeiras são $p_0 = 2, p_1 = 4, p_2 = 6, \dots, \text{etc.}$, isto é, são idênticas para o caso uniforme, quando

$$h_j = h_{j+1} = h. \quad (2.23)$$

Justificando-se a escolha da utilização do refino uniforme porque neste cenário é possível obter análises efetivas a posteriori do erro. Para mais informações sobre o assunto, recomenda-se a leitura de Schneider (2007).

Figura 6 – Malha unidimensional, discretizada em diferenças finitas.

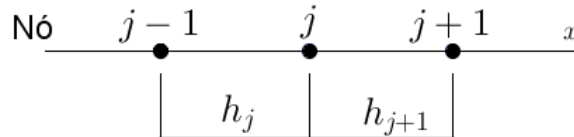
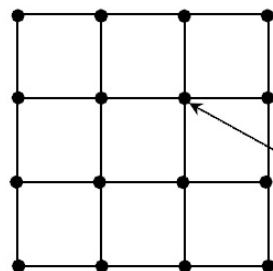
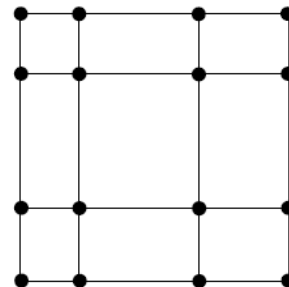


Figura 7 – Exemplos de discretização em diferenças finitas para problemas bidimensionais, adaptado de Schneider (2007).

(a) Malha cartesiana uniforme.



(b) Malha cartesiana não uniforme.



nó da
malha

2.2.1 Resolução de sistemas lineares

Após a discretização, seja por MDF ou algum outro método numérico similar, por exemplo Volumes Finitos, é obtido um sistema linear

$$Ax = b, \quad (2.24)$$

em que A é a matriz dos coeficientes, b é o vetor independente e x é um vetor de incógnitas (solução numérica). A estrutura da matriz A vai depender do método usado para discretizar o modelo matemático. Segundo Maliska (2004) a estrutura da matriz de coeficientes obtida na aproximação é de fundamental importância na escolha do método de solução do sistema linear. Por exemplo as matrizes tridiagonais com coeficientes (a_P, a_E, a_W, b_P)

$$\begin{bmatrix} -a_W & a_P & -a_E & & \\ & -a_W & a_P & -a_E & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & -a_W & a_P & -a_E \\ & & & & -a_W & a_P & -a_E \end{bmatrix}_{N \times N} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}_{N \times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix}_{N \times 1} \quad (2.25)$$

são frequentes em CFD na discretização de modelos unidimensionais, em que a_E, a_P, a_W representam os termos discretizados leste, central e oeste respectivamente, b_P : termo fonte, N : dimensão do problema e x são as incógnitas. Já para os casos bidimensionais e tridimensionais é comum trabalhar com matrizes pentadiagonal e heptadiagonal, respectivamente.

Neste trabalho, aborda-se os casos uni e bidimensionais. Para resolver o modelo unidimensional utiliza-se o método direto TDMA (TriDiagonal Matrix Algorithm). Para o caso bidimensional, utiliza-se o método iterativo Gauss-Seidel e MSI (Modified Strongly Implicit Method). As discretizações utilizadas e respectivos sistemas lineares, podem ser vistas no Apêndice A.

Para mais detalhes sobre o assunto, métodos de discretização e formas de resolver o sistema resultante recomenda-se a leitura das obras Maliska (2004) e Fortuna (2000).

2.3 INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

Com a resolução de um modelo matemático através do emprego de um método numérico são obtidos valores para ϕ em pontos nodais determinados pela malha adotada. Entretanto, em alguns casos, pode ocorrer a necessidade de se obter ϕ em locais específicos que não coincidem com os pontos dessa malha. Nessa situação, o emprego de interpolação polinomial representa uma ferramenta que pode ser empregada com sucesso (MARTINS, 2013).

Segundo Franco (2006), aproximar funções por polinômios é uma das ideias mais antigas da análise numérica, e até hoje é umas das técnicas mais usadas na área. Isto ocorre, pelo fato dos polinômios serem facilmente computáveis, integrais e derivadas de fácil obtenção e por fim suas raízes podem ser obtidas, quando possível, de forma razoavelmente simples. Neste trabalho aborda-se duas situações, são os casos uni e bidimensionais. Nas próximas seções é apresentado cada situação e abordagem utilizada, para cada caso.

2.3.1 Abordagem Unidimensional

Neste trabalho, o problema a ser resolvido é definido por dados $n + 1$ pontos reais distintos

$$x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n, \quad (2.26)$$

e $n + 1$ números reais y_0, y_1, \dots, y_n , valores de uma função $f : [x_0, x_n] \rightarrow \mathbb{R}$, podendo ser discreta, em que

$$y_1 = f(x_0), y_2 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n). \quad (2.27)$$

Procura-se um polinômio $\varphi_n(x)$ de grau máximo n , definido no intervalo $[x_0, x_n]$, que possua a propriedade

$$\varphi_n(x_0) = y_0; \quad \varphi_n(x_1) = y_1; \quad \dots \quad \varphi_n(x_n) = y_n. \quad (2.28)$$

Este polinômio existe, sendo único, desde que satisfaça as condições do teorema a seguir:

Teorema 2.3.1 *Dados $n + 1$ pontos distintos x_0, x_1, \dots, x_n (reais ou complexos) e $n + 1$ valores y_0, y_1, \dots, y_n , existe um e só um polinômio $\varphi_n(x)$, de grau menor ou igual a n , tal que*

$$\varphi_n(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (2.29)$$

A demonstração deste importante resultado pode ser vista em Franco (2006). Ele refere-se que independentemente do método utilizado, desconsiderando o erro de interpolação e outras fontes de erros possíveis, qualquer método que for utilizado para obter o polinômio (φ_n) da equação (2.29), obtém-se o mesmo resultado. Neste trabalho utiliza-se a técnica de Diferença Dividida de Newton, para $n + 1$ pontos distintos, definida pelas funções:

$$\begin{cases} (1) & f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\ (2) & f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \\ \vdots & \\ (n) & f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \end{cases} \quad (2.30)$$

Utilizando a tabela acima, obtém-se o polinômio (φ_n) de Newton de grau menor ou igual a n , representado pela equação:

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0) \cdot (x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \\ \cdots + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \dots, x_n]. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Outra alternativa possível é dada pela fórmula de Lagrange, definida pela equação

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)l_i(x) \quad (2.32)$$

em que

$$l_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}. \quad (2.33)$$

2.3.2 Abordagem Bidimensional

Neste cenário mais complexo, dados $p_x + 1$ e $p_y + 1$ pontos reais distintos

$$x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{p_x} \text{ e } y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{p_y}, \quad (2.34)$$

nas direções dos eixos x e y respectivamente, e $k = (p_x + 1)(p_y + 1)$ números reais y_0, y_1, \dots, y_k , valores de uma função $f : [x_0, x_{p_x}] \times [y_0, y_{p_y}] \rightarrow \mathbb{R}$, podendo ser discreta, do conjunto

$$\{f(x_i, y_j) / i = 0, 1, 2, \dots, p_x; j = 0, 1, 2, \dots, p_y\}. \quad (2.35)$$

O objetivo é determinar um polinômio $\varphi_p^*(x, y)$ de grau máximo $p^* = \text{Max}\{p_x, p_y\}$, definida no domínio $[x_0, x_{p_x}] \times [y_0, y_{p_y}]$, que possua a propriedade

$$\{\varphi_p^*(x_i, y_j) = f(x_i, y_j) / i = 0, 1, 2, \dots, p_x; j = 0, 1, 2, \dots, p_y\}. \quad (2.36)$$

A existência deste polinômio $\varphi_p^*(x, y)$ pode ser mostrada através da fórmula de Lagrange bidimensional, técnica utilizada neste trabalho, definida pela equação

$$\varphi_{p^*}(x, y) = \sum_{i=0}^{p_x} \sum_{j=0}^{p_y} f(x_i, y_j) l_i(x) l_j(y) \quad (2.37)$$

onde

$$l_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{p_x} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}, \quad l_j(y) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{p_y} \frac{(y - y_k)}{(y_j - y_k)}. \quad (2.38)$$

Porém, para garantir a unicidade, é necessário acrescentar a hipótese

$$p_x = p_y. \quad (2.39)$$

Este resultado pode ser visto em Dahlquist e Bjorck (2008).

2.3.3 Erro de Interpolação

Conforme apresentado anteriormente, o polinômio de interpolação (φ_n) apresenta a propriedade básica para os pontos x_k . Seja com dimensão uni ou bidimensional escolhidos para interpolação, a função φ_n é uma aproximação exata da função $f(x)$ nestes pontos, porém para $\forall \bar{x} \neq x_k$, em geral não é verdade que $\varphi_n(\bar{x}) = f(\bar{x})$.

Neste trabalho avaliou-se o erro de interpolação $\xi_n(x)$ definido pela equação

$$\xi_n(x) = f(x) - \varphi_n(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^k, k = 1, 2 \quad (2.40)$$

nos pontos interpolados, para cada caso uni e bidimensional. Neste cenário a função f corresponde à solução numérica no ponto interpolado. Ambas as técnicas Lagrange e Diferenças de Newton (DDN) apresentaram resultados similares. Para o caso unidimensional optou-se pela DDN por ser a técnica escolhida em Carvalho Junior (2015). Para o caso bidimensional optou-se por Lagrange pela facilidade de implementação, necessária para este caso.

Para mais detalhes sobre a teoria da interpolação, recomenda-se a obra de Steffensen (1950).

2.4 EXTRAPOLAÇÃO DE RICHARDSON E MER

A metodologia denominada **Extrapolção de Richardson** (ER) e sua versão aprimorada Multiextrapolção de Richardson (MER), pode ser aplicada quando a técnica de aproximação utilizada possui um termo indicativo de erro previsível, isto é, uma forma que dependa apenas de um parâmetro real h .

Para empregar ER ou MER efetivamente em problemas de CFD, espera-se que o erro numérico seja dominado apenas pelo erro de discretização (Eh), isto é, neste cenário Eh corresponde ao parâmetro real h , comentado anteriormente. O objetivo de ER e MER é aumentar a acurácia das soluções já obtidas, e conseqüentemente reduzir Eh . Portanto, pode-se pensar em ER e MER como técnicas de pós-processamentos de dados.

Para aplicar ER é necessário ao menos duas soluções numéricas $\phi(h)$ e $\phi(rh)$, em que $\phi(h)$ e $\phi(rh)$ correspondem aos valores obtidos nas malhas Ω^h (Malha fina) e Ω^{rh} (Malha grossa) ($rh > h$), que tem a mesma ordem assintótica p_0 . Lembrando do conceito de ordem verdadeira (Seção 2.1.1):

$$1 \leq p_0 < p_1 < p_2 < p_3 < \dots ,$$

a relação entre estas duas malhas esta na razão de refino (r), preferencialmente uniforme. De Richardson (1910), a expressão de ER para a solução analítica exata (Φ) é dada pela

expressão:

$$\Phi = \phi(h) + \frac{\phi(h) - \phi(rh)}{r^{p_0} - 1} + O(h^{p_1}), \quad (2.41)$$

onde $O(h^{p_1})$ representa o termo indicativo da ordem do erro. Neste caso p_1 , pela definição de ordem verdadeira $p_1 > p_0$, portanto a aproximação obtida por ER, tem ordem assintótica mais elevada do que $\phi(h)$ e $\phi(rh)$ e, conseqüentemente, proporcionando a obtenção de um resultado mais acurado. Finalmente, a aproximação obtida por ER (ϕ_∞) extrapolada é dada pela expressão:

$$\phi_\infty = \phi(h) + \frac{\phi(h) - \phi(rh)}{r^{p_0} - 1}. \quad (2.42)$$

Segundo Vargas (2013), ER é um método simples que contribui para a velocidade de convergência, como também para um resultado mais acurado.

Aplicando a equação (2.41) de forma recursiva em G malhas distintas $\Omega^{h^1}, \Omega^{h^2}, \Omega^{h^3}, \Omega^{h^2}, \dots, \Omega^{h^g}, \dots, \Omega^{h^G}$, geradas com razão de refino $r = h^{g-1}/h^g$ ($g = 2, \dots, G$), obtém-se a **Multiextrapolação de Richardson**:

$$\phi_{g,m} = \phi_{g,m-1} + \frac{\phi_{g,m-1} - \phi_{g-1,m-1}}{r^{p_{m-1}} - 1}; \quad g = 2, \dots, G; \quad m = 1, \dots, g-1, \quad (2.43)$$

em que m representa o nível da extrapolação e g : número da malha. Portanto as variáveis $\phi_{1,0}, \phi_{2,0}, \phi_{3,0}, \dots, \phi_{G,0}$ equivalem às soluções numéricas $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_G$ obtidas nas malhas $\Omega^{h^1}, \Omega^{h^2}, \Omega^{h^3}, \Omega^{h^2}, \dots, \Omega^{h^g}, \dots, \Omega^{h^G}$, respectivamente.

Na Tabela 1 é apresentado o esquema de obtenção dos resultados, com MER. Para uma variável de interesse ϕ , é perceptível a evolução da ordem de acurácia do método, teoricamente, conforme são feitas as extrapolações. Portanto, em condições ideais, utilizando MER a convergência do método é acelerada significativamente em cada extrapolação, proporcionando uma solução mais acurada, sem a necessidade de realizar mais simulações. No Algoritmo 1, apresenta-se a técnica de MER, baseado no que é exposto pela Tabela 1.

Para verificar a ordem efetiva (acurácia) com MER é realizada através da equação:

$$(p_E)_{g,m} = \frac{\log \left[\frac{\Phi - \phi_{g-1,m}}{\Phi - \phi_{g,m}} \right]}{\log(r)}, \quad (2.44)$$

se conhecida a solução analítica exata. Para calcular o erro de discretização com MER (Em) em cada extrapolação, basta calcular a diferença da solução analítica exata (Φ) com a solução extrapolada ($\phi_{g,m}$):

$$Em = \Phi - \phi_{g,m}. \quad (2.45)$$

Também é possível estimar p_U , caso Φ não seja conhecida, através da equação

$$(p_U)_{g,m} = \frac{\log \left[\frac{\phi_{g-1,m} - \phi_{g-2,m}}{\phi_{g,m} - \phi_{g-1,m}} \right]}{\log(r)}, \quad (2.46)$$

e para Em , existem várias possibilidades, entre elas o estimador Delta (Δ), proposto por Marchi, Suero e Araki (2009)

$$U_\Delta = |\phi_{G,m-1} - \phi_{G-1,m-1}|. \quad (2.47)$$

Lembrando que neste trabalho não são abordadas estimativas porque todos os modelos matemáticos utilizados possuem solução analítica, e deste modo é possível mensurar exatamente o erro numérico, objeto de estudo do trabalho. Para mais detalhes sobre estimativas para $(p_E)_{g,m}$ e Em , pode ser visto em Martins (2013).

Teoricamente, à medida que $h \rightarrow 0$, os valores das ordens de acurácia obtidas em cada extrapolação $(p_E)_{g,m}$, devem tender para às ordens verdadeiras do método empregado, estimadas a priori, do respectivo nível de extrapolação (m). Assim a convergência do método empregado é acelerada consideravelmente.

A técnica de MER tem como objetivo reduzir o erro de discretização melhorando a eficiência e exatidão computacional. Porém, devido a ocorrências de erros de arredondamento nos resultados desse processo, faz-se necessária a redução desses erros de forma a contribuir para o desempenho ideal do método e, conseqüentemente, obter a melhor precisão dos resultados (VARGAS, 2013).

Para saber mais sobre ER e MER, origens, deduções das fórmulas apresentadas aqui e um aprofundamento mais detalhado da parte teórica dos métodos, recomenda-se a leitura das obras Vargas (2013) e Martins (2013).

Tabela 1 – Esquema de obtenção de resultados com MER, variável de interesse ϕ , ordem de acurácia máxima p_G , onde $0 < p_0 < p_1 < p_2 < \dots < p_G$, para G malhas com $m = G - 1$ extrapolações.

p_v	p_0	p_1	p_2	p_3	\dots	p_{G-1}
$\downarrow g / \vec{m}$	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	\dots	$m = G - 1$
1	$\phi_{1,0}$					
2	$\phi_{2,0}$	$\phi_{2,1}$				
3	$\phi_{3,0}$	$\phi_{3,1}$	$\phi_{3,2}$			
4	$\phi_{4,0}$	$\phi_{4,1}$	$\phi_{4,2}$	$\phi_{4,3}$		
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	
G	$\phi_{G,0}$	$\phi_{G,1}$	$\phi_{G,2}$	$\phi_{G,3}$	\dots	$\phi_{G,G-1}$

Algoritmo 1: Algoritmo base - MER.

Entrada: Obter soluções numéricas para a variável de interesse ϕ em G malhas distintas: $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_G$.

Fornecer o valor de r, p_0 e dv (razão de refino entre as malhas, ordem de acurácia das soluções numéricas e variação das ordens verdadeiras p_0, p_1, p_2, \dots , respectivamente).

Saída: $\phi_{g,m}$ (Tabela 1).

```

1  Faça:  $\phi_{1,0} = \phi_1, \phi_{2,0} = \phi_2, \dots, \phi_{G,0} = \phi_G$ 
    para  $m = 1, \dots, G - 1$  faça
2       $p_{m-1} = p_0 + (m - 1)dv$ 
      para  $g = m + 1, m + 2, \dots, G$  faça
3           $\phi_{g,m} = \phi_{g,m-1} + \frac{\phi_{g,m-1} - \phi_{g-1,m-1}}{r^{p_{m-1}} - 1}$ 

```

2.4.1 Metodologia para o emprego de MER

Baseado nos trabalhos de Martins (2013) e Martins et al. (2013), para melhor empregar MER na variável de interesse, deve-se primeiramente identificar qual o seu tipo, de acordo com a classificação:

Tipo I: são variáveis locais, cuja localização coordenada (c) é mantida em todas as malhas (g) consideradas e coincide com um ponto nodal (Fig. 8I), ou ainda, é caracterizada por uma variável global.

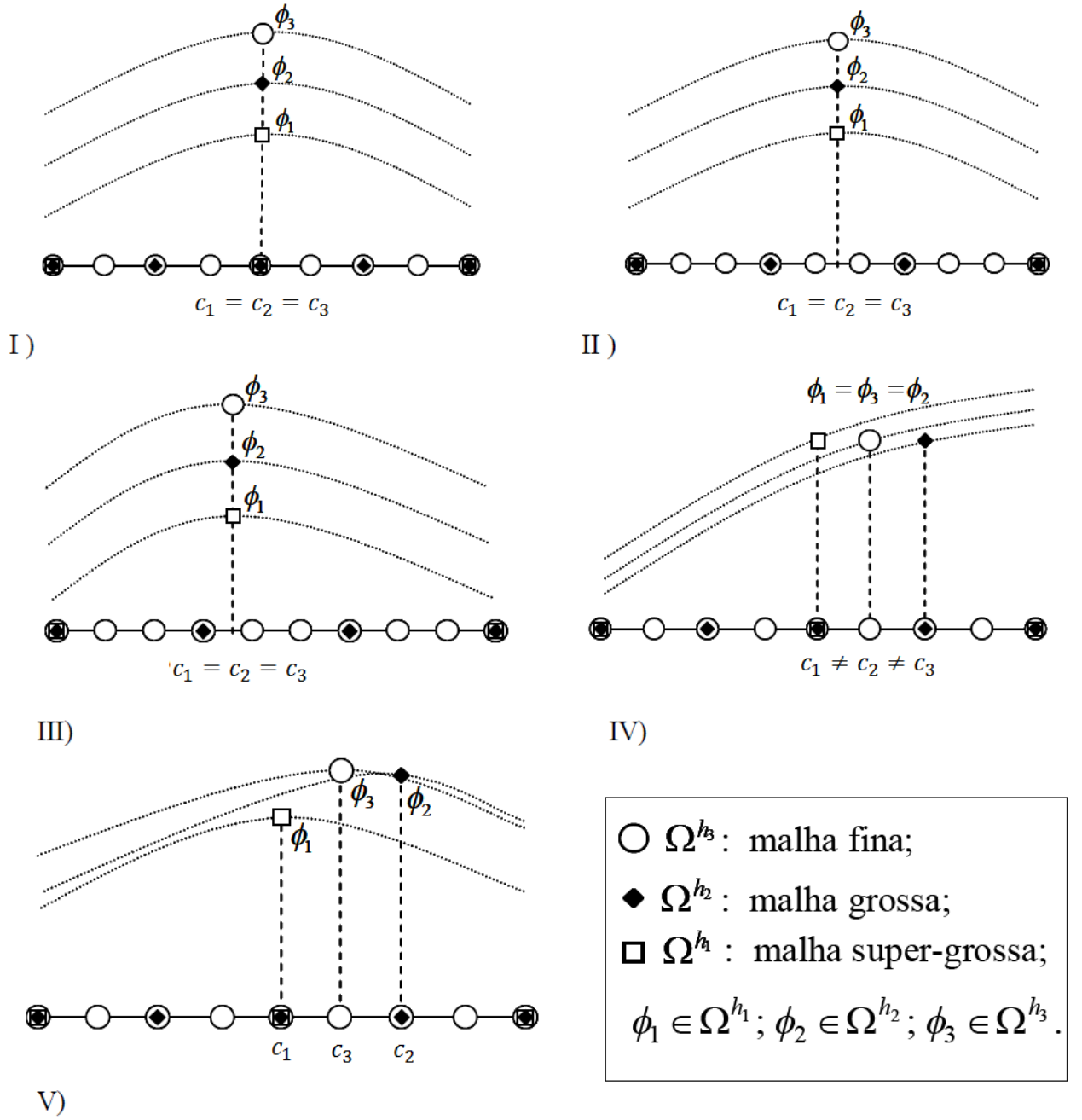
Tipo II: são variáveis locais em que c situa-se no ponto médio entre pontos nodais de (g), ou seja, suas coordenadas coincidem com a média aritmética entre as coordenadas nodais (Fig. 8II).

Tipo III: são variáveis locais com c não coincidente com um ponto nodal de g , nem com o ponto médio entre coordenadas nodais, entretanto, possui uma localização fixa (Fig. 8III).

Tipo IV: são variáveis locais cujo valor é conhecido previamente. Nesse caso, busca-se identificar c (Fig. 8IV).

Tipo V: são variáveis locais onde c é desconhecida previamente, isto é, são variáveis que podem apresentar mudança de coordenada em malhas distintas (Fig. 8V).

Figura 8 – Tipos de variáveis, adaptado de Martins (2013), Martins et al. (2013).



Para cada variável de interesse ϕ são determinadas formas para sua obtenção, de acordo com a sua classificação, resumidamente apresentado pela Tabela 2.

Tabela 2 – Metodologia para o emprego de MER (MARTINS et al., 2013).

Variável	Obtenção de ϕ
Tipo I	Obtém-se ϕ em cada malha e emprega-se MER diretamente com a Eq. (2.43).
Tipo II	Emprega-se interpolação linear, para obtenção da ϕ , e em seguida considera-se a Eq. (2.43).
Tipo III	Emprega-se interpolação polinomial, com grau máximo possível, para obtenção da ϕ , em seguida considera-se a Eq. (2.43).
Tipo IV	Emprega-se interpolação polinomial, com grau máximo possível, e resolve-se a equação polinomial obtida considerando-se a igualdade entre o polinômio obtido e o valor estabelecido a priori, para a obtenção de ϕ em cada malha e, então, considera-se a Eq. (2.43).
Tipo V	Emprega-se interpolação polinomial com o grau máximo possível e, busca-se o seu ponto ótimo (máximo ou mínimo) para determinação de ϕ em cada malha, e ao final considera-se a Eq. (2.43).

2.4.2 Extrapolação de Richardson Completa

A extrapolação de Richardson completa (CRE) é uma extensão da Extrapolação Richardson. Criada por Roache e Knupp (1993), considera-se completa quando uma solução de alta ordem de acurácia é produzida em todos os pontos da malha fina, isto é, em todo o campo do domínio de cálculo. Da mesma forma que ER e MER, CRE é usada como pós-processamento de dados, não tendo nenhuma relação com a geração das soluções numéricas.

Para entender seu funcionamento, considere por exemplo três malhas unidimensionais, discretizadas para Diferenças Finitas com 2, 3 e 5 nós respectivamente, conforme é mostrado na Figura 9. Cada ponto \bullet_i corresponde a uma solução numérica, obtida na malha através da resolução da equação algébrica originada da discretização. Neste exemplo, através de ER é possível apenas obter soluções extrapoladas nos pontos ímpares (Malhas 2 e 3), conforme é mostrado na Tabela 3. Utiliza-se a notação $\phi_{g,p}^m$, onde

- m : representa o nível da extrapolação,
- ϕ : variável de interesse,
- g : número da malha,

- p : posição do ponto.

Figura 9 – Malhas unidimensionais discretizadas para Diferenças finitas.

Malha 1	● ₁				● ₂
Malha 2	● ₁		● ₂		● ₃
Malha 3	● ₁	● ₂	● ₃	● ₄	● ₅

Tabela 3 – Exemplo de aplicação de ER sobre o campo unidimensional.

pV	p_0					p_1		
$\downarrow g / \vec{m}$	$m = 0$					$m = 1$		
1	$\phi_{1,1}^0$				$\phi_{1,2}^0$			
2	$\phi_{2,1}^0$		$\phi_{2,2}^0$		$\phi_{2,3}^0$	$\phi_{2,1}^1$		$\phi_{2,3}^1$
3	$\phi_{3,1}^0$	$\phi_{3,2}^0$	$\phi_{3,3}^0$	$\phi_{3,4}^0$	$\phi_{3,5}^0$	$\phi_{3,1}^1$	$\phi_{3,3}^1$	$\phi_{3,5}^1$

No trabalho de Roache e Knupp (1993), os autores mostram teoricamente que ER é aplicável somente nos nós ímpares. Para obter as soluções acuradas nos restantes dos nós, é proposto o acréscimo da correção C , obtido através da realização de média simples ou linear dos termos

$$\frac{\phi(h) - \phi(rh)}{r^{p_0} - 1}, \quad (2.48)$$

da equação original da Extrapolação de Richardson (Equação 2.42), obtidos nos nós vizinhos. Portanto, conclui-se que a Extrapolação de Richardson Completa pode ser resumida pela equação

$$P \leftarrow P + C, \quad (2.49)$$

em que P representa o conjunto de pontos com soluções numéricas da malha, que recebe (\leftarrow) as originais com o acréscimo da correção C , para cada caso. Por exemplo, na Figura 10 é apresentado o esquema de obtenção das soluções numéricas com CRE. Os pontos representados por \blacktriangle_i são obtidos com o termo de correção obtido através de ER e \triangle_i pela média das correções.

Para o caso bidimensional além da média simples para cada direção é necessário para os nós centrais empregar interpolações, podendo ser bilinear, desde que a interpolação escolhida respeite a ordem do esquema da aproximação numérica. Na Figura 11 é apresentado um exemplo de aplicação. Utiliza-se a notação lexicográfica e cada ponto \bullet_i , \triangle_i e \blacktriangle_i , corresponde a um ponto com coordenadas (x,y) . Nos algoritmos 2 e 3 são apresentados os pseudocódigos de ambos os casos.

Note que é possível repetir o uso de CRE. Por exemplo, observa-se na Figura 10 que é possível continuar aplicando CRE para a malha 3, já com as soluções extrapoladas obtidas nas malhas 2 e 3. Neste cenário, seria equivalente a versão “completa” de MER,

embora os autores de CRE previssem este acontecimento, não chegaram a aplicar este conceito. No entanto na literatura já é possível encontrar trabalhos que abordam o assunto. Outra sugestão dos autores seria utilizar submalhas, assunto abordado no Capítulo 3, como CRE novamente.

Figura 10 – Esquema de obtenção de soluções numéricas unidimensional com CRE.

	$m = 0$					$m = 1$				
Malha 1	● ₁				● ₂					
Malha 2	● ₁		● ₂		● ₃	▲ ₁		△ ₂		▲ ₃
Malha 3	● ₁	● ₂	● ₃	● ₄	● ₅	▲ ₁	△ ₂	▲ ₃	△ ₄	▲ ₅

Figura 11 – Esquema de obtenção de soluções numéricas bidimensional com CRE.

$m = 0$					$m = 1$				
● ₇		● ₈		● ₉					
● ₄		● ₅		● ₆					
● ₁		● ₂		● ₃					
● ₂₁	● ₂₂	● ₂₃	● ₂₄	● ₂₅	▲ ₂₁	△ ₂₂	▲ ₂₃	△ ₂₄	▲ ₂₅
● ₁₆	● ₁₇	● ₁₈	● ₁₉	● ₂₀	△ ₁₆	△ ₁₇	△ ₁₈	△ ₁₉	△ ₂₀
● ₁₁	● ₁₂	● ₁₃	● ₁₄	● ₁₅	▲ ₁₁	△ ₁₂	▲ ₁₃	△ ₁₄	▲ ₁₅
● ₆	● ₇	● ₈	● ₉	● ₁₀	△ ₆	△ ₇	△ ₈	△ ₉	△ ₁₀
● ₁	● ₂	● ₃	● ₄	● ₅	▲ ₁	△ ₂	▲ ₃	△ ₄	▲ ₅

Tabela 4 – Exemplo de aplicação de CRE sobre o campo unidimensional.

pV	p_0					p_1				
$\downarrow g / \vec{m}$	$m = 0$					$m = 1$				
1	$\phi_{1,1}^0$				$\phi_{1,2}^0$					
2	$\phi_{2,1}^0$		$\phi_{2,2}^0$		$\phi_{2,3}^0$	$\phi_{2,1}^1$		$\phi_{2,2}^1$		$\phi_{2,3}^1$
3	$\phi_{3,1}^0$	$\phi_{3,2}^0$	$\phi_{3,3}^0$	$\phi_{3,4}^0$	$\phi_{3,5}^0$	$\phi_{3,1}^1$	$\phi_{3,2}^1$	$\phi_{3,3}^1$	$\phi_{3,4}^1$	$\phi_{3,5}^1$

Algoritmo 2: Algoritmo base: CRE1D, adaptado de Roache e Knupp (1993).

Entrada: Obter G soluções numéricas distintas: $\phi_{1,p}^0$ com nós $p = 0, 1, \dots, N_{inicial}$;
 $\phi_{2,p}^0$ com nós $p = 0, 1, 2, \dots, 2N_{inicial}$; \dots ; $\phi_{G,p}^0$ com nós
 $p = 0, 1, 2, \dots, 2^{G-1}N_{inicial}$.

Fornecer o valor de p_0 (ordem de acurácia das soluções numéricas).

Saída: $\phi_{g,p}^1$, para $g = 2, 3, 4, \dots, G$ e $p = 0, 1, 2, \dots, 2^{g-1}N_{inicial}$.

```

1 para  $g = 2, 3, \dots, G$  faça
2    $N = 2^{g-1}N_{inicial}$ 
   para  $i = 0, 2, 4, 6, \dots, N$  faça
3      $C_{g,i}^0 = \frac{\phi_{g,i}^0 - \phi_{g-1,i/2}^0}{2^{p_0} - 1}$ 
4      $\phi_{g,i}^1 = \phi_{g,i}^0 + C_{g,i}^0$ 
5   para  $i = 0, 2, 4, 6, \dots, N - 2$  faça
6      $C_{g,i+1}^0 = \frac{C_{g,i}^0 + C_{g,i+2}^0}{2}$ 
7      $\phi_{g,i+1}^1 = \phi_{g,i+1}^0 + C_{g,i+1}^0$ 

```

Algoritmo 3: CRE 2D, adaptado de Roache e Knupp (1993).

Entrada: Obter G soluções numéricas distintas: $\phi_{1,p}^0$ com $Nx + 1$ e $Ny + 1$ ($Nx > 0$ e $Ny > 0$ pares) nós na direção x e y respectivamente; $\phi_{2,p}^0$ com $2Nx + 1$ e $2Ny + 1$ nós na direção x e y respectivamente; $\dots, \phi_{G,p}^0$ com $2^{G-1}Nx + 1$ e $2^{G-1}Ny + 1$ nós na direção x e y respectivamente.
Fornecer o valor de p_L (ordem de acurácia das soluções numéricas).

Saída: $\phi_{g,p}^1$, para $g = 2, 3, 4, \dots, G$ e $2^{g-1}Nx + 1$, $2^{g-1}Ny + 1$ nós na direção x e y , respectivamente.

```

1  para  $g = 2, 3, \dots, G$  faça
2       $NxI = 2^{g-1}Nx + 1$ 
         $NyI = 2^{g-1}Ny + 1$ 
         $k = 1$ 
        para  $j = 1, 3, 5, \dots, NyI$  faça
3          para  $i = 1, 3, 5, \dots, NxI$  faça
4               $p = i + NxI(j - 1)$ 
                 $C_{g,0}^p = \frac{\phi_{g,p}^0 - \phi_{g-1,k}^0}{2^{p_L} - 1}$ 
                 $\phi_{g,p}^1 = \phi_{g,p}^0 + C_{g,p}^0$ 
                 $k = k + 1$ 
5          para  $j = 1, 3, 5, \dots, NyI$  faça
6              para  $i = 1, 3, 5, \dots, NxI - 2$  faça
7                   $p = i + 1 + NxI(j - 1)$ 
                     $C_{g,p}^0 = \frac{C_{g,p-1}^0 + C_{g,p+1}^0}{2}$ 
                     $\phi_{g,p}^1 = \phi_{g,p}^0 + C_{g,p}^0$ 
8          para  $j = 1, 3, 5, \dots, NyI - 2$  faça
9              para  $i = 1, 3, 5, \dots, NxI$  faça
10                  $p = i + NxI \cdot j$ 
                     $C_{g,p}^0 = \frac{C_{g,p-NxI}^0 + C_{g,p+NxI}^0}{2}$ 
                     $\phi_{g,p}^1 = \phi_{g,p}^0 + C_{g,p}^0$ 
11          para  $j = 1, 3, 5, \dots, NyI - 2$  faça
12              para  $i = 1, 3, 5, \dots, NxI - 2$  faça
13                  $p = i + 1 + NxI(j + 1)$ 
                     $C_{g,p}^0 = \frac{C_{g,p-1-NxI}^0 + C_{g,p+1-NxI}^0 + C_{g,p-1+NxI}^0 + C_{g,p+1+NxI}^0}{4}$ 
                     $\phi_{g,p}^1 = \phi_{g,p}^0 + C_{g,p}^0$ 

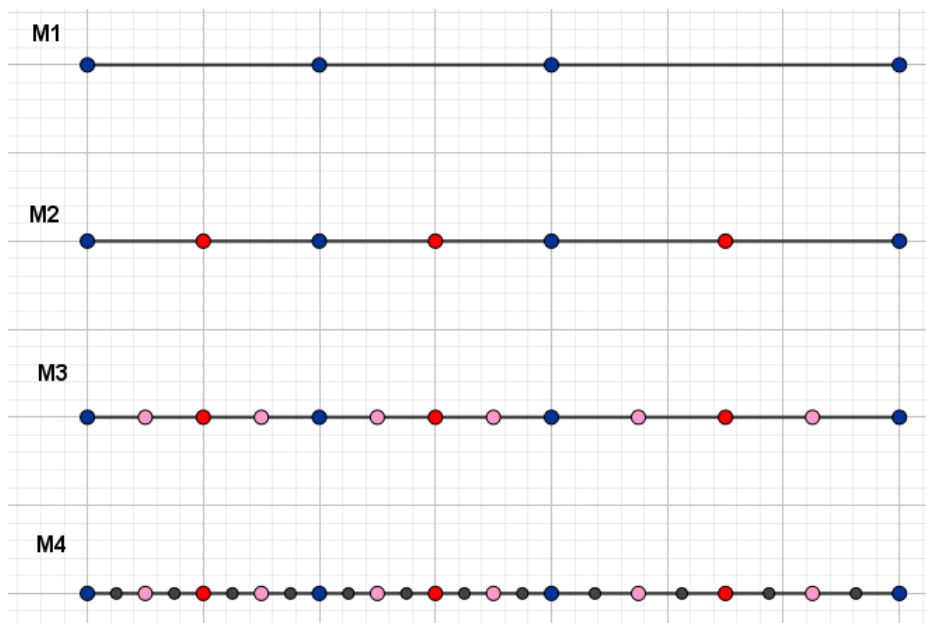
```

3 METODOLOGIA

Neste capítulo é apresentada a metodologia para aplicação de extrapolações no campo, para os casos uni e bidimensionais. Algoritmos detalhados são apresentados nos apêndices.

Para exemplificar a metodologia empregada, considere as malhas genéricas **M1**, **M2**, **M3** e **M4**, representadas pela ilustração abaixo, discretizadas em diferenças finitas.

Figura 12 – Malhas genéricas discretizadas em diferenças finitas.



As malhas **M2**, **M3** e **M4** são geradas a partir da malha **M1**, obtidas com refino uniforme de razão 2. Notem a existência de pontos coincidentes nas malhas que são destacadas com a mesma cor. Neste trabalho procura-se melhorar as soluções numéricas em todos os nós de cada malha, variáveis de interesse e suas ordens de acurácia. Para tanto propõe-se as técnicas:

- CRE clássico (**CRE**) com interpolação (**CRE-I**) e **FRE**;
- SUBMALHA com MER (**SMER**) e **SMER** INTERPOLADO (**SMER-I**);
- SUBMALHA com ER (**SER**).

Nas próximas seções elas são apresentadas com análises prévias. Em seguida abordam-se os modelos matemáticos e numéricos, variáveis de interesse, utilizadas nos experimentos.

3.1 CRE clássico com interpolação e FRE

Denota-se por CRE clássico (**CRE**) a primeira versão da extrapolação de Richardson Completa, desenvolvida por Roache e Knupp (1993), servindo de motivação para o desenvolvimento de variações. Esta técnica utiliza duas malhas por vez, sendo uma fina e outra grossa, onde a malha fina deve ser originada da grossa, através do refino de razão dois.

Por exemplo, as malhas **M1** e **M2**, o objetivo da técnica é melhorar as soluções numéricas em todos os nós na malha mais fina, consistindo basicamente em dois passos:

1. Separa-se os nós coincidentes das duas malhas;
2. Na malha mais fina acrescenta-se o fator de correção C em cada nó, para cada caso.

Este fator de correção C , conforme mencionando anteriormente varia para os casos em que o ponto é coincidente da malha grossa ou não. Para o primeiro caso, C é dado pela Extrapolação de Richardson e caso contrário neste trabalho é usado algumas variações além da clássica, exemplificadas no algoritmo abaixo, para Diferenças Finitas 1D.

Seja i par ($i = 0, 2, 4, 6, \dots, N$), adaptado de Roache e Knupp (1993):

$$\phi_{g,i}^m = \phi_{g,i}^{m-1} + C_{g,i}^m \quad (3.1)$$

em que

$$C_{g,i}^m = \frac{\phi_{g,i}^{m-1} - \phi_{g-1,i/2}^{m-1}}{2^{p_0} - 1}. \quad (3.2)$$

Para os restantes dos nós ($i = 0, 2, 4, 6, \dots, N - 2$):

$$\phi_{g,i+1}^m = \phi_{g,i+1}^{m-1} + C_{g,i+1}^m \quad (3.3)$$

onde

- Clássico (**CRE**), adaptado de Roache e Knupp (1993):

$$C_{g,i+1}^m = \frac{C_{g,i}^m + C_{g,i+2}^m}{2} \quad (3.4)$$

- Interpolado (**CRE-I**): Interpola-se as correções obtidas em até $p + 1$ nós coincidentes em torno do nó $i + 1$, obtendo um polinômio φ_P de grau máximo P e

$$C_{g,i+1}^m = \varphi_P(x_{i+1}). \quad (3.5)$$

Caso não seja possível utiliza-se a técnica anterior (Clássico).

- Extrapolação de Richardson Total (**FRE**), adaptado de Giacomini (2013):

$$C_{g,i+1}^m = C_{g,i}^m + k(C_{g,i+2}^m - C_{g,i}^m) \quad (3.6)$$

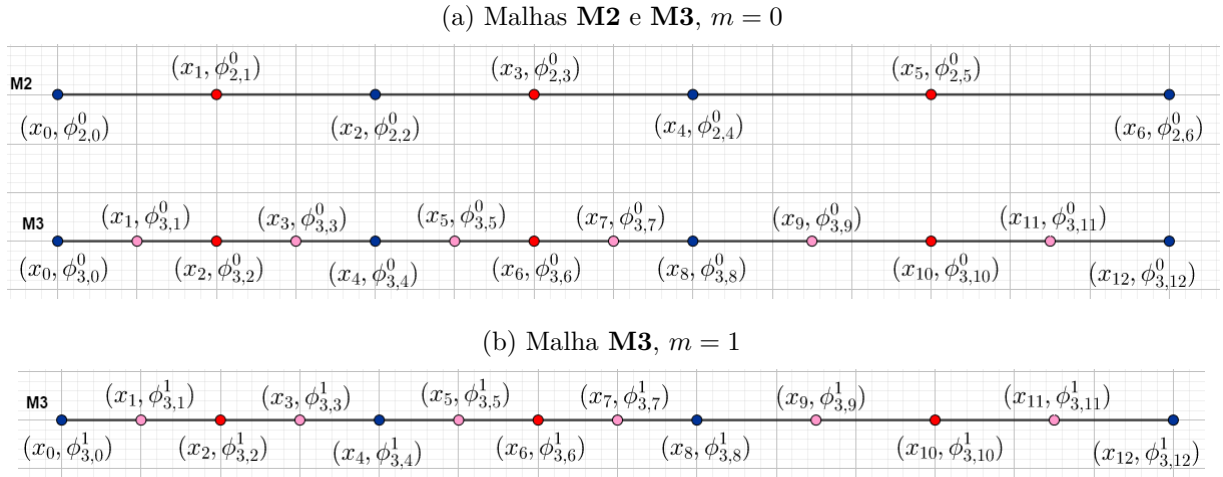
onde k é o fator de ponderação dado pela equação

$$k = \frac{\phi_{g,i+1}^{m-1} - \phi_{g,i}^{m-1}}{\phi_{g,i+2}^{m-1} - \phi_{g,i}^{m-1}}. \quad (3.7)$$

Através da Figura 13 é possível verificar os procedimentos listados anteriormente. Neste exemplo utiliza-se as malhas **M2** e **M3** (Figura 13a), onde são listados os pontos x_p e suas soluções numéricas associadas $\phi_{g,p}^m$, lembrando que g representa o número da malha, p : número de nó e m : nível de extrapolação.

Para obter a malha **M3** otimizada (Figura 13b), é necessário aplicar CRE através das equações (3.1) e (3.2), que correspondem aos pontos coincidentes das malhas **M2** e **M3**, destacados com a mesma cor (Figura 13a). Para os restantes dos pontos não coincidentes (pontos em rosa), utiliza-se a Equação (3.3), podendo variar o termo de correção C : versão clássica (Equação (3.4)), interpolada (Equação (3.5)) ou FRE (Equação (3.6)).

Figura 13 – Exemplo de Aplicação de CRE e algumas variações.



Infelizmente, para otimizar a malha **M2** utilizando este procedimento é necessário realizar adaptações, em virtude da malha **M1** possuir N ímpar. No entanto para as outras malhas o procedimento é perfeitamente aplicável, devido ao refino empregado. Utilizando estes passos é preferível usar malhas iniciais com N par.

Para o caso 2D a ideia é similar, já exposta na Seção 2.4.2, com exceção da interpolação que exige mais atenção, devido ao seu alto custo computacional, foram utilizadas interpolações uni e bidimensionais, cuja a forma de utilização pode ser vista na Seção 3.5. No apêndice B, o Algoritmo 14 aborda o caso unidimensional.

Note que é possível continuar o algoritmo com as malhas extrapoladas, porém a cada extrapolação m perde-se a malha mais grossa, conforme é mostrado na Tabela 5, para as quatro malhas usadas como exemplo. Utiliza-se a notação $M_{g,m}$ em que g corresponde ao número da malha e m o nível de extrapolação da malha.

Tabela 5 – Esquema de obtenção de resultados com CRE e algumas variações, para $G = 4$ malhas com $m = 3$ extrapolações e ordem de acurácia máxima p_3 , onde $0 < p_0 < p_1 < p_2 < p_3$; $p_i \in \mathbb{Z}, i = 0, 1, 2, 3$.

p_v	p_0	p_1	p_2	p_3
$\downarrow g / \vec{m}$	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
1	$M_{1,0}$			
2	$M_{2,0}$	$M_{2,1}$		
3	$M_{3,0}$	$M_{3,1}$	$M_{3,2}$	
4	$M_{4,0}$	$M_{4,1}$	$M_{4,2}$	$M_{4,3}$

Pode ser observado que a ordem máxima teórica é p_3 para o exemplo utilizando quatro malhas **M1**, **M2**, **M3** e **M4**, isto é, teoricamente a malha mais fina pode **aumentar** $G - 1$ unidades a acurácia da ordem assintótica do método, onde G é a quantidade de malhas disponíveis. Por exemplo na Tabela 5, tem-se $G = 4$, nota-se a acurácia da solução da malha 4 em $m = 0$ é p_0 , mas em $m = G - 1 = 3$ é p_3 , portanto ela “caminhou” três unidades em sua ordem de acurácia para $m = 3$, comparando com a mesma malha sem nenhuma extrapolação ($m = 0$). Generalizando este resultado teórico, obtém-se a Tabela 6 com ordem acurácia máxima teórica p_{G-1} . Estas técnicas trabalham com variáveis do Tipo I e II de MER, abordados na Seção 2.4.1.

Nas próximas seções são apresentadas técnicas que a priori seguem caminho inverso, com exceção da técnica SUBMER INTERPOLADO, aplicando SUBER e MER a cada extrapolação m perde-se a malha mais fina, ao contrário da apresentada anteriormente. Este resultado foi obtido a posteriori e seguiram a cronologia apresentada na Tabela 7 e serão mais discutidos nas próximas seções e capítulos.

Tabela 6 – Esquema de obtenção de resultados com **CRE** e algumas variações, para G malhas com $m = G - 1$ extrapolações, e ordem de acurácia máxima p_{G-1} , onde $0 < p_0 < p_1 < p_2 < \dots < p_{G-1}$; $p_i \in \mathbb{Z}, i = 0, 1, \dots, G - 1$.

p_v	p_0	p_1	p_2	p_3	\dots	p_{G-1}
$\downarrow g / \vec{m}$	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	\dots	$m = G - 1$
1	$M_{1,0}$					
2	$M_{2,0}$	$M_{2,1}$				
3	$M_{3,0}$	$M_{3,1}$	$M_{3,2}$			
4	$M_{4,0}$	$M_{4,1}$	$M_{4,2}$	$M_{4,3}$		
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	
G	$M_{G,0}$	$M_{G,1}$	$M_{G,2}$	$M_{G,3}$	\dots	$M_{G,G-1}$

Tabela 7 – Esquema de obtenção de resultados com **SER** e **SMER**, para G malhas, $m = G - 1$ extrapolações com ordem de acurácia máxima p_{G-1} , em que $0 < p_0 < p_1 < p_2 < \dots < p_G$; $p_i \in \mathbb{Z}, i = 0, 1, \dots, G - 1$.

p_v	p_0	p_1	p_2	p_3	\dots	p_{G-1}
$\downarrow g / \vec{m}$	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	\dots	$m = G - 1$
1	$M_{1,0}$	$M_{1,1}$	$M_{1,2}$	$M_{1,3}$	\dots	$M_{1,G-1}$
2	$M_{2,0}$	$M_{2,1}$	$M_{2,2}$	\vdots	\ddots	
3	$M_{3,0}$	$M_{3,1}$	$M_{3,2}$	\vdots	\ddots	
4	$M_{4,0}$	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	$M_{G-3,3}$		
$G - 2$	$M_{G-2,0}$	$M_{G-2,1}$	$M_{G-2,2}$			
$G - 1$	$M_{G-1,0}$	$M_{G-1,1}$				
G	$M_{G,0}$					

3.2 SMER

Esta técnica tem como objetivo otimizar apenas uma única malha, usando todos os nós coincidentes disponíveis nas malhas posteriores a ela, originadas do seu refino. Por exemplo, para malha **M1** separa-se apenas os nós coincidentes e suas respectivas soluções numéricas nas malhas posteriores **M2**, **M3** e **M4**, conforme é apresentado na Figura 14a. Este seria o passo 1 (Figura 14). Repete-se o processo para as malhas **M2** e **M3**, representados pelas figuras 14b e 14c respectivamente.

Feito isso, aplica-se a Multiextrapolação de Richardson (MER) nos pontos da malha de cada caso: Malha **M1**, Malha **M2** e Malha **M3**. Para obter MER nos pontos. Nestes experimentos utiliza-se o Algoritmo 4, para obter as variáveis

$$\sigma_i, \text{ para } i = 1, 2, \dots, G \text{ malhas,} \quad (3.8)$$

de cada ponto. Cada σ_i corresponde a um nível m de extrapolação de MER, como pode ser visto na Tabela 8 do ponto extrapolado. Teoricamente, quanto maior o índice i , mais acurada a solução do ponto, porque possui uma ordem p superior a anterior, conforme mostra a Tabela 8.

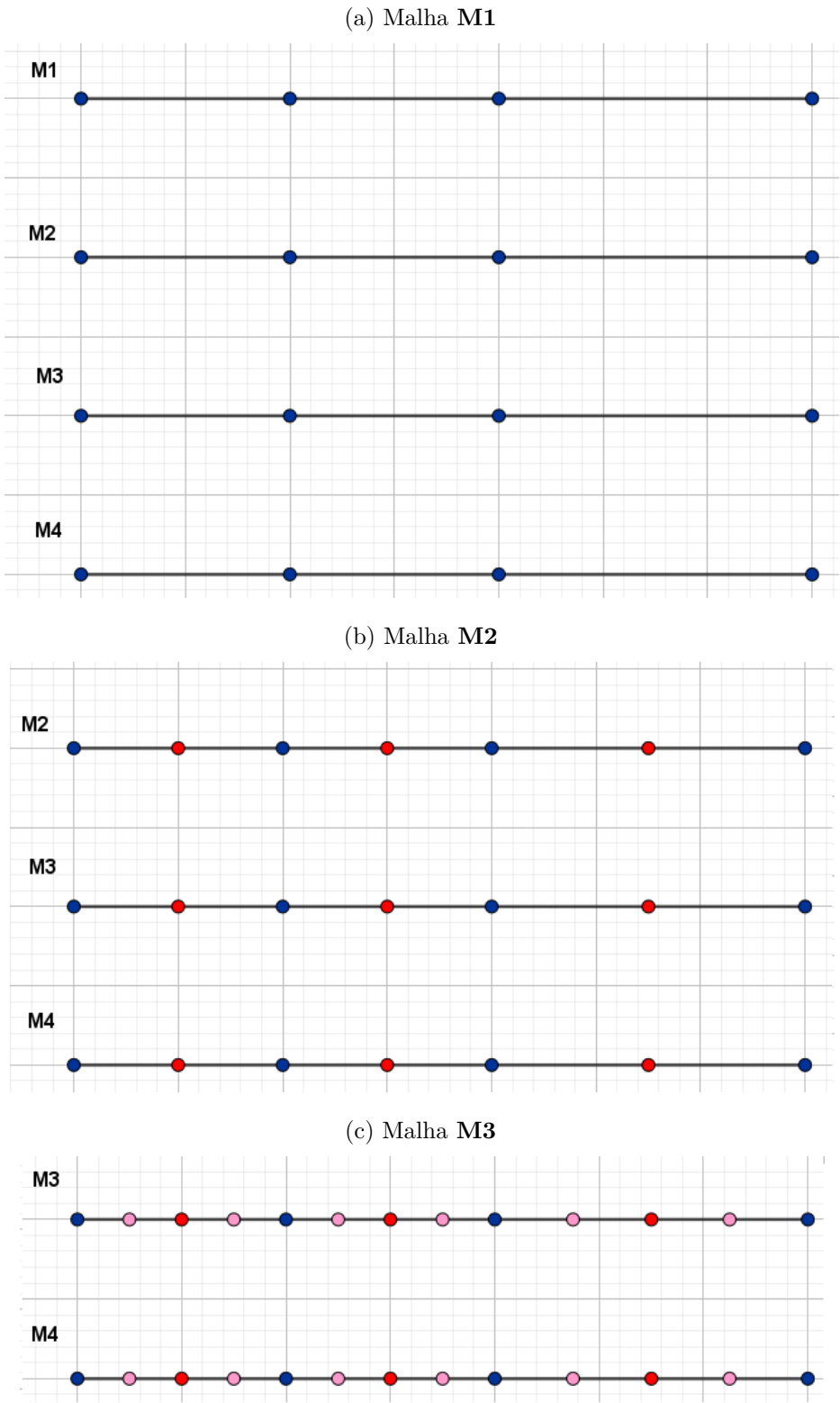
Por exemplo, para a malha **M1**, após aplicado o Algoritmo 4 em cada ponto, obtém-se σ_i , γ_i , β_i e ξ_i , que representam as extrapolações obtidas nos quatro pontos da malha. Por fim, cada malha possui uma variável σ_i , γ_i , β_i e ξ_i , conforme a sua ordem. Por exemplo, a malha **M1** possui os pontos σ_1 , γ_1 , β_1 e ξ_1 e assim por diante, conforme mostra a Figura 15. Para efeito de estudo, basta calcular as variáveis de interesse em cada malha com seus nós extrapolados (Figura 15) e não extrapolados (Figura 14a) e compará-las.

Note que para o caso 2D é análogo. No Apêndice B os algoritmos 12 e 13 trabalham os dois casos para diferenças finitas. Perceba que nesta técnica é possível variar a razão de refino $r > 1$ quaisquer, desde que sejam inteiros. Esta técnica é uma aplicação direta de variáveis do Tipo I de MER, abordados na Seção 2.4.1.

Tabela 8 – Esquema de obtenção de resultados com SMER, variável σ .

p_v	p_0	p_1	p_2	p_3	\cdots	p_{G-1}
$\downarrow g / \vec{m}$	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	\cdots	$m = G - 1$
1	$\sigma_1 = \phi_{1,0}$					
2	$\phi_{2,0}$	$\sigma_2 = \phi_{2,1}$				
3	$\phi_{3,0}$	$\phi_{3,1}$	$\sigma_3 = \phi_{3,2}$			
4	$\phi_{4,0}$	$\phi_{4,1}$	$\phi_{4,2}$	$\sigma_4 = \phi_{4,3}$		
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	
G	$\phi_{G,0}$	$\phi_{G,1}$	$\phi_{G,2}$	$\phi_{G,3}$	\cdots	$\sigma_G = \phi_{G,G-1}$

Figura 14 – Passo 1, SMER 1D.



Algoritmo 4: Algoritmo base - SMER.

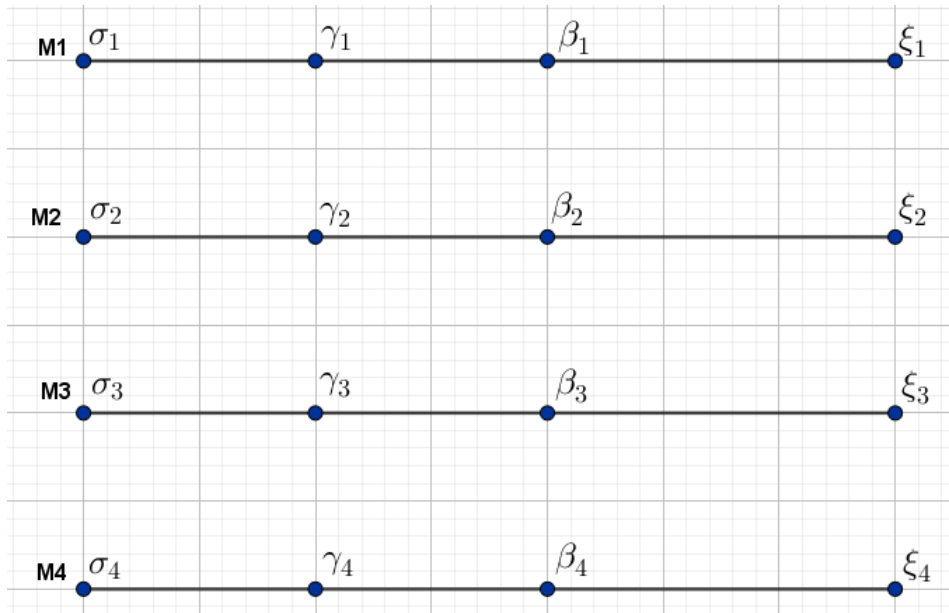
Entrada: Obter soluções numéricas para a variável de interesse ϕ em G malhas distintas: $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_G$.

Fornecer o valor de r, p_0 e dv (razão de refino entre as malhas, ordem de acurácia das soluções numéricas e variação das ordens verdadeiras p_0, p_1, p_2, \dots , respectivamente).

Saída: σ_i , para $i = 1, 2, \dots, G$

- 1 Faça: $\phi_{1,0} = \phi_1, \phi_{2,0} = \phi_2, \dots, \phi_{G,0} = \phi_G$
para $m = 1, \dots, G - 1$ **faça**
 - 2 $p_{m-1} = p_0 + (m - 1)dv$
para $g = m + 1, m + 2, \dots, G$ **faça**
 - 3 $\phi_{g,m} = \phi_{g,m-1} + \frac{\phi_{g,m-1} - \phi_{g-1,m-1}}{r^{p_{m-1}} - 1}$
- 4 **para** $it = 1, 2, \dots, G$ **faça**
 - 5 $\sigma_{it} = \phi_{it,it-1}$

Figura 15 – SMER: Configuração final da malha **M1** com seus pontos e coincidentes nas malhas **M2**, **M3** e **M4** já extrapolados.

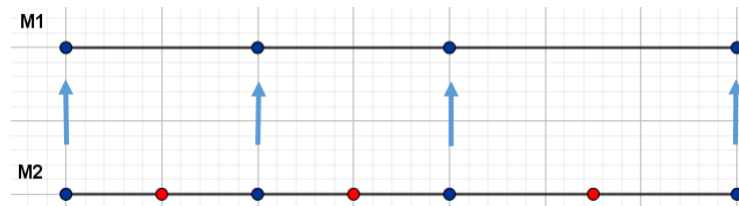


3.3 SER

Esta técnica ao contrário da SUBMER procura melhorar todas as malhas simultaneamente. Sua ideia base consiste em utilizar os nós coincidentes com suas respectivas soluções numéricas da malha posterior a que esta sendo trabalhada, para melhorar os seus nós, substituindo eles por suas versões extrapoladas, através da extrapolação de Richardson (ER). Por exemplo, para malha **M1** utiliza-se os nós coincidentes da malha **M2** e suas respectivas soluções numéricas; **M2** utiliza-se **M3**; **M3** utiliza-se **M4** e por fim a malha **M4** por não possuir malha posterior, aplica-se CRE clássico.

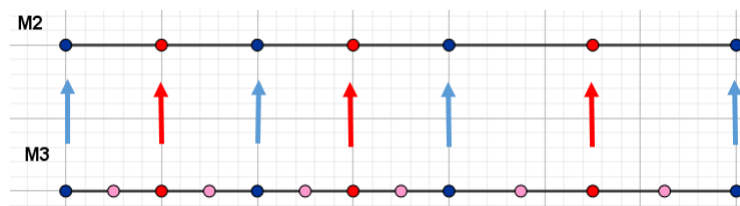
Para efeito de ilustração da técnica, para melhorar a malha **M1** aplica-se a extrapolação de Richardson (ER) em todos os seus nós, utilizando apenas os nós coincidentes da malha **M2**. Basicamente os pontos coincidentes da malha mais fina são “injetados” em seus pontos equivalentes na malha mais grossa, através de ER, conforme é ilustrado na Figura 16;

Figura 16 – SER, Malha **M1**.

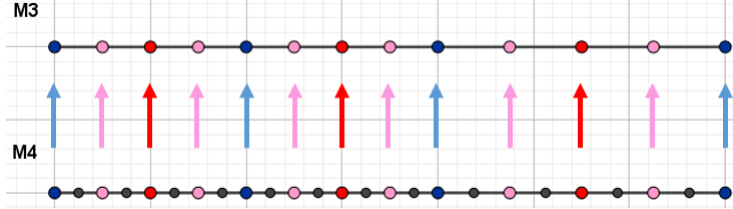


- Para **M2** aplica-se ER em todos os nós, utilizando apenas os nós coincidentes da malha **M3** (Figura 17);

Figura 17 – SER, Malha **M2**.



- **M3** aplica-se ER em todos os nós, utilizando apenas os nós coincidentes da malha **M4** (Figura 18);

Figura 18 – SER, Malha **M3**.

- **M4** aplica-se CRE clássico.

Obtidas as novas malhas, repete-se o processo. Nota-se que as novas soluções obtidas teoricamente possuem ordem de acurácia superior em comparação com as anteriores. Tanto a ideia para o caso 1D e 2D são análogas. O algoritmo abaixo apresenta o caso 1D, no Apêndice B, o Algoritmo 11 trabalha o caso 2D. Esta técnica é uma aplicação direta de variáveis do Tipo I e II de MER, abordados na Seção 2.4.1.

Algoritmo 5: Algoritmo SER 1D, para diferenças finitas.

Entrada: Obter G soluções numéricas distintas: $\phi_{1,p}^0$ com nós $p = 0, 1, \dots, N_{inicial}$; $\phi_{2,p}^0$ com nós $p = 0, 1, 2, \dots, 2N_{inicial}$; \dots ; $\phi_{G,p}^0$ com nós $p = 0, 1, 2, \dots, 2^{G-1}N_{inicial}$.

Fornecer o valor de p_0 (ordem de acurácia das soluções numéricas).

Saída: $\phi_{g,p}^1$, para $g = 1, 2, 3, \dots, G$ e $p = 0, 1, 2, \dots, 2^{g-1}N_{inicial}$.

```

1 para  $g = 1, 2, 3, \dots, G - 1$  faça
2    $N = 2^g N_{inicial}$ 
   para  $i = 0, 2, 4, 6, \dots, N$  faça
3      $C_{g,i}^0 = \frac{\phi_{g+1,i}^0 - \phi_{g,i/2}^0}{2^{p_0} - 1}$ 
4      $\phi_{g,i/2}^1 = \phi_{g+1,i}^0 + C_{g,i}^0$ 
5 para  $g = G$  faça
6    $N = 2^{g-1} N_{inicial}$ 
   para  $i = 0, 2, 4, 6, \dots, N$  faça
7      $C_{g,i}^0 = \frac{\phi_{g,i}^0 - \phi_{g-1,i/2}^0}{2^{p_0} - 1}$ 
8      $\phi_{g,i}^1 = \phi_{g,i}^0 + C_{g,i}^0$ 
9   para  $i = 0, 2, 4, 6, \dots, N - 2$  faça
10     $C_{g,i+1}^0 = \frac{C_{g,i}^0 + C_{g,i+2}^0}{2}$ 
11     $\phi_{g,i+1}^1 = \phi_{g,i+1}^0 + C_{g,i+1}^0$ 

```

3.4 SMER INTERPOLADO

Versão estendida de SMER, sua ideia base consiste em determinar um conjunto β de pontos iniciais. Naturalmente ele deve pertencer ao domínio do problema.

Feito isso, em cada malha disponível, caso exista algum ponto que não possua solução numérica associada, ele é interpolado com o grau máximo possível utilizando apenas as soluções numéricas disponíveis na malha. Deste modo obtém-se o Passo 1 da técnica SUB MER, para o conjunto β .

Por exemplo, na Figura 19, são apresentados dois exemplos de aplicação. O primeiro, β são os pontos da malha **M3**, em “ \times ” correspondem as soluções numéricas obtidas com interpolação em cada malha. Para efeito de ilustração da técnica, os pontos já foram separados para aplicar SMER, correspondendo ao primeiro passo desta técnica. Por outro lado na Figura 19b, β corresponde apenas por pontos “ \times ” e não são coincidentes com os pontos das malhas disponíveis. Neste caso os pontos de β possuem somente soluções numéricas associadas através de interpolações, obtidas utilizando apenas as soluções numéricas disponíveis em cada malha; deste modo, é possível aplicar SUB MER para este conjunto β .

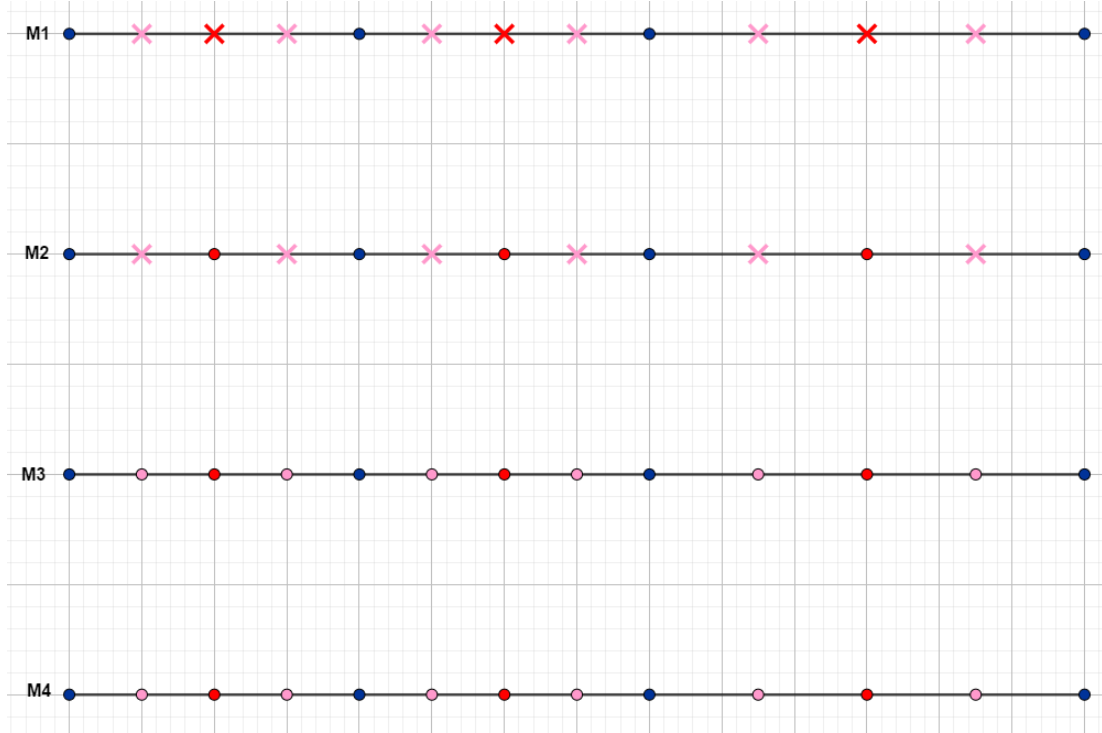
Claramente, observa-se a vantagem de utilizar um número maior de malhas. Outro benefício é a possibilidade de escolher um conjunto β com pontos que não possuem solução numérica em nenhuma malha ou somente em uma, abrindo-se então a possibilidade de aplicar esta técnica para outros métodos numéricos além de Diferenças Finitas, por exemplo: **Volumes Finitos** e **Elementos de Finitos**. O Algoritmo 6 apresenta a base da técnica. Observe que é possível utilizar malhas com soluções já extrapoladas. Na próxima seção são apresentadas as estratégias para realizar as interpolações. Esta técnica é uma aplicação direta de variáveis do Tipo I, II e III de MER, abordadas na Seção 2.4.1.

Algoritmo 6: Algoritmo base SMER Interpolado.

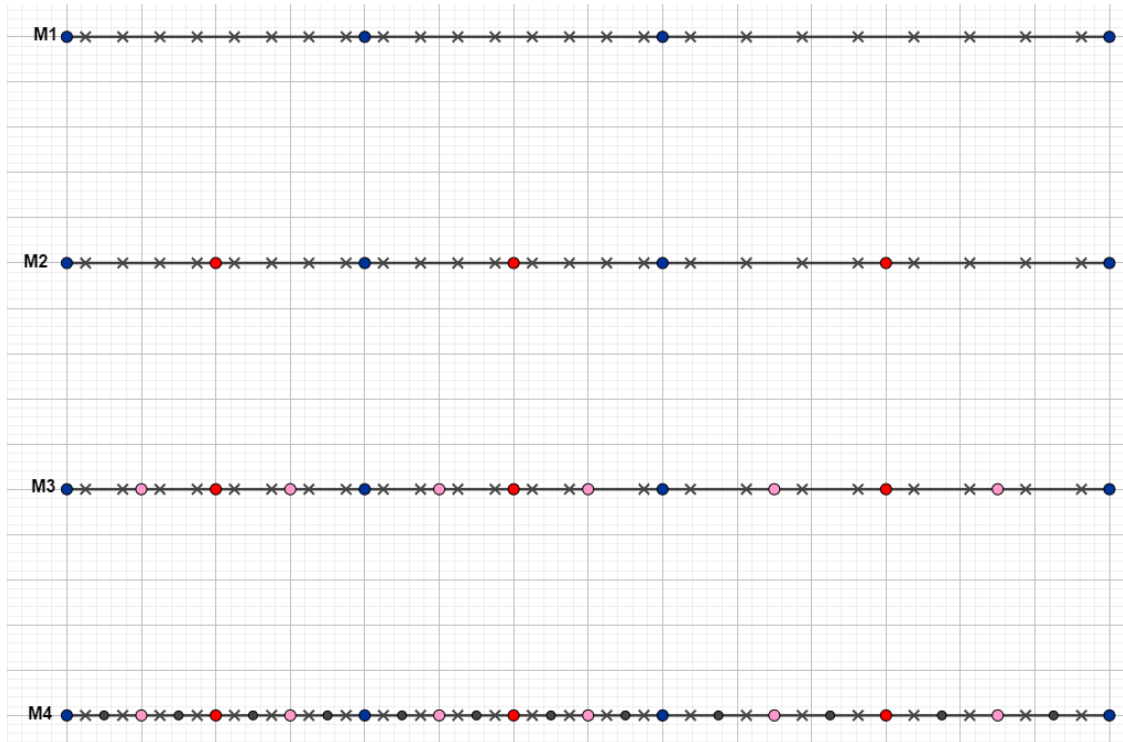
- 1 Determine o conjunto de pontos $\beta = \{x \in \mathbb{R}^n\}$ que deseja aplicar a técnica, ele naturalmente deve estar no domínio do problema;
 - 2 Em cada malha disponível, utilizando apenas as soluções numéricas $\phi_{g,p}^m$ disponíveis com seus pontos associados $x \in \mathbb{R}^n$, interpole com o grau máximo possível os pontos do conjunto β que não tenha solução numérica associada;
 - 3 Para todas as malhas disponíveis, calcule em cada malha as variáveis de interesse no conjunto β , utilizando as soluções numéricas associadas de cada ponto, obtidas com ou sem interpolação ;
 - 4 Aplique SMER no conjunto β utilizando todas as malhas disponíveis;
 - 5 Calcule as variáveis de interesse no conjunto β em cada malha disponível e compare com os resultados obtidos no item 3.
-

Figura 19 – Exemplo de aplicações: SMER Interpolado.

- (a) SMER Interpolado, Passo 1: SMER, $\beta =$ “Malha M3”. Os pontos representados por \times foram obtidos com interpolações, os restantes já possuíam soluções numéricas associadas.



- (b) Conjunto β , composto somente por pontos não coincidentes, representados por \times , neste caso as soluções numéricas dos pontos foram obtidas com interpolações, utilizando somente as soluções numéricas disponíveis em cada malha. Agora é possível aplicar o passo 1 de SMER, para β .



3.5 INTERPOLAÇÕES

Nesta seção é apresentada a metodologia utilizada nas interpolações para as técnicas SMER INTERPOLADO e CRE com interpolação; algoritmos mais detalhados podem ser vistos nos apêndices.

3.5.1 SMER INTERPOLADO

Naturalmente o primeiro passo deve ser a escolha do ponto base P , que consiste no ponto inicial, cujos vizinhos são utilizados para completar a interpolação desejada. A escolha do ponto base é fundamental para o funcionamento da técnica corretamente. Para cada ponto do conjunto β que necessite da interpolação, trabalha-se com duas situações:

1. Em cada malha disponível, para cada nó k (x_k) do conjunto β , utiliza-se o ponto mais próximo P (x_p) disponível tal que

$$||x_P - x_k|| = \text{mínimo.} \quad (3.9)$$

2. Caso a busca demore muito (Caso 2D principalmente), utiliza-se os pontos coincidentes encontrados nas malhas anteriores, isto é, por exemplo: para 10 malhas, realiza-se o passo anterior até a malha 7. As malhas 8, 9 e 10 utilizam os nós P coincidentes determinados na malha 7.

Determinados os pontos bases, procura-se interpolar o grau máximo possível, sendo $p_x + 1$ e $p_y + 1$ pontos na direção x e y respectivamente, conforme é mostrado na Figura 20. Neste trabalho utiliza-se a relação

$$p_x \leq 10 \text{ e } p_y \leq 10. \quad (3.10)$$

Deste modo, o grau máximo possível das interpolações uni e bidimensionais é dez. A distribuição dos pontos pode ser vista nas Figuras 21 e 22. Pelas características dos pontos buscados nos experimentos sempre haverá no mínimo um vizinho do ponto base em cada direção, conforme é mostrado nas figuras. As interpolações utilizadas para os casos uni e bidimensionais foram Diferenças Divididas de Newton e Lagrange respectivamente. Algoritmos detalhados podem ser vistos nos apêndices.

Para ambos os casos são utilizadas malhas em que os nós não são necessariamente equidistantes em torno do nó P . Por outro lado, em todos os casos as malhas são cartesianas (Figura 20). Neste trabalho não abordou-se por exemplo o caso do plano transformado, para problemas envolvendo malhas não ortogonais.

Figura 20 – Exemplos de nós vizinhos para interpolação em torno do nó P , malha cartesiana.

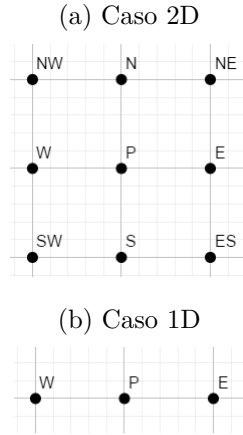


Figura 21 – Distribuição dos pontos para interpolação 2D de grau máximo 10, adaptado de Steffensen (1950).

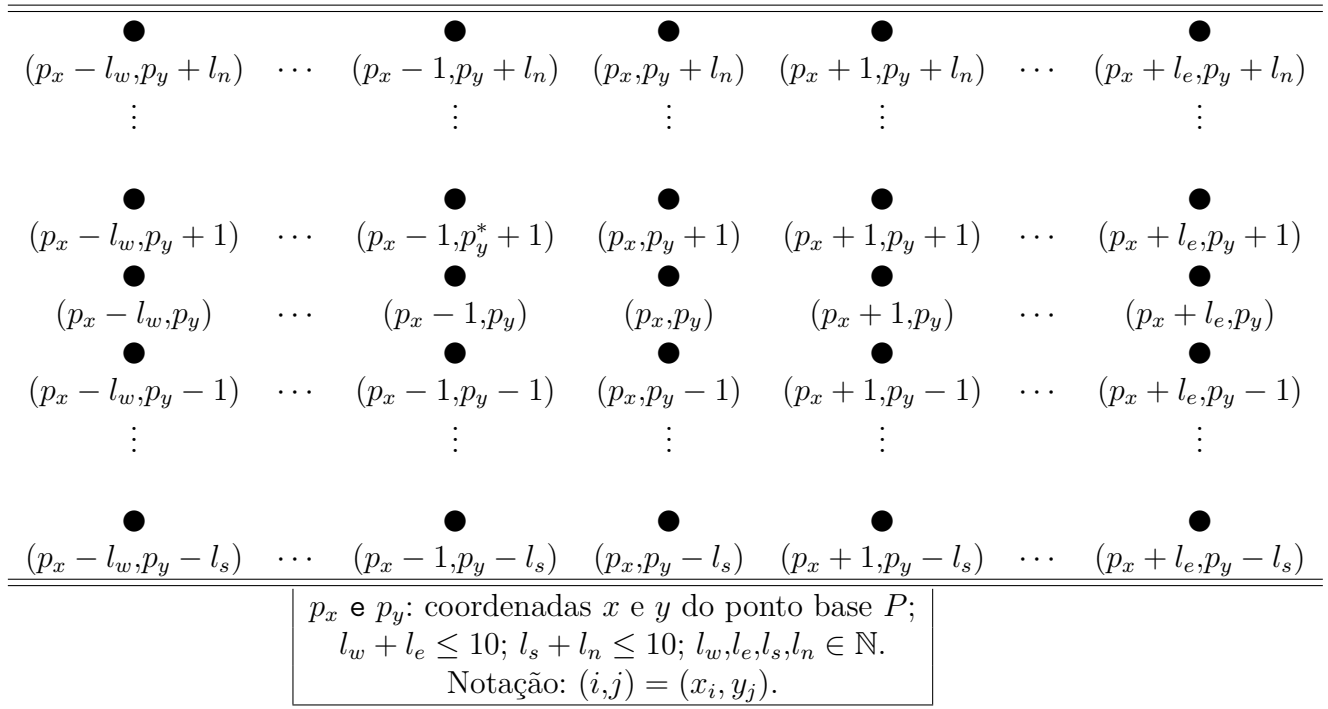
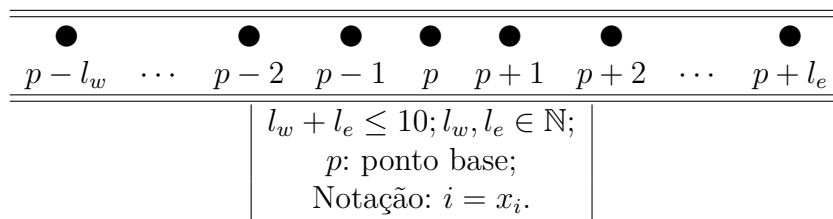


Figura 22 – Distribuição dos pontos para interpolação 1D de grau máximo 10, adaptado de Steffensen (1950).



3.5.2 CRE com interpolação

Neste caso, o ponto base P já é dado, visto que ele é o próprio nó a ser interpolado da malha. Porém ele não pode ser usado na interpolação porque não possui uma correção C associada.

A primeira estratégia utilizada e mais natural, tanto para os casos uni e bidimensionais, consiste em usar a distribuição dos pontos das Figuras 22 e 21 respectivamente. No entanto, todos os nós são somente pontos que possuem correção C associada, isto é, são os pontos que possuem nós coincidentes na malha anterior a ela, vizinhos do ponto base. Novamente as interpolações utilizadas para os casos uni e bidimensionais foram Diferenças Divididas de Newton e Lagrange respectivamente.

No entanto, para o caso 2D, utilizou-se também outra estratégia, proposta em Moro (2018) onde emprega-se interpolações unidimensionais a partir do ponto base P . Abaixo é apresentado o algoritmo base.

Algoritmo 7: Algoritmo alternativo de interpolação das correções 2D, adaptado de Moro (2018).

- 1 Para os pontos bases no eixo x : aplica-se interpolação 1D na direção do eixo x , utilizam-se apenas os nós vizinhos que possuem correção C associada.
 - 2 Para os pontos bases no eixo y : aplica-se interpolação 1D na direção do eixo y , utilizam-se apenas os nós vizinhos que possuem correção C associada.
 - 3 Para os pontos base internos: aplica-se interpolação 1D na direção do eixo x ou y , utilizam-se apenas os nós vizinhos que possuem correção C associada, podendo utilizar os pontos obtidos dos itens anteriores.
-

Por questões de notação e comparação de resultados, denota-se esta técnica por “Interpolação alternativa”. Claramente ela é menos custosa em comparação com a tradicional, como pode ser visto nos apêndices. Por outro lado ela utiliza pontos com correções interpoladas que podem estar contaminados pelo erro de interpolação, sendo aplicada em problemas específicos onde os vizinhos do ponto base devem estar no mesmo eixo, não podendo ser utilizada em malhas não ortogonais, por exemplo. Para técnica clássica, além de ser mais robusta, é possível aplicar em pontos vizinhos, não precisando estar no mesmo eixo, e também pode ser aplicada em malhas não ortogonais. Note que a unicidade da interpolação para o caso 2D não é garantida, quando

$$p_x \neq p_y, \quad (3.11)$$

conforme comentado na Seção 2.3.1, mas a princípio em análises a posteriori não foi constada nenhuma influência nos resultados.

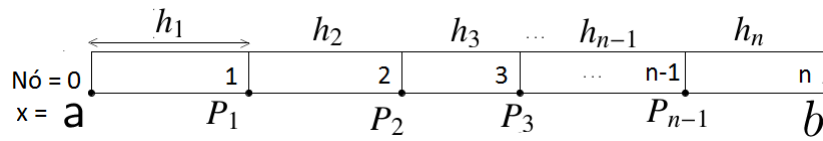
3.6 MODELOS MATEMÁTICOS E NUMÉRICOS

Para os experimentos utiliza-se a técnica de Diferenças Finitas, cuja discretização do intervalo $[a,b]$ é realizada escolhendo-se o vetor h inicial

$$h = (h_1, h_2, \dots, h_n)^T, \quad (3.12)$$

da malha discretizada inicial (g) , conforme é apresentado na Figura 23.

Figura 23 – Malha discretizada inicial (g) , intervalo $[a,b]$.



Este vetor possui a propriedade:

$$\sum_{i=1}^n h_i = |b - a| \quad h_i \in \mathbb{R}^+ - \{0\}; \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.13)$$

Os pontos P_i , para $i = 1, 2, \dots, n-1$, correspondem aos pontos nodais da malha inicial, com exceção dos extremos ($x = a$ e $x = b$). As outras malhas são obtidas a partir da malha inicial, utilizando refino uniforme de razão 2, conforme é mostrado na Figura 24, por exemplo. No caso bidimensional realiza-se o mesmo processo, no entanto são dois vetores h_x e h_y para as direções x e y respectivamente, podendo ser distintos.

Foram geradas de 8 a 15 malhas, variando para cada caso. Os vetores iniciais escolhidos para as discretização uni e bidimensionais são os seguintes:

- Caso 1D:

– Malha não uniforme

$$\begin{aligned} h_1 &\approx 6.848E - 08 \\ h_2 &\approx 4.450E - 03 \\ h_3 &\approx 6.157E - 02 \\ h_4 &\approx 1.165E - 01 \\ h_5 &\approx 1.682E - 01 \\ h_6 &\approx 1.464E - 01 \\ h_7 &\approx 5.857E - 02 \\ h_8 &\approx 1.599E - 01 \\ h_9 &\approx 1.390E - 01 \\ h_{10} &\approx 1.454E - 01 \end{aligned} \quad (3.14)$$

– Malha uniforme

$$h_i = 0.1 \quad i = 1, 2, \dots, 10 \quad (3.15)$$

• Caso 2D:

– Malha não uniforme (Figura 25b)

$$h_x = \begin{pmatrix} 3.7523448429E - 07 \\ 2.4385264497E - 02 \\ 3.3736461778E - 01 \\ 6.3824974249E - 01 \end{pmatrix}, \quad h_y = \begin{pmatrix} 3.1554630840E - 01 \\ 2.7466614253E - 01 \\ 1.0987948516E - 01 \\ 2.9990806391E - 01 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

– Malha uniforme (Figura 25a)

$$h_y = h_x = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Trabalha-se com o conjunto β como sendo os pontos obtidos de refinamentos das malhas iniciais, uniforme e não, utilizados nas discretizações, em que são excluídos os pontos dos contornos, denotando o conjunto que contém os pontos equidistantes por β_1 , caso contrário é assinalado por β_2 .

Outra alternativa testada, para o caso bidimensional, o conjunto β_3 são pontos gerados a partir da malha inicial, excluindo os contornos, dada pela Figura 25c. A ideia desta alternativa é diferenciar a quantidade de pontos nas direções x e y em relação as malhas iniciais utilizadas anteriormente (figuras 25a e 25b), empregadas nas discretizações dos modelos matemáticos. Para os casos das malhas não uniformes, as coordenadas dos vetores foram escolhidas de forma aleatória.

São analisadas as seguintes normas da variável de interesse ϕ :

- Norma l_1 do erro de discretização avaliado em cada nó i (E_i), com exceção dos contornos

$$l_1 = \frac{\sum_{i=1}^N |E_i|}{N}; \quad (3.18)$$

- Norma infinito (l_∞) avaliado em cada nó i (E_i), com exceção dos contornos

$$l_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} |E_i|, \quad (3.19)$$

e sua ordem de acurácia equivalente (p_E^*)

$$p_E^* = \frac{\log \left[\frac{(\Phi - \phi_1)}{(\Phi - \phi_2)} \right]}{\log(r)}, \quad (3.20)$$

onde

- r : razão de refino ;
- Φ : solução analítica exata da variável de interesse ϕ_1 (solução malha grossa) e ϕ_2 (solução na malha fina) ;
- N : quantidade de nós avaliados ;
- $|E_i| = |\phi_i - \Phi_i|, i = 1, 2, \dots, N$.

Por questões visuais e de espaço, em geral fica inviável apresentar um único gráfico contendo as variáveis de interesse l_1 e l_∞ com suas extrapolações. Deste modo, em geral, são apresentados gráficos separados para estas variáveis.

No entanto, salvo algumas exceções, l_1 e l_∞ apresentaram resultados similares e optou-se por escolha aleatória apresentar somente os resultados da variável l_1 . A variável l_∞ poderá ser vista nos apêndices. Estão publicados todos os resultados e simulações de forma integral neste link:

http://ftp.demec.ufpr.br/CFD/monografias/2020_Carlos-Carvalho_doutorado/

Figura 24 – Exemplo do esquema de refino uniforme com razão 2, aplicado em malhas não uniformes unidimensionais para Diferenças Finitas.

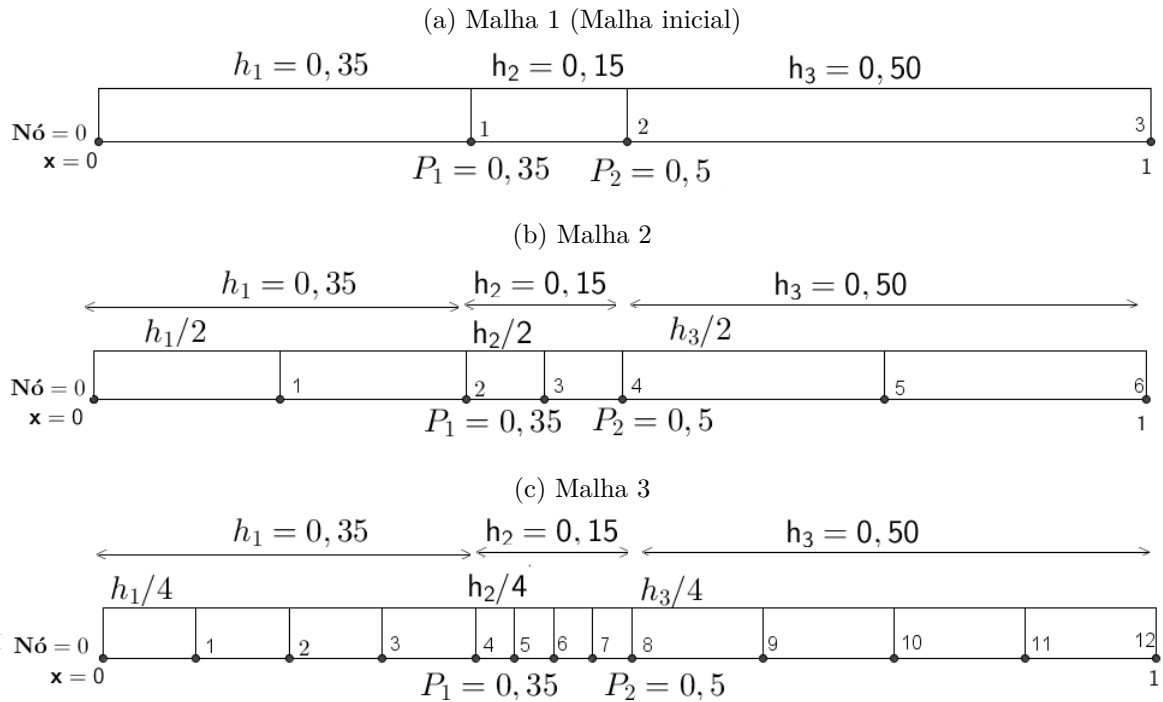
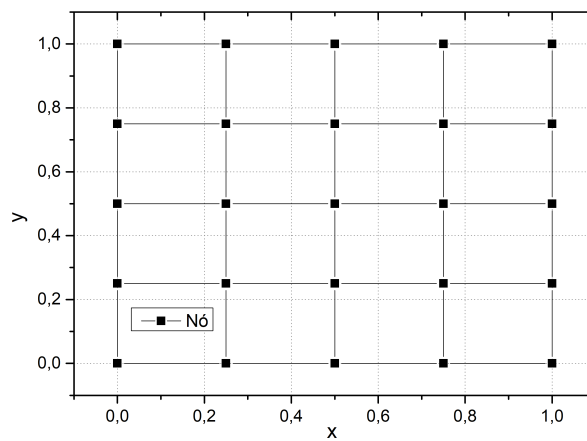
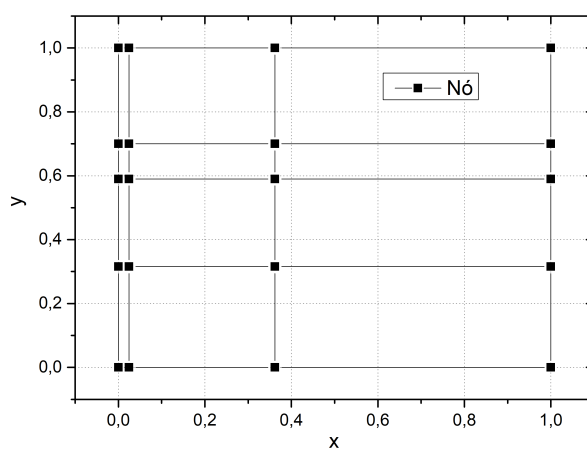


Figura 25 – Malhas iniciais bidimensionais, utilizadas nos experimentos.

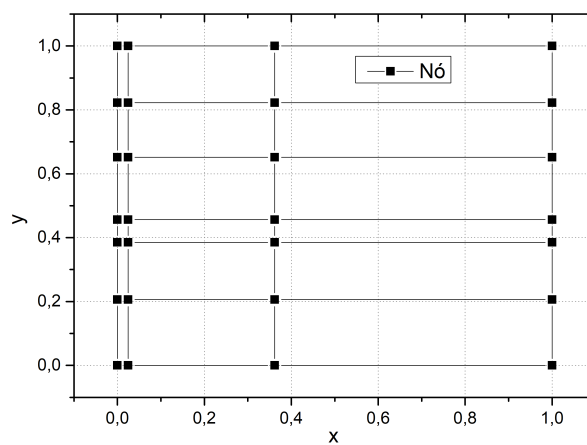
(a) Malha 1, caso uniforme.



(b) Malha 2, caso não uniforme.



(c) Malha 3, caso não uniforme.



Determinadas as malhas e variáveis de interesse, nas próximas seções são apresentados brevemente os modelos matemáticos utilizados nos experimentos e suas respectivas variáveis ϕ de interesse. Todas as implementações e códigos computacionais utilizados são feitos em FORTRAN com precisão quádrupla.

3.6.1 Poisson 1D

A equação de Poisson 1D pode modelar por exemplo o fenômeno físico de difusão unidimensional com geração de calor. É dada pela equação:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = S \quad x \in [a,b] \quad (3.21)$$

em que a coordenada T representa a temperatura (dependente), x é uma coordenada espacial (independente) do intervalo $[a,b]$ e por fim S é o termo fonte. Utilizam-se as condições de contorno de Dirichlet:

$$T(a) = a_1, \quad T(b) = a_2 \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}. \quad (3.22)$$

Neste experimento, consideram-se casos específicos para fins de estudo, adotando as soluções analíticas T_1 e T_2 no intervalo $[0,1]$:

$$T_1(x) = \frac{-1}{5}e^{3x} + 3x + 2, \quad T_2(x) = \sin(\pi x). \quad (3.23)$$

Portanto, das equações (3.21) e (3.22), obtém-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2T_1}{dx^2} = \frac{-9}{5}e^{3x} \quad x \in [0,1] \\ T_1(0) = \frac{9}{5}; \quad T_1(1) = \frac{-e^3}{5} + 5 \end{array} \right. ; \quad (3.24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2T_2}{dx^2} = -\pi^2 \sin(\pi x) \quad x \in [0,1] \\ T_2(0) = T_2(1) = 0 \end{array} \right. . \quad (3.25)$$

Após feita a discretização do intervalo empregam-se aproximações do tipo CDS (*Central Difference Scheme*) para as derivadas de segunda ordem e como solver o TDMA. Para mais detalhes veja o Apêndice A.3. As variáveis de interesse são l_1 e l_∞ de todo o domínio do campo, com exceção dos contornos.

3.6.2 Laplace 2D

A equação Laplace pode modelar problemas físicos como a condução de calor e o escoamento potencial. Neste trabalho, utiliza-se a seguinte variação:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, x, y \in [0,1] \\ T(x,1) = \sin(\pi x), T(0,y) = T(1,y) = T(x,0) = 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

em que T representa a temperatura, x e y são coordenadas espaciais.

Para este modelo, a solução analítica é dada pela equação

$$T(x,y) = \sin(\pi x) \frac{\sinh(\pi y)}{\sinh(\pi)}. \quad (3.27)$$

Esta equação foi discretizada utilizando malhas não uniformes e uniformes. Após feita a discretização do intervalo empregam-se aproximações do tipo CDS (*Central Difference Scheme*), para as derivadas de segunda ordem. Como solver é utilizado o Gauss-Seidel com Multigrid (BRIGGS; HENSON; MCCORMICK, 2000) para versão uniforme e sem para não uniforme.

As simulações deste modelo matemático foram realizadas através de um código cedido pelo grupo de CFD da UFPR para o caso uniforme. A versão não uniforme, discretizações e algoritmos bases podem ser vistos no Apêndice A.1. Para este modelo são analisadas as normas l_1 e l_∞ de todo o domínio do campo, com exceção dos contornos.

3.6.3 Burgers

Este modelo matemático envolve o fenômeno de convecção de quantidade de movimento linear. As delimitações e simplificações assumidas para este modelo matemático são:

- escoamento laminar incompressível;
- equação de natureza parabólica;
- coordenadas cartesianas;
- regime permanente;
- propriedades constantes;
- presença de termo fonte.

A equação correspondente ao modelo matemático unidimensional é dado por:

$$T \frac{dT}{dx} Re = \frac{d^2 T}{dx^2} + S \quad (3.28)$$

onde Re representa o número de Reynolds, T representa a temperatura (dependente), x é uma coordenada espacial (independente) e S o termo fonte da equação. Para estes experimentos utiliza-se a solução analítica fabricada

$$T = \frac{e^{xRe} - 1}{e^{Re} - 1} \quad (3.29)$$

com condições de contorno de Dirichlet

$$T(0) = 0, \quad T(1) = 1. \quad (3.30)$$

Portanto das equações (3.28), (3.29) e (3.30) obtém-se o modelo a ser resolvido neste trabalho:

$$\begin{cases} T \frac{dT}{dx} Re = \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{Re^2 e^{xRe} (e^{xRe} - e^{Re})}{(e^{Re} - 1)^2} & x \in [0,1] \\ T(0) = 0; T(1) = 1 \end{cases} \quad (3.31)$$

Após feita a discretização do intervalo empregam-se aproximações do tipo CDS (*Central Difference Scheme*) para as derivadas de primeira e segunda ordens. Para os termos não lineares é feito uma linearização. Emprega-se o TDMA (*Tridiagonal Matrix Algorithm*) como solver de forma iterativa. Para mais detalhes veja o Apêndice A.2. Para este modelo são analisadas as normas l_1 e l_∞ de todo o domínio do campo, com exceção dos contornos.

Neste trabalho aborda-se também o modelo bidimensional, que envolve o fenômeno de convecção de quantidade de movimento linear 2D. As delimitações e simplificações assumidas para este modelo são as mesmas listadas no começo da seção. A equação abaixo resume o modelo 2D

$$\rho u \frac{\partial \phi}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \phi}{\partial y} = p_r^\phi + \mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + S^\phi, \quad (3.32)$$

onde u e v são as velocidades nas direções x e y , respectivamente e p_r é a derivada da pressão, na Tabela 9 é identificado a equação a partir da variável de interesse ϕ .

Tabela 9 – Identificação de variáveis da Equação de Burgers 2D.

Equação	ϕ	p_r^ϕ	S^ϕ
Quantidade de movimento linear, eixo x (QMLx)	u	$-\frac{\partial p}{\partial x}$	0
Quantidade de movimento linear, eixo y (QMLy)	v	$-\frac{\partial p}{\partial y}$	$-S$

O termo fonte S , solução analítica e campo pressões é dado por Shih, Tan e Hwang (1989). As condições de contorno, para u e v , são dadas respectivamente por

$$u(x,1) = 16(x^4 - 2x^3 + x^2), \quad u(0,y) = u(1,y) = u(x,0) = 0 \quad (3.33)$$

e

$$v(0,y) = v(1,y) = v(x,0) = v(x,1) = 0. \quad (3.34)$$

Após feita a discretização do intervalo empregam-se aproximações do tipo CDS (*Central Difference Scheme*) para as derivadas de primeira e segunda ordens. Como solver utiliza-se o MSI com Multigrid. As simulações deste modelo matemático foram realizadas através de um código cedido pelo grupo de CFD da UFPR. As variáveis de interesse analisadas nos experimentos são as seguintes: normas l_1 e l_∞ de todo o campo, com exceção dos contornos, para as velocidades u e v .

3.6.4 Navier-Stokes (Problema de Shih)

O problema dado pela equação de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.35)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (3.36)$$

$$v \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial \rho}{\partial y} - S \quad (3.37)$$

com soluções analíticas

$$u = 8(x^4 - 2x^3 + x^2)(4y^3 - 2y) \quad (3.38)$$

e

$$v = -8(4x^3 - 6x^2 + 2x)(y^4 - y^2), \quad (3.39)$$

é chamado de problema de Shih (SHIH; TAN; HWANG, 1989). Trata-se de um problema clássico na área de CFD de fluxo laminar dentro de uma cavidade quadrada da qual a tampa se move em velocidade variável. Em que v e u são as componentes da velocidade nas direções dos eixos x e y , $\rho = kg/m^3$ é a pressão, S é um termo fonte obtido pela substituição das velocidades u e v nas equações listadas anteriormente. Este problema é amplamente empregado para verificação e validação de códigos que resolvam a equação de Navier-Stokes.

As condições de contorno são zero em todos os contornos das velocidades u e v , exceto no superior para o componente u , cuja equação do contorno é dada por

$$u(x,1) = 16(x^4 - 2x^3 + x^2). \quad (3.40)$$

Após feita a discretização do intervalo, empregam-se aproximações do tipo CDS (*Central Difference Scheme*) para as derivadas de segunda ordem. Como solver é utilizado

o MSI com Multigrid. As simulações deste modelo matemático foram realizadas através de um código cedido pelo grupo de CFD da UFPR. Neste programa também é utilizado a formulação corrente de vorticidade (ψ, ω) , proposta em FROM (1964), são feitas as seguintes mudanças de variáveis na Equação (3.35), as funções corrente definidas pelas equações

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (3.41)$$

e vorticidade, definida pela equação

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (3.42)$$

As variáveis de interesse analisadas nos experimentos são as seguintes: normas l_1 e l_∞ de todo o campo, para as velocidades u e v , com exceção dos contornos.

4 RESULTADOS - MALHA UNIFORME 1D

Neste capítulo são apresentados os principais resultados dos problemas unidimensionais, discretizados com malhas uniformes. Resultados adicionais podem ser vistos nos apêndices e de forma integral na página:

http://ftp.demec.ufpr.br/CFD/monografias/2020_Carlos-Carvalho_doutorado/

Foram geradas 15 malhas a partir da malha base, com vetor inicial h uniforme de dimensão 10, e refino uniforme de razão 2, exemplificados na Seção 3.6.

4.1 SMER

Para todos os casos **SMER** apresentou o mesmo desempenho qualitativo, seguindo a lógica apresentada na Tabela 7 da Seção 3.1. Ela mostra caso esta técnica tenha acesso a várias malhas, é esperado em vista teórica uma maior acurácia, sendo esta uma análise **a priori** do método. De fato, é perceptível esta análise, observando o caso em que a técnica tem potencial para atingir seu melhor resultado, isto é, as malhas iniciais.

Por exemplo, considere os resultados obtidos nas malhas 1 e 2 para Burgers 1D com $Re = 1$, ilustradas pelas figuras 26 e 27. Denotando o **Passo 1** da técnica por **SM** de “SUBMALHA”, que consiste em separar em cada malha os pontos coincidentes da “Malha base”, e para efeito de estudo e comparação, é interessante também calcular as variáveis de interesse l_1 ou l_∞ somente nestes pontos em cada malha, sem aplicar **SMER**, passo também sugerido no “algoritmo base” da técnica.

Este raciocínio exposto anteriormente para **SMER**, é apresentado de forma prática pela Figura 26a. Cada “*” ou “■” representa os valores obtidos de l_1 ou sua ordem equivalente (Figura 26b) em cada malha isto é

Malha 1, Malha 2, Malha 3, ,Malha 15,

para o caso de **SMER** aplicado na Malha 1, estas malhas são representados por “ h ”, que neste cenário representa a distância média entre os nós da malha. Prosseguindo, na Figura 27a temos a mesma analogia, agora com

Malha 2, Malha 3, Malha 4, , Malha 15,

e neste caso, **SMER** é aplicado na Malha 2. Todavia lembrando que **SMER** exclui as malhas antecessoras da “Malha base”. Isto é, se for a malha base 13, não são utilizadas as malhas 1, 2, 3, ..., 12. Isto ocorre porque nenhuma delas possui todos os pontos da

Malha 13, sendo esta a essência do método e ao mesmo tempo pode ser apontado como um **defeito**.

Dada esta explicação do significado de **SM**, naturalmente a mesma analogia é feita para **SMER**. Em resumo, **SM** pode ser definido como **SMER** sem aplicar a Multiextrapolação de Richardson (MER), diferença que explica a **notória** mudança de resultados na redução do erro e ordens de acurácia, observado na Figura ?? . Portanto, as malhas 1 e 2 para este exemplo, obtiveram resultados significativos na redução do erro e aumento da acurácia de suas ordens.

Porém, não é necessário muitas malhas para obter resultados significativos e similares, como os apresentados anteriormente. Por exemplo, para as malhas intermediárias 7 e 8, ilustradas pelas figuras 28 e 29, mas agora para Poisson 1D com solução $T = \sin(\pi x)$. Até mesmo as duas últimas malhas possíveis de aplicação 13 e 14, mas agora para Poisson 1D com solução $T = \frac{-1}{5}e^{3x} + 3x + 2$, e desta vez ilustradas pelas tabelas 10 e 11, apresentando resultados significativos, também ajudando no entendimento das diferenças de **SM** para **SMER**. Nelas são mostradas as malhas usadas, começando pela “Malha Base”, tamanho do elemento de malha (h), cálculo de l_1 somente para os pontos da malha em destaque com suas ordens equivalentes (p_E^*).

Tabela 10 – Resultados: SMER, Malha base 13, Variável l_1 , Poisson 1D com solução $T = \frac{-1}{5}e^{3x} + 3x + 2$, Malha uniforme.

Malha	h	l_1 : SM	l_1 : SMER	p_E^* : SM	p_E^* : SMER
13	2.44E-05	3.73813E-10	3.73813E-10		
14	1.22E-05	9.34532E-11	2.50661E-20	2.00000E+00	3.37959E+01
15	6.10E-06	2.33633E-11	1.47319E-28	2.00000E+00	2.73422E+01

Tabela 11 – Resultados: SMER, Malha base 14, Variável l_1 , Poisson 1D com solução $T = \frac{-1}{5}e^{3x} + 3x + 2$, Malha uniforme.

Malha	h	l_1 : SM	l_1 : SMER	p_E^* : SM	p_E^* : SMER
14	1.22E-05	9.34520E-11	9.34520E-11		
15	6.10E-06	2.33630E-11	1.56661E-21	2.00000E+00	3.57959E+01

Observando as tabelas, pode-se notar que o primeiro valor de l_1 é rigorosamente igual, para **SMER** e **SM**. Isto ocorre pelo simples fato da primeira malha de **SMER** corresponder somente por pontos com nenhuma extrapolação ($m = 0$), as seguintes naturalmente, correspondem por $m = 1, m = 2, \dots$. Isto explica a similaridade das figuras 26, 27 e 28 com os encontrados na literatura para MER, isto é, geralmente quando esta técnica obtém êxito é notado um concomitante aumento nas ordens de acurácia e redução significativa do erro.

Em geral SMER obteve resultados significativos até nas malhas mais finas, em que na teoria SMER tem pior desempenho. Na Figura 29 são apresentados somente as curvas de **SMER** de l_1 em cada Malha (g) para Poisson 1D com solução $T = \frac{-1}{5}e^{3x} + 3x + 2$. É possível observar as similaridades nas curvas de l_1 , corroborando a tese de que SMER beneficia as malhas mais finas, embora mesmo para $g = 13,14$ houve considerável redução do erro. Lembrando que o primeiro valor das curvas correspondem a $m = 0$ da Malha Base g .

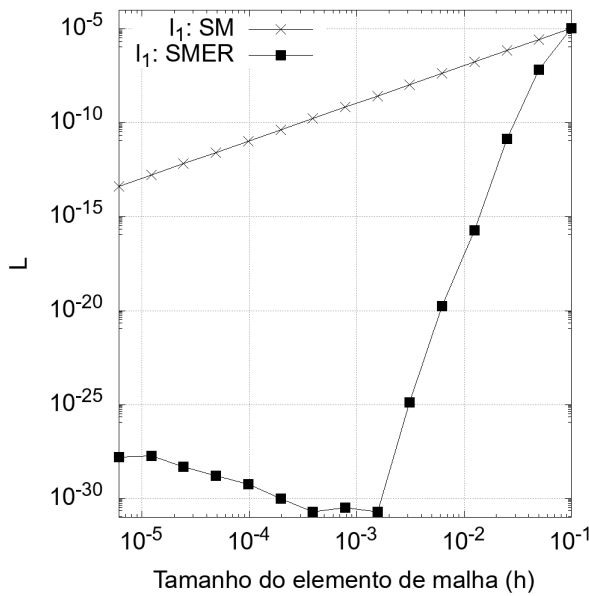
De modo igual a MER, técnica que serve de “matéria prima” para este método, SMER possui baixo custo computacional para operar. No entanto ao contrário de MER ela precisa de alguma forma guardar grandes quantidades de soluções numéricas em cada malha para funcionar. Talvez possa acarretar problemas de memória, para malhas demasiadamente grandes, principalmente no caso 2D. Porém nos experimentos realizados até no caso bidimensional, não ocorreu.

Infelizmente, outro defeito desta técnica é não conseguir otimizar a malha mais fina disponível. Nestes experimentos envolvendo malhas unidimensionais seria a malha 15. No entanto, através da sua versão estendida **SMER INTERPOLADO** (SMER-I), esse problema pode ser contornado, através da utilização de interpolações.

Figura 26 – Resultados: SMER, Malhas Base 1, Variável l_1 , Burgers 1D com solução

$$T(x) = \frac{e^{xRe} - 1}{e^{Re} - 1}, \quad Re = 1, \text{ Malha uniforme.}$$

(a) l_1 , Malha 1



(b) p_E^* , Malha 1

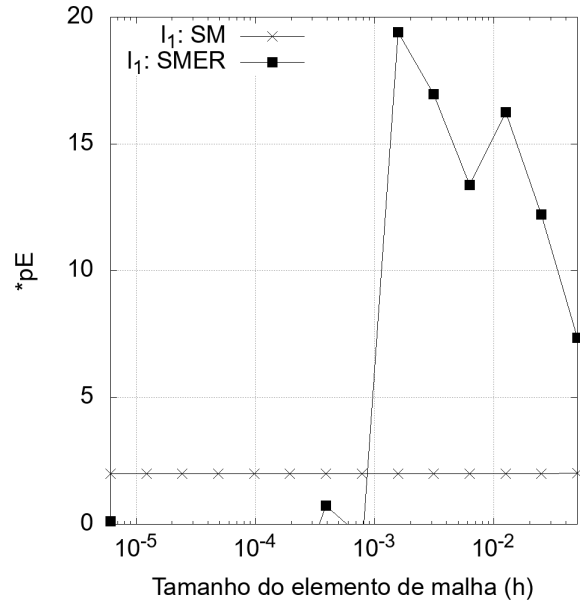


Figura 27 – Resultados: SMER, Malha Base 2, Variável l_1 , Burgers 1D com solução $T(x) = \frac{e^{xRe} - 1}{e^{Re} - 1}$, $Re = 1$, Malha uniforme.

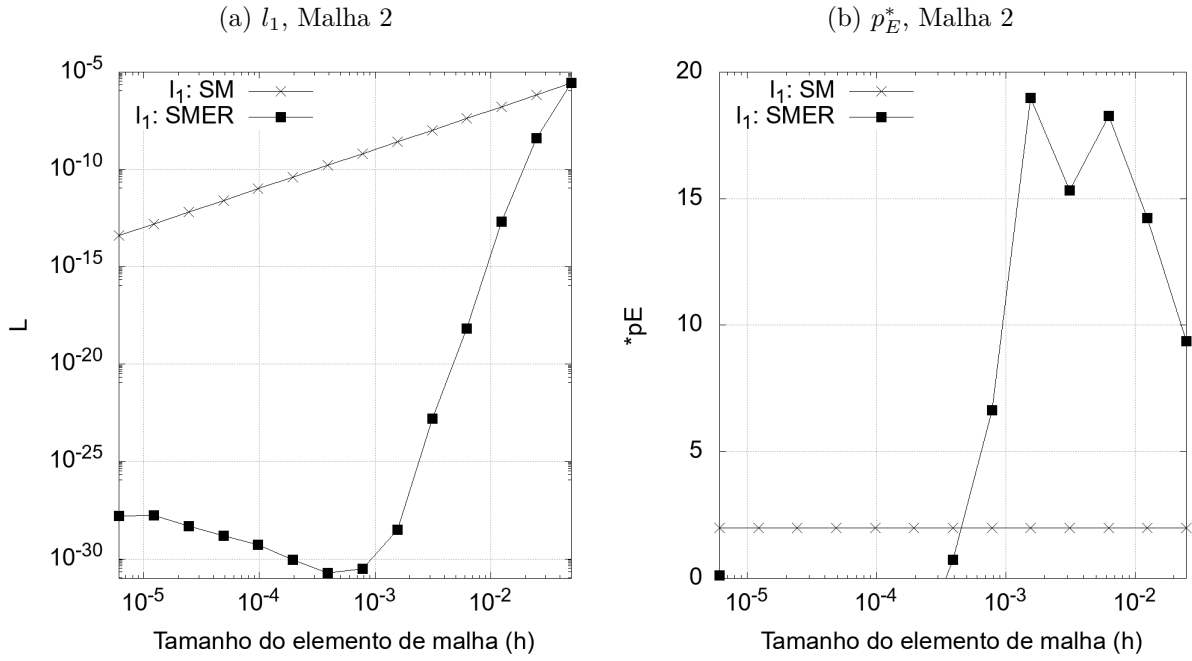


Figura 28 – Resultados: SMER, Malhas Base 7, Variável l_1 , Poisson 1D com solução $T = \sin(\pi x)$, Malha uniforme.

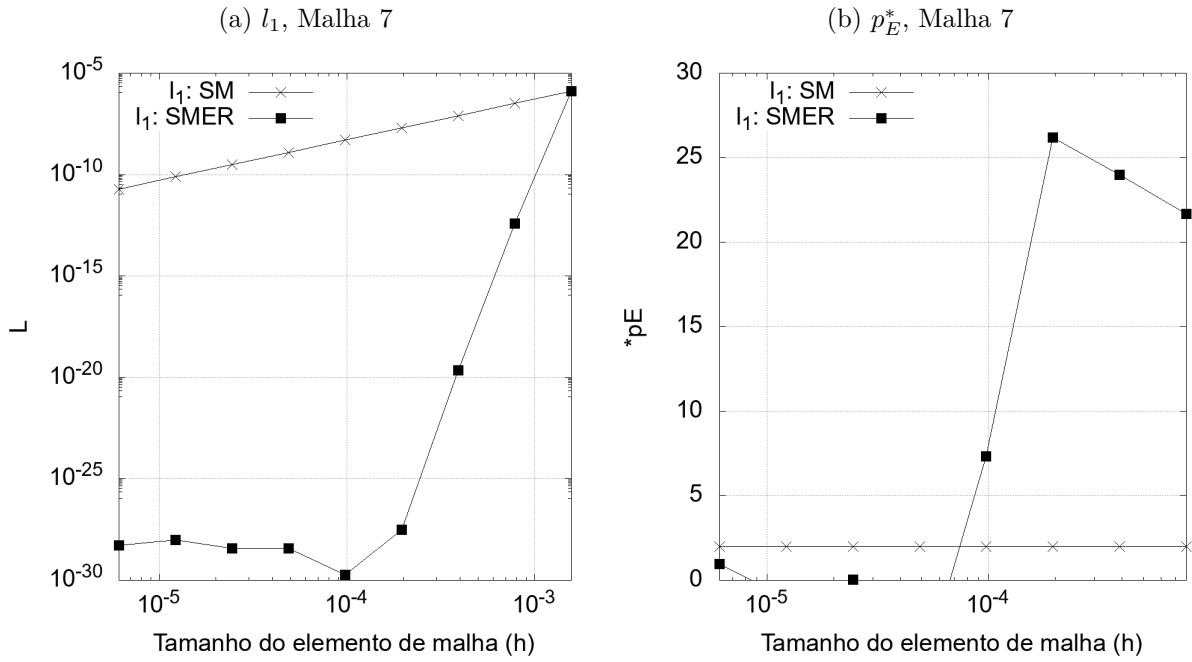


Figura 29 – Resultados: SMER, Malha Base 8, Variável l_1 , Poisson 1D com solução $T = \sin(\pi x)$, Malha uniforme.

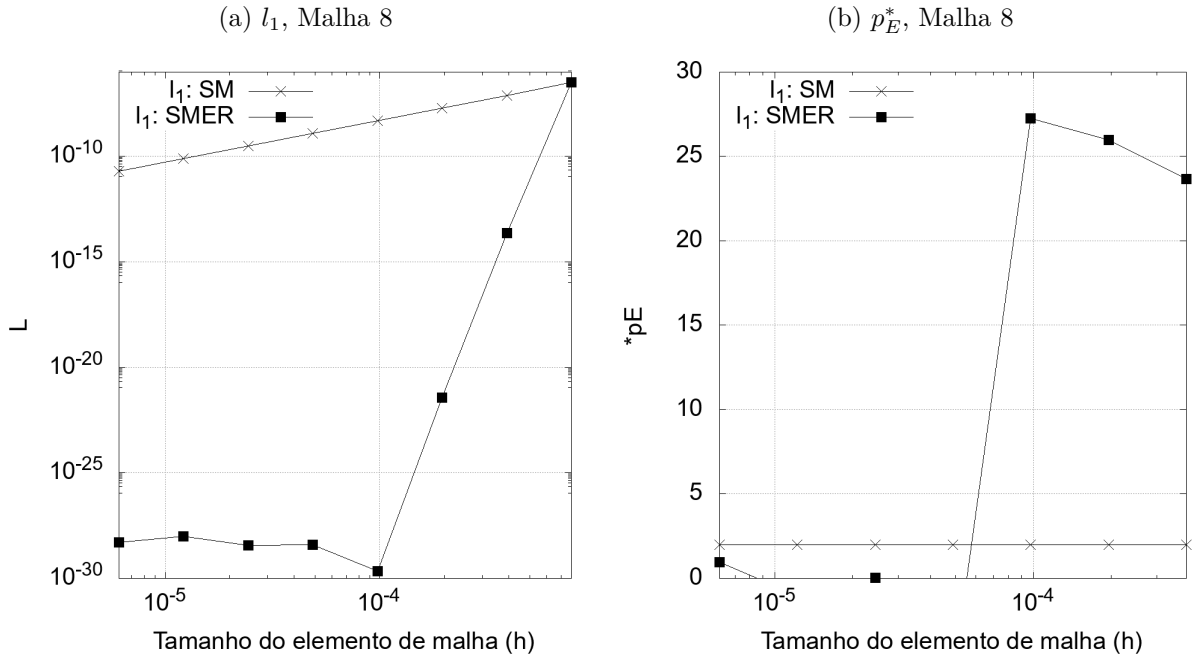
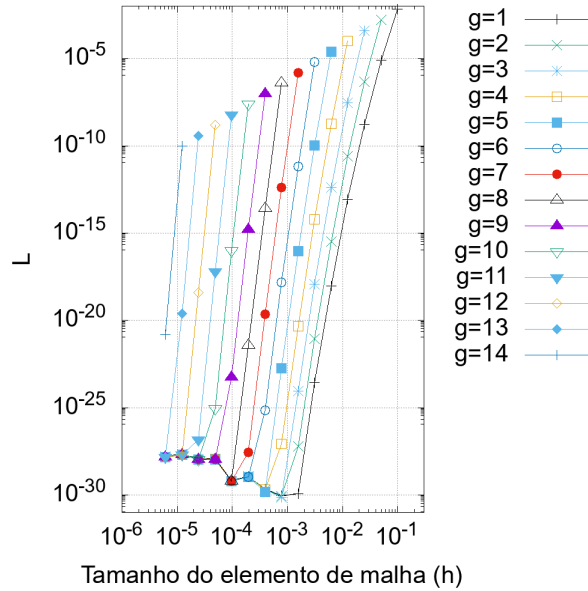


Figura 30 – Resultados: SMER, Malhas $g = 1, 2, \dots, 14$, Variável l_1 , Poisson 1D com solução $T = \frac{-1}{5}e^{3x} + 3x + 2$, Malha uniforme.



4.2 SMER INTERPOLADO

Os conjuntos β_1 e β_2 testados correspondem aos pontos equivalentes da malha 15, com exceção do contorno, para cada caso: uniforme e não, respectivamente. Foram geradas a partir da malha inicial de cada cenário, utilizando refino de razão dois.

As análises são feitas de forma análoga da realizada na seção anterior, com a diferença nos conjuntos analisados, são denotados por **SM-I** de “SUBMALHA INTERPOLADA”, o conjunto β de cada malha (Malha1, Malha2, ...) sem aplicação da técnica **SMER**, e **SMER-I** (SMER INTERPOLADO) representa os valores obtidos de **SMER** aplicado no conjunto β em cada malha. Todavia, lembrando que β possui vários pontos obtidos por interpolação, o que difere dos utilizados na seção anterior.

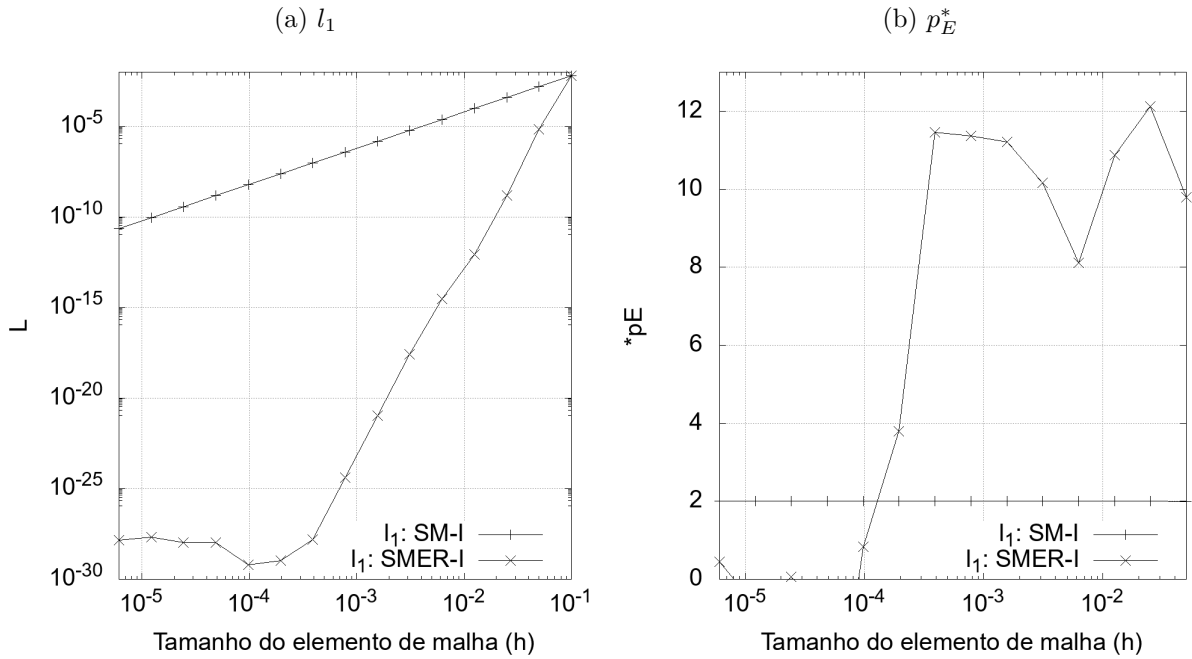
Feita esta breve explicação dos significados de cada sigla, a Figura 31 apresenta os resultados de **SMER-I** para o conjunto β_1 para Poisson 1D com $T = \frac{-1}{5}e^{3x} + 3x + 2$. Os restantes dos modelos matemáticos obtiveram resultados qualitativamente equivalentes, independente do conjunto β escolhido, isto é, foram obtidos significativos aumento nas ordens de acurácia e redução significativa do erro.

Algumas peculiaridades de **SMER-I**, naturalmente ela leva esse nome por ser um complemento de **SMER**, porque utiliza interpolações e pelo fato de não serem iguais, havendo então a necessidade de utilizar outra notação, podendo acontecer em algum momento delas apresentarem resultados diferentes. No entanto para os modelos unidimensionais com malhas uniformes, isto não ocorreu, ambas técnicas apresentaram ótimos resultados e qualitativamente semelhantes, porque ambas possuem a Multiextrapolação de Richardson (MER) como base, para otimização.

Infelizmente, do mesmo modo que **SMER**, esta técnica necessita guardar grandes quantidades de soluções numéricas em cada malha. Porém existe outro problema acrescido das interpolações, porque é necessário em geral realizar várias, mas não é conhecida a região que deve ser interpolada de imediato, havendo a necessidade de uma busca pela região de interesse. Este processo é custoso, embora no caso unidimensional dependendo do tamanho da malha é realizada em alguns minutos. Porém, para o caso bidimensional, pode levar dias, dependendo do tamanho da malha, e por este motivo foi acrescido outra forma de encontrar a região interesse, utilizando a ideia de pontos coincidentes, neste caso. Todavia, lembrando, as estratégias utilizadas para as interpolações já foram abordadas no capítulo anterior, em particular na Seção 3.5.

Será discutido com mais riqueza de detalhes o problema das “buscas” bidimensionais nos capítulos que apresentam estes resultados, mas para concluir as análises apresentadas nesta seção, **SMER-I** se mostrou uma excelente ferramenta para redução do erro e aumento de acurácia dos campos. Deve ser ressaltado que ela consegue otimizar qualquer malha desejada, incluindo a malha mais fina dos experimentos (Malha 15), em que **SMER** não é aplicável, por exemplo.

Figura 31 – Resultados: SMER INTERPOLADO (SMER-I), Poisson 1D, $T = \frac{-1}{5}e^{3x} + 3x + 2$, Variável l_1 , Malha uniforme, conjunto β_1 .



4.3 CRE clássico com interpolação e FRE

As análises são feitas de forma análoga da realizada nas seções anteriores, com a diferença que desta vez, cada elemento do gráfico corresponde por uma malha, não um conjunto específico de pontos. Conforme o elemento h é demasiadamente pequeno, significa que se trata da malha mais fina e vice-versa. Outra alteração, corresponde à notação “ m ”, significando a quantidade de extrapolações utilizadas na malha, em que $m = 0$ equivale a zero extrapolação, $m = 1$: uma extrapolação, $m = 2$: duas extrapolações, etc.

Feita esta introdução sobre as anotações utilizadas, será iniciado por FRE (CRE com FRE). A ideia de alterar o termo de correção C de CRE para FRE surgiu devido aos significativos resultados obtidos nos modelos matemáticos que foram aplicados esta técnica em Giacomini (2013). No entanto, para a solução analítica $T = \sin(\pi x)$ para Poisson 1D, foram obtidos resultados excelentes e qualitativos com Giacomini (2013), ilustrados pelas Figuras 32a e 32b. Nota-se a redução significativa do erro e aumento dos ordens de acurácia, conforme aumentam as extrapolações.

Porém, para o mesmo modelo, trocando para o caso $T = \frac{-1}{5}e^{3x} + 3x + 2$, FRE reduz o erro significativamente, mas não apresenta evolução após a primeira extrapolação ($m = 1$). Também não fica claro qual a sua ordem de acurácia, em nenhuma extrapolação ($m \geq 1$) acontecimento que não deveria ocorrer em análises prévias a priori do método. Estes resultados são ilustrados pelas Figuras 32c e 32d. Para Burgers 1D os resultados

com esta técnica também foram qualitativos em relação a Giacomini (2013): as ordens de acurácia se mantiveram em quatro, não apresentando evolução na redução do erro após a primeira extrapolação ($m = 1$). No entanto houve significativa redução do erro, seguindo o comportamento qualitativo com o resultado apresentado na Figura 33, que apresenta os resultados obtidos com o termo de correção clássico (CRE) para Poisson 1D com $T = \frac{-1}{5}e^{3x} + 3x + 2$.

A técnica clássica, que consiste na utilização do termo de correção, definido como a média das correções vizinhas, em todos os casos, as ordens de acurácia se mantiveram em quatro, com redução do erro, mesmo extrapolando mais vezes ($m > 1$). Este resultado pode ser visto na Figura 33. Embora esta técnica tenha sido desenvolvida para apenas uma extrapolação em Roache e Knupp (1993), era interessante verificar o que aconteceria para $m > 1$ extrapolação, a posteriori, porque são utilizados modelos diferentes do proposto pelo autor. Mas em resumo, ela atendeu às expectativas, conseguindo progredir ao menos uma ordem verdadeira de acurácia, isto é, de $p_0 = 2$, foram obtidos soluções com acurácia $p_1 = 4$ com redução de erro significativa em todos os modelos empregados. Lembrando que foram utilizadas aproximações do tipo CDS em todos os modelos matemáticos. Para o leitor atento, deve ter notado a menção da mesma ilustração para comentar o resultado de CRE e FRE, a Figura 33. Isto significa que as técnicas tiveram desempenho semelhante e neste caso alterar o termo de correção original não surtiu efeito algum. No entanto, utilizando o termo de correção com interpolação (CRE-I), foi a técnica que obteve os melhores resultados em todos os casos. Resultados qualitativos como os apresentados pela Figura 34, obtendo aumento significativo das ordens de acurácia e redução do erro.

Em todas as técnicas expostas nesta seção, é necessário guardar de alguma forma várias soluções numéricas em cada malha, fator em comum com as técnicas expostas anteriormente. Mas retirando este “empecilho” de memória, que por sinal possui em todas as técnicas utilizadas nos experimentos, já adiantando que **SER** também segue esse princípio. Para utilizar CRE e suas variações no seu termo de correção expostas aqui, foram facilmente aplicáveis e rodando com custo computacional e operacional muitos baixos, até mesmo no caso das interpolações. Ao contrário de **SMER-I**, é conhecida a região de interpolação, o que faz do método consideravelmente mais rápido.

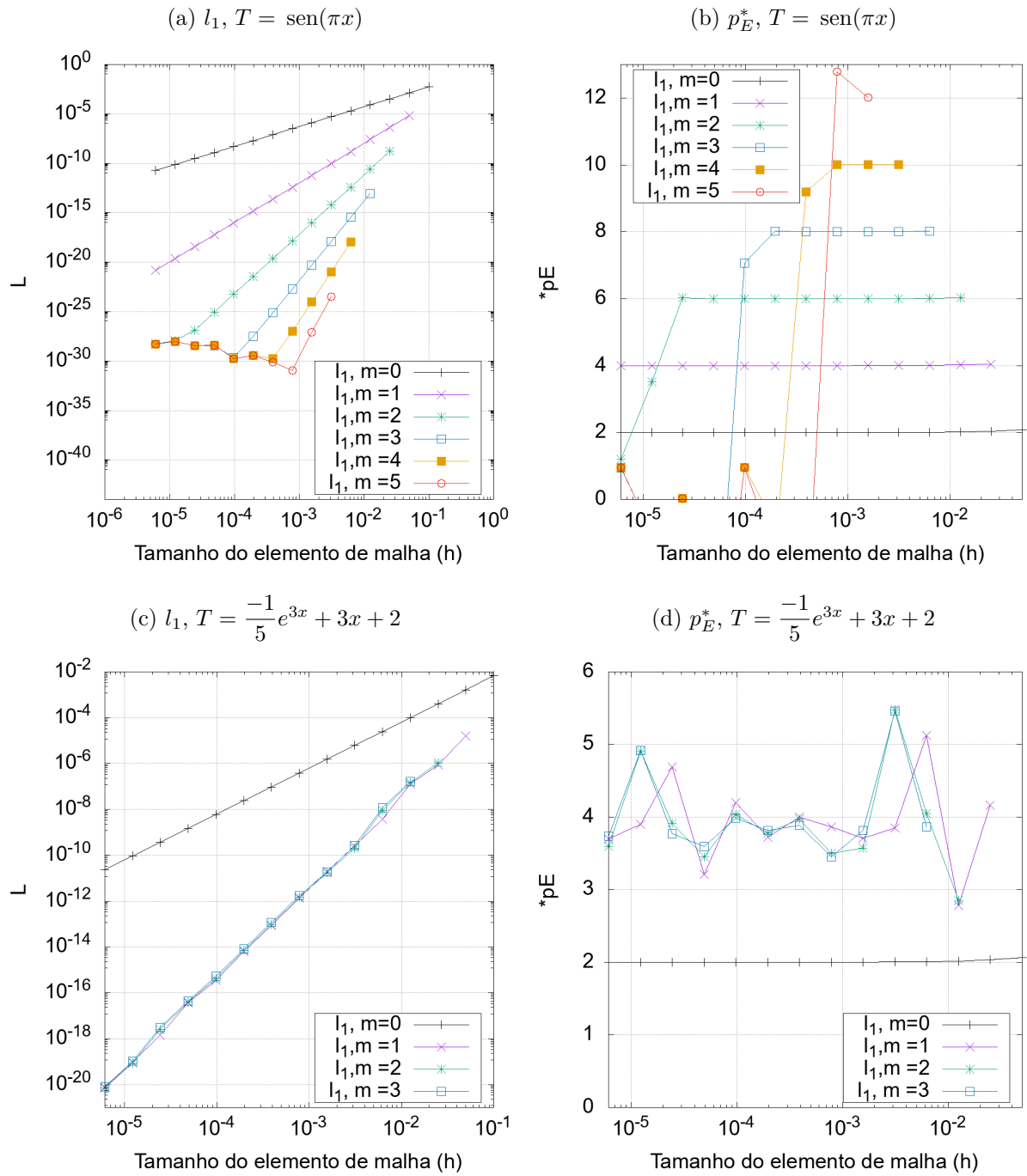
Figura 32 – Resultados: Normas l_1 e p_E^* , CRE com FRE (FRE), Poisson 1D, Malha uniforme.

Figura 33 – Resultados: CRE clássico (CRE), Poisson 1D, Variável l_1 , $T = \frac{-1}{5}e^{3x} + 3x + 2$, Malha uniforme.

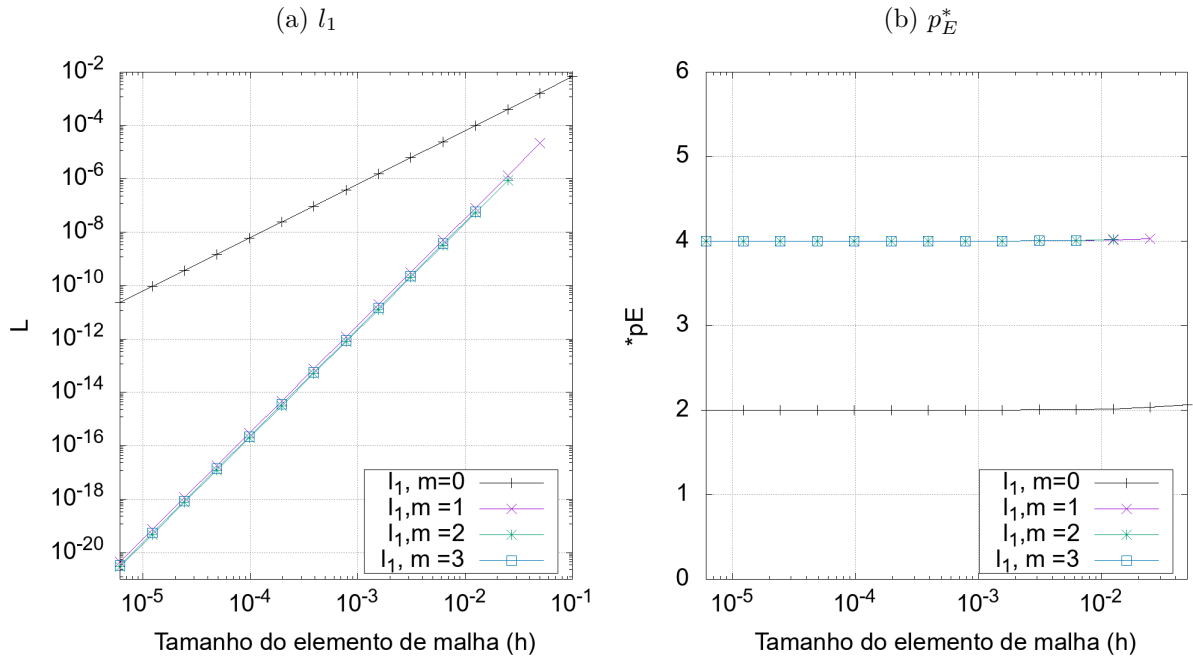
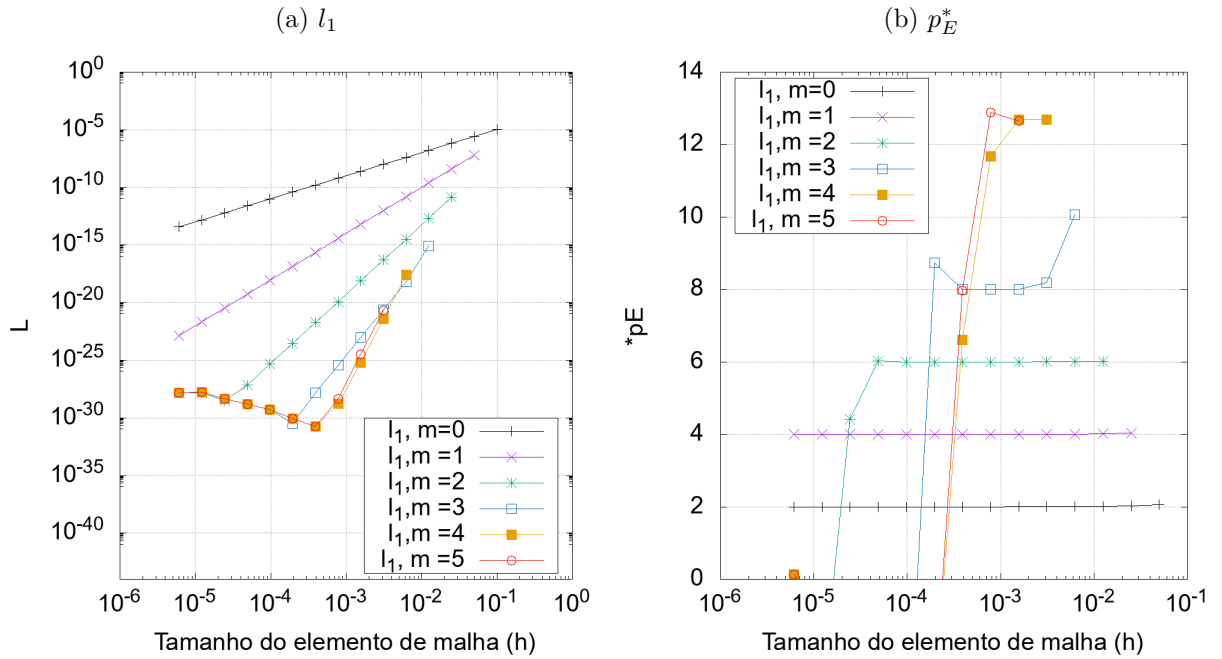


Figura 34 – Resultados: CRE com interpolação (CRE-I), Variável l_1 , Burgers 1D, $Re = 1$, $T = \frac{e^{xRe} - 1}{e^{Re} - 1}$, Malha uniforme.



4.4 SER

As análises são realizadas seguindo a mesma lógica da seção anterior, isto é, cada elemento do gráfico corresponde por uma malha, não um conjunto específico de pontos. Conforme o elemento(h) é menor, significa que se trata de uma malha fina e vice-versa. O símbolo “ m ” significa a quantidade de extrapolações utilizadas na malha, em que $m = 0$ equivale a zero extrapolação, $m = 1$: uma extrapolação, $m = 2$: duas extrapolações, etc.

Para todos os casos **SER** apresentou o mesmo desempenho qualitativo ilustrado pela Figura 35. No entanto ficou constatado que a cada extrapolação perde-se a malha mais fina. As malhas iniciais tem maior chance de obter uma maior acurácia, seguindo a mesma lógica apresentada para **SMER**, quanto maior o número de malhas disponíveis mais chances da técnica obter êxito.

A primeira conclusão, pode ser vista na Tabela 12. Perceba que a segunda e terceira coluna, apresentam os resultados de l_1 . Nas duas últimas malhas (14 e 15) possui o mesmo valor em termos de grandeza e por este motivo afeta o valor de p_E^* e posteriormente a próxima extrapolação, porque haverá pouca variação, possivelmente nula, no cálculo para esta variável de interesse. Entre estas malhas e SER provavelmente não será efetivo. Na Tabela 13 ocorre o mesmo “problema” como previsto: as malhas 14 e 15 não houve evolução e possivelmente deve afetar o desempenho da Malha 13, caso continuem as extrapolações.

Em resumo esta técnica apresentou ótimos resultados em todos os modelos utilizados, consumindo baixos recursos computacionais e operacionais. Claro, como já adiantado anteriormente ela possui o defeito de também precisar guardar de alguma forma várias soluções numéricas em cada malha. Mas contornado este problema, ela se torna outra importante ferramenta na otimização dos campos. Outro defeito notado nesta técnica, foi a perda da malha mais fina em cada extrapolação, isto é, para $m = 1$, é perdida a Malha 15, $m = 2$: Malha 14, $m = 3$: Malha 13, \dots . O termo “perder” neste cenário tem significado de não conseguir progredir mais, seja na redução do erro ou aumento de acurácia, após a extrapolação mencionada, fato possível de ser observado nas figuras e tabelas apresentadas nesta seção. Embora deve ser ressaltado que foi possível obter resultados significativos mesmo sem poder realizar mais extrapolações nas malhas mais finas, em cada nível de extrapolação.

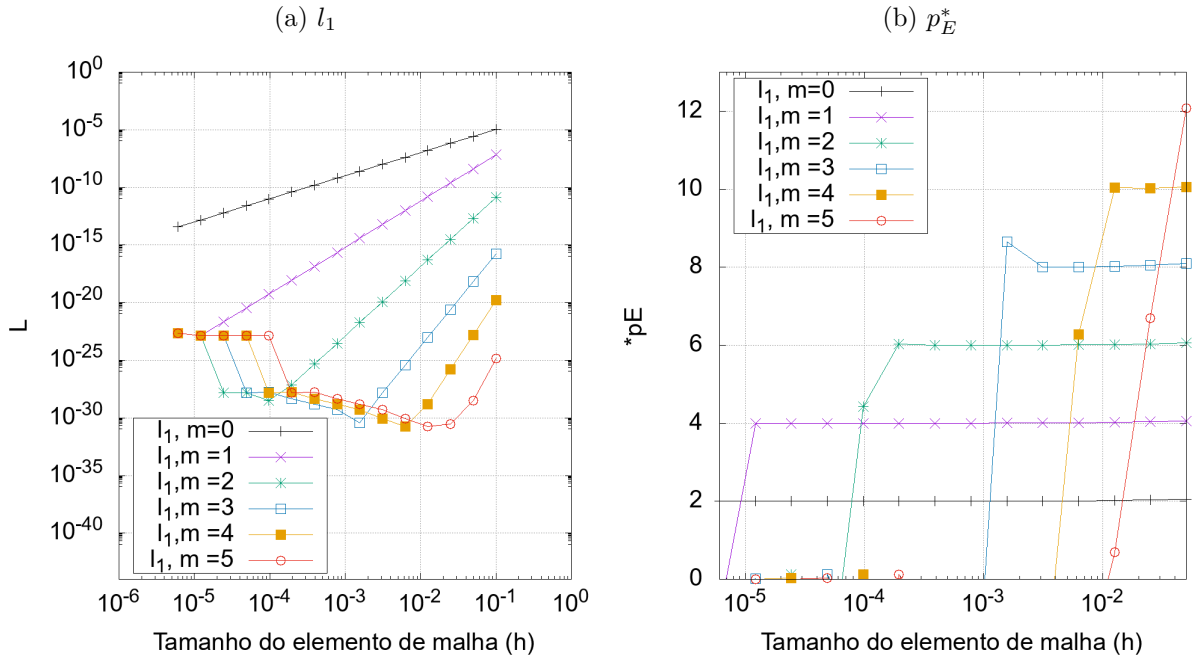
Tabela 12 – SER com uma extrapolação ($m = 1$), Poisson 1D, $T = \text{sen}(\pi x)$, malha uniforme.

Malha	l_1	$p_E^* - l_1$
1	7.1532251319E-06	
2	4.2462173139E-07	4.0743437350E+00
3	2.5874583506E-08	4.0365706624E+00
4	1.5969404946E-09	4.0181531792E+00
5	9.9184923013E-11	4.0090459108E+00
6	6.1796851796E-12	4.0045155870E+00
7	3.8562683469E-13	4.0022559895E+00
8	2.4082847691E-14	4.0011275485E+00
9	1.5045900201E-15	4.0005636633E+00
10	9.4018509671E-17	4.0002818040E+00
11	5.8755830110E-18	4.0001408951E+00
12	3.6720600735E-19	4.0000704457E+00
13	2.2949815058E-20	4.0000352281E+00
14	1.4343459005E-21	4.0000176426E+00
15	1.7929214785E-21	-3.2191932643E-01

Tabela 13 – SER com duas extrapolações ($m = 2$), Variável l_1 , Poisson 1D, $T = \text{sen}(\pi x)$, Malha uniforme.

Malha	l_1	$p_E^* - l_1$
1	1.7503452727E-09	
2	2.5982572642E-11	6.0739514405E+00
3	3.9584283280E-13	6.0364727449E+00
4	6.1078101109E-15	6.0181287096E+00
5	9.4838418554E-17	6.0090397940E+00
6	1.4772209651E-18	6.0045140578E+00
7	2.3045518474E-20	6.0022556071E+00
8	3.5980493549E-22	6.0011274390E+00
9	5.6197559154E-24	6.0005636953E+00
10	8.7754465997E-26	6.0008911117E+00
11	1.3483447004E-27	6.0242112793E+00
12	1.1685710470E-28	3.5283720094E+00
13	5.2410863156E-29	1.1568076759E+00
14	1.4343459005E-21	-2.4705951870E+01
15	1.7929214785E-21	-3.2191932643E-01

Figura 35 – Resultados: SER, Variável l_1 , Burgers 1D, $Re = 1$, $T = \frac{e^{xRe} - 1}{e^{Re} - 1}$, Malha uniforme.



4.5 Resumo do capítulo e conclusões

Todas as técnicas expostas neste capítulo apresentaram resultados significativos, mas algumas acabaram se sobressaindo. **CRE com Interpolação (CRE-I)** se mostrou mais estável dentre todas por conseguir otimizar as malhas finas mais rapidamente, embora a diferença, se existe uma, é muita pouca. Pode-se dizer que ela conseguiu leve vantagem em relação as técnicas **SER**, **SMER** e **SMER-I**. A última citada, em particular deve ser ressaltado, é a mais custosa operacionalmente dentre todas para funcionar, mas é a mais completa, por conseguir otimizar qualquer malha e qualquer conjunto de pontos dentro do domínio do cálculo. Pode se dizer que ela é um complemento para as outras, mas não deve ser priorizada, caso alguma das outras técnicas seja aplicável no problema.

FRE apresentou desempenho similar com o termo de correção clássico (CRE), só conseguindo resultados semelhantes com as outras técnicas listadas anteriormente em único cenário: Poisson 1D com $T = \sin(\pi x)$, onde esta técnica foi testada inicialmente ao ser desenvolvida. O termo clássico de correção era esperado ser inferior aos demais por ser o mais “defasado” em questão de tempo de criação, mais de dez anos em relação às outras. Mas cumpriu o seu papel, dentro da sua proposta, ela consegue aumentar pelo menos uma ordem verdadeira do método com redução do erro, e deve ser ressaltado sua importância para literatura, por ser a precursora no uso de extrapolações de Richardson sobre campos.

Sobre a questão de armazenamento das soluções numéricas em cada malha: para

operar as técnicas, uma saída possível é criar arquivos de saída para armazenamento porque nos tempos atuais o espaço nos discos rígidos (HD) são demasiadamente grandes, não chegando a ser um problema arquivos que possuem altos valores de tamanho. No entanto, contornado este problema com exceção de **SMER-I**, que pode tomar um tempo considerável, dependendo do tamanho das malhas, caso não seja utilizada a estratégia de pontos coincidentes, todas as técnicas operam rapidamente.

Lembrando que foram expostos os resultados principais, para evitar repetição e excesso de gráficos, sem haver uma necessidade real da sua exposição. Alguns resultados adicionais podem ser vistos nos apêndices, por exemplo, gráficos de **SER** para variável l_∞ . Os restantes podem ser vistos integralmente no site mencionado no início deste capítulo.

5 RESULTADOS - MALHA NÃO UNIFORME 1D

Neste capítulo são apresentados os resultados resumidos dos problemas unidimensionais, discretizados com malhas não uniformes, os resultados adicionais podem ser vistos nos apêndices e de forma integral na página:

http://ftp.demec.ufpr.br/CFD/monografias/2020_Carlos-Carvalho_doutorado/

Foram geradas 15 malhas a partir da malha base, com o vetor inicial h apresentado na Seção 3.6. Os resultados são ilustrados de forma análoga ao do capítulo anterior.

5.1 SMER

De modo semelhante ao caso uniforme, em todos os experimentos, SMER apresentou o mesmo desempenho qualitativo, seguindo os mesmos padrões observados anteriormente:

1. Malhas iniciais com maior acurácia;
2. Quanto maior a quantidade de malhas disponíveis, mais chances de SMER obter êxito;
3. Soluções numéricas com SMER apresentam comportamento similar aos resultados encontrados com MER na literatura:
 - redução significativa do erro;
 - concomitante aumento nas ordens de acurácia.

A terceira observação é possível observar através das Figuras 36 e 37, que apresentam resultados de Poisson 1D com $T(x) = \sin(\pi x)$ e Burgers 1D, respectivamente. É fácil ver a rápida convergência do método, quando se possui várias malhas disponíveis e principalmente acuradas (Segunda observação).

A primeira e segunda observações pode ser novamente comprovadas através da Figura 38 que ilustra as curvas de l_1 com **SMER**, para Poisson 1D com solução $T = \frac{-1}{5}e^{3x} + 3x + 2$. Incrível a similaridade com o caso uniforme, desempenho novamente muito satisfatório. É possível observar até mesmo nas malhas mais finas considerável redução do erro, por exemplo, em $g = 14$ com $m = 0$, l_1 tinha grandeza aproximada em 10^{-10} e com apenas uma malha disponível **SMER** alcançou 10^{20} aproximadamente, **notória** redução do erro.

Em resumo, **SMER** novamente apresentou grande desempenho com resultados qualitativos aos apresentados nesta seção, em todos os modelos unidimensionais utilizados.

Figura 36 – Resultados: SMER, Malhas 1-2, Variável l_1 , Burgers 1D com solução $T(x) = \frac{e^{xRe} - 1}{e^{Re} - 1}$, $Re = 1$, Malha não uniforme.

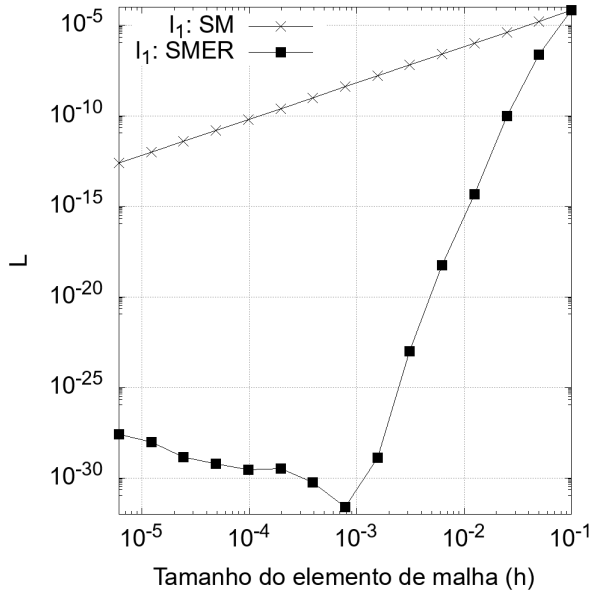
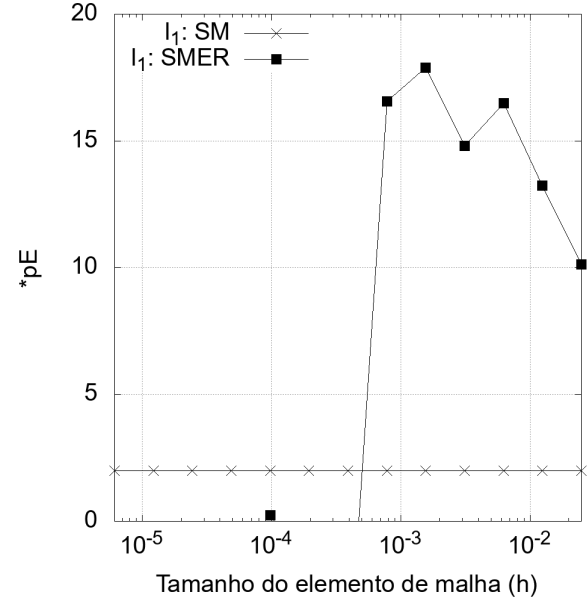
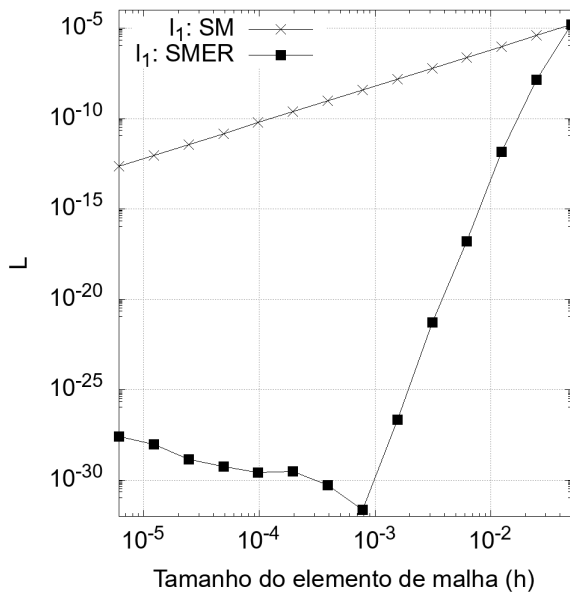
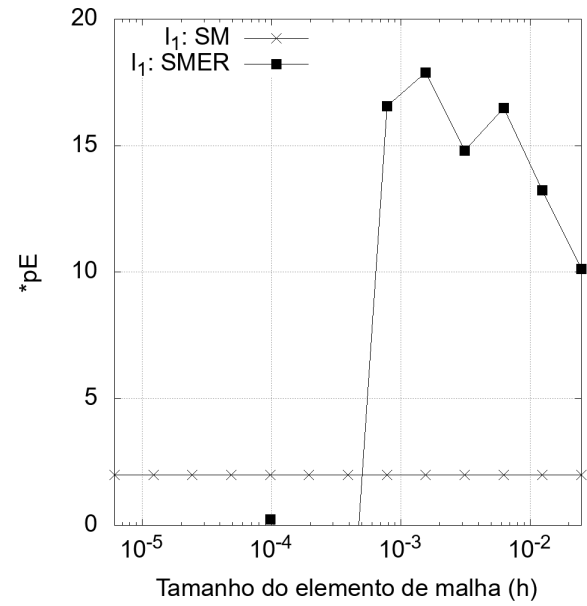
(a) l_1 , Malha 1(b) p_E^* , Malha 1(c) l_1 , Malha 2(d) p_E^* , Malha 2

Figura 37 – Resultados: SMER, Malhas 7-8, Variável l_1 , Poisson 1D com solução $T(x) = \sin(\pi x)$, Malha não uniforme.

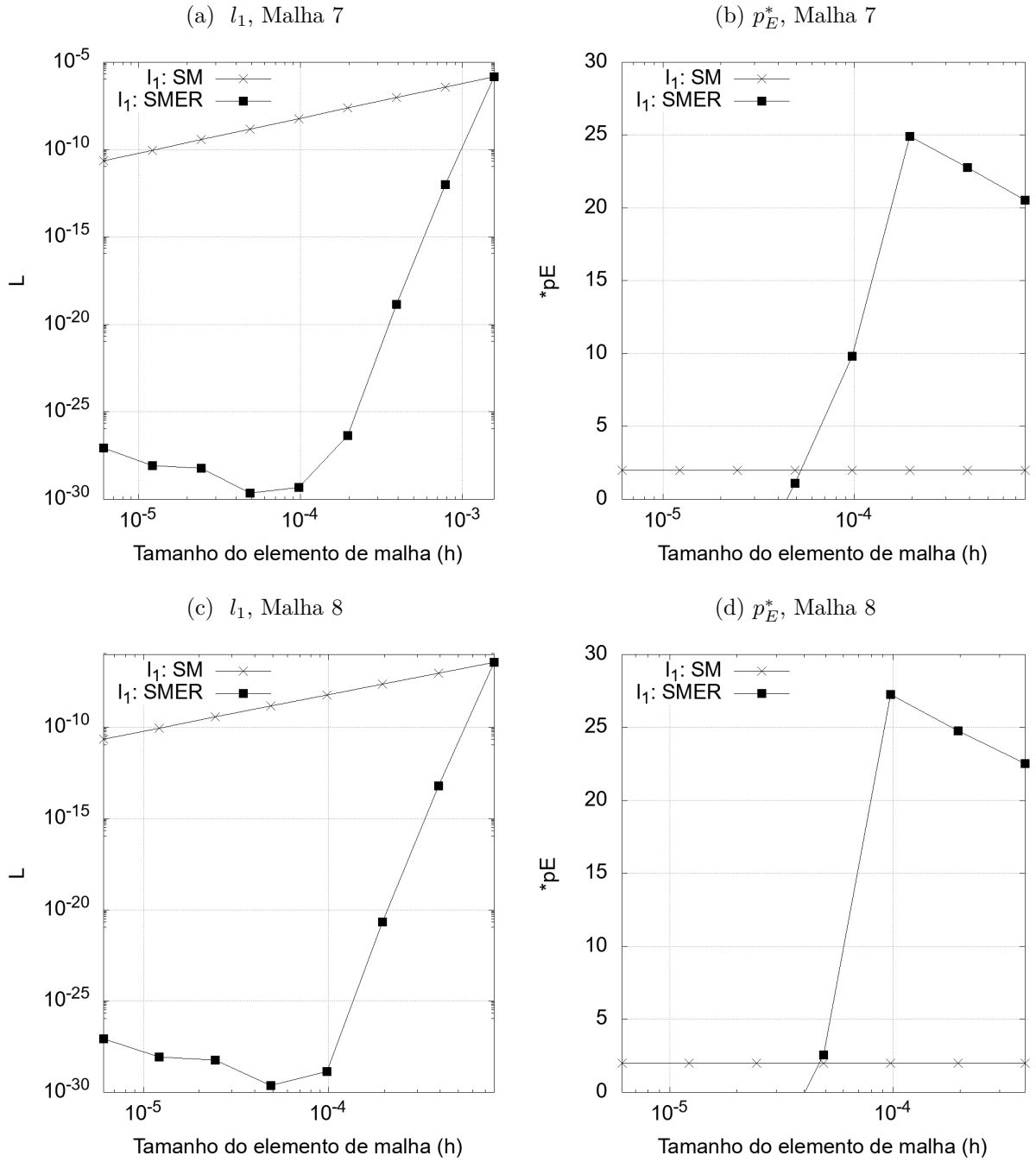
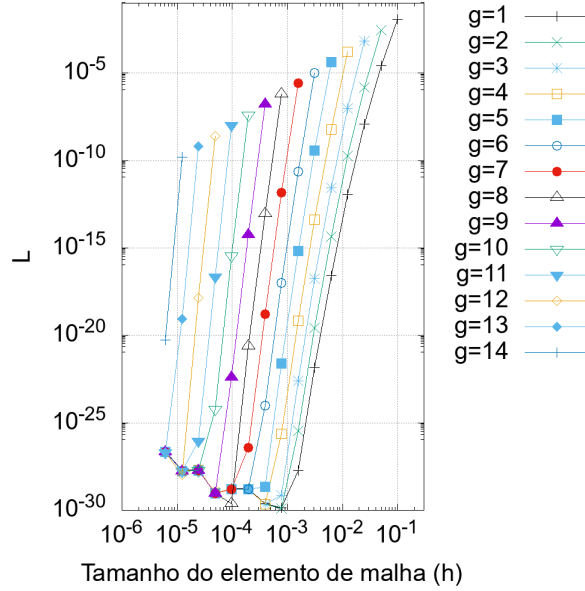


Figura 38 – Resultados: SMER, Malhas $g = 1, 2, \dots, 14$, Variável l_1 , Poisson 1D com solução $T = \frac{-1}{5}e^{3x} + 3x + 2$, Malha não uniforme.



5.2 SMER INTERPOLADO

Os conjuntos β_1 e β_2 são os mesmos, explicados na Seção 4.2.

Para ambos os cenários, houve redução do erro de forma significativa, porém estranhamente as ordens equivalentes se mantiveram em 4, significando que **SMER** não conseguiu progredir nas extrapolações e só evoluiu uma ordem equivalente, visto que $p_0 = 2$.

Neste cenário, é notória a diferença de desempenho da técnica ao trocar a discretização do mesmo modelo para malha não uniforme. Podendo ser facilmente observado através das tabelas 14 e 15, onde são apresentados os resultados de l_1 do conjunto β_2 , para Poisson 1D com $T = \frac{-1}{5}e^{3x} + 3x + 2$, envolvendo as duas discretizações.

Possíveis causas para o aproveitamento inferior:

1. Interpolação;
2. Erro numérico.

A essência da técnica é MER, e um dos requisitos básicos e fundamentais de seu funcionamento é o erro numérico (E) estar afetado somente por Eh . Porém é provável que as interpolações interfiram no nível das soluções numéricas, no caso não uniforme. Neste cenário E não estaria mais sendo afetado somente por Eh .

No entanto é só uma suposição, sendo necessária a realização de mais investigações e testes, mas é uma “boa” explicação, porque SMER funcionou e sua base é puramente MER, ao contrário de SMER-I que são acrescentadas as interpolações.

Tabela 14 – Resultados: SMER INTERPOLADO, conjunto β_2 , Variável l_1 , Malha não uniforme, Poisson1D, $T = \frac{-1}{5}e^{3x} + 3x + 2$.

Malha	h	l_1 : SM-I	l_1 : SMER-I	p_E^* : SM-I	p_E^* : SMER-I
1	1.00E-01	1.45524E-02	1.45524E-02		
2	5.00E-02	2.72234E-03	2.19539E-03	2.41834E+00	2.72871E+00
3	2.50E-02	6.58480E-04	1.98792E-04	2.04764E+00	3.46515E+00
4	1.25E-02	1.64871E-04	7.96199E-06	1.99780E+00	4.64199E+00
5	6.25E-03	4.12217E-05	2.30626E-07	1.99986E+00	5.10950E+00
6	3.13E-03	1.03056E-05	1.17395E-08	1.99998E+00	4.29610E+00
7	1.56E-03	2.57641E-06	7.09886E-10	1.99999E+00	4.04765E+00
8	7.81E-04	6.44103E-07	4.42717E-11	2.00000E+00	4.00313E+00
9	3.91E-04	1.61026E-07	2.76879E-12	2.00000E+00	3.99906E+00
10	1.95E-04	4.02564E-08	1.73270E-13	2.00000E+00	3.99816E+00
11	9.77E-05	1.00641E-08	1.08543E-14	2.00000E+00	3.99668E+00
12	4.88E-05	2.51603E-09	6.81387E-16	2.00000E+00	3.99365E+00
13	2.44E-05	6.29007E-10	4.29299E-17	2.00000E+00	3.98842E+00
14	1.22E-05	1.57252E-10	2.73185E-18	2.00000E+00	3.97403E+00
15	6.10E-06	3.93129E-11	1.74994E-19	2.00000E+00	3.96450E+00

Tabela 15 – Resultados: SMER INTERPOLADO, conjunto β_2 , Variável l_1 , Malha uniforme, Poisson1D, $T = \frac{-1}{5}e^{3x} + 3x + 2$.

Malha	h	l_1 : SM-I	l_1 : SMER-I	p_E^* : SM-I	p_E^* : SMER-I
1	1.00E-01	4.80134E-03	4.80134E-03		
2	5.00E-02	1.20439E-03	5.40196E-06	1.99514E+00	9.79574E+00
3	2.50E-02	3.01351E-04	1.21598E-09	1.99878E+00	1.21171E+01
4	1.25E-02	7.53535E-05	9.29105E-13	1.99970E+00	1.03540E+01
5	6.25E-03	1.88394E-05	3.38711E-15	1.99992E+00	8.09964E+00
6	3.13E-03	4.70991E-06	2.84847E-18	1.99998E+00	1.02156E+01
7	1.56E-03	1.17748E-06	9.23999E-22	2.00000E+00	1.15900E+01
8	7.81E-04	2.94370E-07	3.38573E-25	2.00000E+00	1.14142E+01
9	3.91E-04	7.35926E-08	1.27326E-28	2.00000E+00	1.13767E+01
10	1.95E-04	1.83982E-08	8.46534E-30	2.00000E+00	3.91082E+00
11	9.77E-05	4.59954E-09	4.52605E-30	2.00000E+00	9.03316E-01
12	4.88E-05	1.14988E-09	8.45124E-29	2.00000E+00	-4.22284E+00
13	2.44E-05	2.87471E-10	7.52673E-29	2.00000E+00	1.67140E-01
14	1.22E-05	7.18678E-11	1.57413E-28	2.00000E+00	-1.06446E+00
15	6.10E-06	1.79669E-11	1.05208E-28	2.00000E+00	5.81312E-01

5.3 CRE clássico com interpolação e FRE

Em todos os casos houve redução do erro, porém as ordens de acurácia alcançaram no máximo 4. Exceção de FRE que não foi possível determinar sua ordem para *Poisson1D*, mostrando a mesma instabilidade em suas ordens de acurácia, apresentadas já no caso uniforme.

Estes resultados comentados anteriormente podem ser observados de forma qualitativa através das Figuras 39 e 40, onde são apresentados os resultados de CRE-I e FRE para Burgers 1D e Poisson 1D com $T(x) = \sin(\pi x)$, respectivamente. Portanto só foi possível progredir uma ordem equivalente, visto que $p_0 = 2$. Novamente, pode-se reparar que alterando a estrutura da malha para não uniforme, as interpolações já não conseguem progredir com a mesma eficácia para o caso da uniformidade. Os motivos provavelmente devem ser os mesmos de SMER-I, pelo fato da sua essência ser também as interpolações.

Neste cenário alterar o termo de correção de CRE não surtiu efeito, porque o termo de correção clássico (CRE) qualitativamente obteve os mesmos resultados.

Figura 39 – Resultados: CRE-I, Variável l_1 , Burgers 1D com solução $T(x) = \frac{e^{xRe} - 1}{e^{Re} - 1}$, $Re = 1$, Malha não uniforme.

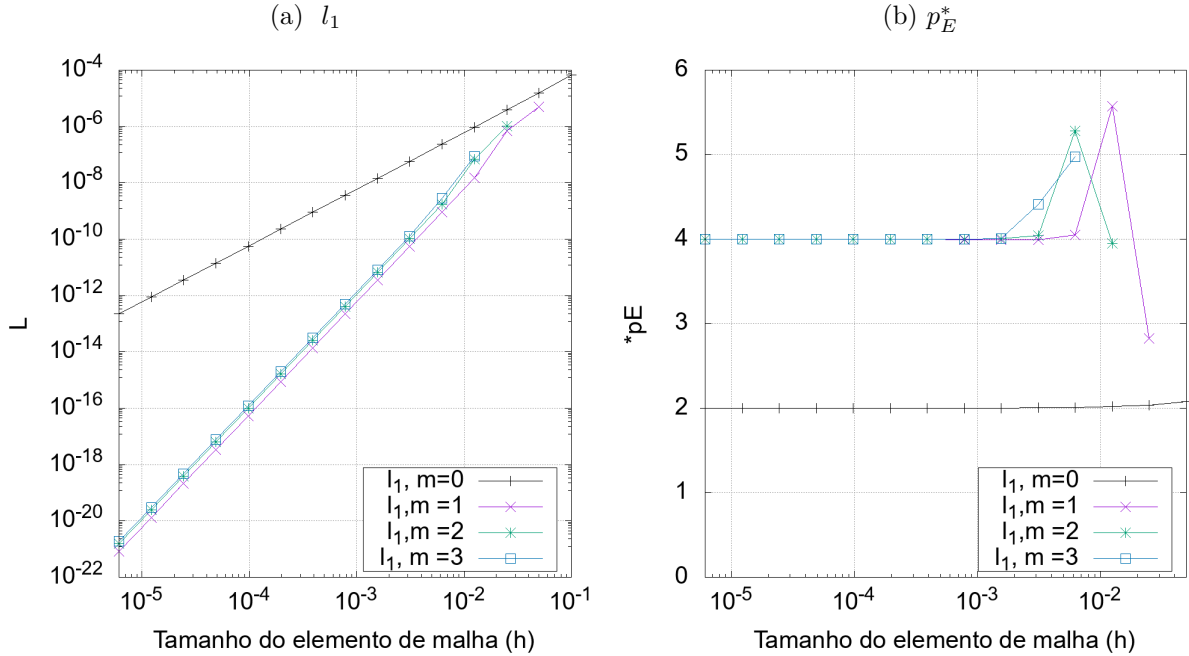
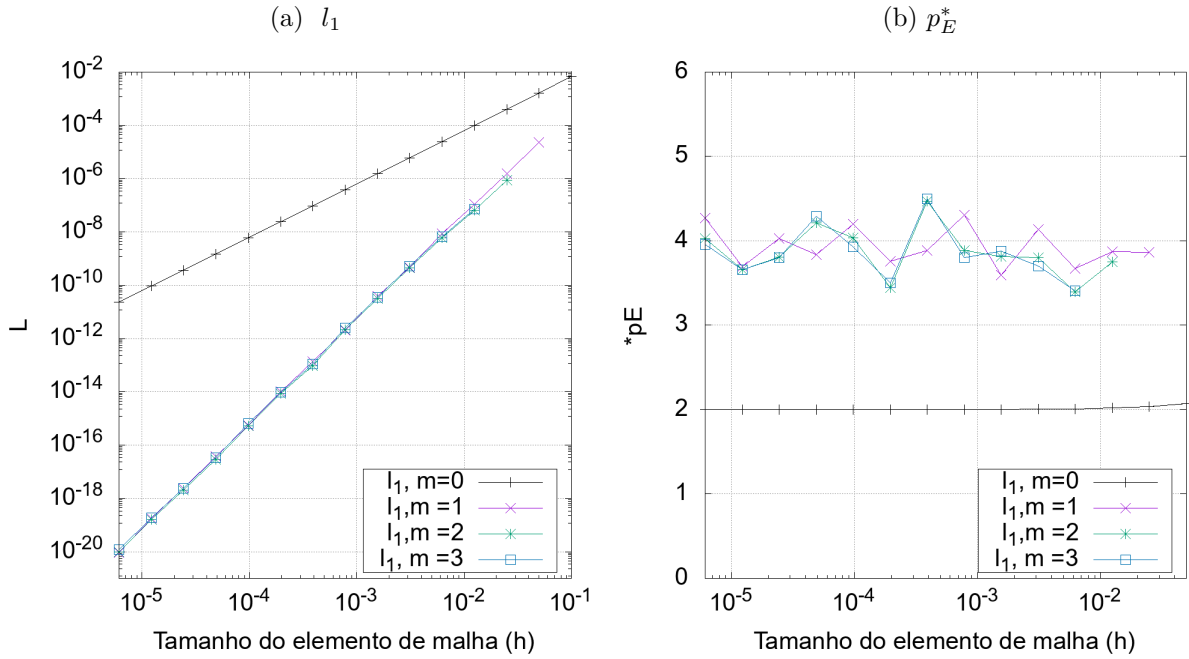


Figura 40 – Resultados: FRE, Variável l_1 , Poisson 1D com solução $T(x) = \sin(\pi x)$, Malha não uniforme.



5.4 SER

De modo semelhante ao caso uniforme, em todos os experimentos, SER apresentou o mesmo desempenho qualitativo, seguindo os mesmos padrões observados anteriormente:

1. A cada extrapolação perde-se a malha fina;
2. Quanto maior a quantidade de malhas disponíveis, mais chances de SER obter êxito.

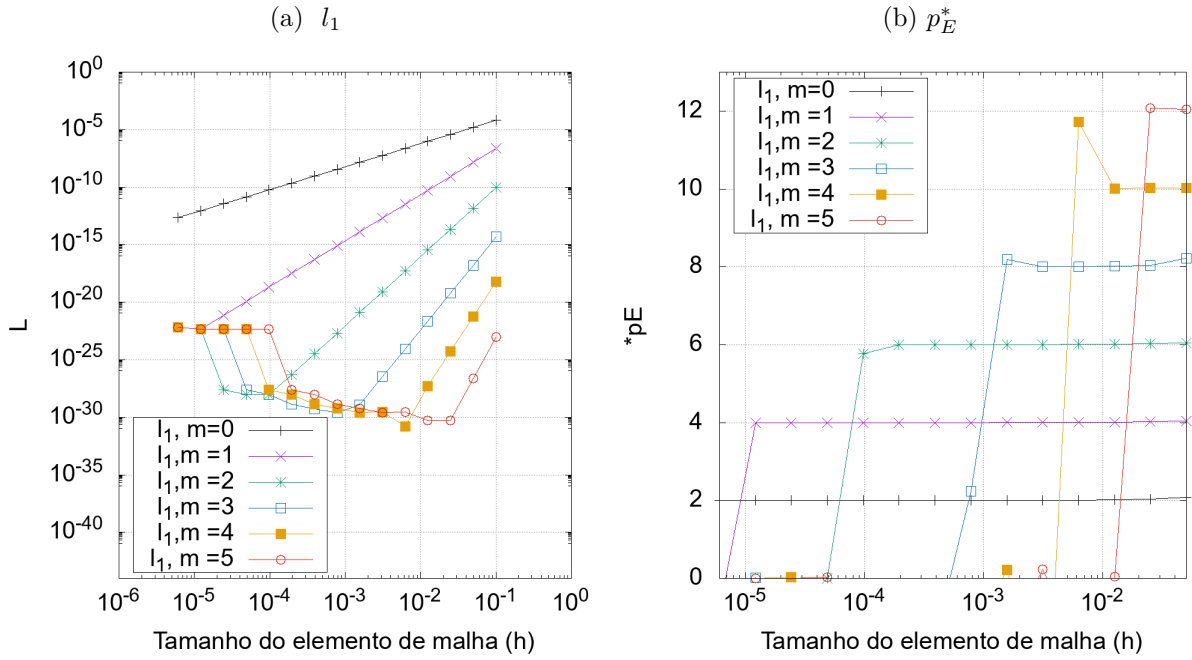
Estas ponderações podem ser observadas através da Figura 41 que apresenta os resultados de l_1 para Burgers.

Todavia lembrando, que o termo “perder” mencionado no item 1 neste âmbito, significa que a malha em questão não consegue progredir mais após aquela extrapolação, seja na redução do erro ou no aumento da acurácia. No entanto, isto não significa que seja ruim, como pode ser observado todas as malhas apresentaram significa melhora, incluindo as malhas mais finas. Em resumo, **SER** novamente apresentou grande desempenho com resultados qualitativos aos apresentados pela Figura 41, em todos os modelos unidimensionais utilizados.

Outro dado interessante, uma diferença de SER para CRE-I é justamente as **interpolações**, do mesmo modo que SMER e SMER-I. No caso de CRE-I e SER sua essência é ER, SMER e SMER-I é MER. Claramente as ponderações realizadas para o

desempenho inferior de SMER-I podem ser as mesmas para CRE-I, porque MER é uma versão aprimorada de ER.

Figura 41 – Resultados: SER, Variável l_1 , Burgers 1D com solução $T(x) = \frac{e^{xRe} - 1}{e^{Re} - 1}$, $Re = 1$, Malha não uniforme.



5.5 Resumo do capítulo e conclusões

Todas as técnicas expostas neste capítulo apresentaram resultados significativos, mas algumas acabaram se sobressaindo consideravelmente. **SER** e **SMER** apresentaram os melhores resultados, mostrando ser mais estáveis que as outras técnicas, porque funcionaram de forma equivalente em comparação com as malhas uniformes, onde também foram obtidos resultados expressivos.

CRE-I, SMER-I e FRE apresentaram desempenho similar com o termo de correção clássico (CRE), obtendo redução do erro significativa, mas estabilizaram suas ordens de acurácia em 4. Neste cenário utilizar estas variações de CRE não apresentou diferença alguma, porque CRE obteve resultados semelhantes. CRE por sinal, novamente cumpriu o seu papel, dentro da sua proposta, ela consegue aumentar pelo menos uma ordem verdadeira do método com redução do erro.

Lembrando que foram expostos os resultados principais, para evitar repetição e excesso de gráficos, sem haver uma necessidade real da sua exposição. No entanto, l_∞ também apresentou divergências para as técnicas CRE-I e SMER-I em questão de redução do erro e ordens de acurácia, em comparação a l_1 . Este resultado não esperado pode ajudar

em trabalhos futuros, no entendimento do motivo de CRE-I e SMER-I obterem resultados inferiores neste tipo de malha.

Alguns destes resultados adicionais para l_∞ podem ser vistos nos apêndices, por exemplo, gráficos de **SER** para variável l_∞ . Os restantes podem ser vistos integralmente no site mencionado no início deste capítulo. Ressaltando que SMER e SER mantiveram o nível semelhante a l_1 , também nesta variável.

6 RESULTADOS - LAPLACE 2D

Nestes experimentos foram utilizadas duas discretizações. Foram geradas 8 e 10 malhas para o caso de uniformidade e não, respectivamente, com malhas iniciais listadas na Seção 3.6.

6.1 MALHA UNIFORME

6.1.1 SMER

SMER obteve resultados similares com os relatados anteriormente, isto é significativa redução do erro e aumento nas ordens de acurácia.

Novamente as malhas iniciais são as mais beneficiadas, este resultado é ilustrado pela Figura 42. No entanto, conforme é apresentado pela Figura 43, mesmo com número inferior de malhas disponíveis, SMER obteve resultados similares para algumas malhas, em particular para Malha 6 em comparação com a inicial (Malha 1). Ambas alcançaram grandezas superiores a 10^{-20} para l_1 .

Até mesmo as malhas mais finas alcançaram significativa redução do erro, mas em menor escala em comparação com as iniciais, como pode ser observado através da Figura 42. Todavia, lembrando que o primeiro valor das curvas correspondem por $m = 0$ da Malha g .

Figura 42 – Resultados: SMER, Malhas $g = 1, 2, \dots, 9$, Variável l_1 , Laplace 2D, Malha uniforme.

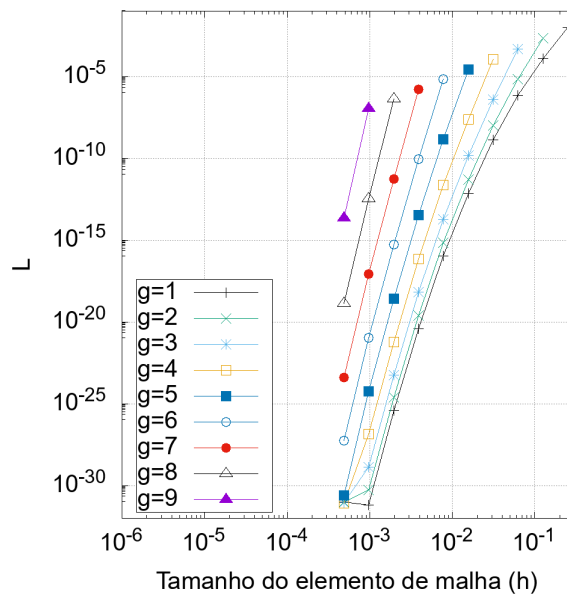
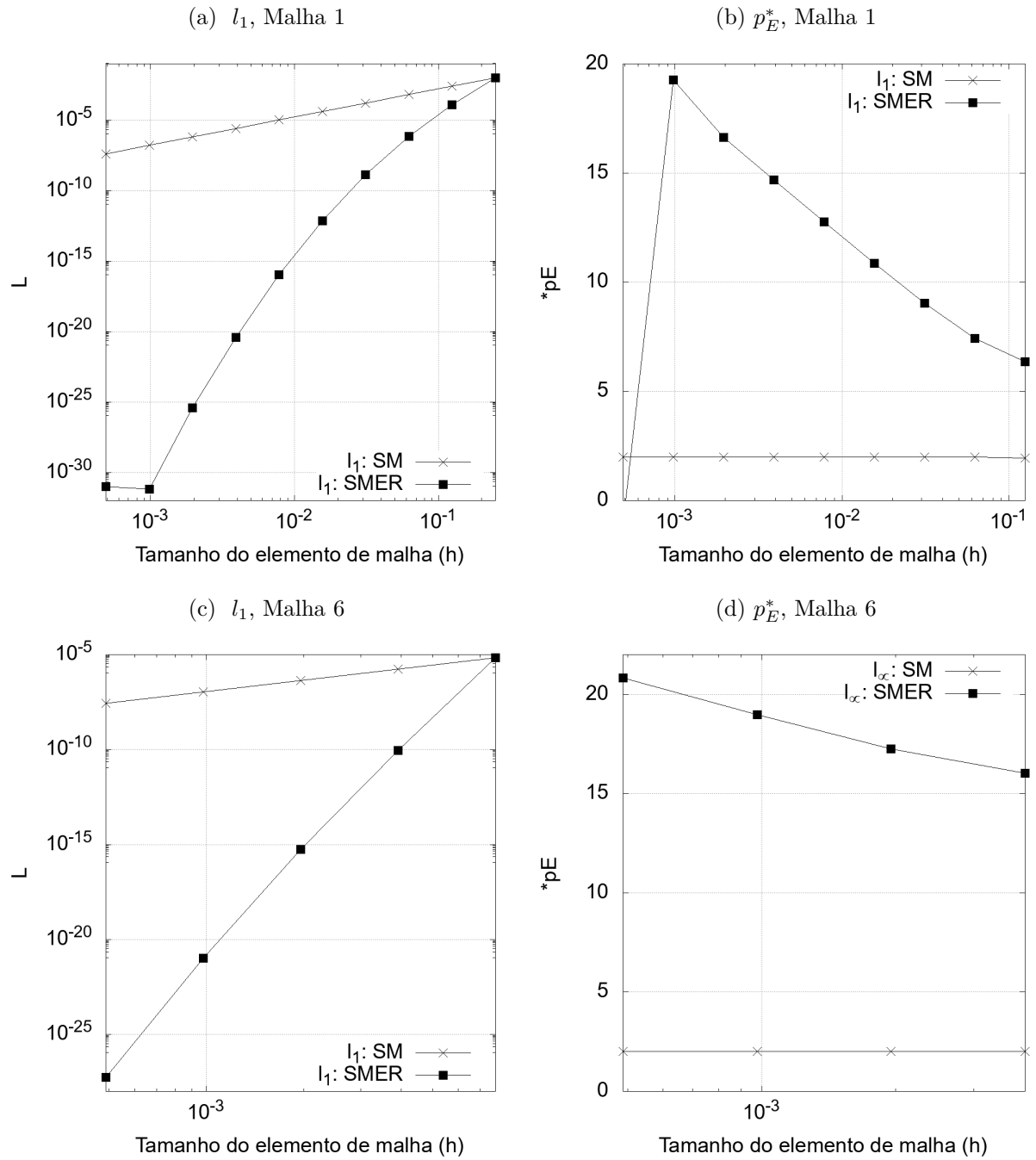


Figura 43 – Resultados: SMER, Malhas 1 e 6, Variável l_1 , Laplace 2D, Malha uniforme.

6.1.2 SMER INTERPOLADO

SMER-I obteve resultados qualitativos aos apresentados para as discretizações realizadas em malhas uniformes. Independente do conjunto escolhido, em particular para o caso bidimensional foram testados três conjuntos: β_1 , β_2 e β_3 .

β_1 e β_2 correspondem as malhas finais das discretizações uniforme e não, ou seja

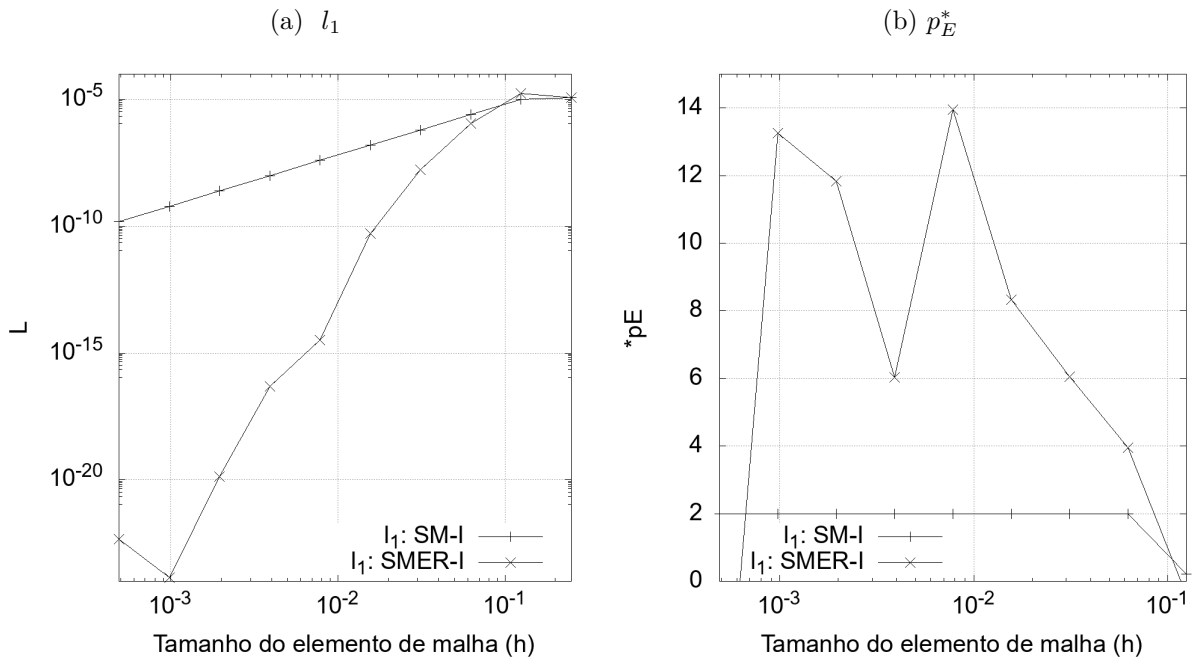
“ β_1 = Malha 10 uniforme”, “ β_2 = Malha 8 não uniforme”

e β_3 que corresponde a Malha 8, originada do refino da malha inicial 3, apresentada na Seção 3.6. A principal diferença deste conjunto para os outros, são os vetores iniciais h_x e h_y da malha inicial, porque são não uniformes com dimensões diferentes.

No entanto, conforme comentado anteriormente, independente do conjunto escolhido SMER-I obteve êxito na otimização, apresentando resultados qualitativos do exposto pela Figura 44, onde é ilustrado o caso de β_3 . Neste cenário, SMER-I novamente se equipara a SMER, servindo de complemento. Porque SMER não consegue otimizar por exemplo, a malha mais fina disponível, ao contrário de SMER-I.

Porém ressalta-se novamente, o processo de busca dos pontos para interpolações pode demorar dias, caso não se utilize a estratégia de pontos coincidentes, para malhas demasiadamente grandes. Este a priori é o principal defeito desta técnica.

Figura 44 – Resultados: SMER-I, Conjunto β_3 , Variável l_1 , Laplace 2D, Malha uniforme.



6.1.3 CRE clássico e com interpolação

Para os problemas bidimensionais não foram aplicados FRE, somente CRE clássico (CRE) e sua variação com o termo de correção com interpolação (CRE-I). Em resumo estes foram os resultados obtidos para o caso uniforme:

1. **CRE** apresentou resultados esperados, novamente conseguiu progredir ao menos uma ordem de acurácia de $p_0 = 2$ para $p_1 = 4$, com redução do erro significativa. Naturalmente, não a evolução após $m > 1$.

2. **CRE-I** apresentou desempenho equivalente com os resultados obtidos nos problemas unidimensionais uniformes, isto é, redução significativa do erro e aumento considerável das ordens de acurácia.

O primeira item é ilustrado pela Figura 45, CRE cumpriu seu papel dentro da sua proposta inicial. Isto é, progredir ao menos uma ordem de acurácia do método com redução do erro. O segundo item é ilustrada pela Figura 46, claramente CRE-I foi muito superior se equiparando a SMER e SMER-I.

Ambas estratégias de interpolações utilizadas para CRE-I alcançaram os mesmos resultados de forma qualitativa. Neste cenário, é preferível utilizar a interpolação alternativa unidimensional, pelo baixo custo operacional, caso ela seja aplicável. Todavia, lembrando que estas estratégias foram explicadas na Seção 3.5.

Figura 45 – Resultados: CRE, Variável l_1 , Laplace 2D, Malha uniforme.

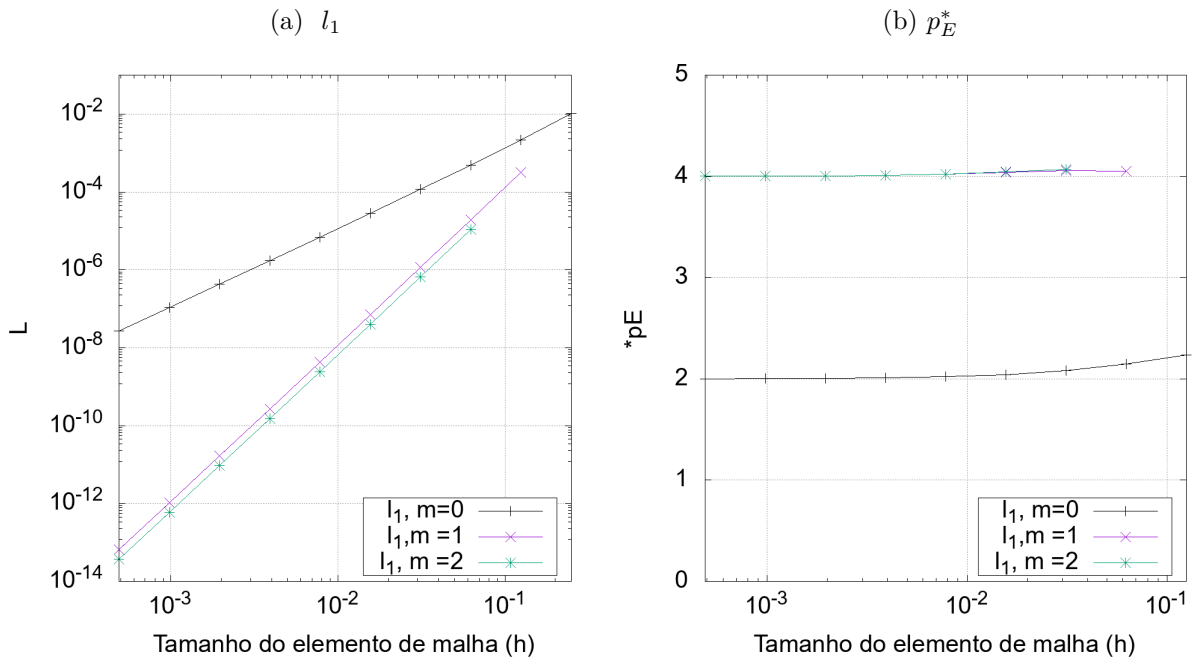
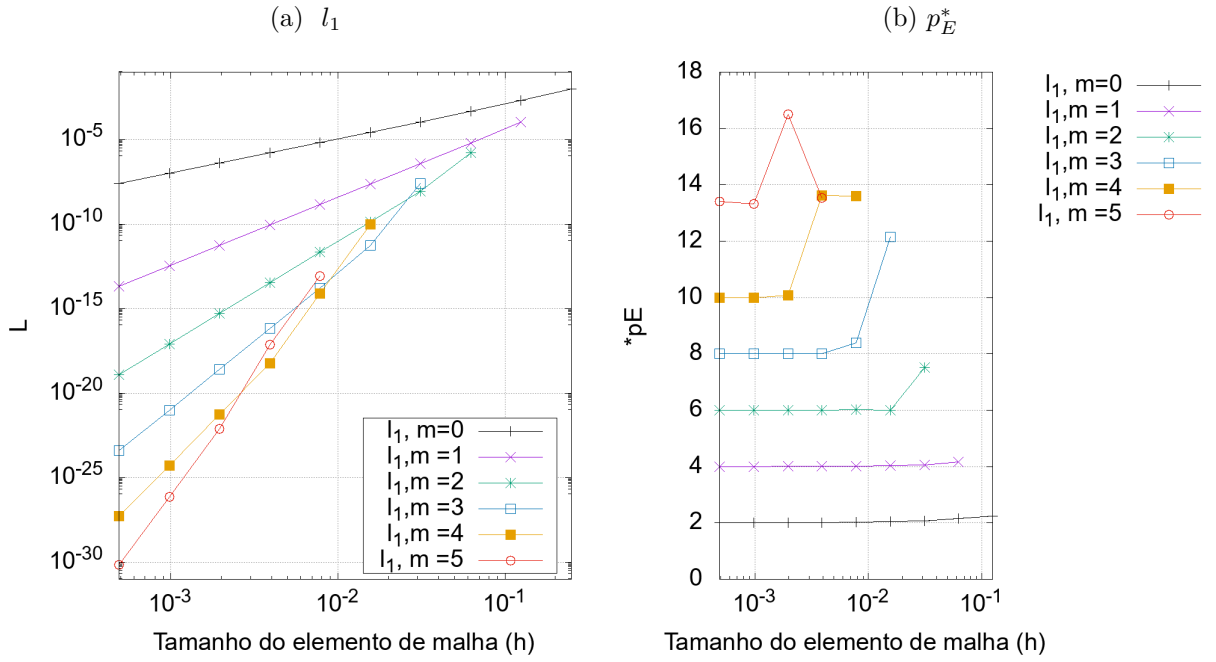


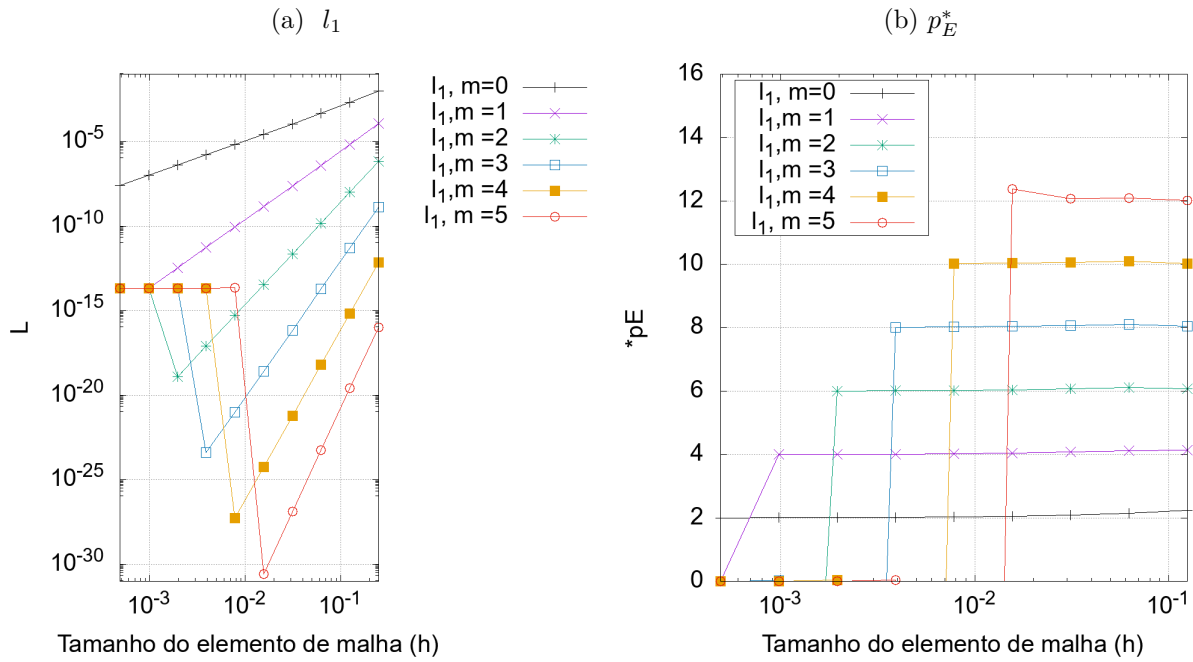
Figura 46 – Resultados: CRE-I, Variável l_1 , Laplace 2D, Malha uniforme.

6.1.4 SER

Novamente SER apresentou desempenho qualitativo com os apresentados anteriormente, isto é, redução significativo do erro e aumento das ordens de acurácia. Do mesmo modo, a cada extrapolação m perde-se a malha mais fina. Este resultado é ilustrado pela Figura 47.

Lembrando que o termo “perder” significa que a malha não consegue mais progredir, após aquela extrapolação, seja na redução do erro ou aumento da acurácia. No entanto, não significa que não foi possível obter resultados relevantes, conforme pode ser observado na Figura 47.

SER, CRE-I, SMER e SMER-I apresentaram ótimos e similares resultados para este tipo malha. Mas no geral CRE-I levou vantagem, pelo custo operacional e pelo fato de conseguir otimizar as malhas finas.

Figura 47 – Resultados: SER, Variável l_1 , Laplace 2D, Malha uniforme.

6.2 MALHA NÃO UNIFORME

6.2.1 SMER

A quantidade inferior de malhas disponíveis e complexidade do modelo afetaram o desempenho de SMER. No entanto houve redução do erro novamente, mas com menor escala em comparação para o caso uniforme. As ordens de acurácia apresentam melhora, mas também em menor escala.

Estes resultados são ilustrados qualitativamente pelas figuras 48 e 49. Através da Figura 49 é possível observar que o maior erro alcançado para l_1 foi aproximadamente 10^{-11} , bem abaixo dos resultados obtidos no caso uniforme que obteve grandezas superiores a 10^{-20} .

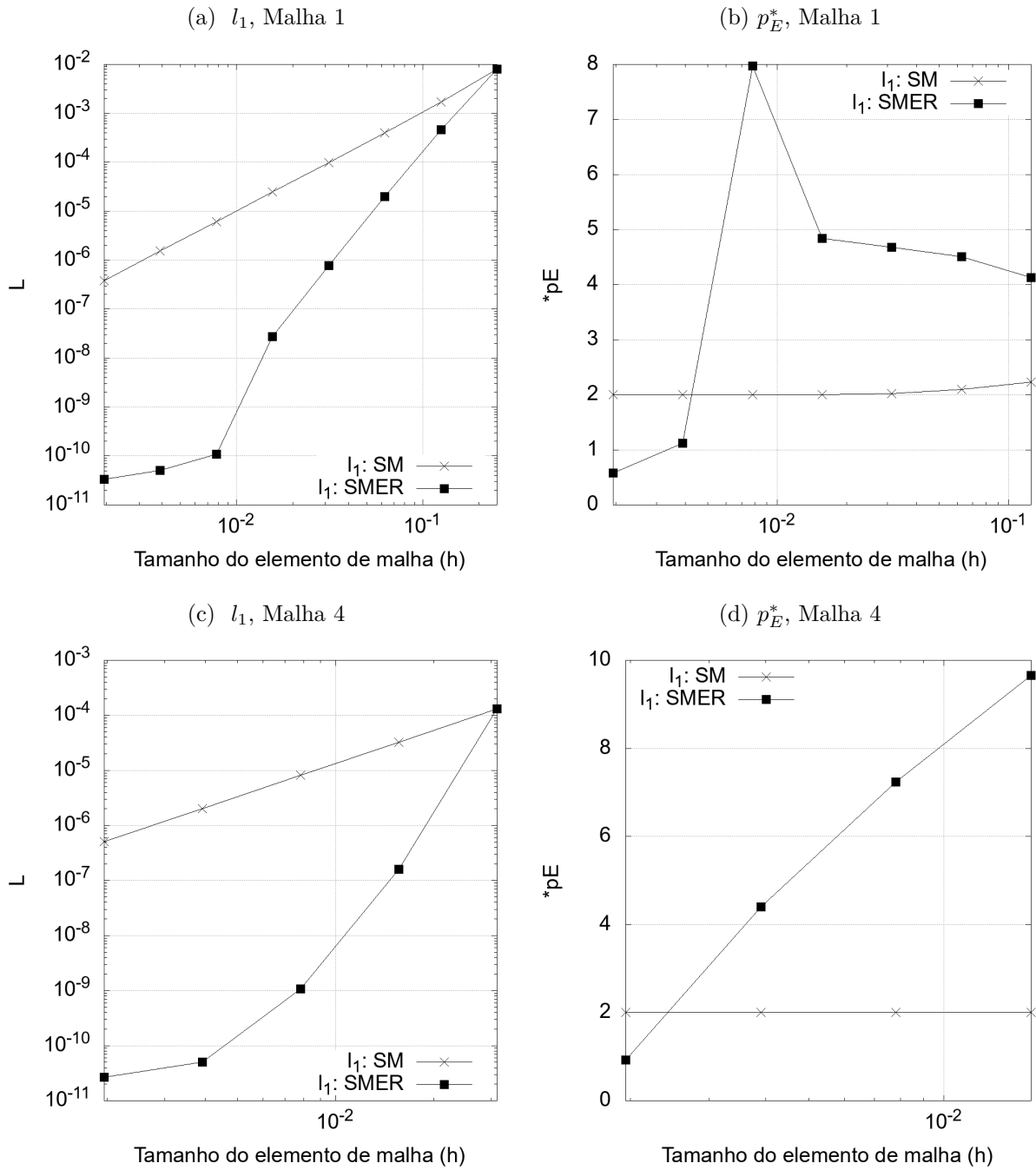
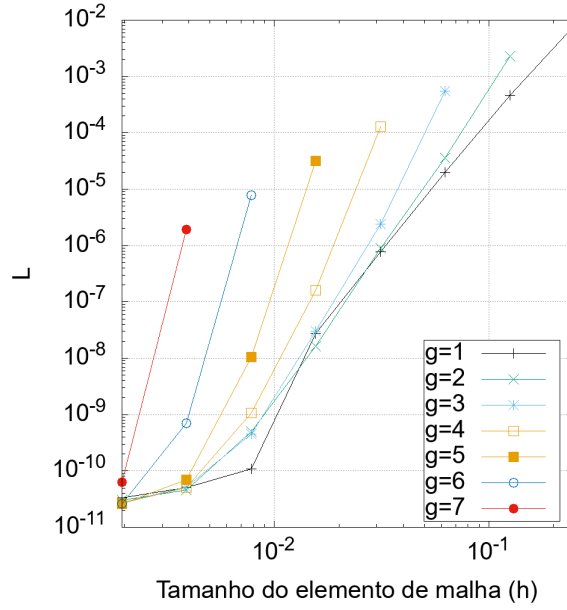
Figura 48 – Resultados: SMER, Malhas 1 e 4, Variável l_1 , Laplace 2D, Malha não uniforme.

Figura 49 – Resultados: SMER, Malhas $g = 1, 2, \dots, 9$, Variável l_1 , Laplace 2D, Malha não uniforme.



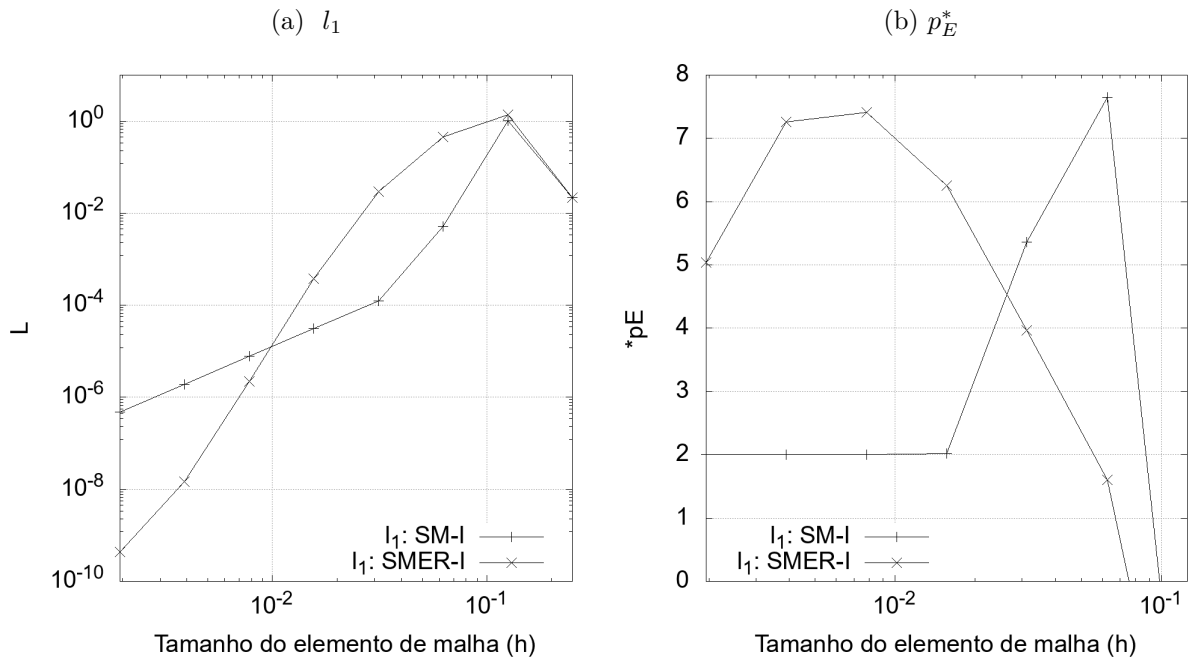
6.2.2 SMER INTERPOLADO

Os conjuntos analisados são os mesmos do caso uniforme. SMER INTERPOLADO (SMER-I) já havia apresentando desempenho inferior no caso unidimensional, e neste cenário bidimensional se mostrou mais instável.

Este resultado é ilustrado pela Figura 50, para o conjunto β_2 . No entanto como pode ser observado houve redução do erro para l_1 , é possível observar também que SM-I apresenta instabilidade inicialmente, o que certamente afeta SMER-I. Neste cenário, as condições não são ideais para aplicar SMER-I, porque possivelmente l_1 está afetado por alguma outra fonte de erro, diferente de Eh . Neste caso teoricamente MER não é aplicável, técnica base de SMER-I.

Em resumo novamente foram constatadas dificuldades com a troca da discretização. De modo igual ao caso unidimensional, SMER-I obteve desempenho inferior.

Figura 50 – Resultados: SMER-I, Conjunto β_2 , Variável l_1 , Laplace 2D, Malha não uniforme.



6.2.3 CRE clássico e com interpolação

De modo igual a SMER-I, CRE com interpolação (CRE-I) apresentou instabilidade. Novamente obtendo desempenho muito inferior ao caso uniforme, não conseguindo progredir após a primeira extrapolação. Suas ordens de acurácia apresentaram instabilidade, porém houve redução do erro.

CRE clássico (CRE) novamente se mostrou estável, cumprindo com a sua proposta de progredir ao menos uma ordem de acurácia do método, com redução do erro.

Neste cenário, CRE obteve desempenho similar a CRE-I, apresentando maior estabilidade em suas ordens de acurácia. Estes resultados são apresentados pelas figuras 51 e 52.

6.2.4 SER

Do mesmo modo que SMER, a quantidade inferior de malhas disponíveis e complexidade do modelo afetaram o desempenho de SER. No entanto houve redução do erro novamente, mas em menor escala em comparação para o caso uniforme. As ordens de acurácia apresentam melhora, mas apresentaram comportamento atípico.

Neste cenário, o termo “atípico” faz referência as extrapolações (m), isto é, embora para $m > 1$ a princípio o erro de l_1 apresenta evolução. No entanto isto não se reflete nas ordens de acurácia, já apresentando instabilidade para $m = 2$.

Ressaltando, novamente é constatada a “perca” da malha mais fina a cada extra-polação. Estes resultados comentados anteriormente são ilustrados pela Figura 53.

Figura 51 – Resultados: CRE, Variável l_1 , Laplace 2D, Malha não uniforme.

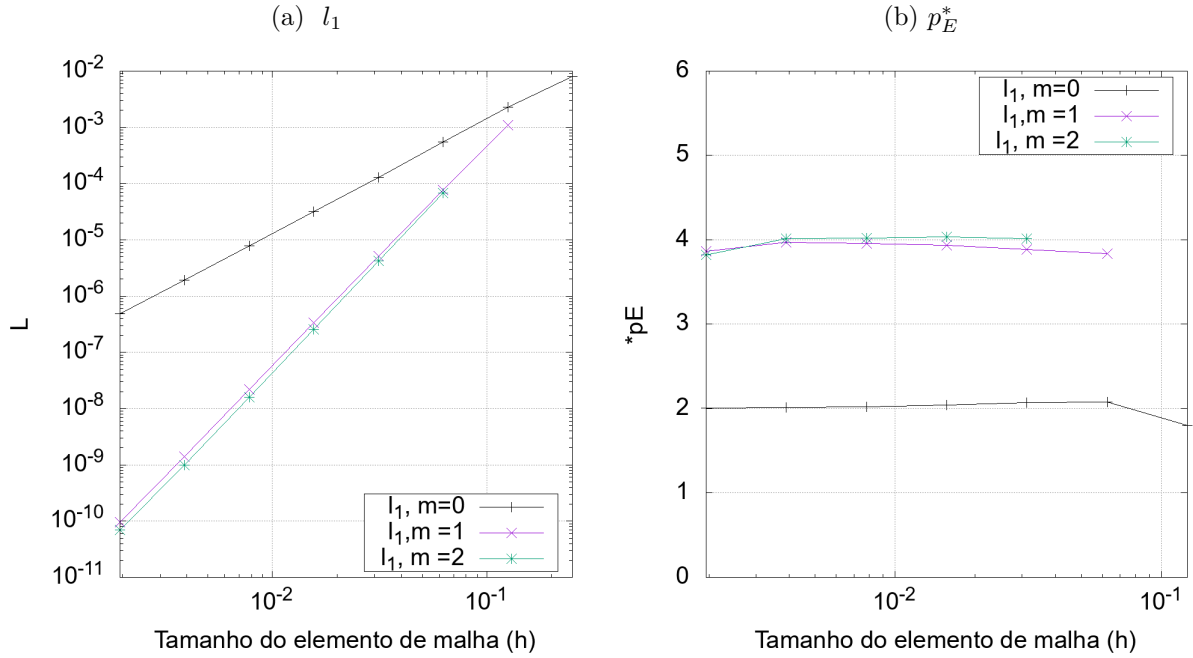


Figura 52 – Resultados: CRE-I, Variável l_1 , Laplace 2D, Malha não uniforme.

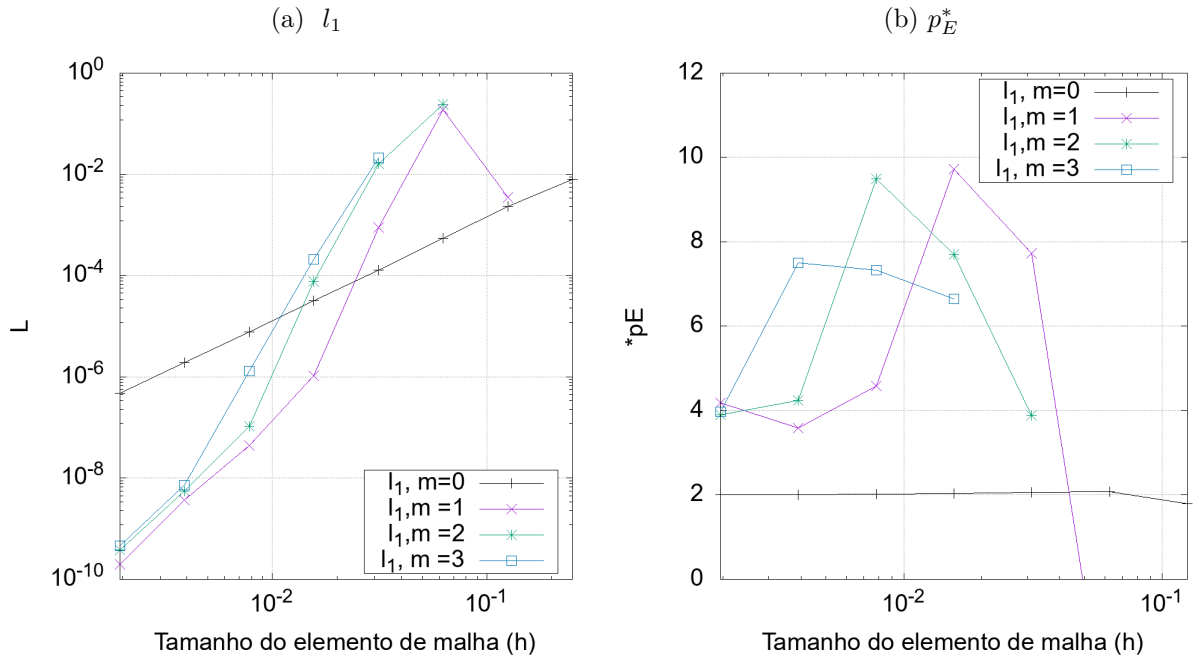
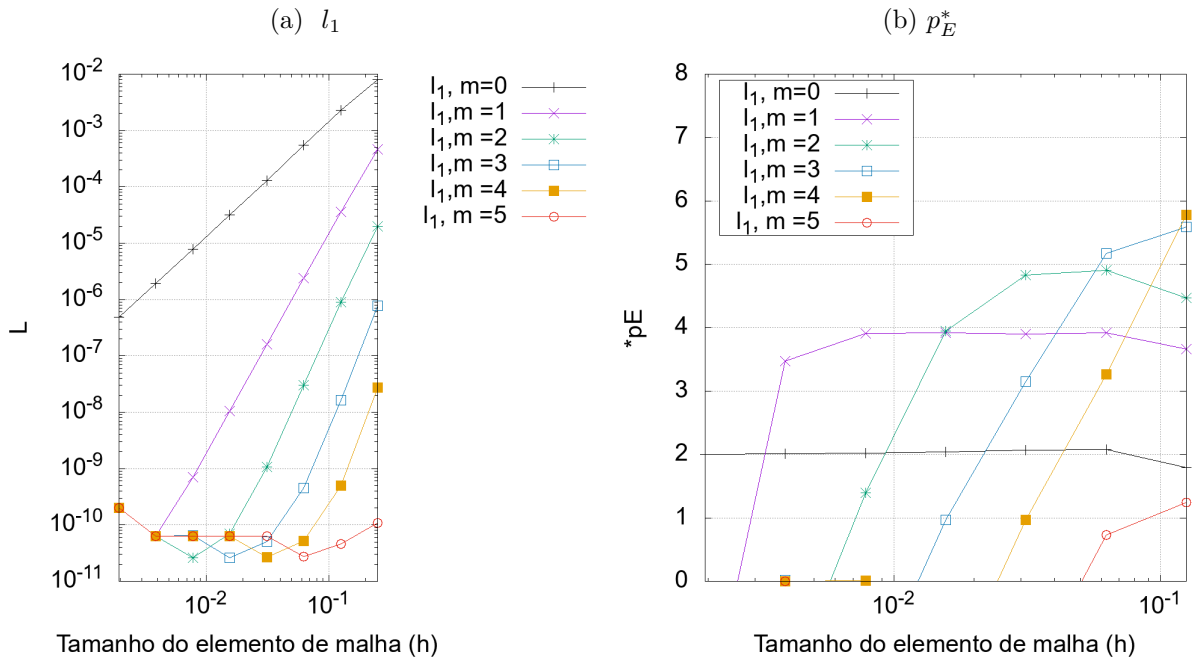


Figura 53 – Resultados: SER, Variável l_1 , Laplace 2D, Malha não uniforme.

6.3 Resumo do capítulo e conclusões

Ficaram constatadas diferenças notórias entre os resultados obtidos para cada caso.

Nas malhas uniformes CRE-I, SMER, SMER-I e SER alcançaram excelentes resultados. Atingindo grandezas superiores a 10^{-20} para l_1 , e aumento considerável nas ordens de acurácia, tudo isso sem a necessidade da realização de novas simulações, somente com pós-processamento de dados.

No entanto, trocando para o caso não uniforme em termos de grandeza de erro de l_1 , elas se equiparam a CRE. Porque todas as técnicas atingiram grandeza aproximada em 10^{-11} para l_1 . CRE se mostrou estável em ambos os cenários, cumprindo com a sua proposta de progredir ao menos uma ordem de acurácia com redução do erro.

As interpolações provavelmente afetaram o desempenho de SMER-I e CRE-I. Possivelmente com o acesso a um número maior de malhas, SER e SMER poderiam ter obtido resultados melhores. Elas se mostraram estáveis, mas não conseguiram reduzir o erro com a mesma eficácia do caso uniforme.

Os resultados de l_∞ são apresentados nos apêndices de forma resumida, para trabalhos futuros podem ajudar no entendimento do que aconteceu no caso não uniforme, porque também apresentaram divergências.

7 RESULTADOS: EQUAÇÃO DE BURGERS 2D

Neste capítulo são apresentados os resultados para a equação de Burgers 2D com $Re = 1$, discretizada com malhas uniformes. Foram geradas 10 malhas para este modelo, cuja malha mais grossa foi apresentada na Seção 3.6, as restantes foram obtidas através do seu refinamento.

7.1 SMER

Para ambas as velocidades u e v , foram obtidos resultados semelhantes, houve significativa redução do erro e aumento das ordens de acurácia. Novamente, pode ser observado que SMER beneficia as malhas mais grossas.

Estes resultados são ilustrados de forma qualitativa pelas figuras 54, 55 e 56. Novamente SMER se mostrou estável, e provavelmente caso tivesse mais malhas disponíveis, é provável que haveria mais redução do erro e aumento da acurácia das malhas otimizadas.

Figura 54 – Resultados: SMER, Variável h_1 , Malhas $g = 1, 2, \dots, 9$, Burgers 2D, $Re = 1$.

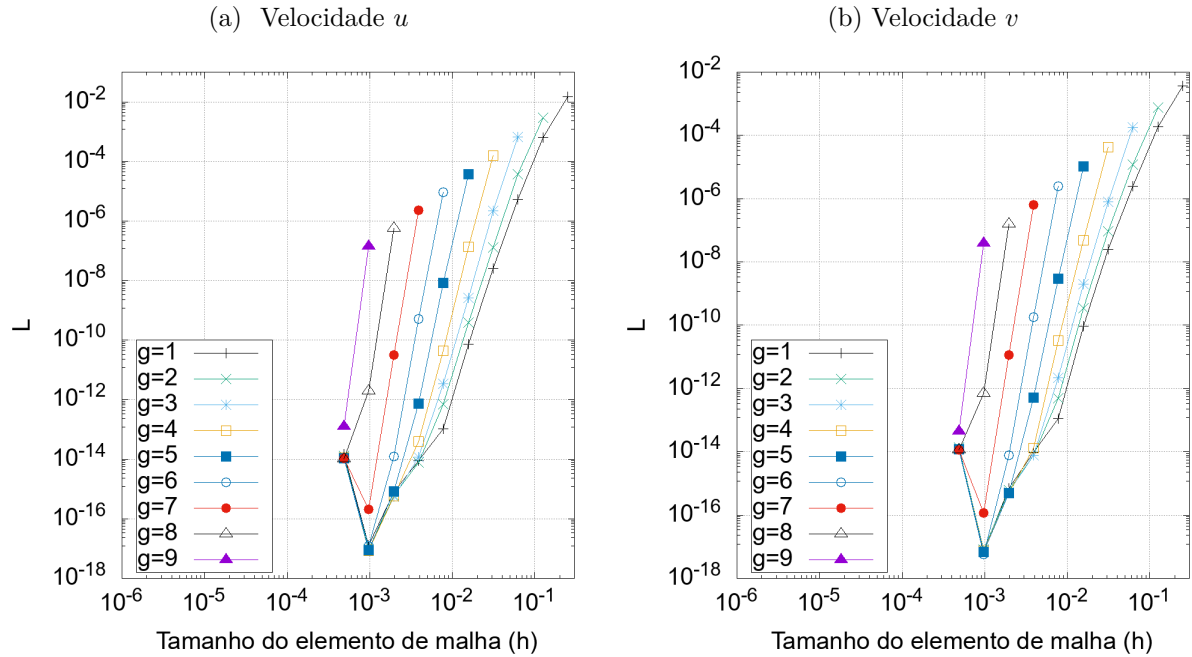


Figura 55 – Resultados: SMER, Malha base 1, Variável l_1 , Burgers 2D, $Re = 1$, velocidade u .

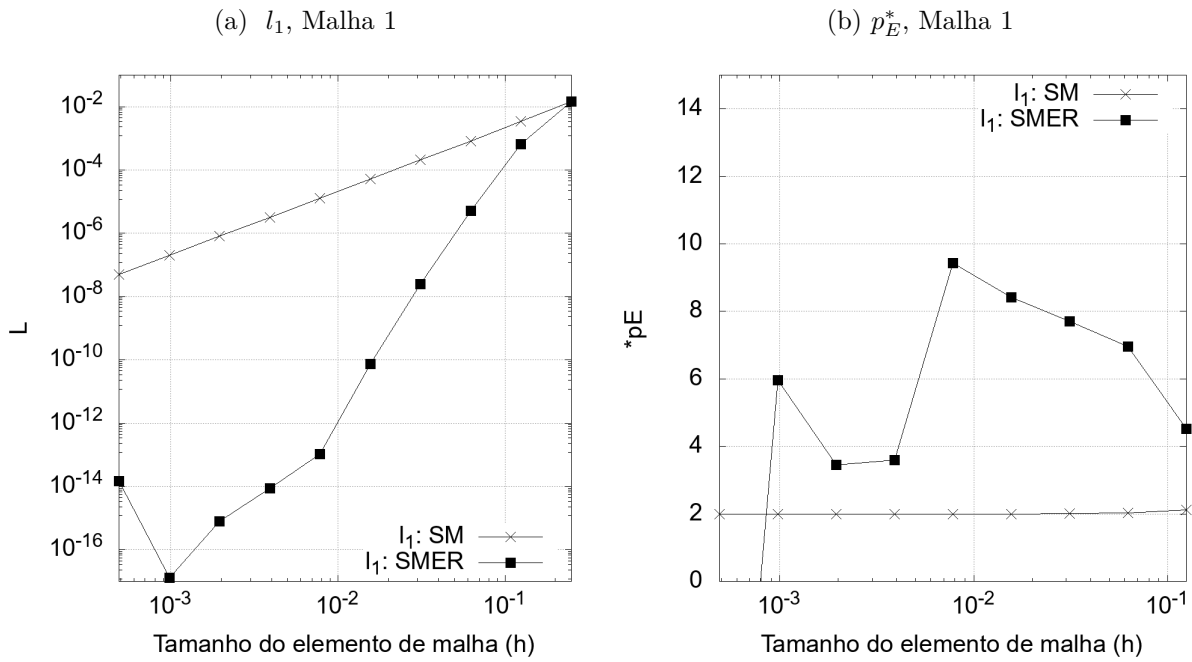
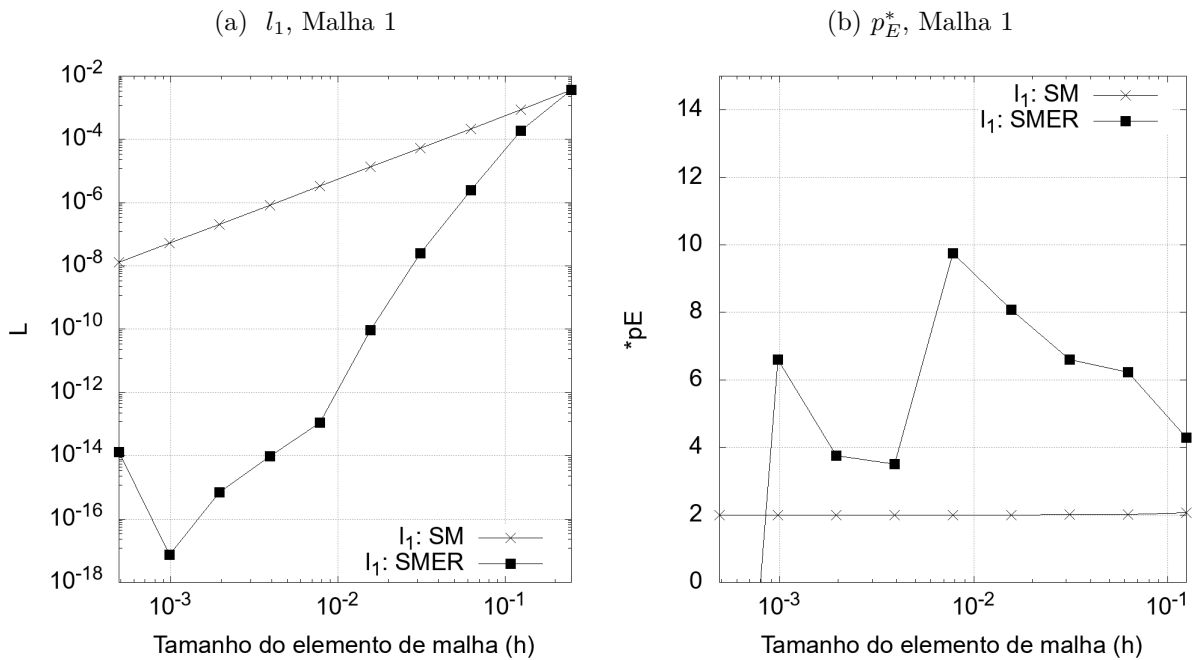


Figura 56 – Resultados: SMER, Malha base 1, Variável l_1 , Burgers 2D, $Re = 1$, velocidade v .



7.2 SMER-I

Para ambas as velocidades u e v , foram obtidos resultados semelhantes, houve significativa redução do erro e aumento das ordens de acurácia. Estes resultados são

ilustradas pelas figuras 57 e 58. Analisou-se o desempenho de SMER-I no conjunto β_2 , o mesmo utilizado para Laplace 2D.

Novamente SMER-I se mostrou estável quando são utilizadas malhas uniformes, neste cenário ele se equipara com SMER.

Figura 57 – Resultados: SMER-I, Conjunto β_2 , Variável l_1 , Burgers 2D, $Re = 1$, velocidade u .

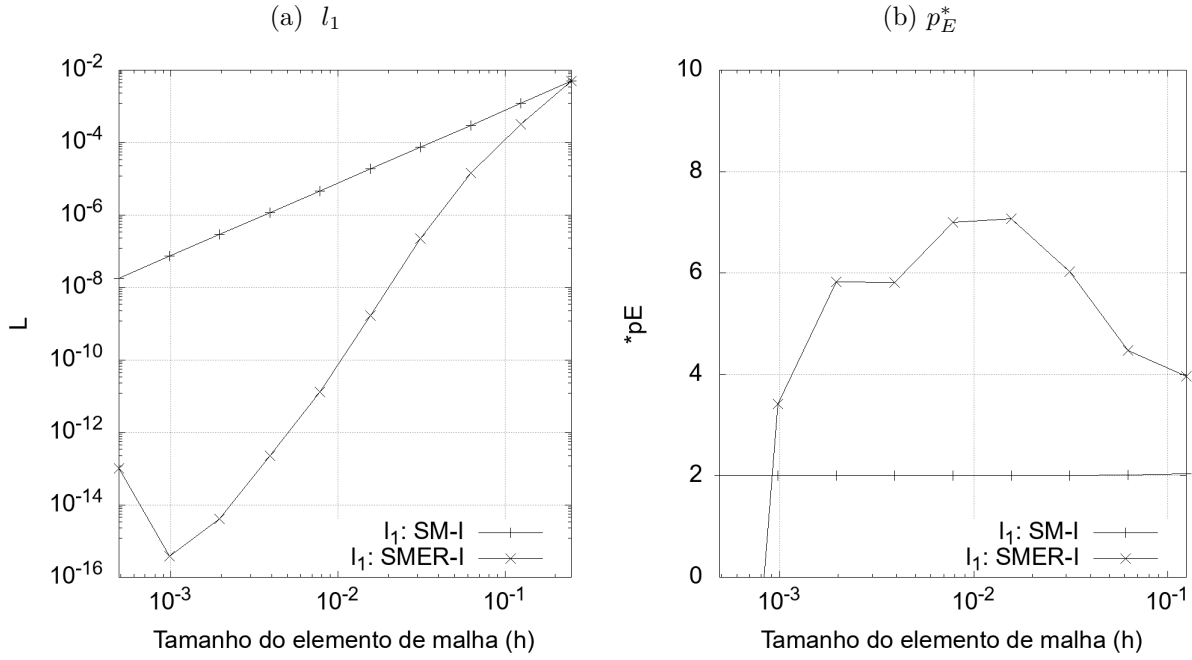
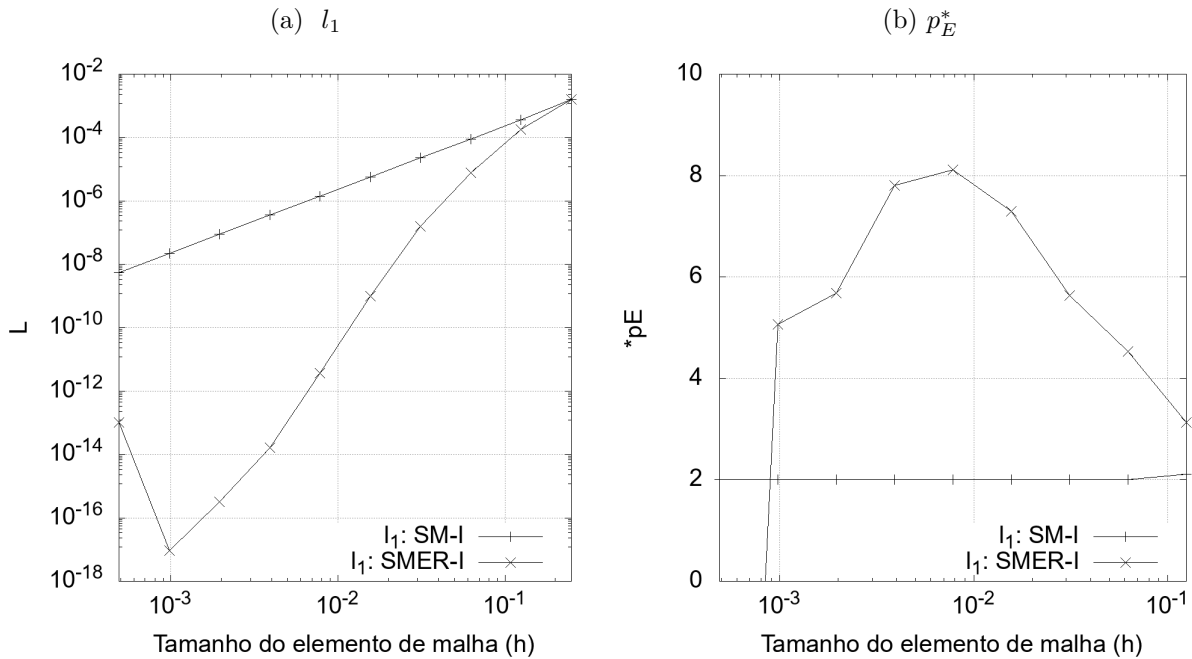


Figura 58 – Resultados: SMER-I, Conjunto β_2 , Variável l_1 , Burgers 2D, $Re = 1$, velocidade v .



7.3 CRE clássico e com interpolação

CRE clássico (CRE) novamente se mostrou estável, cumprindo com a sua proposta de progredir ao menos uma ordem de acurácia do método, com redução do erro para l_1 , para ambas as velocidades.

CRE com interpolação (CRE-I) conseguiu reduzir o erro com mais efetividade e obteve maiores ordens de acurácia. Neste cenário se equiparou a SMER e SMER-I. Do mesmo do que SMER-I, para malhas uniformes CRE-I novamente apresentou estabilidade.

Estes resultados estão ilustrados pelas Figuras 59, 60, 61 e 62.

7.4 SER

SER apresentou desempenho similar, comparando com os resultados obtidos com CRE-I, SMER e SMER-I. Novamente como SMER, apresentou mais uma vez estabilidade independente do modelo ou tipo de malha utilizados.

Os resultados para variável l_1 são ilustrados pelas figuras 63 e 64.

Figura 59 – Resultados: CRE, Variável l_1 , Burgers 2D, $Re = 1$, velocidade u .

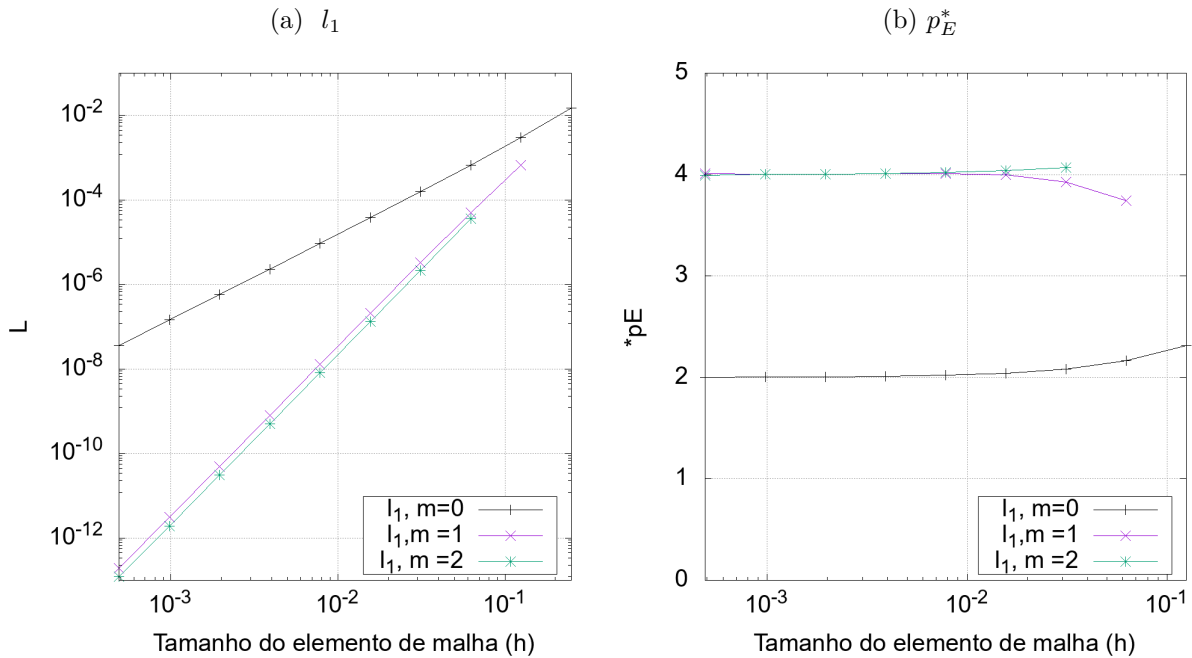


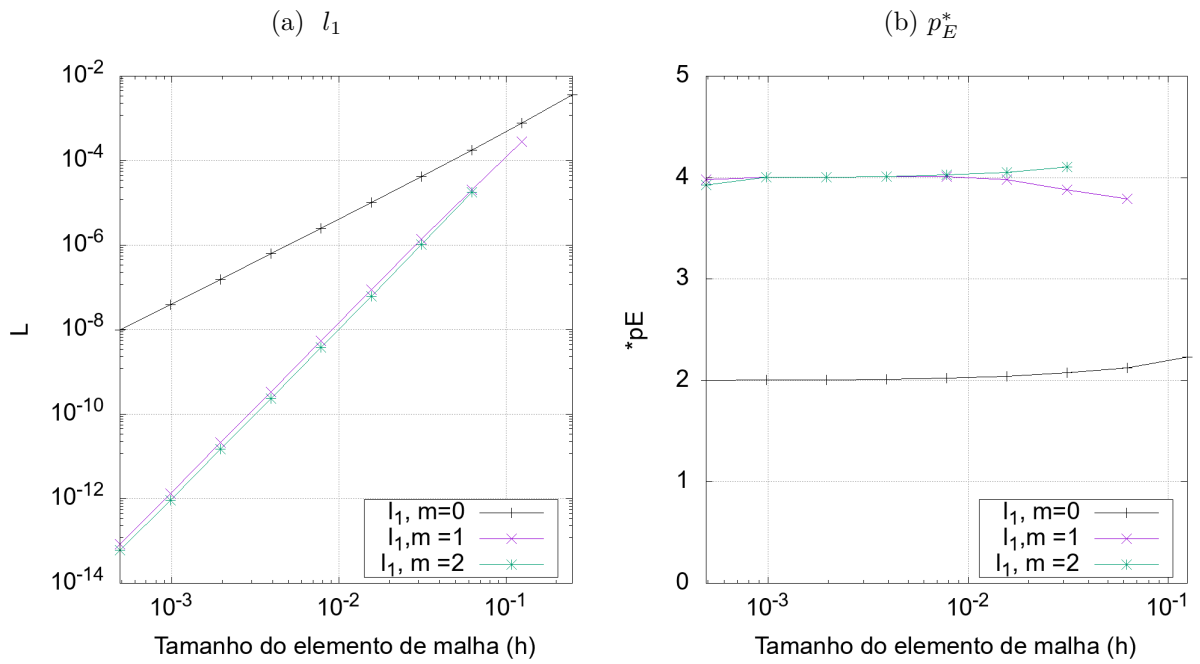
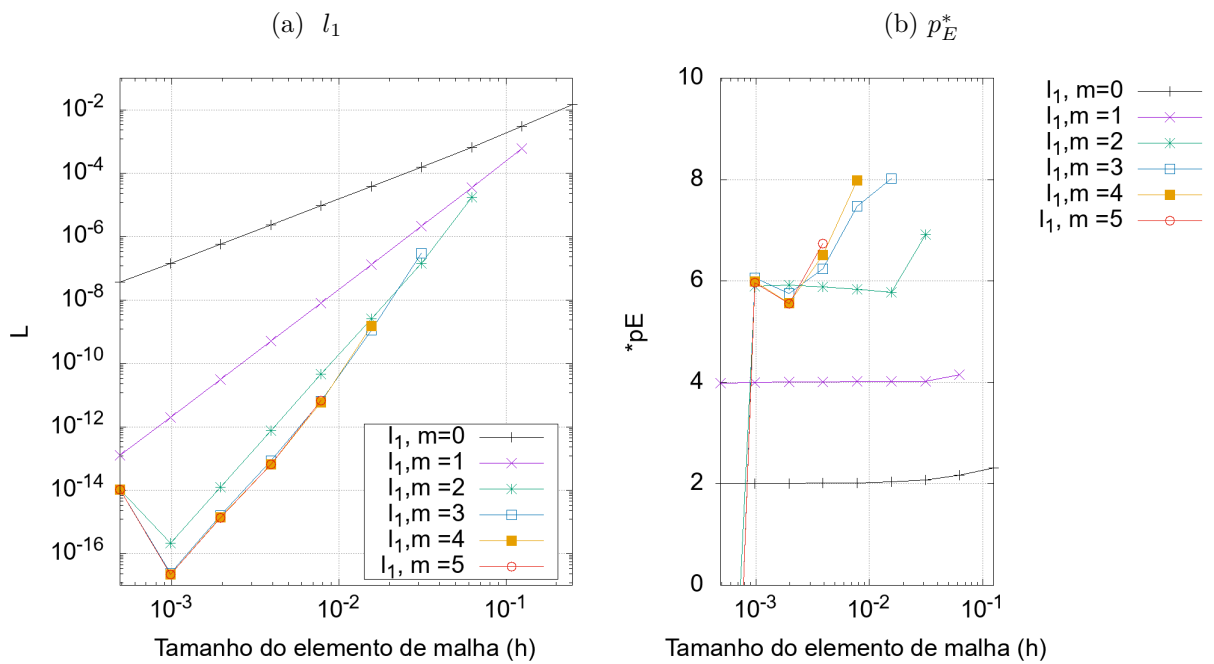
Figura 60 – Resultados: CRE, Variável l_1 , Burgers 2D, $Re = 1$, velocidade v .Figura 61 – Resultados: CRE-I, Variável l_1 , Burgers 2D, $Re = 1$, velocidade u .

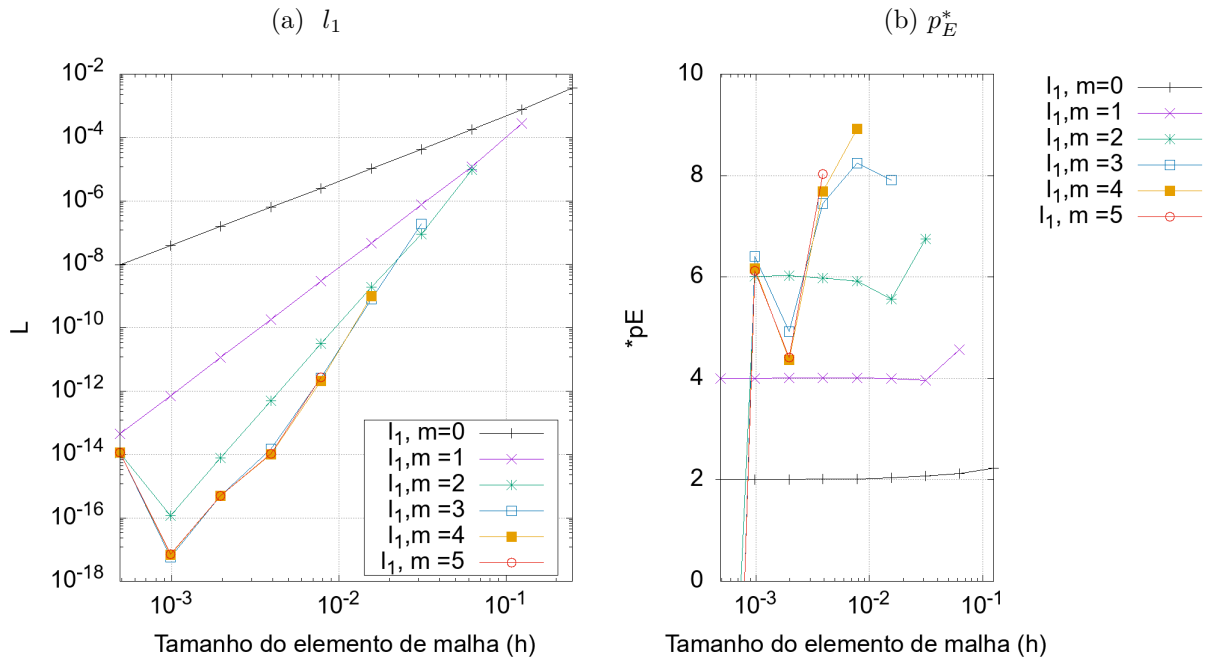
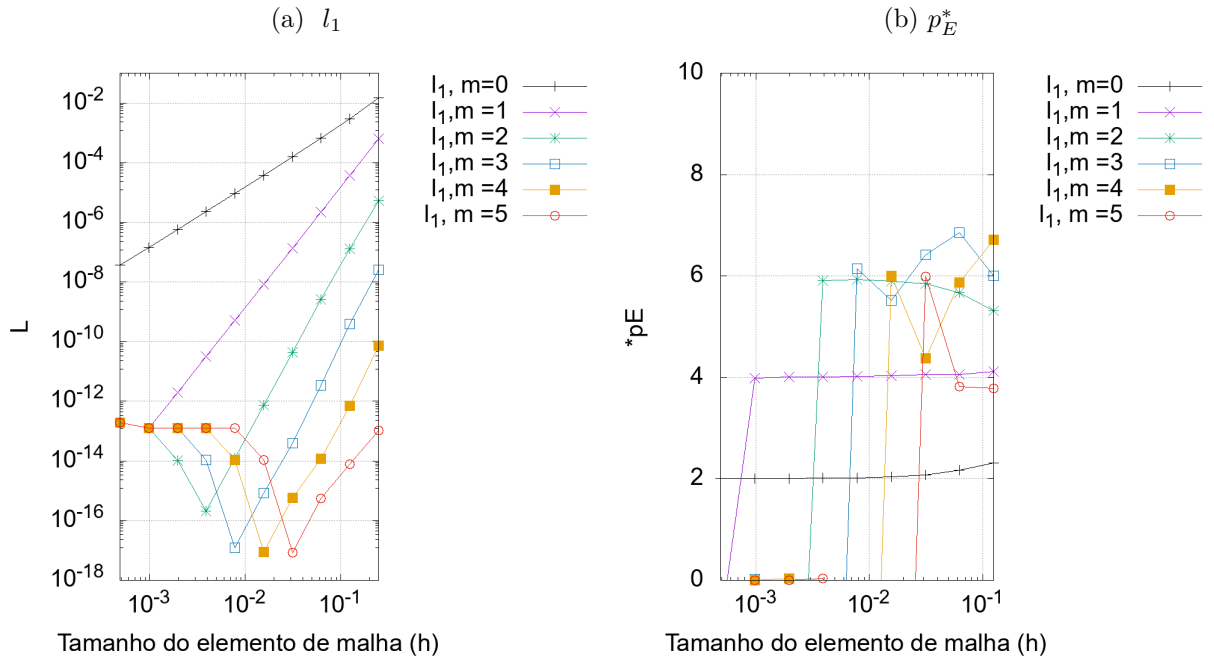
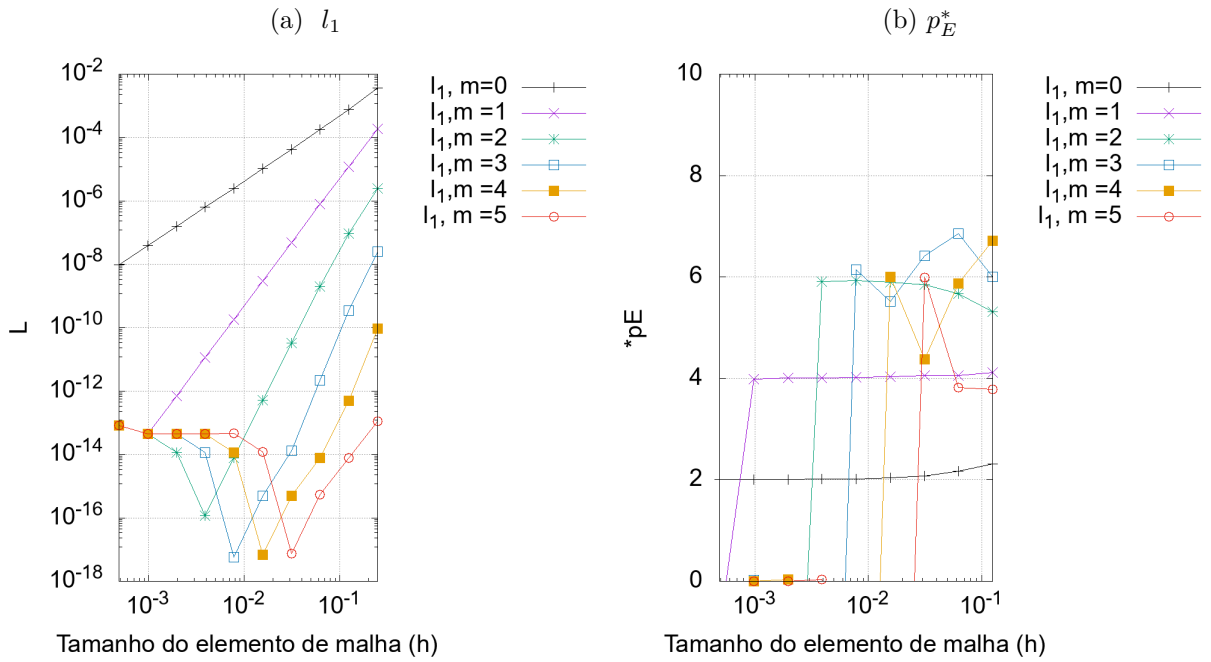
Figura 62 – Resultados: CRE-I, Variável l_1 , Burgers 2D, $Re = 1$, velocidade v .Figura 63 – Resultados: SER, Variável l_1 , Burgers 2D, $Re = 1$, velocidade u .

Figura 64 – Resultados: SER, Variável l_1 , Burgers 2D, $Re = 1$, velocidade v .

7.5 Resumo do capítulo e conclusões

CRE-I, SMER, SER, SMER-I apresentaram desempenho similar, com leve vantagem para CRE-I porque consegue otimizar as malhas finas. Pode-se dizer que ela conseguiu leve vantagem em relação as técnicas **SER**, **SMER** e **SMER-I**. A última citada, em particular deve ser ressaltado novamente, é a mais custosa operacionalmente dentre todas para funcionar, mas é a mais completa, por conseguir otimizar qualquer malha e conjunto de pontos dentro do domínio do cálculo. No entanto, ela não deve ser priorizada, caso alguma das outras técnicas seja aplicável no problema.

CRE apresentou novamente desempenho estável, dentro da sua proposta: conseguir progredir uma ordem verdadeira do método de $p_0 = 2$ para 4 com redução do erro. As outras técnicas conseguiram ordens superiores a 4 e uma maior redução do erro. Mas é impressionante, CRE cumpriu com a sua proposta em todos os modelos utilizados até agora.

Os resultados para l_∞ , podem ser vistos nos apêndices, em resumo foram obtidos resultados similares com os apresentados de l_1 .

8 RESULTADOS - NAVIER-STOKES

Neste capítulo são apresentados os resultados para as equações de NAVIER-STOKES, discretizada com malhas uniformes. Foram geradas 9 malhas para este modelo, cuja malha inicial foi apresentada na Seção 3.6, as restantes foram obtidas através do seu refinamento. A técnica SMER INTERPOLADO foi aplicada no conjunto β_2 , que representa a malha 8, do caso não uniforme, com exceção dos contornos.

8.1 SMER

SMER apresentou ótimo desempenho para ambas velocidades, alcançando nas malhas mais grossas grandezas de erros superiores a 10^{-15} , consideravelmente superior ao erro inicial.

Em todas as malhas em que SMER é aplicável, houve redução do erro e aumento nas ordens de acurácia. Com aproveitamento em menor escala para as malhas mais finas, e maior para as mais grossas. Conforme já observado anteriormente em outros experimentos.

Estes resultados estão ilustrados de forma qualitativa pelas figuras 65, 66 e 67.

Figura 65 – Resultados: SMER, Variável h_1 , Malhas $g = 1, 2, \dots, 8$, Navier-Stokes 2D.

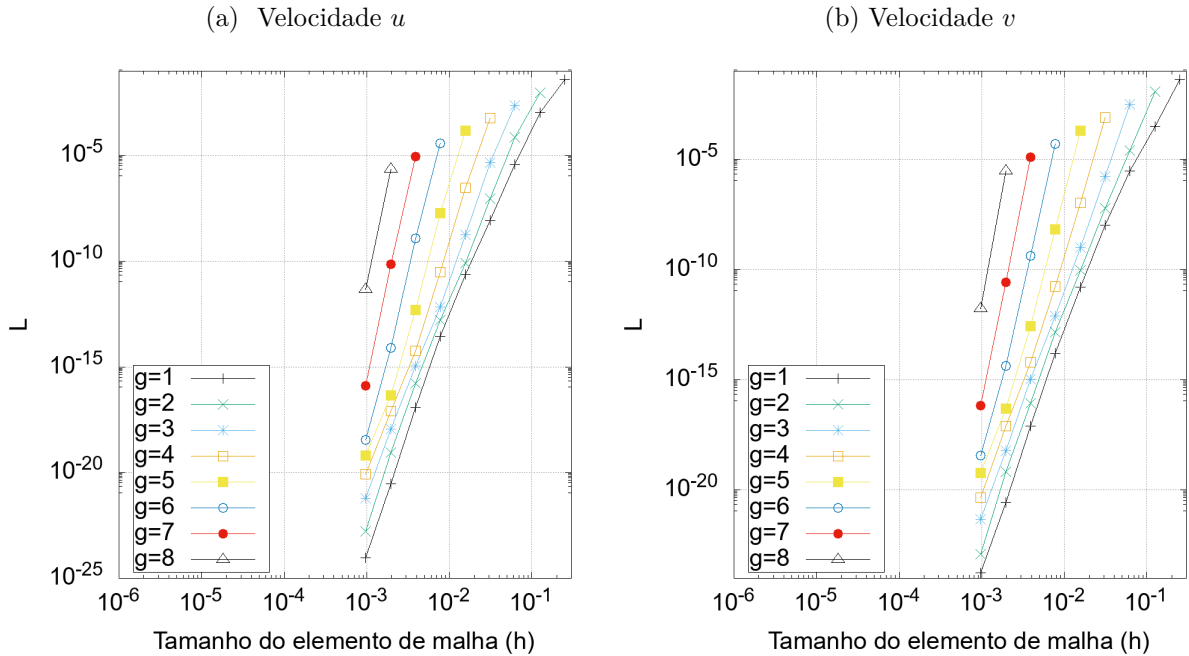
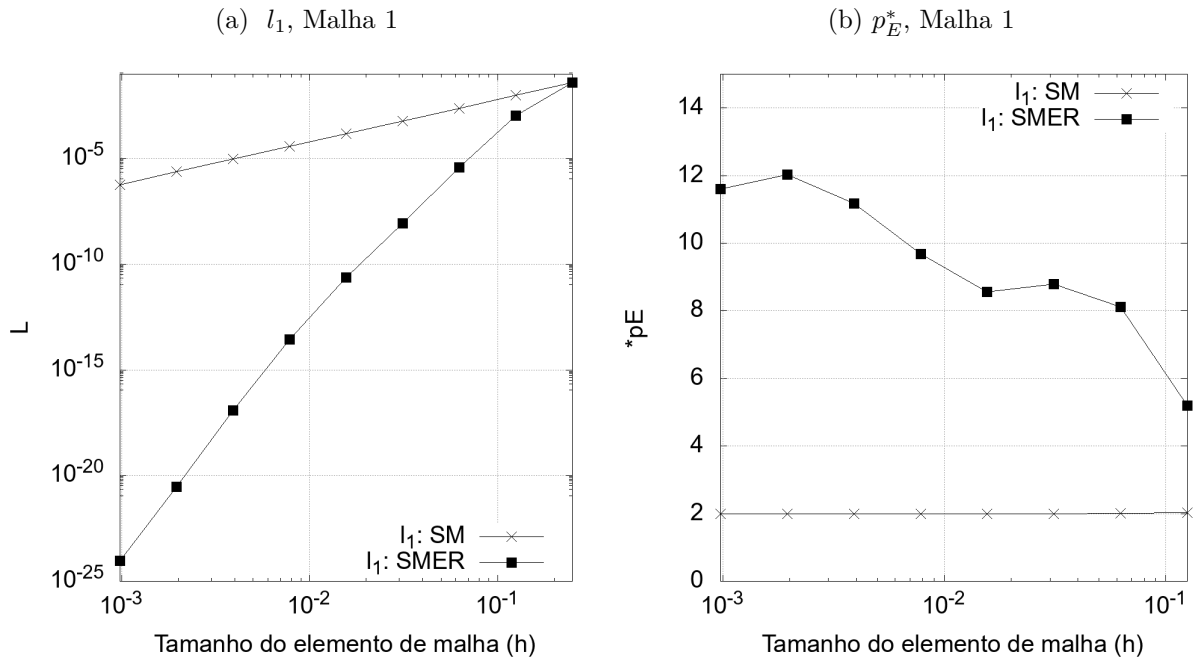
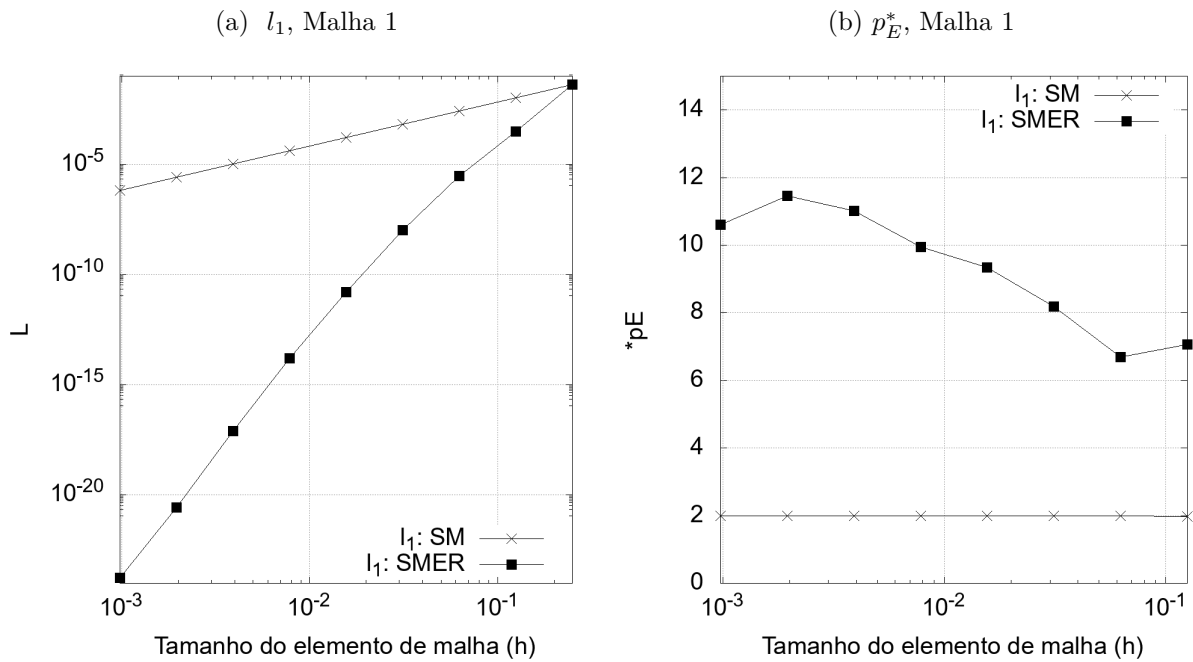


Figura 66 – Resultados: SMER, Malha base 1, Variável l_1 , Navier-Stokes 2D, velocidade u .Figura 67 – Resultados: SMER, Malha base 1, Variável l_1 , Navier-Stokes 2D, velocidade v .

8.2 SMER INTERPOLADO

SMER INTERPOLADO (SMER-I) apresentou desempenho novamente abaixo do esperado, não convergindo para velocidade u e obtendo baixo desempenho para velocidade v , em comparação com SMER. Estes resultados são expostos pelas figuras 68 e 69.

Figura 68 – Resultados: SMER-I, Conjunto β_2 , Variável l_1 , Navier-Stokes 2D, velocidade u .

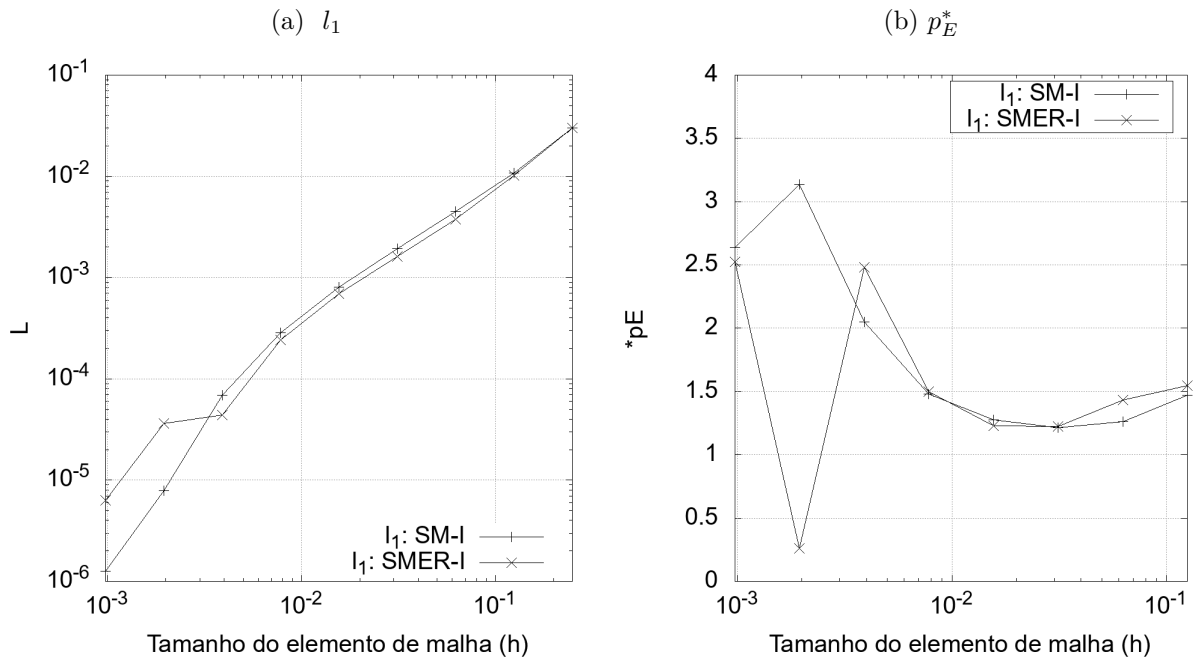
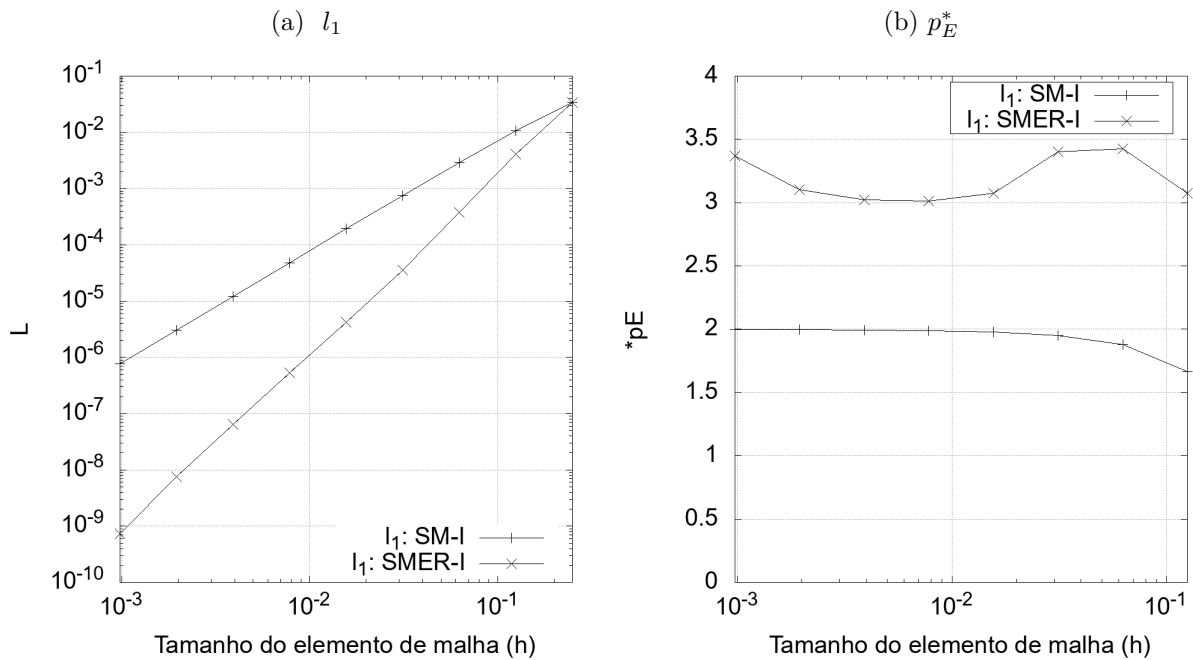


Figura 69 – Resultados: SMER-I, Conjunto β_2 , Variável l_1 , Navier-Stokes 2D, velocidade v .



8.3 CRE clássico e com interpolação

CRE com interpolação (CRE-I) apresentou desempenho novamente abaixo do esperado, apresentando degeneração das ordens verdadeiras para velocidades u e v . Pela

primeira vez nos experimentos CRE não conseguiu progredir uma ordem de acurácia do método, também apresentando degeneração das ordens. Ambas as técnicas alcançaram acurácia 3, uma unidade abaixo do esperado $p_1 = 4$, mas houve redução do erro.

Estes resultados são expostos pelas figuras 70, 71 72 e 73. Neste cenário ambas técnicas apresentaram desempenho inferior em comparação com SMER.

Figura 70 – Resultados: CRE-I, Variável l_1 , Navier-Stokes 2D, velocidade u .

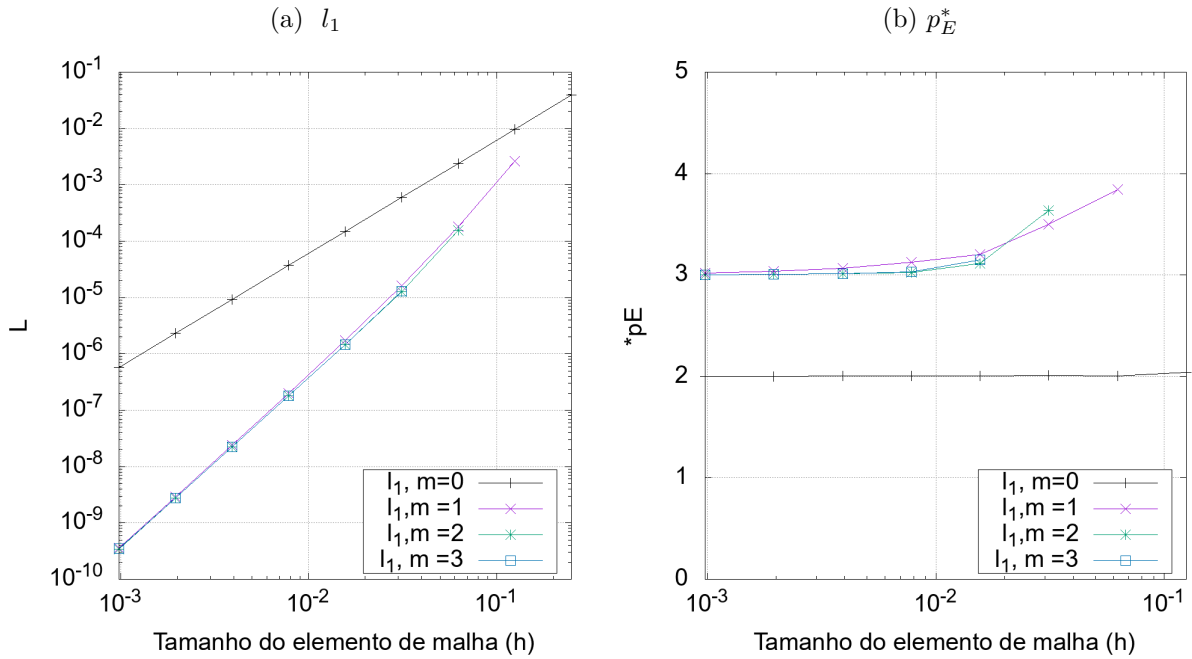


Figura 71 – Resultados: CRE-I, Variável l_1 , Navier-Stokes 2D, velocidade v .

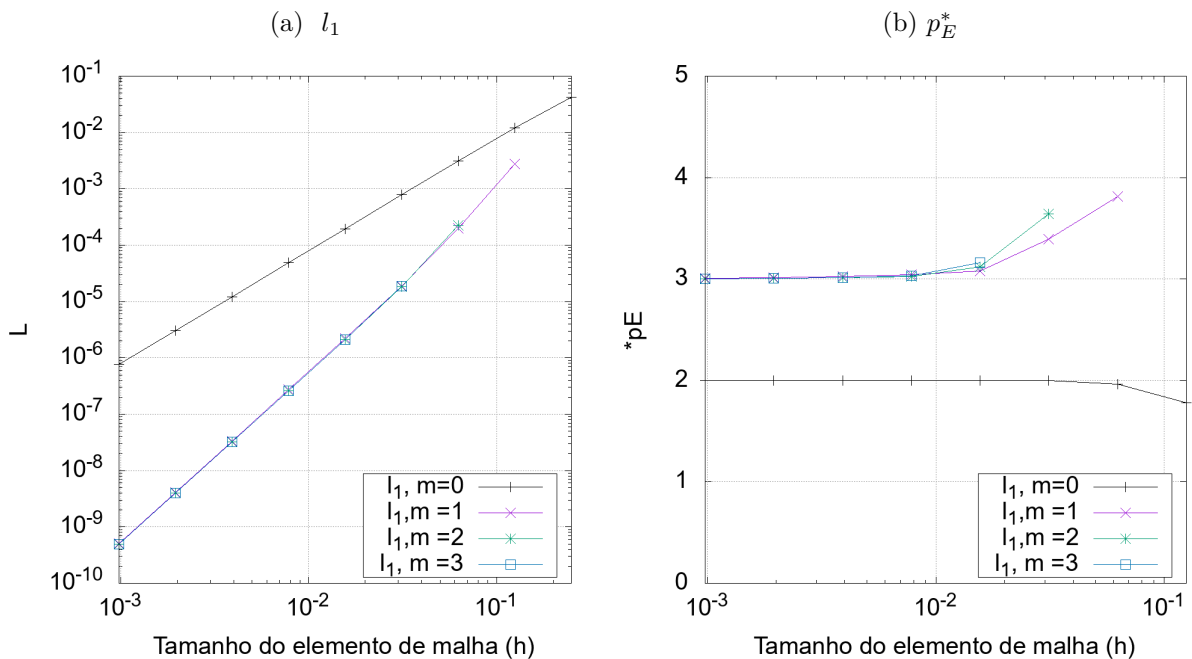
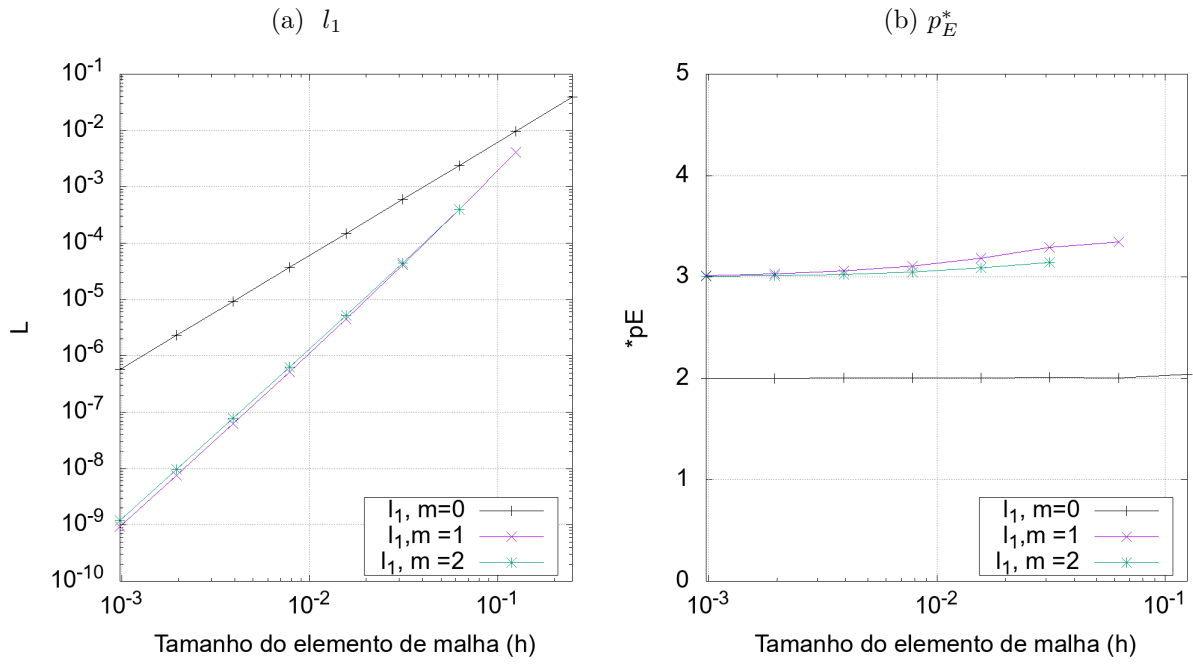
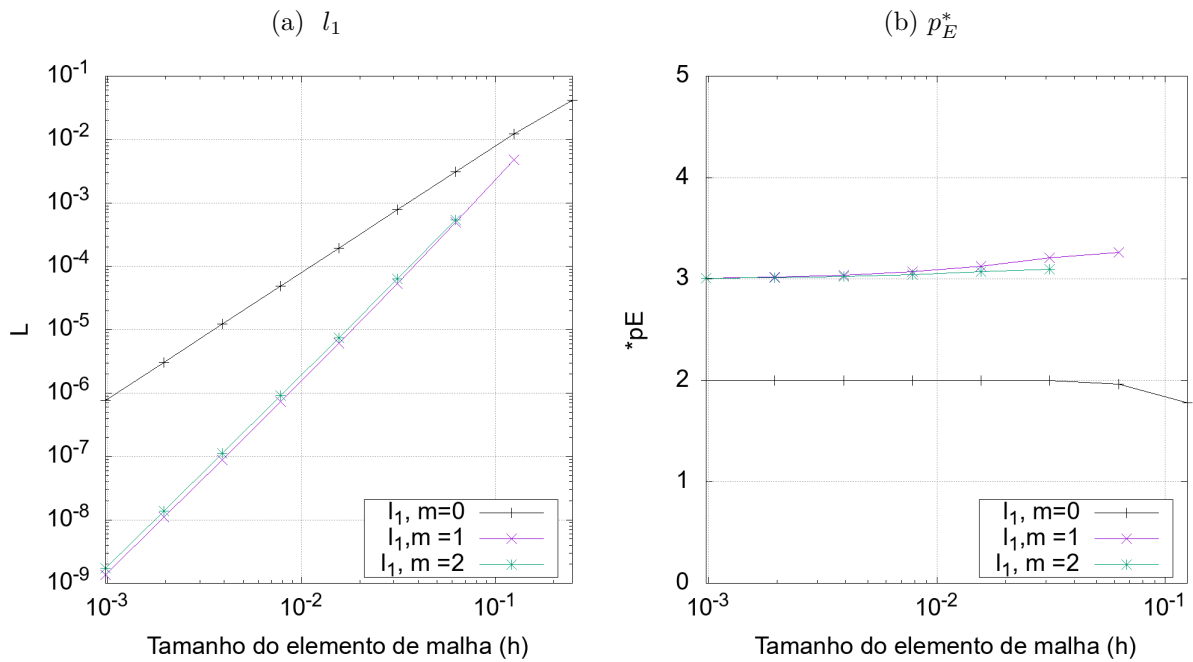


Figura 72 – Resultados: CRE, Variável l_1 , Navier-Stokes 2D, velocidade u .Figura 73 – Resultados: CRE, Variável l_1 , Navier-Stokes 2D, velocidade v .

8.4 SER

SER apresentou ótimo desempenho apresentando aumento para ordens de acurácia para as velocidades u e v com redução erro significativa.

Estes resultados são expostos pelas figuras 74 e 75. Neste cenário SER se equiparou a SMER, atingindo grandezas de erro superiores a 10^{-15} e acurácias entre 4 e 7.

Figura 74 – Resultados: SER, Variável l_1 , Navier-Stokes 2D, velocidade u .

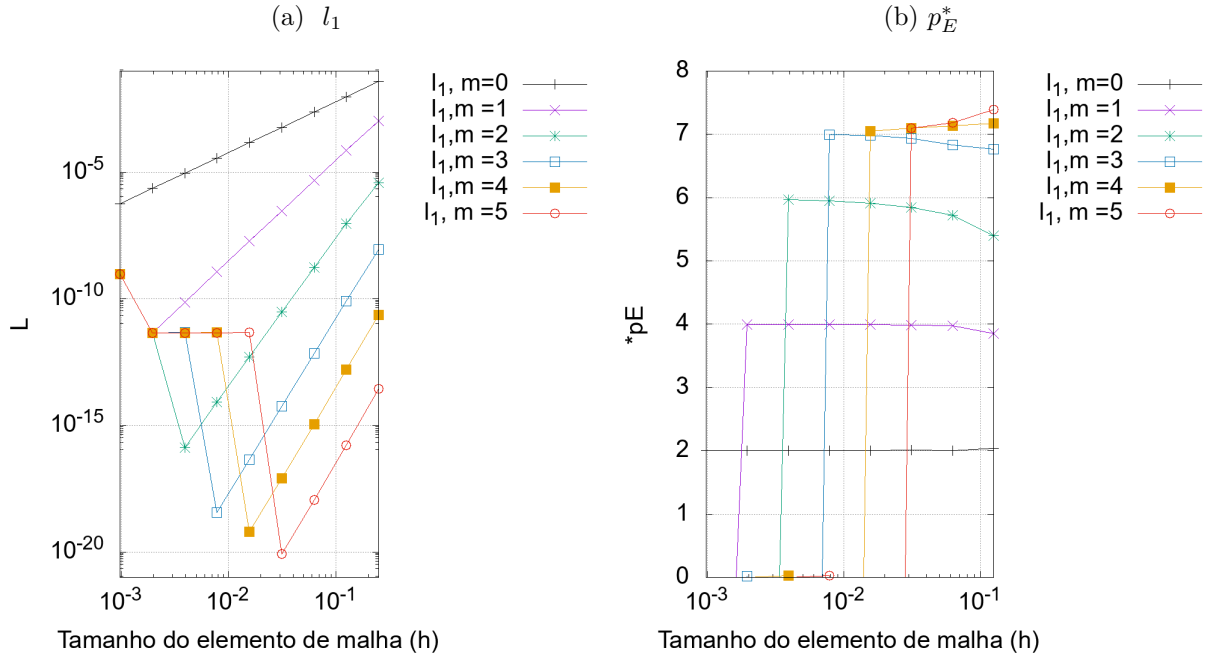
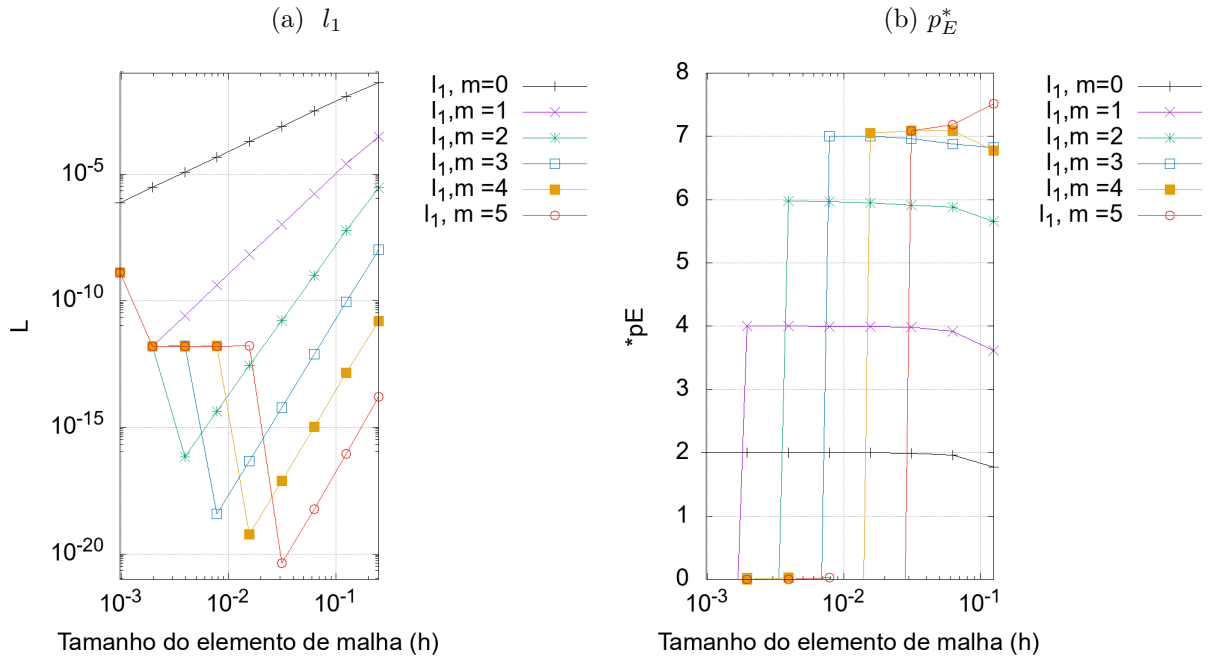


Figura 75 – Resultados: SER, Variável l_1 , Navier-Stokes 2D, velocidade v .



8.5 Resumo do capítulo e conclusões

CRE, CRE-I e SMER-I apresentaram desempenho abaixo do esperado. SMER-I apresentou os piores resultados, e neste cenário não foi utilizado malhas não uniformes, questão para ser investigada para trabalhos futuros. CRE e CRE-I apresentaram degeneração das ordens, não esperado e novamente é uma questão para ser investigada.

SER e SMER alcançaram os melhores resultados, apresentando grande superioridade em comparação com as técnicas listadas anteriormente. Novamente ambas as técnicas apresentaram grande estabilidade.

Para as variáveis l_∞ foram obtidos resultados similares, mas um pouco inferiores. Talvez possa ajudar no entendimento do que aconteceu com CRE, CRE-I e SMER-I em trabalhos futuros. Seus resultados são expostos de forma qualitativa nos apêndices.

9 CONCLUSÃO

Depois de **muitos** testes, em geral as técnicas utilizadas obtiveram ótimos resultados, reduzindo o erro nos campos de forma significativa e aumentando suas ordens de acurácia, sem a necessidade da realização de novas simulações.

Agora, em partes, começando por FRE. Embora tenha sido testada apenas em problemas unidimensionais se mostrou eficaz. Infelizmente só foi possível reproduzir os resultados encontrados na literatura, para casos específicos, as equações de Burgers 1D e Poisson com termo fonte $T = \sin(\pi x)$, e com a ressalva que precisa ser discretizado para malhas uniformes. Caso contrário, FRE tem desempenho similar com a técnica clássica (**CRE**), que se manteve estável até mesmo para as malhas não uniformes em geral, conseguindo progredir ao menos uma ordem verdadeira de acurácia com redução do erro, não progredindo para mais extrapolações $m > 1$. Lembrando que para FRE, não foi possível mensurar a acurácia de suas soluções, com exceção dos casos específicos, comentados anteriormente.

A ideia de **FRE** ou até mesmo **CRE com interpolação** (CRE-I) é fazer com CRE consiga progredir, para mais extrapolações, tanto na redução do erro como no aumento da ordem de acurácia. Ambas técnicas modificam o termo de correção C para os nós não coincidentes, e enquanto se mantiverem estáveis, CRE consegue evoluir, porque para os pontos coincidentes, variáveis do Tipo I (Seção 2.4.1), obtidos com MER ou ER (para $m = 1$) é eficaz em geral, e dificilmente não vai funcionar com condições ideais, isto é, quando o erro numérico está afetado somente por Eh .

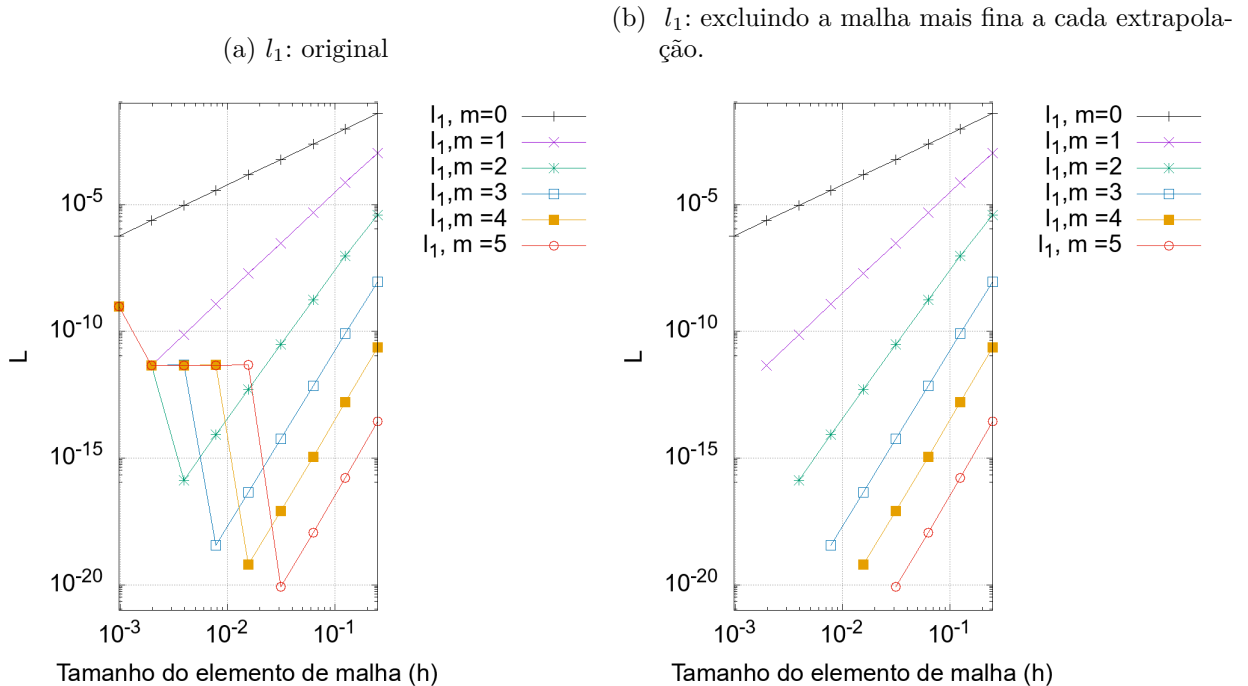
O termo estável, neste contexto, refere-se ao fato de não influenciar negativamente no desempenho, fato que pode ser observado no caso unidimensional, tanto CRE com FRE e CRE-I, quando funcionaram. Por exemplo, Poisson com termo fonte $T = \sin(\pi x)$ com malha uniforme, obtiveram resultados similares ou até melhores, em comparação com **SER** e **SMER**, porque conseguiram manter a qualidade obtida com MER (sobre os pontos coincidentes), em pontos não coincidentes. E **SER** e **SMER** possuem o defeito de não conseguir melhorar a malha mais fina. Por outro lado, já no caso não uniforme, as interpolações e FRE não funcionam com a mesma qualidade e CRE não consegue progredir para $m > 1$ e até **SMER interpolado** não consegue, por ter como base de funcionamento as interpolações. No entanto SER e SMER, conseguem progredir de forma similar com o caso uniforme, isto porque são aplicações de variáveis do Tipo I, e embora as discretizações sejam com malhas não uniformes, os trabalhos de Celik e Karatekin (1997) e Carvalho Junior, Marchi e Martins (2015) já davam fortes indícios que MER poderia funcionar neste cenário, desde que o refino seja uniforme. Provavelmente para Laplace com malha não uniforme, ambas as técnicas poderiam ter obtido melhores resultados, através de um maior número de malhas ou as mesmas, no entanto mais acuradas.

A técnica **SMER interpolado** se mostrou uma agradável surpresa, porque mostra que é possível misturar variáveis do Tipo I, II e III e ainda conseguir resultados excelentes, podendo ser considerada um importante complemento para CRE-I e SMER.

CRE-I já foi desenvolvida em outros trabalhos, por exemplo Moro (2018). Neste cenário o autor até conseguiu melhores resultados para equação de Burgers 2D, já para Laplace 2D os resultados foram equivalentes, em todos os casos a malha das discretizações é uniforme. Outro complemento desta técnica é uso de interpolação clássica bidimensional de alta ordem (ver Seção 3.5.2). Porém deve ser dada preferência para a proposta pelo autor em casos que a interpolação alternativa é aplicável, devido ao alto custo computacional da clássica.

Uma curiosidade importante: as técnicas **SMER** e **SMER INTERPOLADO** levam esse nome pelo comportamento de suas soluções, idênticas com MER, isto é, aumento concomitante da ordem de acurácia e redução progressiva do erro numérico. Fato que pode ser facilmente observado nos resultados. A ideia do nome **SER** segue o mesmo caminho, mas em comparação com ER, no entanto, deve ser feita uma alteração em seu algoritmo, bastando apenas retirar a malha fina em cada extrapolação, tornando esta técnica uma variação de CRE, mas de forma **inversa**, em que são beneficiadas as malhas iniciais ao contrário da técnica original, neste contexto SMER também pode ser considerado uma forma **inversa** de CRE. Um exemplo de SER com esta alteração pode ser vista na Figura 76.

Figura 76 – SER, excluindo a malha mais fina em cada extrapolação, Navier-Stokes, velocidade u , variável l_1 .



9.1 CONTRIBUIÇÕES PARA LITERATURA

Através deste trabalho foi possível iniciar um estudo inicial para utilização CRE em campos, envolvendo malhas não uniformes, foram acrescentadas novas abordagens para redução dos erros, através das versões inversas de CRE: SMER e SER, e complementos para técnicas já existentes: SMER interpolado (SMER-I) e a utilização de interpolação clássica no caso 2D, para CRE com interpolação (CRE-I). Destaque para SMER-I que mostrou a possibilidade de misturar variáveis do tipo I, II e III.

Também foi introduzido o conceito de submalhas. Este conceito em particular através de SER, SMER e SMER-I foram testadas em vários modelos e alguns casos apresentaram desempenho muito superior em comparação com técnicas já existentes na literatura.

9.2 TRABALHOS FUTUROS

Sugestões de trabalhos futuros:

- Utilizar outras técnicas de discretização, por exemplo: Volumes Finitos;
- Abordar malhas não ortogonais, triangulares, não estruturadas, etc. ;
- Se possível, encontrar uma forma de melhorar as malhas mais finas, através das técnicas SMER e SER;
- Investigar problemas de convergência e degeneração de ordens relatados nos experimentos;
- Abordar mais variáveis de interesse de MER, ficou faltando as do tipo IV e V. Variáveis do Tipo V, são na teoria as mais complexas.

REFERÊNCIAS

- AIAA. **Guide: Guide for the Verification and Validation of Computational Fluid Dynamics Simulations (AIAA G-077-1998(2002))**. [s.n.], 2002. Disponível em: <https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/4.472855.001>. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 30.
- ALVES, C. A. **Verificação de soluções numéricas da equação de Laplace 2D com malhas triangulares e múltiplas extrapolações de Richardson**. Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 2010. Citado na página 23.
- ANDREEV, V. F.; POPOV, A. M. Using richardson's method to construct high-order accurate adaptive grids. **Computational Mathematics and Modeling**, v. 10, n. 3, p. 227–238, Jul 1999. ISSN 1573-837X. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF02358942>. Citado na página 23.
- BRIGGS, W. L.; HENSON, V. E.; MCCORMICK, S. F. **A multigrid tutorial**. [S.l.]: Siam, 2000. Citado na página 66.
- CARVALHO JUNIOR, C. A. R. **Interpolação polinomial com Multiextrapolação de Richardson para reduzir o erro de discretização em malhas não uniformes 1D**. Dissertação de Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 2015. Citado na página 36.
- CARVALHO JUNIOR, C. A. R.; MARCHI, C. H.; MARTINS, M. A. Multiextrapolação de Richardson com interpolação para reduzir o erro de discretização em malhas não uniformes 1D. **Proceedings of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics**, Vitória, Brazil, v. 3, n. 2, 2015. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.5540/03.2015.003.02.0068>. Citado 3 vezes nas páginas 23, 24 e 118.
- CELIK, I.; KARATEKIN, O. Numerical Experiments on Application of Richardson Extrapolation With Nonuniform Grids. **Journal of Fluids Engineering**, v. 119, n. 3, p. 584–590, 09 1997. ISSN 0098-2202. Disponível em: <https://doi.org/10.1115/1.2819284>. Citado 3 vezes nas páginas 23, 24 e 118.
- CELIK, I.; LI, J.; HU, G.; SHAFFER, C. Limitations of richardson extrapolation and some possible remedies. **Journal of Fluids Engineering-transactions of The Asme - J FLUID ENG**, v. 127, 07 2005. Citado na página 23.
- DAHLQUIST, G.; BJORCK, A. **Numerical Methods in Scientific Computing: Volume 1**. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008. (Other Titles in Applied Mathematics). ISBN 9780898717785. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=qy83gXoRps8C>. Citado na página 35.
- DAI, R.; LIN, P. Analysis on sixth-order compact approximations with richardson extrapolation for 2d poisson equation. **Journal of Applied Mathematics and Physics**, v. 6, n. 6, p. 1139–1159, 2018. Disponível em: https://www.scirp.org/pdf/JAMP_2018060514032349.pdf. Citado na página 23.

Dai, R.; Zhang, J.; Wang, Y. Sixth order compact approximation with completed richardson extrapolation. In: **2013 International Conference on Computational and Information Sciences**. [S.l.: s.n.], 2013. p. 966–971. ISSN null. Citado na página 23.

DAI, R.; ZHANG, J.; WANG, Y. Higher order adi method with completed richardson extrapolation for solving unsteady convection-diffusion equations. **Comput. Math. Appl.**, Pergamon Press, Inc., USA, v. 71, n. 1, p. 431–442, jan. 2016. ISSN 0898-1221. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.camwa.2015.12.007>>. Citado na página 24.

DICK, J.; GODA, T.; YOSHIKI, T. Richardson extrapolation of polynomial lattice rules. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 57, n. 1, p. 44–69, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/17M1138601>>. Citado na página 23.

FORTUNA, A. **Técnicas computacionais para dinâmica de fluidos**. São Paulo: EDUSP, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 33.

FRANCO, N. B. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006. Citado na página 34.

FRANKE, J.; FRANK, W. Application of generalized richardson extrapolation to the computation of the flow across an asymmetric street intersection. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, v. 96, n. 10, p. 1616 – 1628, 2008. ISSN 0167-6105. 4th International Symposium on Computational Wind Engineering (CWE2006). Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167610508000342>>. Citado na página 23.

FROM, J. E. The time dependent flow of an incompressible viscous fluid. v. 3, p. 345 – 382, 05 1964. Citado na página 69.

GERMER, E. M. **Verificação de funções de interpolação em advecção - difusão 1D com volumes finitos**. Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 2009. Citado na página 24.

GERMER, E. M.; MARCHI, C. H. Verificação de esquemas advectivo-difusivos 1d com e sem multiextrapolação de Richardson. **Proceedings of the XXX Iberian Latin American Congress on the Computational Methods in Engineering (CILAMCE)**, Armação dos Búzios, Brazil, 2009. Citado na página 23.

GIACOMINI, F. F. **Multiextrapolação de Richardson completa para reduzir o erro de discretização**. Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 24, 48, 76 e 77.

MALISKA, C. R. **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 19, 21 e 33.

MARCHI, C. H. **Verificação de soluções numéricas unidimensionais em dinâmica de fluidos**. Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 2001. Citado 7 vezes nas páginas 7, 19, 20, 26, 27, 28 e 30.

- MARCHI, C. H.; GIACOMINI, F. F. Efeito da razão de refino de malha sobre o uso de multiextrapolação de Richardson em CFD. **XXXV Congresso nacional de matemática aplicada e computacional**, Natal, Brazil, 2014. Citado na página 23.
- MARCHI, C. H.; GIACOMINI, F. F.; SANTIAGO, C. D. Repeated Richardson extrapolation to reduce the field discretization error in computational fluid dynamics. **Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals**, Taylor & Francis, v. 70, n. 4, p. 340–353, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.
- MARCHI, C. H.; NOVAK, L. A.; COSMO, D. S.; VARGAS, A. P. S. Highly accurate numerical solutions with repeated Richardson extrapolation for 2D Laplace equation. **Applied Mathematical Modelling**, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 28.
- MARCHI, C. H.; SUERO, R.; ARAKI, L. K. The lid-driven square cavity flow: numerical solution with a 1024 x 1024 grid. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, scielo, v. 31, p. 186 – 198, 09 2009. ISSN 1678-5878. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1678-58782009000300004&nrm=iso>. Citado na página 38.
- MARTINS, M. A. **Multiextrapolação de Richardson com interpolação para reduzir e estimar o erro em CFD**. Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 2013. Citado 8 vezes nas páginas 7, 20, 23, 26, 33, 38, 39 e 40.
- MARTINS, M. A.; MARCHI, C. H. Estimate of iteration errors in computational fluid dynamics. **Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals**, v. 53, n. 3, p. 234–245, 2008. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1080/10580530701790142>>. Citado na página 27.
- MARTINS, M. A.; MARCHI, C. H.; ARAKI, L. K.; PINTO, M. A. V. Estimativa para o erro de discretização com o emprego de multiextrapolação de Richardson em CFD. **Proceedings of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics**, Curitiba, Brazil, v. 2, n. 1, 2014. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.5540/03.2014.002.01.0065>>. Citado na página 23.
- MARTINS, M. A.; MARCHI, C. H.; NOVAK, L. A.; ARAKI, L. K.; PINTO, M. A. V.; GONÇALVES, S. F. T. Multiextrapolação de Richardson com interpolação para reduzir o erro de discretização em CFD. **CMAC Sudeste**, 2013. Citado 5 vezes nas páginas 7, 13, 39, 40 e 41.
- MORO, D. F. **Desenvolvimento de técnicas para reduzir os erros de iteração e discretização em CFD**. Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 2018. Citado 4 vezes nas páginas 6, 24, 60 e 119.
- MUNYAKAZI, J. B.; PATIDAR, K. C. On richardson extrapolation for fitted operator finite difference methods. **Applied Mathematics and Computation**, n. 201, p. 465–480, 2008. Citado na página 23.
- OBERKAMPF, W. L.; ROY, C. J. Frontmatter. In: _____. **Verification and Validation in Scientific Computing**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. p. i–vi. Citado na página 24.

RICHARDS, A. S. Completed Richardson extrapolation in space and time. **Commun. Numer. Meth. Eng**, v. 13, p. 573, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.

RICHARDSON, L. F. The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equation, with an application to the stresses in a masonry dam. **Phylosophical Proceedings of the Royal Society of London**, v. 210, Serial A, p. 307–357, 1910. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 36.

RICHARDSON, L. F.; GAUNT, J. A. The differed approach to the limit. **Phylosophical Proceedings of the Royal Society of London**, v. 226, Serial A, p. 229–361, 1927. Citado na página 23.

ROACHE, P. **Fundamentals of verification and validation**. USA: Hermosa, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 30.

ROACHE, P. J. Building pde codes to be verifiable and validatable. **Computing in Science Engineering**, v. 6, n. 5, p. 30–38, Sep. 2004. ISSN 1558-366X. Citado na página 24.

ROACHE, P. J.; KNUPP, P. M. Completed Richardson extrapolation. v. 9, p. 365 – 374, 05 1993. Citado 11 vezes nas páginas 6, 21, 23, 24, 41, 42, 44, 45, 47, 77 e 137.

ROY, J. Review of code and solution verification procedures for computational simulation. **Journal of Computational Physics**, n. 205, p. 131–156, 2005. Citado na página 24.

SCHNEIDER, F. A. **Verificação de Soluções Numéricas em Problemas Difusivos e Advectivos com Malhas não Uniformes**. Tese de Doutorado em Métodos Numéricos em Engenharia — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 2007. Citado 5 vezes nas páginas 7, 20, 26, 29 e 32.

SHIH, T. M.; TAN, C. H.; HWANG, B. C. Effects of grid staggering on numerical schemes. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 9, n. 2, p. 193–212, 1989. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/flid.1650090206>>. Citado 2 vezes nas páginas 67 e 68.

SIDI, A. A complete convergence and stability theory for a generalized richardson extrapolation process. **Siam Journal on Numerical Analysis - SIAM J NUMER ANAL**, v. 34, 10 1997. Citado na página 23.

SILVA, N. D. da; MARCHI, C. H.; ARAKI, L. K.; BORGES, R. B. de R.; BERTOLDO, G.; SHU, C.-W. Completed repeated richardson extrapolation for compressible fluid flows. **Applied Mathematical Modelling**, v. 77, p. 724 – 737, 2020. ISSN 0307-904X. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X19304251>>. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.

STEFFENSEN, J. F. **Interpolation**. 2. ed. New York: Chelsea Publishing Company, 1950. Citado 3 vezes nas páginas 7, 36 e 59.

VARGAS, A. P. S. **Multiextrapolação de Richardson e esquemas de 1ª e 2ª ordens, mistos e crank–nicolson sobre as equações 2D de Advecção–Difusão e Fourier**. Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 23, 26, 37 e 38.

VISTA, R. C. **Estimativa do erro discretização na solução de equações diferenciais utilizando o método de volumes finitos**. Tese de doutorado em matemática aplicada e computação científica — Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico, Rio de Janeiro, RJ, 2010. Citado na página 24.

WANG, Y.; ZHANG, J. Sixth order compact scheme combined with multigrid method and extrapolation technique for 2d poisson equation. **Journal of Computational Physics**, v. 228, n. 1, p. 137 – 146, 2009. ISSN 0021-9991. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999108004580>. Citado na página 23.

ZHANG, C.; ZHANG, J. Interpolation strategies in repeated Richardson extrapolation. **Journal of Intelligent and Fuzzy Systems**, v. 31, n. 6, 2016. Citado na página 23.

APÊNDICE A – DISCRETIZAÇÕES

Neste apêndice são apresentadas as discretizações empregadas e algoritmos para Diferenças Finitas, utilizados na resolução dos modelos matemáticos, cuja soluções numéricas não foram obtidas através de códigos cedidos pelo grupo de CFD da UFPR.

A estrutura das malhas utilizadas é apresentado pela Figura 77, cuja base parte da discretização feita em torno nó P , e seus vizinhos W, E, N e S , as variáveis h_W, h_E, h_N e h_S representam a distância entre estes pontos em relação ao ponto P , respectivamente, conforme é ilustrado na Figura 77. Note que o caso unidimensional é análogo, basta desconsiderar os pontos N e S . Naturalmente os nós P, E e W são unidimensionais, assim como suas derivadas, nesta situação.

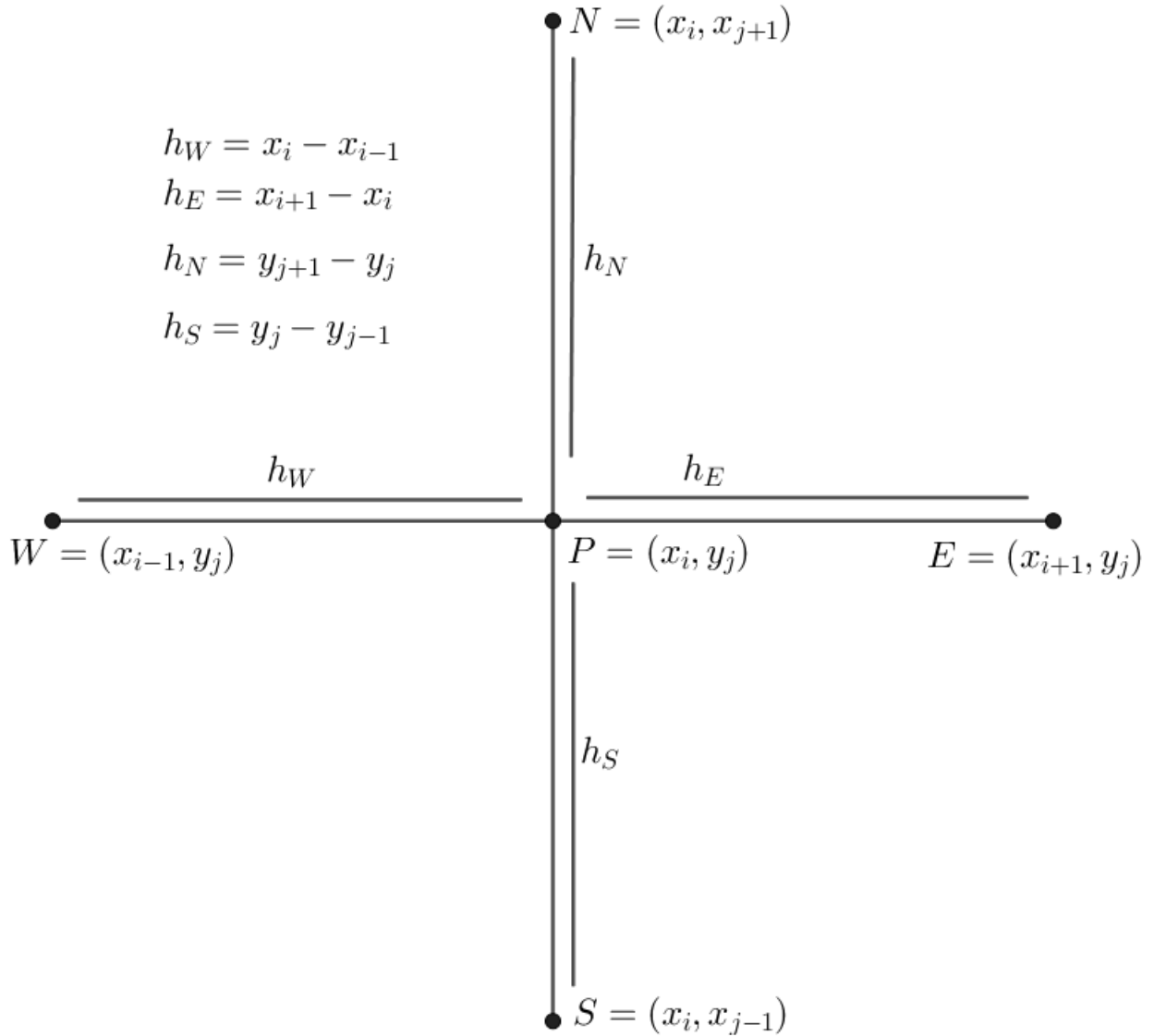


Figura 77 – Malha não uniforme, discretizada para diferenças finitas.

Avançando, as aproximações utilizadas pela serie de Taylor em torno do nó P , são as seguintes:

$$T_W = T_P - \left(\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_P \right) h_W + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_P \right) \frac{h_W^2}{2} + \dots \sum_{i=3}^{\infty} \left(\frac{\partial^i T}{\partial x^i} \Big|_P \right) \frac{(-h_W)^i}{i!}, \quad (\text{A.1})$$

$$T_E = T_P + \left(\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_P \right) h_E + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_P \right) \frac{h_E^2}{2} + \dots \sum_{i=3}^{\infty} \left(\frac{\partial^i T}{\partial x^i} \Big|_P \right) \frac{(h_E)^i}{i!}, \quad (\text{A.2})$$

$$T_S = T_P - \left(\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_P \right) h_S + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \Big|_P \right) \frac{h_S^2}{2} + \dots \sum_{i=3}^{\infty} \left(\frac{\partial^i T}{\partial y^i} \Big|_P \right) \frac{(-h_S)^i}{i!}, \quad (\text{A.3})$$

$$T_N = T_P + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_P \right) h_N + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \Big|_P \right) \frac{h_N^2}{2} + \dots \sum_{i=3}^{\infty} \left(\frac{\partial^i T}{\partial y^i} \Big|_P \right) \frac{(h_N)^i}{i!}. \quad (\text{A.4})$$

Deste modo, obtêm-se aproximações do do tipo CDS, vistas no capítulo 2:

- Caso não uniforme

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_P \approx \frac{2(h_E T_W + h_W T_E - (h_W + h_E) T_P)}{(h_W + h_E) h_W h_E}, \quad (\text{A.5})$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)_P \approx \frac{2(h_N T_S + h_S T_N - (h_S + h_N) T_P)}{(h_S + h_N) h_S h_N} \quad (\text{A.6})$$

e

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_P \approx \frac{T_E - T_W}{h_W + h_E}. \quad (\text{A.7})$$

- Caso uniforme

Considerando

$$h_N = h_S = h_y \text{ e } h_E = h_W = h_x, \quad (\text{A.8})$$

obtêm-se

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_P \approx \frac{T_W + T_E - 2T_P}{h_x^2}, \quad (\text{A.9})$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)_P \approx \frac{T_S + T_N - 2T_P}{h_y^2} \quad (\text{A.10})$$

e

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_P \approx \frac{T_E - T_W}{2h_x}. \quad (\text{A.11})$$

Nas próximas seções são apresentadas as discretizações e algoritmos para cada modelo matemático, em que são utilizadas estas aproximações.

A.1 Laplace 2D

Dado o modelo matemático apresentado na Seção 3.6.2

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, x, y \in [0,1] \\ T(x,1) = \sin(\pi x), T(0,y) = T(1,y) = T(x,0) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

Para aproximas as derivadas $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$, utiliza-se as aproximações dadas pelas equações (A.5) e (A.6). Portanto, a Equação (A.12) pode ser reescrita aproximadamente da seguinte forma, para o ponto P :

$$\frac{2(h_E T_W + h_W T_E - (h_W + h_E) T_P)}{(h_W + h_E) h_W h_E} + \frac{2(h_N T_S + h_S T_N - (h_S + h_N) T_P)}{(h_S + h_N) h_S h_N} = 0 \quad (\text{A.13})$$

ou

$$\begin{aligned} T_P \left(\frac{2}{(h_W + h_E) h_E} + \frac{2}{(h_W + h_E) h_W} + \frac{2}{(h_S + h_N) h_S} + \frac{2}{(h_S + h_N) h_N} \right) = \\ T_E \frac{2}{(h_W + h_E) h_E} + T_W \frac{2}{(h_W + h_E) h_W} + T_S \frac{2}{(h_S + h_N) h_S} + T_N \frac{2}{(h_S + h_N) h_N} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

reagrupando no formato

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + a_N T_N + a_S T_S \quad (\text{A.15})$$

obtêm-se os coeficientes internos do modelo, para os casos:

- Caso não uniforme

$$a_E = \frac{2}{(h_W + h_E) h_E} \quad (\text{A.16})$$

$$a_W = \frac{2}{(h_W + h_E) h_W} \quad (\text{A.17})$$

$$a_S = \frac{2}{(h_S + h_N) h_S} \quad (\text{A.18})$$

$$a_N = \frac{2}{(h_S + h_N) h_N} \quad (\text{A.19})$$

$$a_P = a_E + a_W + a_S + a_N \quad (\text{A.20})$$

- Caso uniforme

$$h_N = h_S = h_y \quad (\text{A.21})$$

$$h_E = h_W = h_x \quad (\text{A.22})$$

$$a_E = \frac{1}{h_x^2} \quad (\text{A.23})$$

$$a_W = \frac{1}{h_x^2} \quad (\text{A.24})$$

$$a_S = \frac{1}{h_y^2} \quad (\text{A.25})$$

$$a_N = \frac{1}{h_y^2} \quad (\text{A.26})$$

$$a_P = a_E + a_W + a_S + a_N \quad (\text{A.27})$$

Os contornos são os seguintes:

$$T_P = \sin(\pi x), \text{ para } P = (x,1) \quad (\text{A.28})$$

$$T_P = 0, \text{ para } P = (0,y), P = (1,y) \text{ e } P = (x,0) \quad (\text{A.29})$$

$$x,y \in [0,1]. \quad (\text{A.30})$$

Para resolver a equação discretizada para os contornos internos utiliza-se o solver Gauss-Seidel,

$$T_P = \frac{a_E T_E + a_W T_W + a_N T_N + a_S T_S}{a_P}, \quad (\text{A.31})$$

em resumo o Algoritmo 8, mostra os passos da resolução do modelo.

Algoritmo 8: Resolução numérica da Equação de Laplace.

1. Carregue os contornos, dados pelas equações (A.28) e (A.29);
 2. Faça $T_P = 0$, para os pontos fora do contorno do domínio;
 3. Obtenha os coeficientes a_P, a_E, a_W, a_N e a_S internos, dados pelas equações (A.16-A.20) (caso não uniforme) ou (A.21-A.27) (caso uniforme);
 4. Aplique o Gauss-Seidel somente para os pontos internos (Equação (A.29));
 5. Repita o passo anterior até satisfazer um critério preestabelecido.
 6. Escreva os campos e variáveis de interesse.
-

A.2 Burgers 1D

Dado a variação da equação de Burgers 1D, apresentado na seção 3.6.3

$$\begin{cases} T \frac{dT}{dx} Re = \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{Re^2 e^{xRe} (e^{xRe} - e^{Re})}{(e^{Re} - 1)^2} & x \in [0,1] \\ T(0) = 0; T(1) = 1 \end{cases} \quad (\text{A.32})$$

Para aproximar o termo $\frac{d^2T}{dx^2}$ avaliado no ponto P , utiliza-se uma aproximação do tipo CDS, dada pela Equação (A.5), a variável $T \frac{\partial T}{\partial x}$ avaliado no ponto P , para o termo $\frac{\partial T}{\partial x}$ utiliza-se a aproximação CDS, dada pela equação (A.6), o termo T é linearizado (T_P^*), isto é

$$\left(T \frac{dT}{dx} \right)_P = T_P \left(\frac{dT}{dx} \right)_P \approx T_P^* \left(\frac{T_E - T_W}{h_W + h_E} \right), \quad (\text{A.33})$$

em que T_P^* representa a temperatura avaliada em P , na iteração i anterior, isto é

$$T_P^* = T_P^{(i-1)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.34})$$

e

$$T_P^{(0)} = 0. \quad (\text{A.35})$$

Deste modo, a Equação (A.32) pode ser reescrita aproximadamente da seguinte forma, para o ponto P

$$\frac{Re(T_P^* T_E - T_P^* T_W)}{h_W + h_E} = \frac{2(h_E T_W + h_W T_E - (h_W + h_E) T_P)}{(h_W + h_E) h_W h_E} + \frac{Re^2 e^{xRe} (e^{xRe} - e^{Re})}{(e^{Re} - 1)^2} \quad (\text{A.36})$$

ou

$$4T_P = T_W \frac{2(h_W h_E) Re T_P^* + 4h_E}{h_W + h_E} + T_E \frac{-2(h_W h_E) Re T_P^* + 4h_W}{h_W + h_E} + 2S_P h_W h_E \quad (\text{A.37})$$

em que

$$S_P = \frac{Re^2 e^{PRe} (e^{PRe} - e^{Re})}{(e^{Re} - 1)^2}. \quad (\text{A.38})$$

Portanto obtêm-se os termos dos contornos internos da discretização

$$a_P = 4 \quad (\text{A.39})$$

$$a_W = \frac{2(h_W h_E) Re T_P^* + 4h_E}{h_W + h_E} \quad (\text{A.40})$$

$$a_E = \frac{-2(h_W h_E) Re T_P^* + 4h_W}{h_W + h_E} \quad (\text{A.41})$$

$$b_P = 2S_P h_W h_E \quad (\text{A.42})$$

os contornos esquerdo e direito são os seguintes:

- Contorno **esquerdo**

$$a_W = 0; \quad (\text{A.43})$$

$$a_E = 0; \quad (\text{A.44})$$

$$a_P = 1; \quad (\text{A.45})$$

$$b_P = 0. \quad (\text{A.46})$$

- Contorno **direito**

$$a_W = 0; \quad (\text{A.47})$$

$$a_E = 0; \quad (\text{A.48})$$

$$a_P = 1; \quad (\text{A.49})$$

$$b_P = 1. \quad (\text{A.50})$$

Para resolver a equação discretizada utiliza-se o solver TDMA de forma iterativa, porque é necessário atualizar os termos T_P^* , em resumo o Algoritmo 9 mostra os passos da resolução do modelo.

Algoritmo 9: Resolução numérica da Equação de Burgers 1D.

1. Obtenha os coeficientes a_P, a_E, a_W e b_P internos e contornos (equações (A.39-A.50)).
 2. Aplique o TDMA, utilizando os coeficientes a_P, a_E, a_W e b_P , obtidos no item anterior.
 3. Atualize os coeficientes internos a_W e a_E (equações (A.40) e (A.41)).
 4. Aplique o TDMA novamente, utilizando os novos coeficientes internos.
 5. Repita os passos 3 e 4, até alcançar algum critério preestabelecido.
 6. Escreva os campos e variáveis de interesse.
-

A.3 Poisson 1D

Dado os modelos matemáticos apresentados na Seção 3.6.1

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 T_1}{dx^2} = \frac{-9}{5} e^{3x} \quad x \in [0,1] \\ T_1(0) = \frac{9}{5} ; T_1(1) = \frac{-e^3}{5} + 5 \end{array} \right. \quad (\text{caso 1}), \quad (\text{A.51})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 T_2}{dx^2} = -\pi^2 \sin(\pi x) \quad x \in [0,1] \\ T_2(0) = T_2(1) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{caso 2}). \quad (\text{A.52})$$

Para aproximar a derivada de segunda ordem, utiliza-se uma aproximação do tipo CDS dado pela Equação (A.5), deste modo pode-se reescrever os modelos matemáticos das

seguintes formas aproximadas:

$$2 \frac{[h_E T_W + h_W T_E - (h_W + h_E) T_P]}{(h_W + h_E) h_W h_E} = S_P \quad (\text{A.53})$$

ou

$$T_P = \frac{h_E}{(h_W + h_E)} T_W + \frac{h_W}{(h_W + h_E)} T_E - h_W h_E \frac{S_P}{2}. \quad (\text{A.54})$$

Portanto da equação (A.54), obtêm-se os elementos do contorno **interno** da discretização:

$$a_W = \frac{h_E}{h_W + h_E}, \quad (\text{A.55})$$

$$a_e = \frac{h_W}{(h_W + h_E)}, \quad (\text{A.56})$$

$$a_p = 1, \quad (\text{A.57})$$

$$b_p = -h_W h_E \frac{S_P}{2} \quad (\text{A.58})$$

em que

$$S_P = \begin{cases} \frac{-9}{5} e^{3P}, & (\text{caso 1}) \\ -\pi^2 \text{sen}(\pi P), & (\text{caso 2}) \end{cases} \quad (\text{A.59})$$

Os contornos esquerdo e direito, são os seguintes:

- Contorno **esquerdo**

$$a_W = 0; \quad (\text{A.60})$$

$$a_E = 0; \quad (\text{A.61})$$

$$a_P = 1; \quad (\text{A.62})$$

$$b_P = F(0). \quad (\text{A.63})$$

- Contorno **direito**

$$a_W = 0; \quad (\text{A.64})$$

$$a_E = 0; \quad (\text{A.65})$$

$$a_P = 1; \quad (\text{A.66})$$

$$b_P = F(1) \quad (\text{A.67})$$

em que

$$F(x) = \begin{cases} \frac{-1}{5} e^{3x} + 3x + 2, & (\text{caso 1}) \\ \text{sen}(\pi x), & (\text{caso 2}) \end{cases} \quad x \in [0,1]. \quad (\text{A.68})$$

Com a discretização do modelo matemático, obtendo os elementos do contorno interno, direito e esquerdo, aplicou-se o método TDMA, para resolver o sistema linear

tridiagonal, gerado desta discretização, o algoritmo 10 apresenta a resolução do modelo de forma resumida.

Algoritmo 10: Resolução numérica da Equação de Poisson 1D.

1. Obtenha os coeficientes a_P, a_E, a_W e b_P internos e contornos (equações (A.55-A.67)).
 2. Aplique o TDMA, utilizando os coeficientes a_P, a_E, a_W e b_P , obtidos no item anterior.
 3. Escreva os campos e variáveis de interesse, para cada caso.
-

APÊNDICE B – ALGORITMOS GERAIS

Neste apêndice são apresentados algoritmos gerais detalhados em formato de pseudocódigo da maioria das técnicas utilizadas no trabalho, todavia, lembrando na notação utilizada para variáveis do tipo $\phi_{g,p}^m$, em que

- m : representa o nível da extrapolação,
- ϕ : variável de interesse,
- g : número da malha,
- p : posição do ponto.

Naturalmente, existem outras formas de realizar as operações, talvez mais econômicas e rápidas. Os algoritmos apresentados foram citados no trabalho e são voltados para Diferenças Finitas, considerando a notação lexicográfica e pontos com índices $0, 1, 2, \dots$.

Algoritmo 11: Algoritmo SUBER 2D, para diferenças finitas.

Entrada: Obter G soluções numéricas distintas: $\phi_{1,p}^0$ com $Nx + 1$ e $Ny + 1$ ($Nx > 0$ e $Ny > 0$ pares) nós na direção x e y respectivamente; $\phi_{2,p}^0$ com $2Nx + 1$ e $2Ny + 1$ nós na direção x e y respectivamente; $\dots, \phi_{G,p}^0$ com $2^{G-1}Nx + 1$ e $2^{G-1}Ny + 1$ nós na direção x e y respectivamente.
Fornecer o valor de p_L (ordem de acurácia das soluções numéricas).

Saída: $\phi_{g,1}$, para $g = 1, 2, 3, \dots, G$.

```

1 para  $g = 1, 2, \dots, G - 1$  faça
2    $NxI = 2^g Nx + 1$ 
    $NyI = 2^g Ny + 1$ 
    $k = 1$ 
   para  $j = 1, 3, 5, \dots, NyI$  faça
3     para  $i = 1, 3, 5, \dots, NxI$  faça
4        $p = i + NxI(j - 1)$ 
        $\phi_{g,k}^1 = \phi_{g+1,p}^0 + \frac{\phi_{g+1,p}^0 - \phi_{g,k}^0}{2^{p_L} - 1}$ 
        $k = k + 1$ 
5 para  $g = G$  faça
6   Obtenha  $\phi_{g,p}^1$  através do Algoritmo 3 (CRE 2D clássico), para  $g = G$ .
```

Algoritmo 12: Algoritmo SMER 1D, para diferenças finitas.

Entrada: Fornecer o valor de $N_{inicial}$, p_0 , r e dv (número de nós da malha mais grossa, ordem de acurácia das soluções numéricas, razão de refino das malhas e variação das ordens verdadeiras p_0, p_1, p_2, \dots , respectivamente).
Obter G soluções numéricas distintas: $\phi_{1,p}^0$ com nós $p = 0, 1, \dots, N_{inicial}$;
 $\phi_{2,p}^0$ com nós $p = 0, 1, 2, \dots, rN_{inicial}$; \dots ; $\phi_{G,p}^0$ com nós
 $p = 0, 1, 2, \dots, r^{G-1}N_{inicial}$.

1 **para** $g = 1, 2, 3, \dots, G - 1$ **faça**

2 $N_c = r^{g-1}N_{inicial}$
 $\overline{G} = G - g + 1$
 $\overline{it} = 1$
 para $it = g, g + 1, g + 2, \dots, G$ **faça**

3 $N = r^{\overline{it}-1}N_{inicial}$
 $\overline{\phi}_{\overline{it},0}^0 = \phi_{it,0}^0$
 $\widetilde{N} = r^{\overline{it}-1}$
 para $i = 1, 2, \dots, N_c - 1$ **faça**

4 $\overline{\phi}_{\overline{it},i}^0 = \phi_{it,i\widetilde{N}}^0$

5 $\overline{\phi}_{\overline{it},N_c}^0 = \phi_{it,N}^0$
 $\overline{it} = \overline{it} + 1$

6 **para** $i = 0, 1, \dots, N_c$ **faça**

7 **para** $it = 1, 2, \dots, \overline{G}$ **faça**

8 $\sigma_{it,0} = \overline{\phi}_{it,i}^0$

9 **para** $m = 1, 2, \dots, \overline{G} - 1$ **faça**

10 $p_{m-1} = p_0 + (m - 1)dv$
 para $\overline{g} = m + 1, m + 2, \dots, \overline{G}$ **faça**

11 $\sigma_{\overline{g},m} = \sigma_{\overline{g},m-1} + \frac{\sigma_{\overline{g},m-1} - \sigma_{\overline{g}-1,m-1}}{r^{p_{m-1}} - 1}$

12 **para** $it = 1, 2, \dots, \overline{G}$ **faça**

13 $\overline{\phi}_{it,i}^1 = \sigma_{it,it-1}$

14 Calcule e/ou escreva as variáveis de interesse, campos, normas, etc., para $\overline{\phi}_{it,i}^1$ e $\phi_{it,i}^0$, com $it = 1, 2, \dots, \overline{G}$ e $i = 0, 1, 2, \dots, N_c$, referentes a malha g .

Algoritmo 13: Algoritmo SMER 2D, para diferenças finitas.

Entrada: Fornecer o valor de p_0 , r e dv (ordem de acurácia das soluções numéricas, razão de refino entre as malhas e variação das ordens verdadeiras p_0, p_1, p_2, \dots , respectivamente).
 Obter G soluções numéricas distintas: $\phi_{1,p}^0$ com $Nx + 1$ e $Ny + 1$ ($Nx > 0$ e $Ny > 0$ pares) nós na direção x e y respectivamente; $\phi_{2,p}^0$ com $rNx + 1$ e $rNy + 1$ nós na direção x e y respectivamente; $\dots, \phi_{G,p}^0$ com $r^{G-1}Nx + 1$ e $r^{G-1}Ny + 1$ nós na direção x e y respectivamente.

```

1 para  $g = 1, 2, 3, \dots, G - 1$  faça
2    $\overline{Nx} = r^{g-1}Nx + 1$ 
    $\overline{Ny} = r^{g-1}Ny + 1$ 
    $N_c = \overline{Nx} \overline{Ny}$ 
    $\overline{G} = G - g + 1$ 
    $\overline{it} = 1$ 
   para  $it = g, g + 1, g + 2, \dots, G$  faça
3      $\overline{Nx} = r^{g-1}Nx + 1$ 
      $\overline{Ny} = r^{g-1}Ny + 1$ 
      $k = 1$ 
      $\widetilde{N} = r^{\overline{it}-1}$ 
     para  $j = 1, \widetilde{N} + 1, 2\widetilde{N} + 1, 3\widetilde{N} + 1, \dots, \overline{Ny}$  faça
4       para  $i = 1, \widetilde{N} + 1, 2\widetilde{N} + 1, 3\widetilde{N} + 1, \dots, \overline{Nx}$  faça
5          $p = i + \overline{Nx}(j - 1)$ 
          $\overline{\phi}_{it,k}^0 = \phi_{it,p}^0$ 
          $k = k + 1$ 
6        $\overline{it} = \overline{it} + 1$ 
7     para  $i = 1, 2, 3, \dots, N_c$  faça
8       para  $it = 1, 2, \dots, \overline{G}$  faça
9          $\sigma_{it,0} = \overline{\phi}_{it,i}^0$ 
10      para  $m = 1, 2, \dots, \overline{G} - 1$  faça
11         $p_{m-1} = p_0 + (m - 1)dv$ 
        para  $\bar{g} = m + 1, m + 2, \dots, \overline{G}$  faça
12           $\sigma_{\bar{g},m} = \sigma_{\bar{g},m-1} + \frac{\sigma_{\bar{g},m-1} - \sigma_{\bar{g}-1,m-1}}{r^{p_{m-1}} - 1}$ 
13        para  $it = 1, 2, \dots, \overline{G}$  faça
14           $\overline{\phi}_{it,i}^1 = \sigma_{it,it-1}$ 
15  Calcule e/ou escreva as variáveis de interesse, campos, normas, etc., para  $\overline{\phi}_{it,i}^1$  e
    $\phi_{it,i}^0$ , com  $it = 1, 2, \dots, \overline{G}$  e  $i = 1, 2, \dots, N_c$ , referentes a malha  $g$ .
```

Algoritmo 14: CRE clássico com Interpolação e FRE 1D (adaptado de Roache e Knupp (1993)).

Entrada: Obter G soluções numéricas distintas: $\phi_{1,p}^0$ com nós $p = 0, 1, \dots, N_{inicial}$;
 $\phi_{2,p}^0$ com nós $p = 0, 1, 2, \dots, 2N_{inicial}$; \dots ; $\phi_{G,p}^0$ com nós
 $p = 0, 1, 2, \dots, 2^{G-1}N_{inicial}$.
 Fornecer o valor de p_0 (ordem de acurácia das soluções numéricas).

Saída: $\phi_{g,p}^1$, para $g = 2, 3, \dots, G$ e $p = 0, 1, 2, \dots, 2^{g-1}N_{inicial}$.

```

1  para  $g = 2, 3, \dots, G$  faça
2       $N = 2^{g-1}N_{inicial}$ 
      para  $i = 0, 2, 4, 6, \dots, N$  faça
3           $C_{g,i}^0 = \frac{\phi_{g,i}^0 - \phi_{g-1,i/2}^0}{2^{p_0} - 1}$ 
4           $\phi_{g,i}^1 = \phi_{g,i}^0 + C_{g,i}^0$ 
5      para  $i = 0, 2, 4, 6, \dots, N - 2$  faça
6          selecione Correção faça
7              caso Clássica faça
8                   $C_{g,i+1}^0 = \frac{C_{g,i}^0 + C_{g,i+2}^0}{2}$ 
9              caso FRE faça
10                  $k = \frac{\phi_{g,i+1}^0 - \phi_{g,i}^0}{\phi_{g,i+2}^0 - \phi_{g,i}^0}$ 
11                  $C_{g,i+1}^0 = C_{g,i}^0 + k(C_{g,i+2}^0 - C_{g,i}^0)$ 
12             caso Interpolado faça
13                 Aplique o Algoritmo 15 para o nó  $i$  (Mais detalhes, veja Seção 3.5)
14                  $\phi_{g,i+1}^1 = \phi_{g,i+1}^0 + C_{g,i+1}^0$ 

```

Algoritmo 15: Algoritmo cálculo da correção (C) por interpolação, para os nós não coincidentes, caso unidimensional.

Entrada: Fornecer a correção ($C_{g,0}$) com seus nós disponíveis da malha g :

$0, 2, 4, \dots, N$ (N par).

Fornecer os nós da malha (x).

Fornecer o grau máximo (p) da interpolação desejada.

Fornecer a posição i do nó, antecessora do nó a ser interpolado ($i + 1$).

Saída: $C_{g,i+1}^0$.

1 $j = 0$; $c_1 = 1$; $c_2 = 1$; $k = 2$; $k1 = i + k$; $k2 = 0$; $k3 = i + k2$;

enquanto $j \leq p$ e $\underbrace{c_1 + c_2}_{\text{Ou } c_1+c_2=2 \text{ (caso central)}} > 0$ **faça**

 2 **se** $k1 \leq N$ **então**

 3 **se** $j \geq 0$ e $j \leq p$ **então**

 4 $ponto(j) = k1$
 $k = k + 2$
 $k1 = i + k$
 $j = j + 1$

 5 **senão**

 6 $c_1 = 0$

 7 **se** $k3 \geq 0$ **então**

 8 **se** $j \geq 0$ e $j \leq p$ **então**
 9 $ponto(j) = k3$
 $k2 = k2 - 2$
 $k3 = i + k2$
 $j = j + 1$

 10 **senão**

 11 $c_2 = 0$

12 Calcule a correção $C_{g,0}^{i+1}$, através da interpolação de grau máximo $j - 1$, avaliada em $x(i + 1)$, passando pelos pontos: $(x(ponto(k)), C_{g,ponto(k)}^0, k = 0, 1, \dots, j - 1)$.

13 **Observação:** Caso central, faz com que os vizinhos do ponto interpolado tenham a mesma quantidade, caso contrário segue a lógica apresentada na Seção 3.5.

APÊNDICE C – RESULTADOS ADICIONAIS

Neste apêndice são apresentados resultados adicionais para a variável l_∞ referente aos capítulos 4, 5, 6, 7 e 8.

Estão publicados todos os resultados e simulações de forma integral neste link:

http://ftp.demec.ufpr.br/CFD/monografias/2020_Carlos-Carvalho_doutorado/

C.1 MALHA NÃO UNIFORME 1D

C.1.1 Poisson

Tabela 16 – Resultados: SMER INTERPOLADO, conjunto β_2 , Variável l_∞ , Malha não uniforme, Poisson1D, $T = \frac{-1}{5}e^{3x} + 3x + 2$.

Malha	h	l_∞ : SM-I	l_∞ : SMER-I	p_E^* : SM-I	p_E^* : SMER-I
1	1.00E-01	8.48836E-02	8.48836E-02		
2	5.00E-02	6.03663E-03	3.15517E-02	3.81367E+00	1.42777E+00
3	2.50E-02	1.49333E-03	3.80227E-03	2.01521E+00	3.05278E+00
4	1.25E-02	3.69191E-04	1.61679E-04	2.01610E+00	4.55566E+00
5	6.25E-03	9.17485E-05	3.94693E-06	2.00861E+00	5.35626E+00
6	3.13E-03	2.28669E-05	4.96512E-07	2.00442E+00	2.99083E+00
7	1.56E-03	5.70786E-06	6.20594E-08	2.00224E+00	3.00010E+00
8	7.81E-04	1.42585E-06	7.76430E-09	2.00113E+00	2.99872E+00
9	3.91E-04	3.56323E-07	9.70877E-10	2.00057E+00	2.99950E+00
10	1.95E-04	8.90633E-08	1.21379E-10	2.00028E+00	2.99977E+00
11	9.77E-05	2.22636E-08	1.51628E-11	2.00014E+00	3.00091E+00
12	4.88E-05	5.56564E-09	1.89427E-12	2.00007E+00	3.00082E+00
13	2.44E-05	1.39137E-09	2.35156E-13	2.00004E+00	3.00995E+00
14	1.22E-05	3.47837E-10	2.93947E-14	2.00002E+00	2.99999E+00
15	6.10E-06	8.69588E-11	3.67436E-15	2.00001E+00	2.99999E+00

Figura 78 – Resultados: SMER, Malhas 7-8, Variável l_∞ , Poisson 1D com solução $T(x) = \sin(\pi x)$, Malha não uniforme.

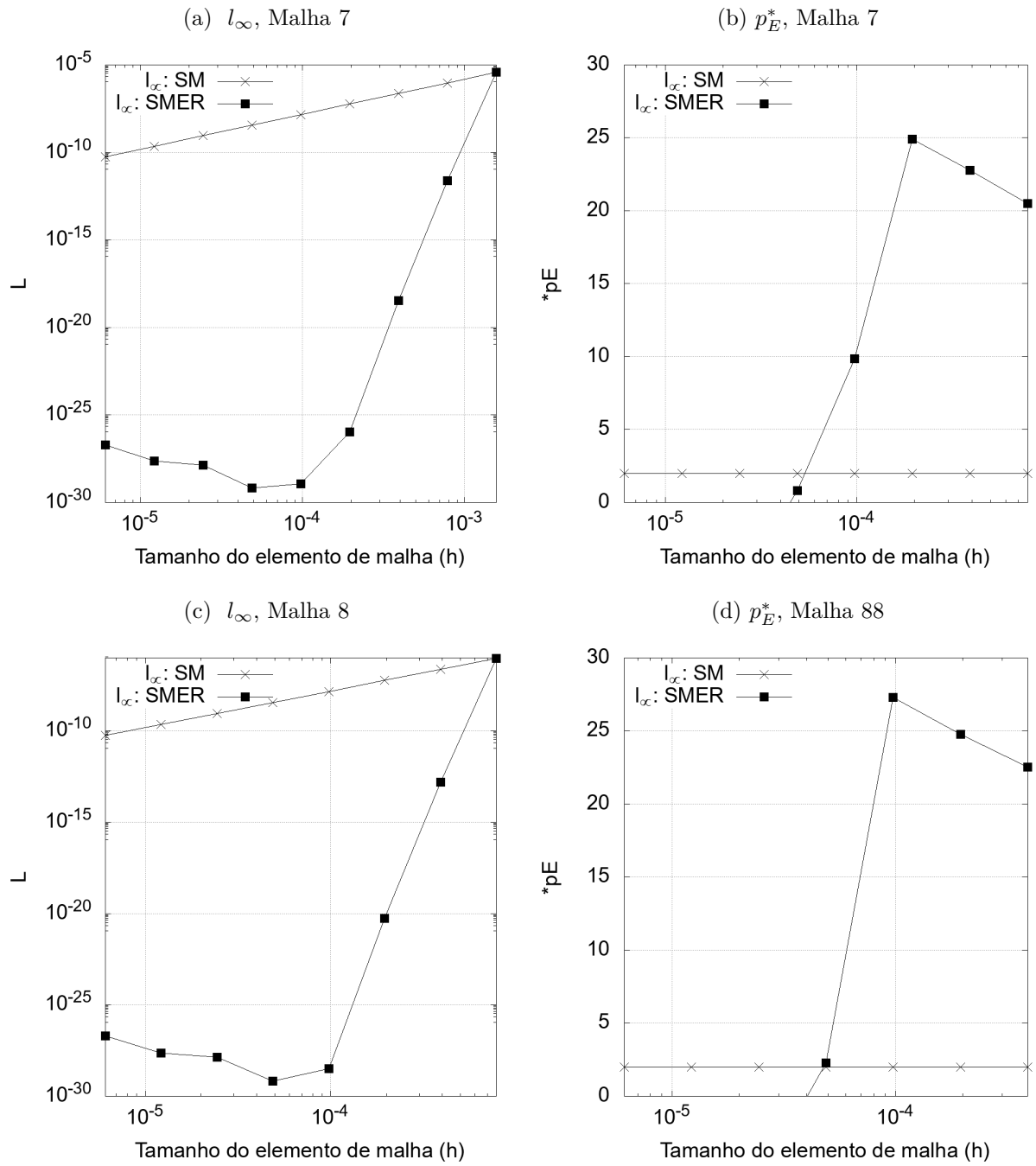


Figura 79 – Resultados: SMER, Malhas $g = 1, 2, \dots, 14$, Variável l_∞ , Poisson 1D com solução $T = \frac{-1}{5}e^{3x} + 3x + 2$, Malha não uniforme.

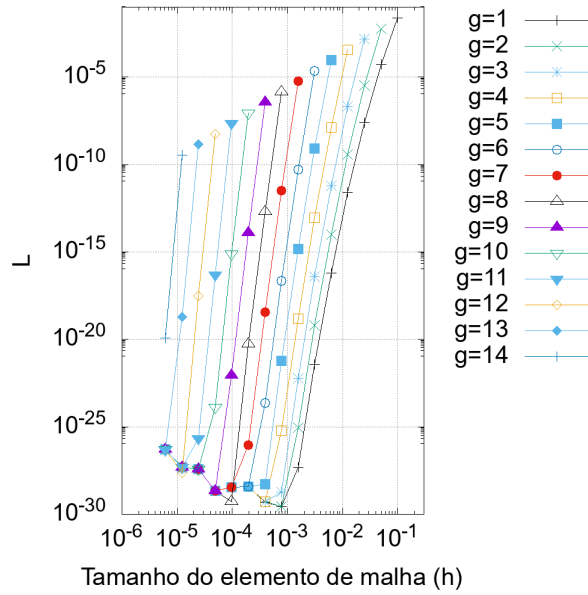
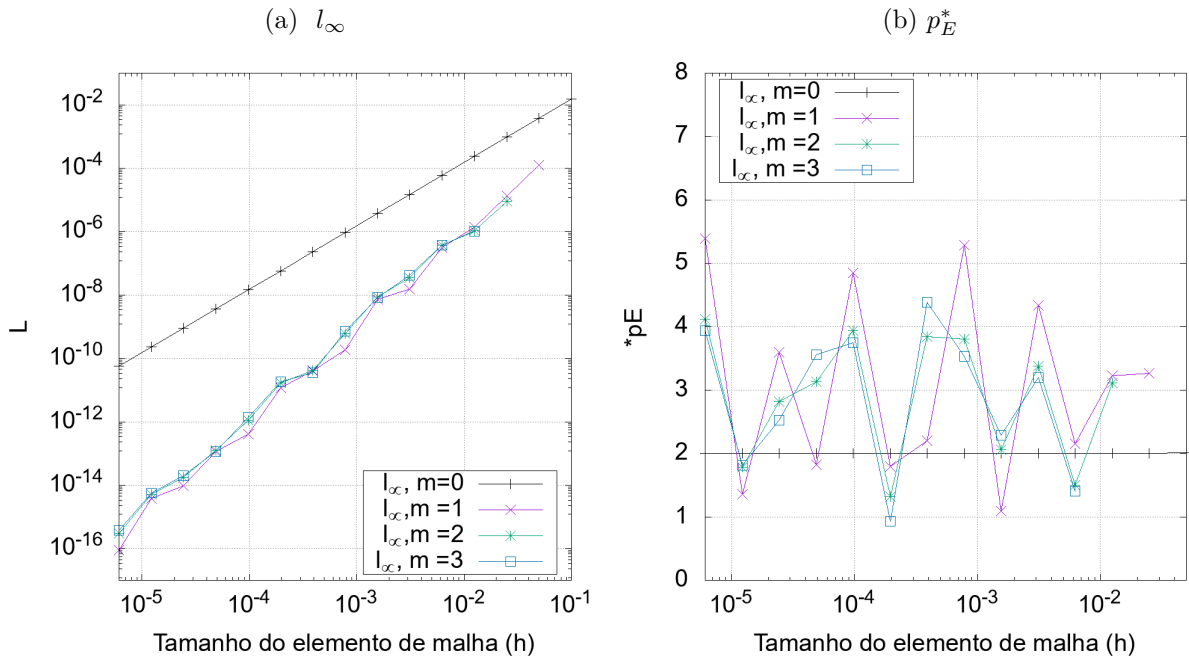


Figura 80 – Resultados: FRE, Variável l_∞ , Poisson 1D com solução $T(x) = \sin(\pi x)$, Malha não uniforme.



C.1.2 Burgers

Figura 81 – Resultados: SMER, Malhas 1-2, Variável l_∞ , Burgers 1D com solução $T(x) = \frac{e^{xRe} - 1}{e^{Re} - 1}$, $Re = 1$, Malha não uniforme.

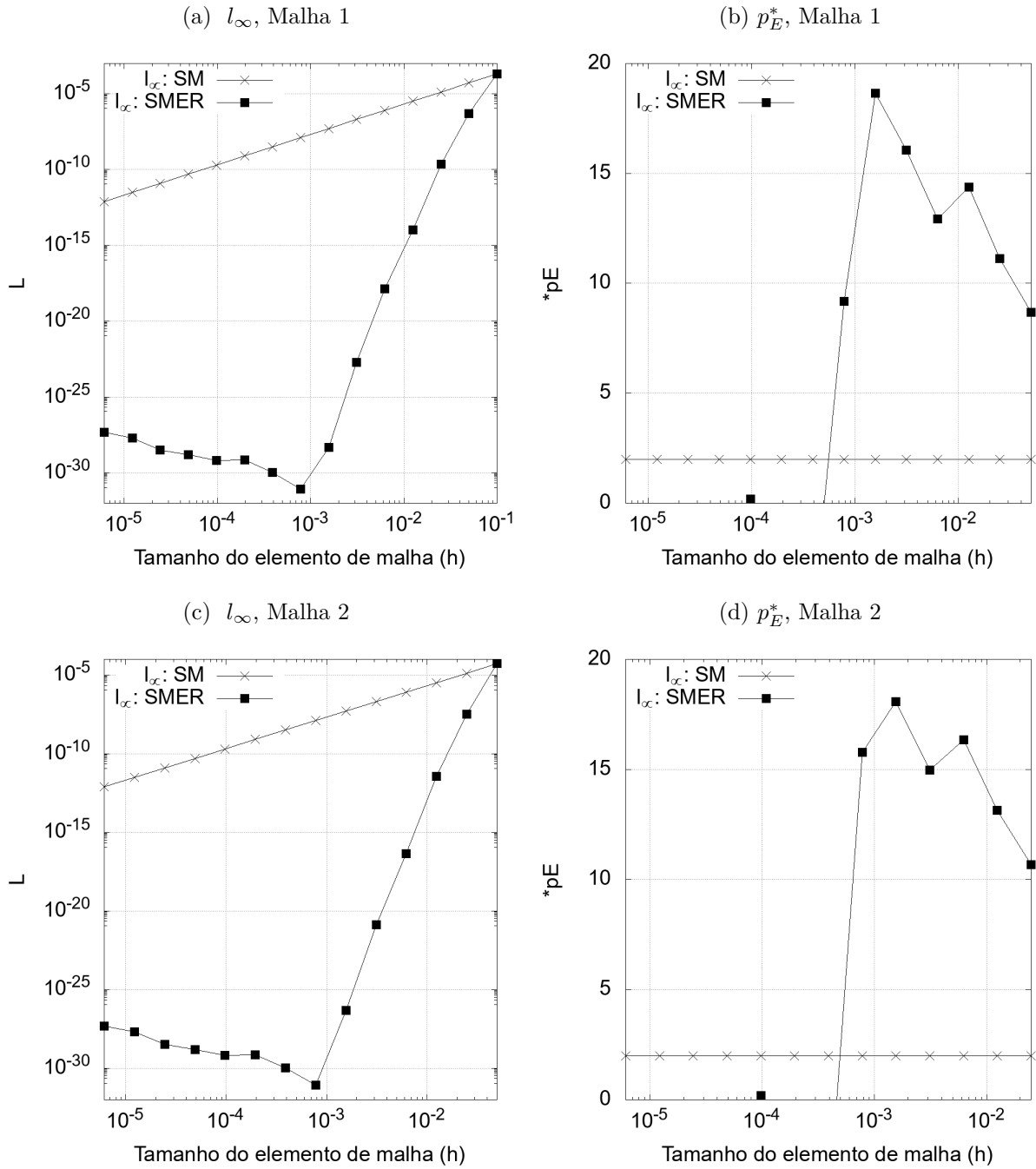


Figura 82 – Resultados: CRE-I, Variável l_∞ , Burgers 1D com solução $T(x) = \frac{e^{xRe} - 1}{e^{Re} - 1}$, $Re = 1$, Malha não uniforme.

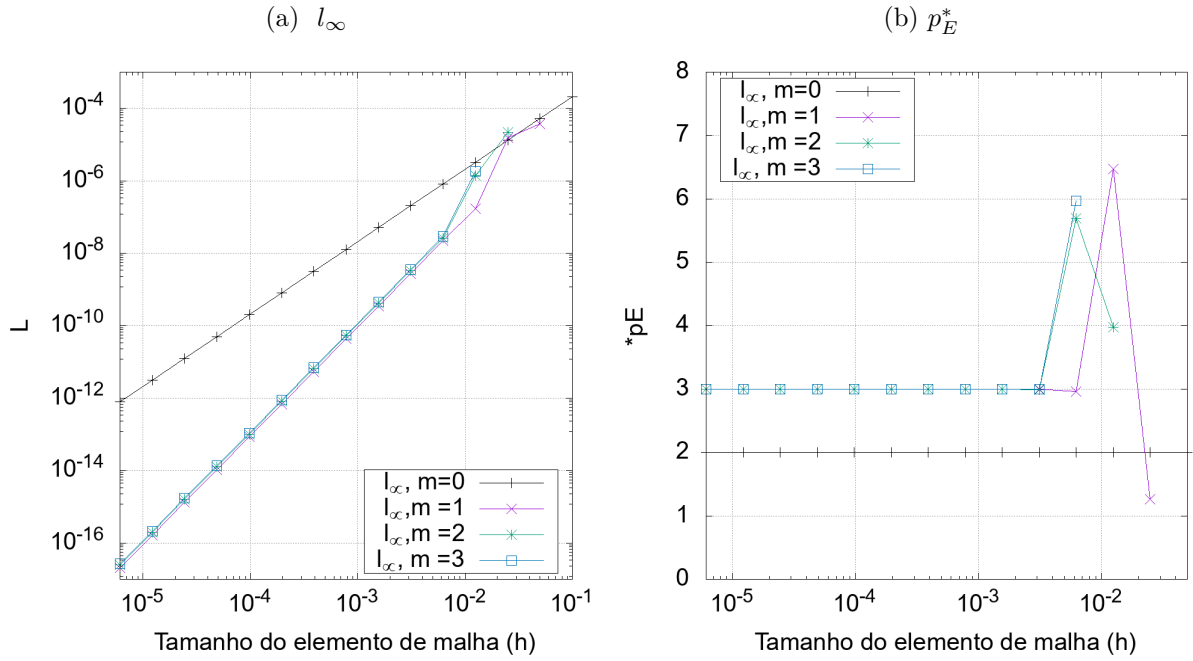
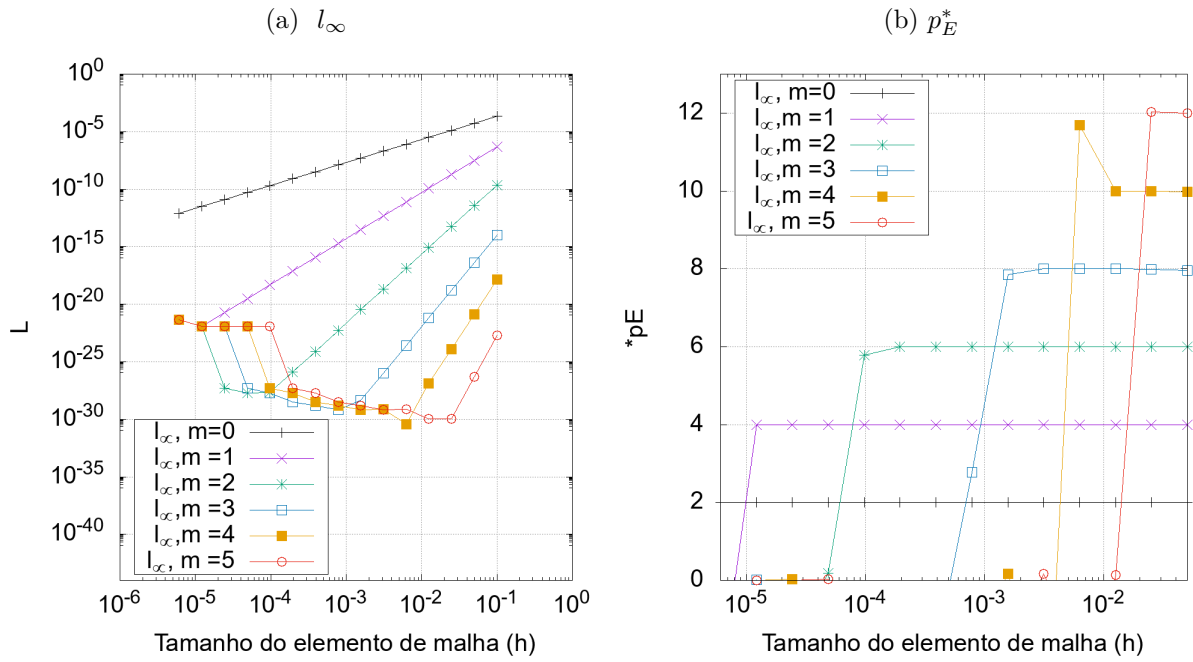


Figura 83 – Resultados: SER, Variável l_∞ , Burgers 1D com solução $T(x) = \frac{e^{xRe} - 1}{e^{Re} - 1}$, $Re = 1$, Malha não uniforme.



C.2 MALHA UNIFORME 1D

C.2.1 Poisson

Figura 84 – Resultados: SMER, Malhas 7-8, Variável l_∞ , Poisson 1D com solução $T = \sin(\pi x)$, Malha uniforme.

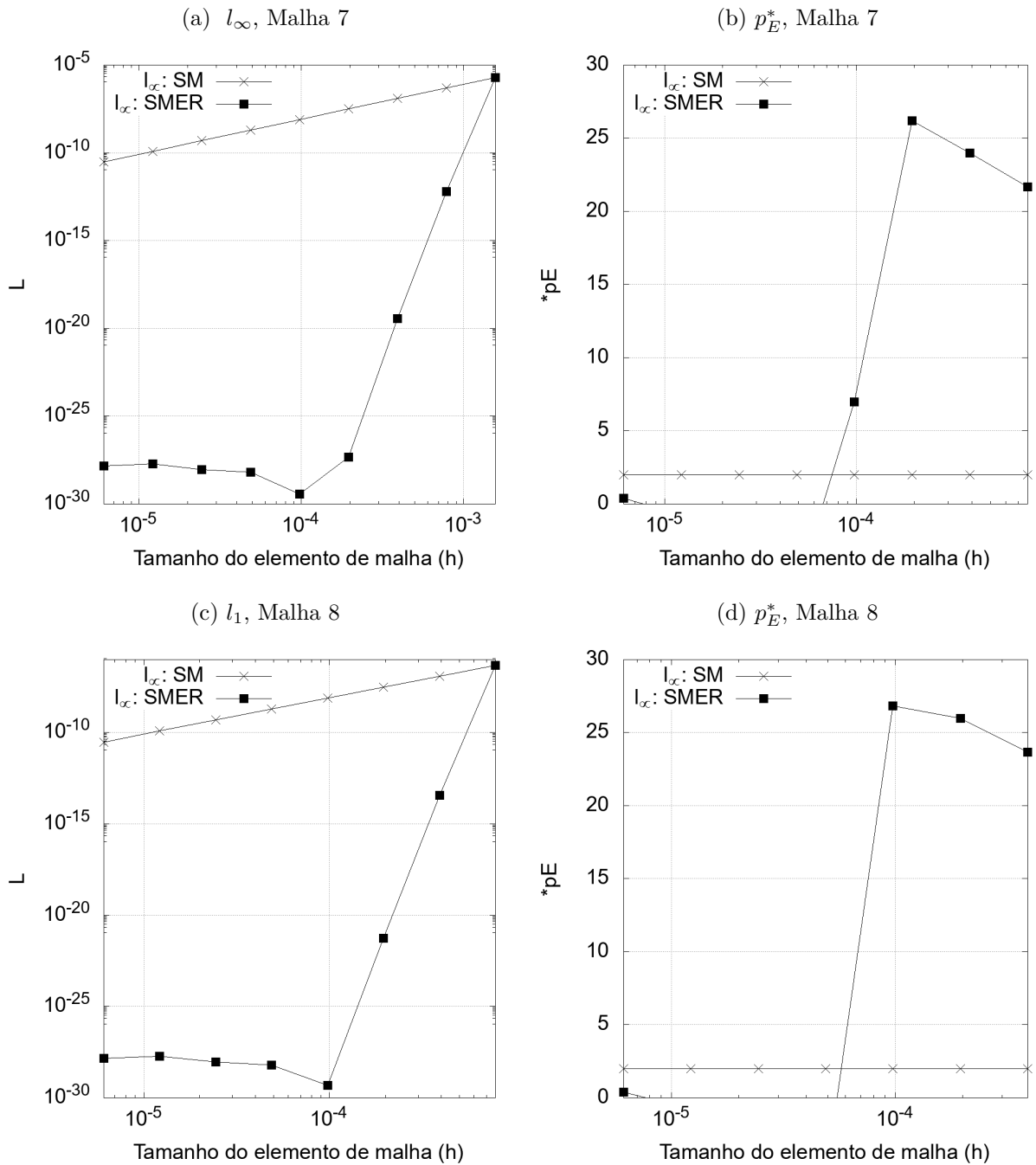


Tabela 17 – Resultados: SMER, Malha base 13, Variável l_∞ , Poisson 1D com solução $T = \frac{-1}{5}e^{3x} + 3x + 2$, Malha uniforme.

Malha	h	l_∞ : SM	l_∞ : SMER	p_E^* : SM	p_E^* : SMER
13	2.44E-05	5.73062E-10	5.73062E-10		
14	1.22E-05	1.43266E-10	3.84268E-20	2.00000E+00	3.37959E+01
15	6.10E-06	3.58164E-11	3.66033E-28	2.00000E+00	2.66456E+01

Tabela 18 – Resultados: SMER, Malha base 14, Variável l_∞ , Poisson 1D com solução $T = \frac{-1}{5}e^{3x} + 3x + 2$, Malha uniforme.

Malha	h	l_∞ : SM	l_∞ : SMER	p_E^* : SM	p_E^* : SMER
14	1.22E-05	1.43266E-10	1.43266E-10		
15	6.10E-06	3.58164E-11	2.40168E-21	2.00000E+00	3.57959E+01

Figura 85 – Resultados: SMER, Malhas $g = 1, 2, \dots, 14$, Variável l_∞ , Poisson 1D com solução $T = \frac{-1}{5}e^{3x} + 3x + 2$, Malha uniforme.

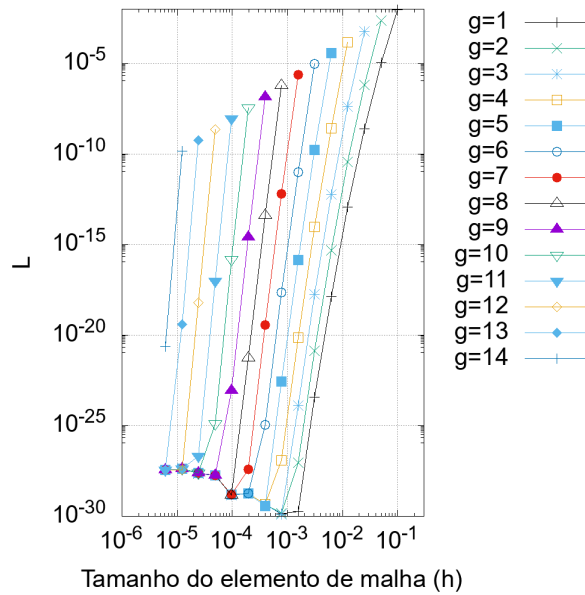


Figura 86 – Resultados: SMER INTERPOLADO (SMER-I), Poisson 1D, $T = \frac{-1}{5}e^{3x} + 3x + 2$, Variável l_∞ , Malha uniforme, conjunto β_1 .

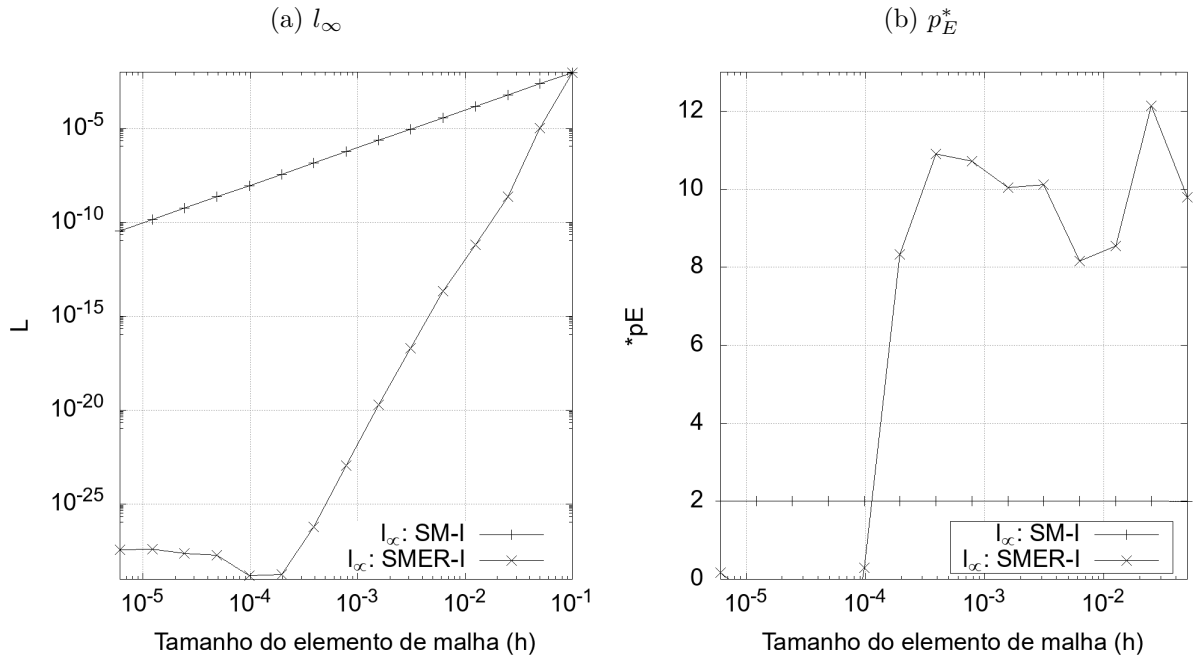


Figura 87 – Resultados: CRE clássico (CRE), Variável l_∞ , Poisson 1D, $T = \frac{-1}{5}e^{3x} + 3x + 2$, Malha uniforme.

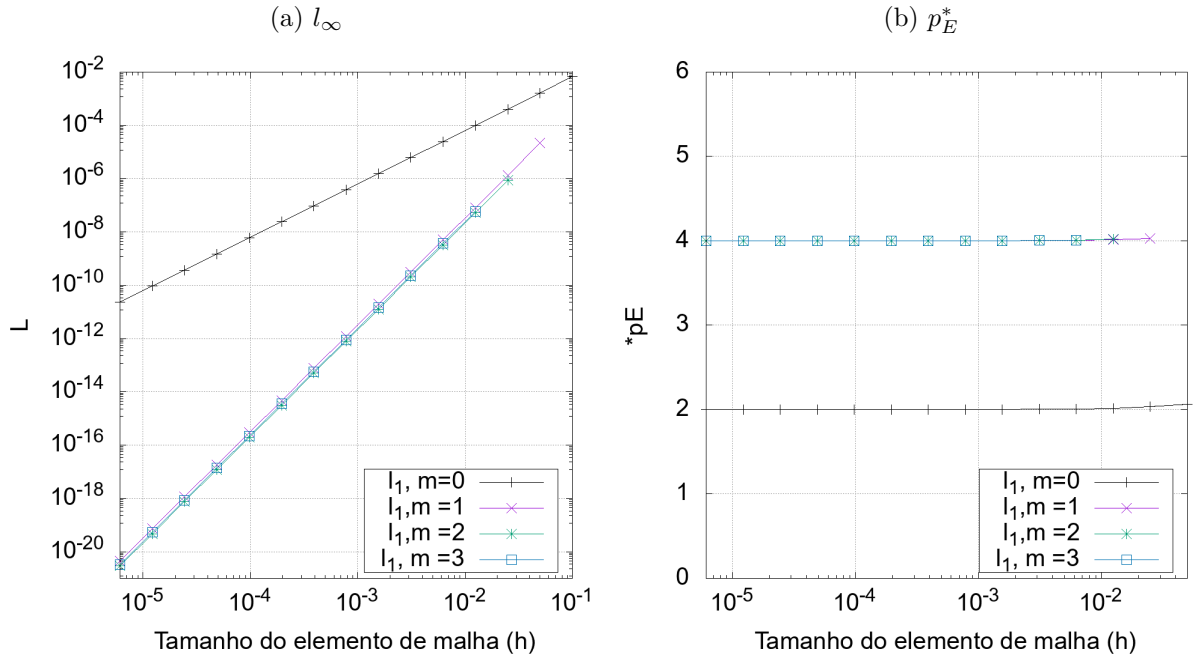
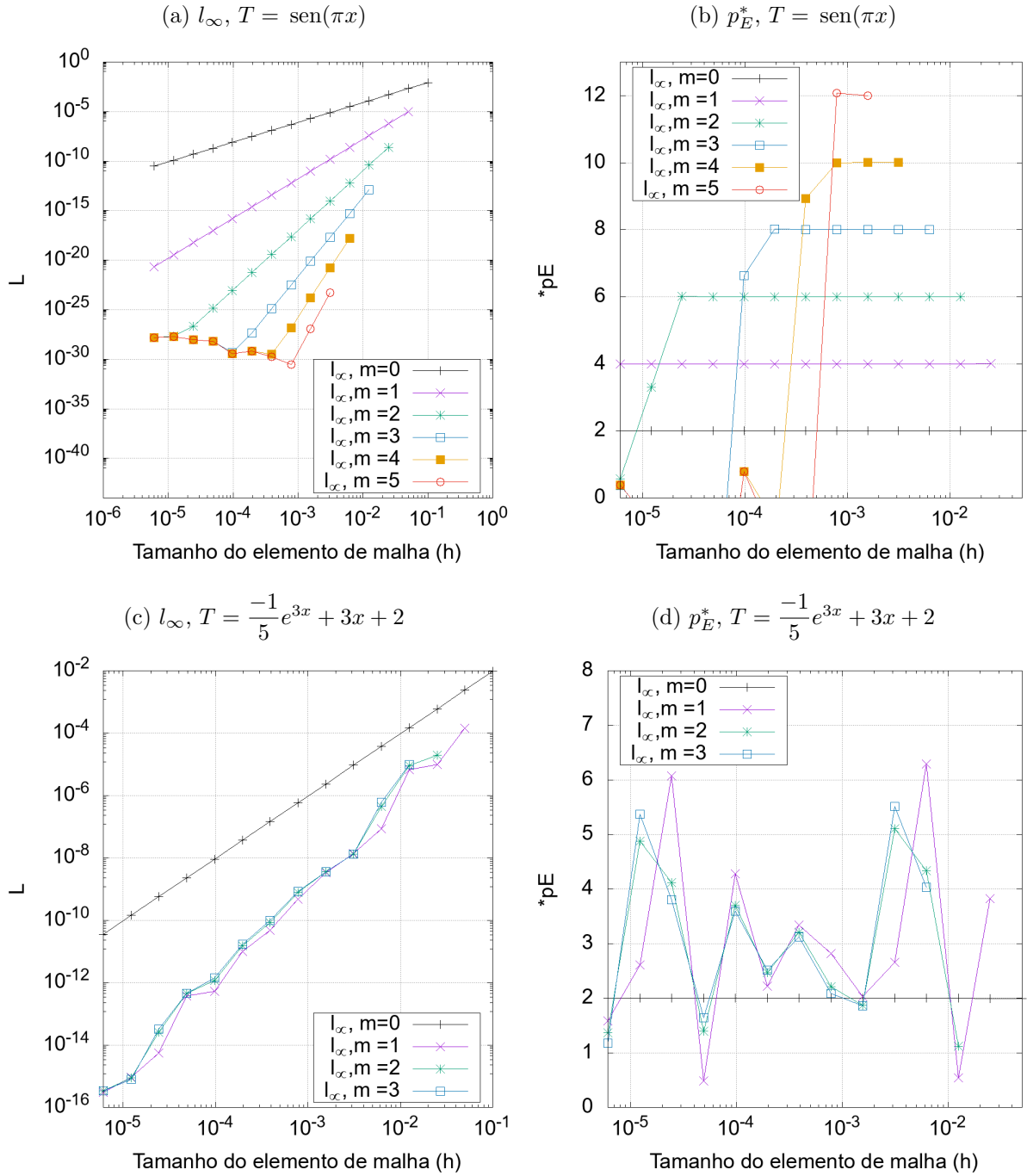


Figura 88 – Resultados: Normas l_∞ e p_E^* , CRE com FRE (FRE), Poisson 1D, Malha uniforme.



C.2.2 Burgers

Figura 89 – Resultados: SMER, Malhas 1-2, Variável l_∞ , Burgers 1D com solução $T(x) = \frac{e^{xRe} - 1}{e^{Re} - 1}$, $Re = 1$, Malha uniforme.

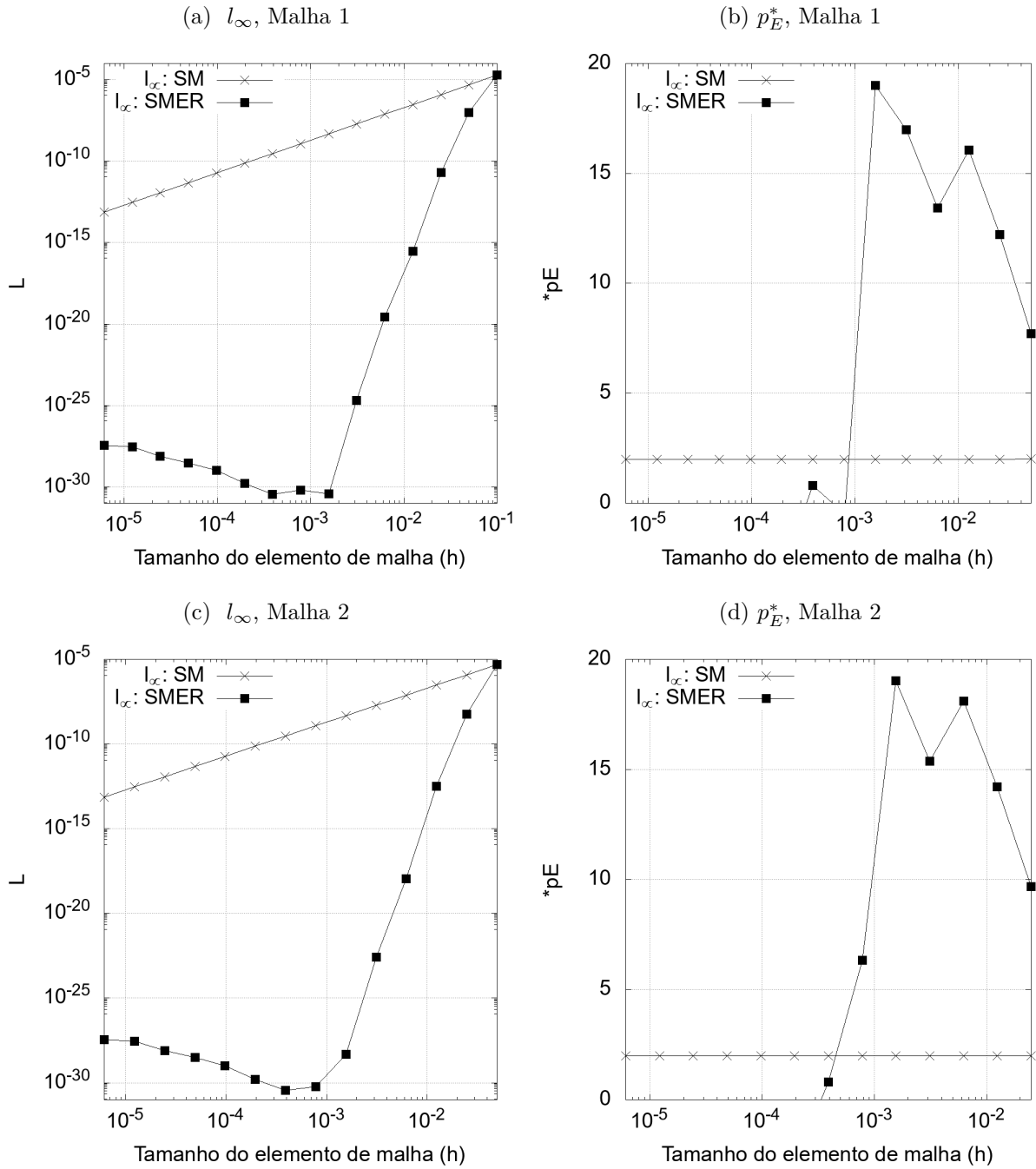


Figura 90 – Resultados: CRE com interpolação (CRE-I), Variável l_∞ , Burgers 1D, $Re = 1$,
 $T = \frac{e^{xRe} - 1}{e^{Re} - 1}$, Malha uniforme.

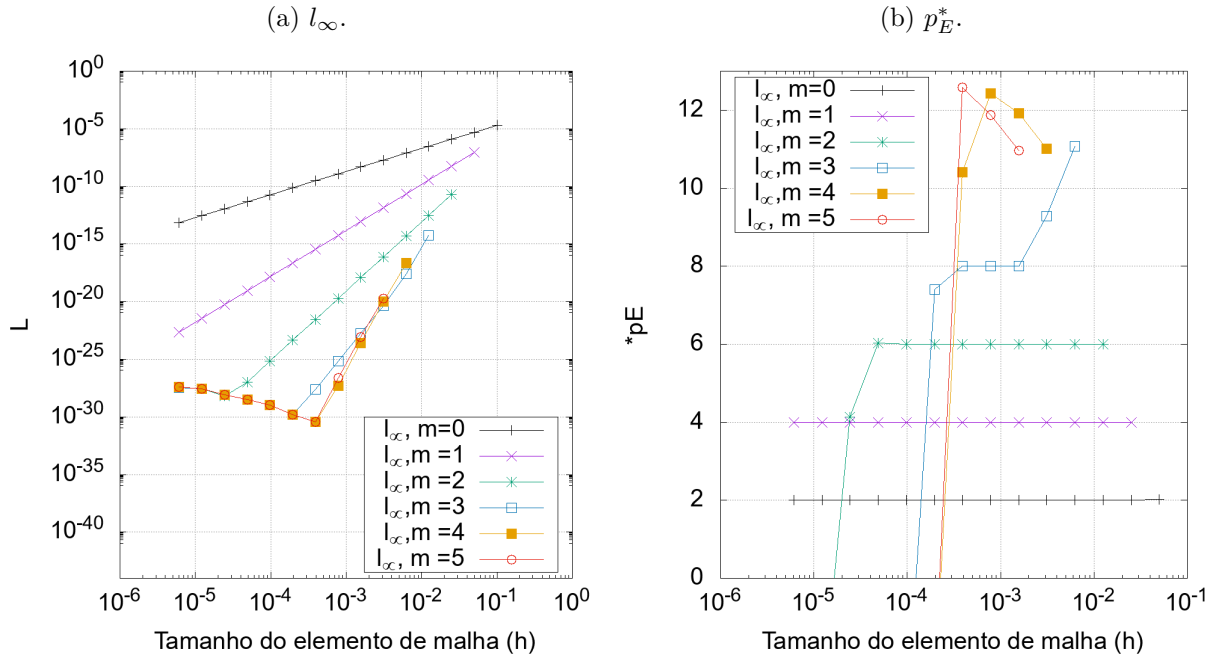
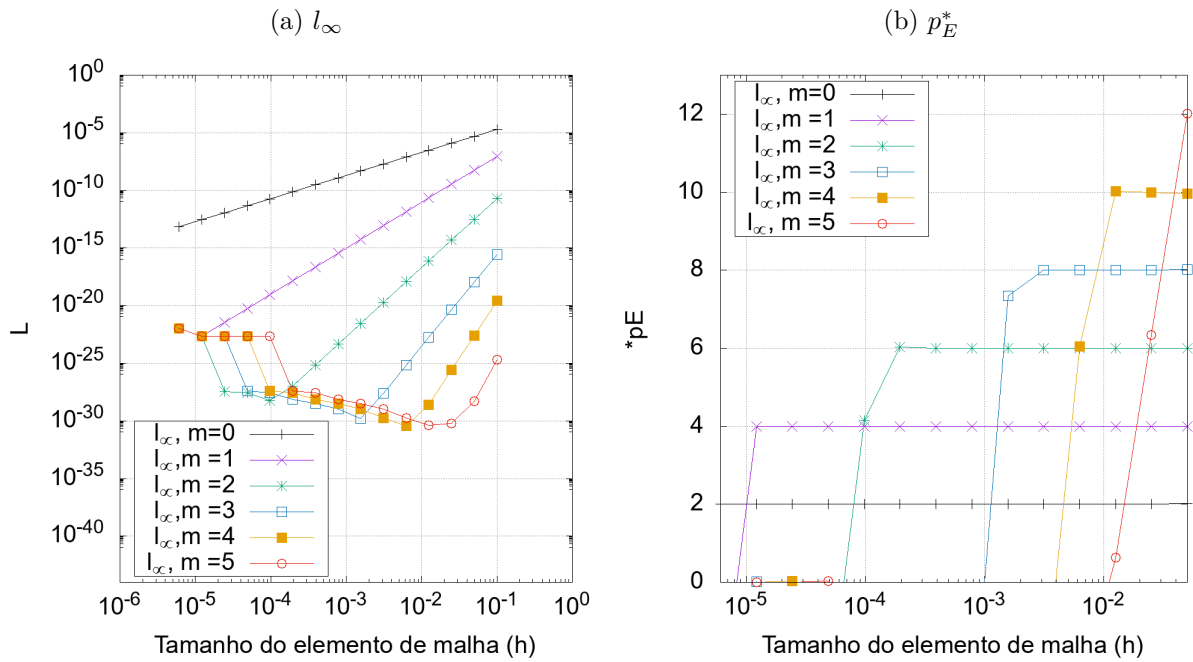


Figura 91 – Resultados: SER, Variável l_∞ , Burgers 1D, $Re = 1$, $T = \frac{e^{xRe} - 1}{e^{Re} - 1}$, Malha uniforme.



C.3 LAPLACE 2D

C.3.1 Malha uniforme

Figura 92 – Resultados: SMER, Malhas 1 e 6, Variável l_∞ , Laplace 2D, Malha uniforme.

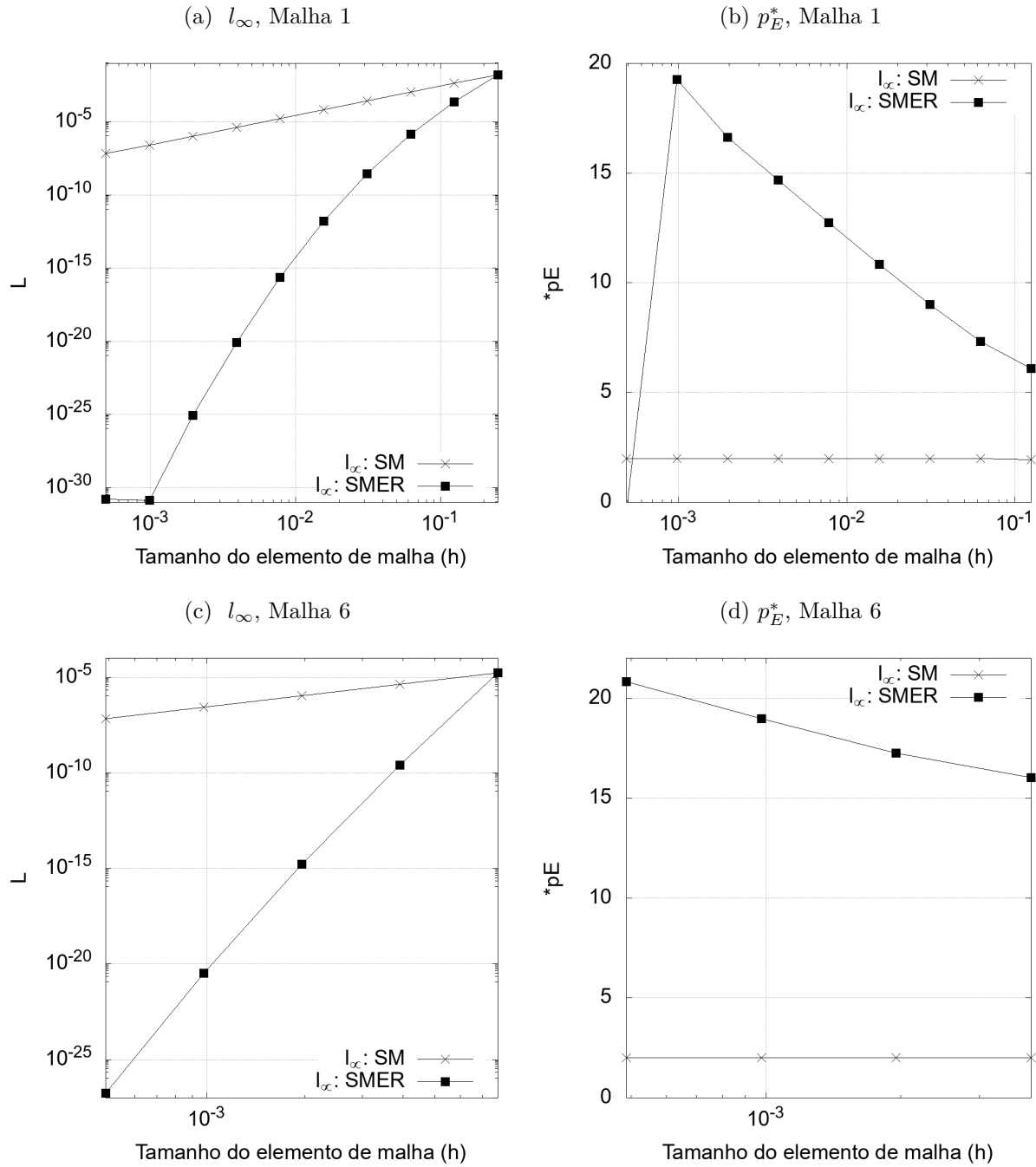


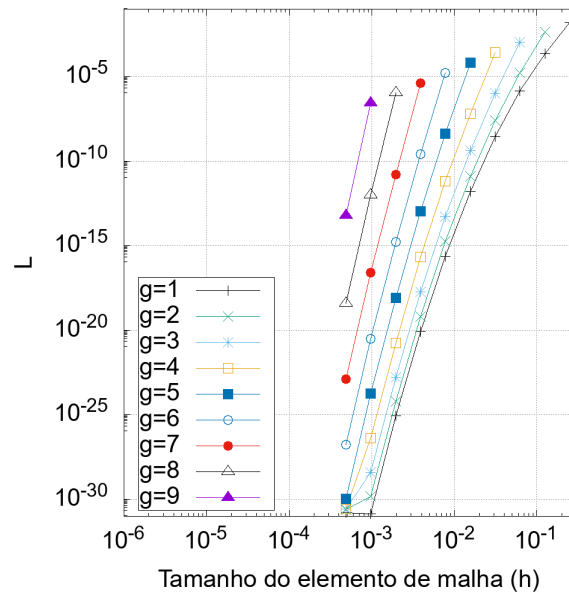
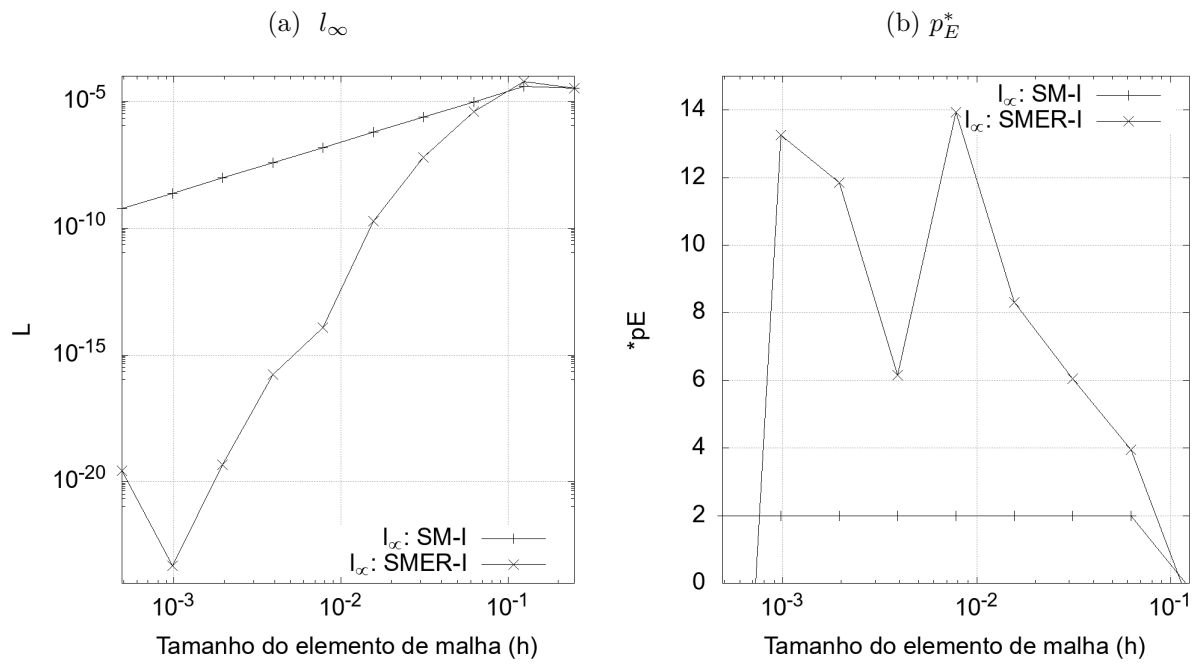
Figura 93 – Resultados: SMER, Malhas $g = 1, 2, \dots, 9$, Variável l_∞ , Laplace 2D, Malha uniforme.

 Figura 94 – Resultados: SMER-I, Conjunto β_3 , Variável l_∞ , Laplace 2D, Malha uniforme.


Figura 95 – Resultados: CRE, Variável l_∞ , Laplace 2D, Malha uniforme.

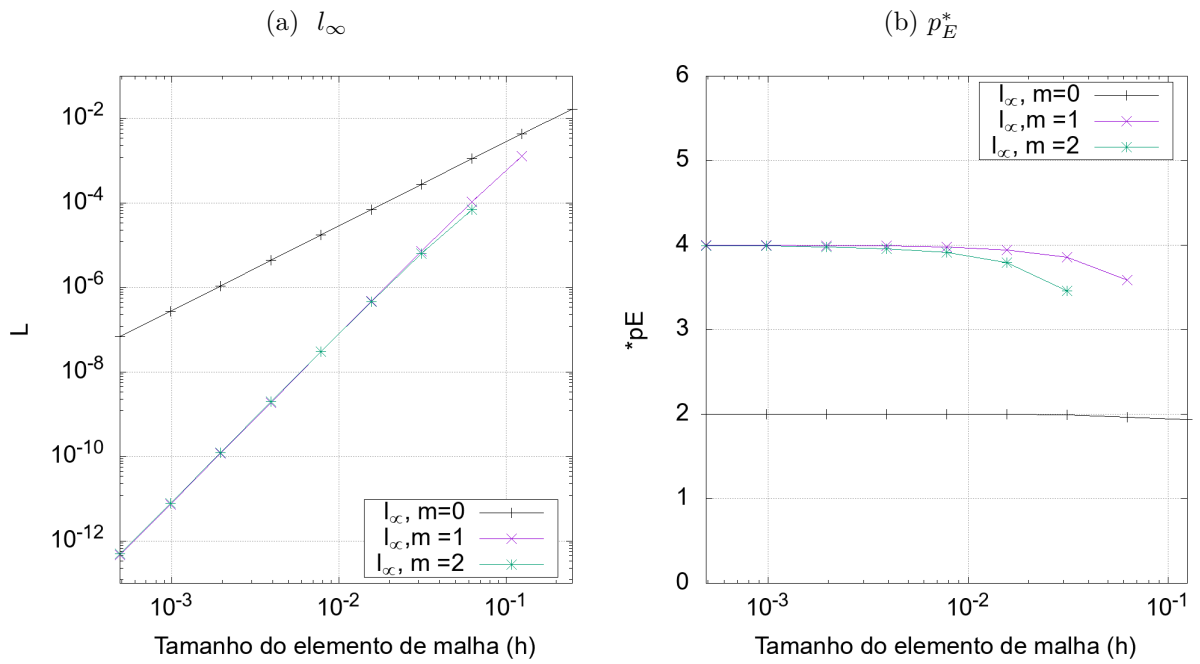


Figura 96 – Resultados: CRE-I, Variável l_∞ , Laplace 2D, Malha uniforme.

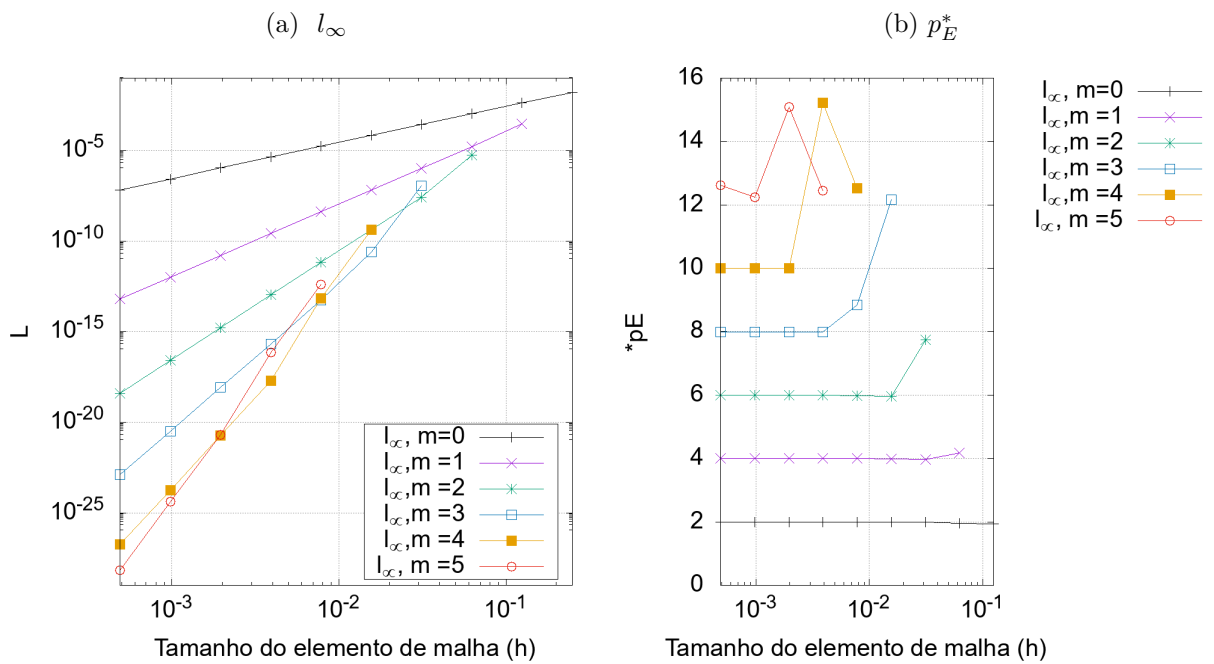
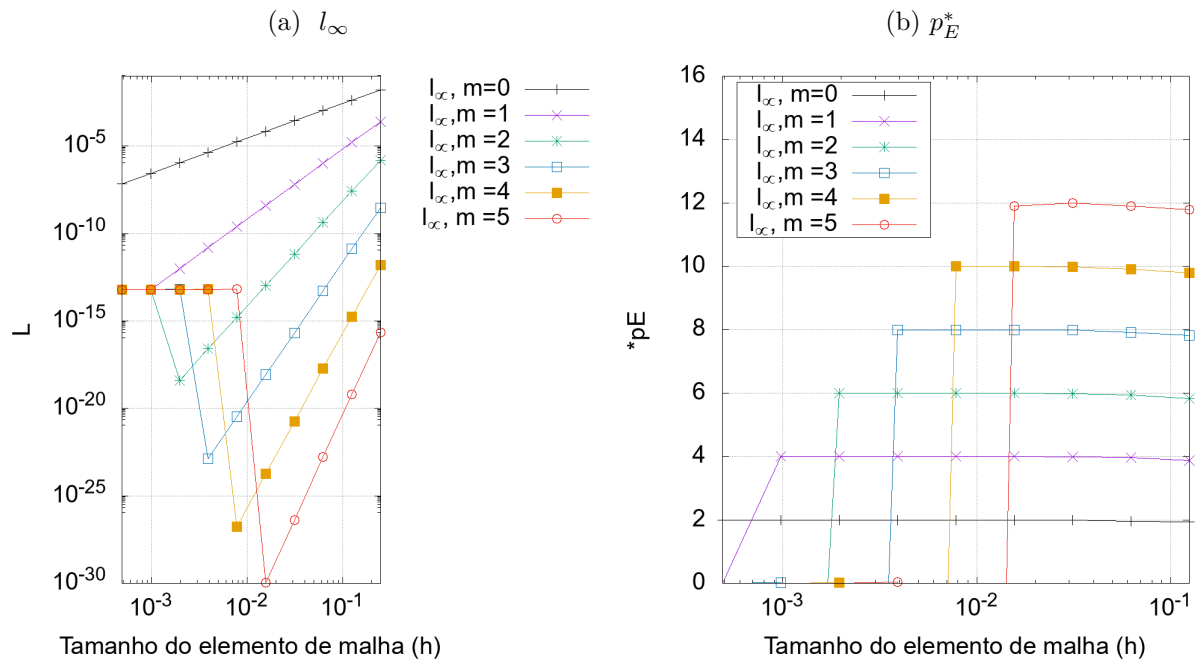


Figura 97 – Resultados: SER, Variável l_∞ , Laplace 2D, Malha uniforme.



C.3.2 Malha não uniforme

Figura 98 – Resultados: SMER, Malhas $g = 1, 2, \dots, 9$, Variável l_∞ , Laplace 2D, Malha não uniforme.

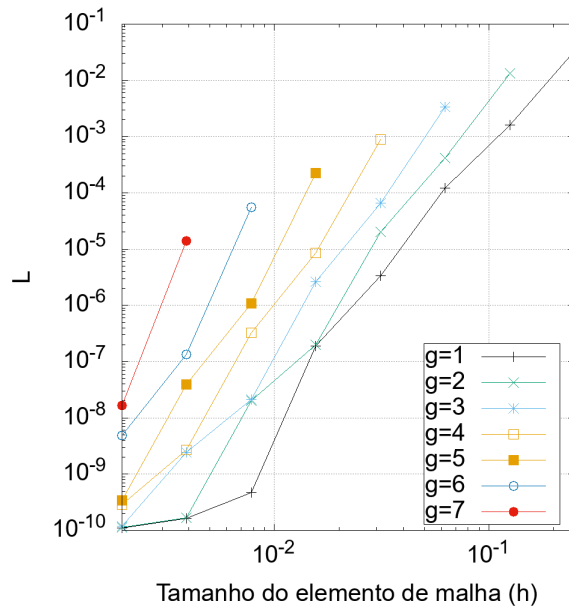


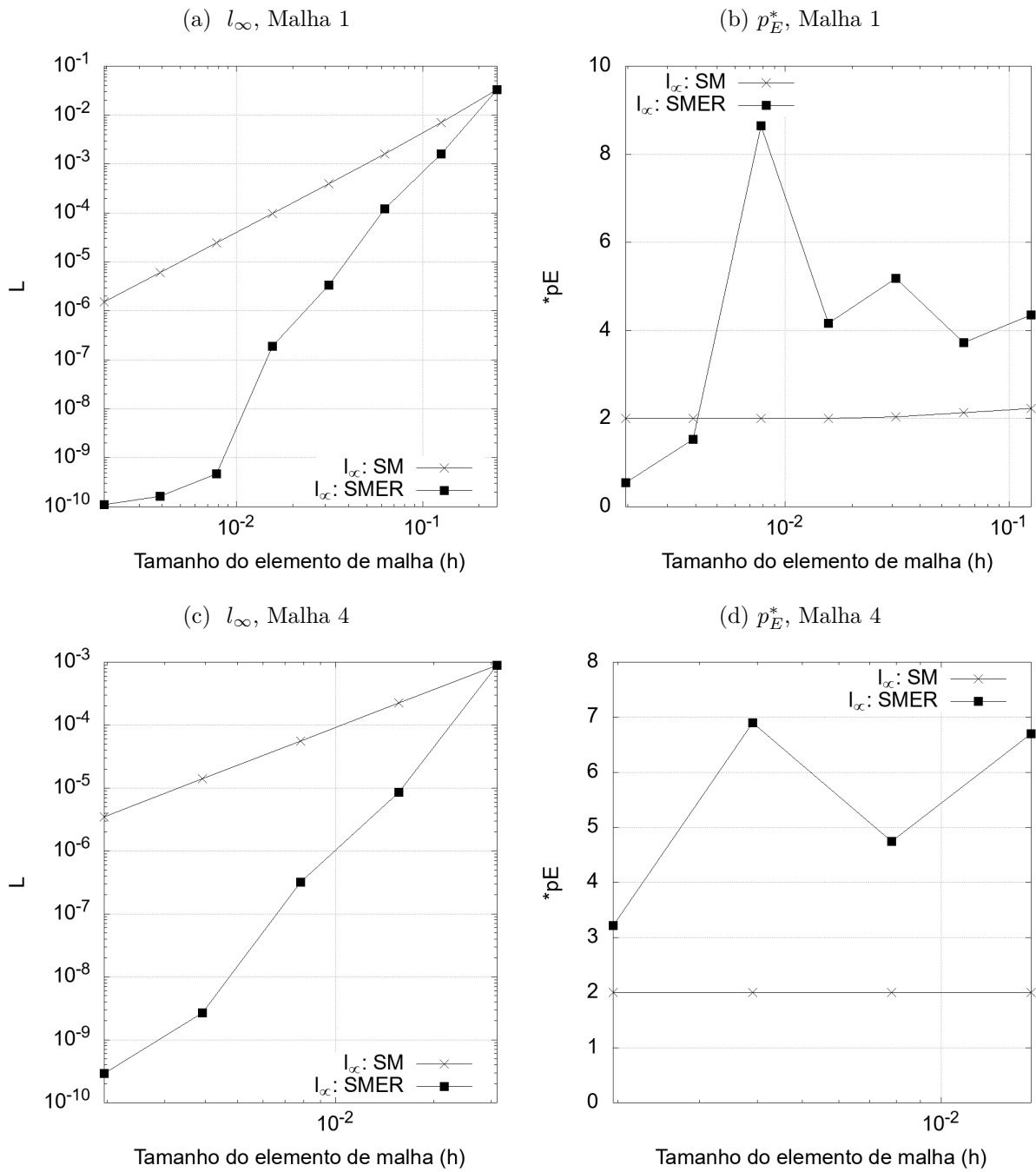
Figura 99 – Resultados: SMER, Malhas 1 e 4, Variável l_∞ , Laplace 2D, Malha não uniforme.

Figura 100 – Resultados: SMER-I, Conjunto β_2 , Variável l_∞ , Laplace 2D, Malha não uniforme.

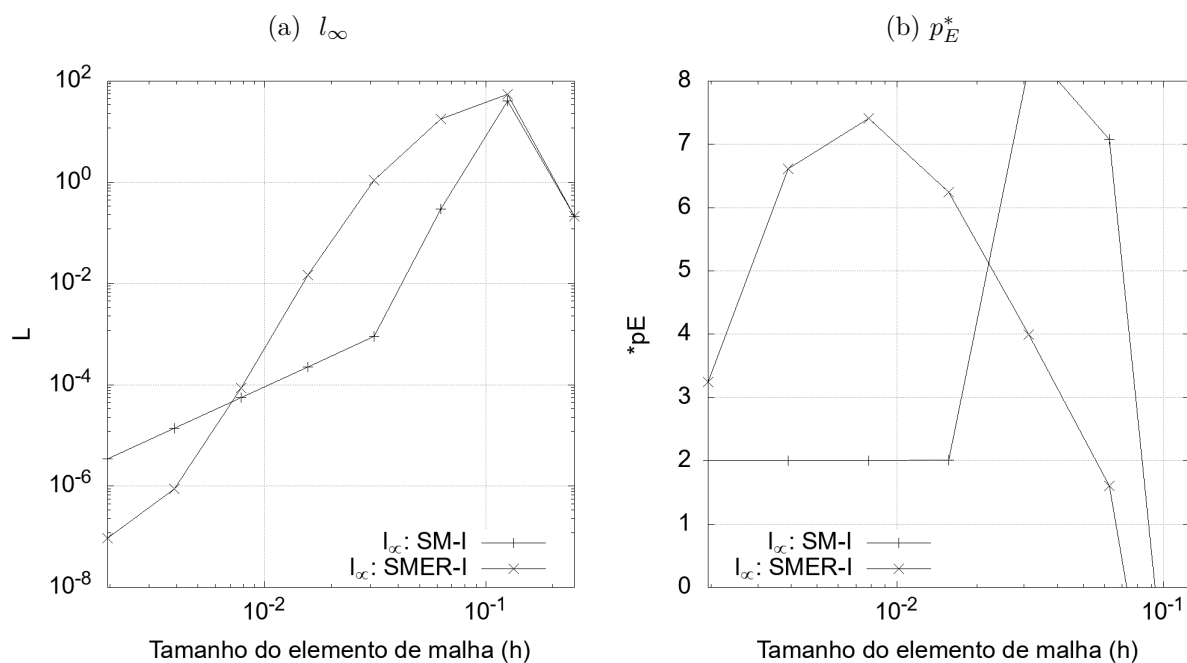


Figura 101 – Resultados: CRE, Variável l_∞ , Laplace 2D, Malha não uniforme.

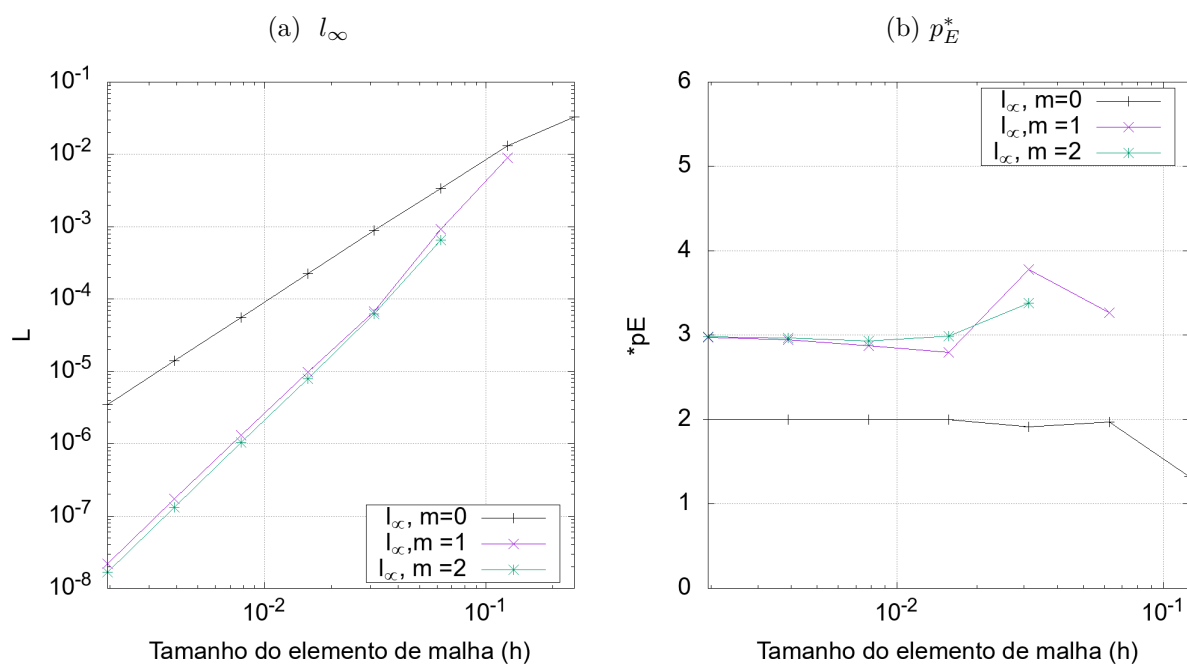
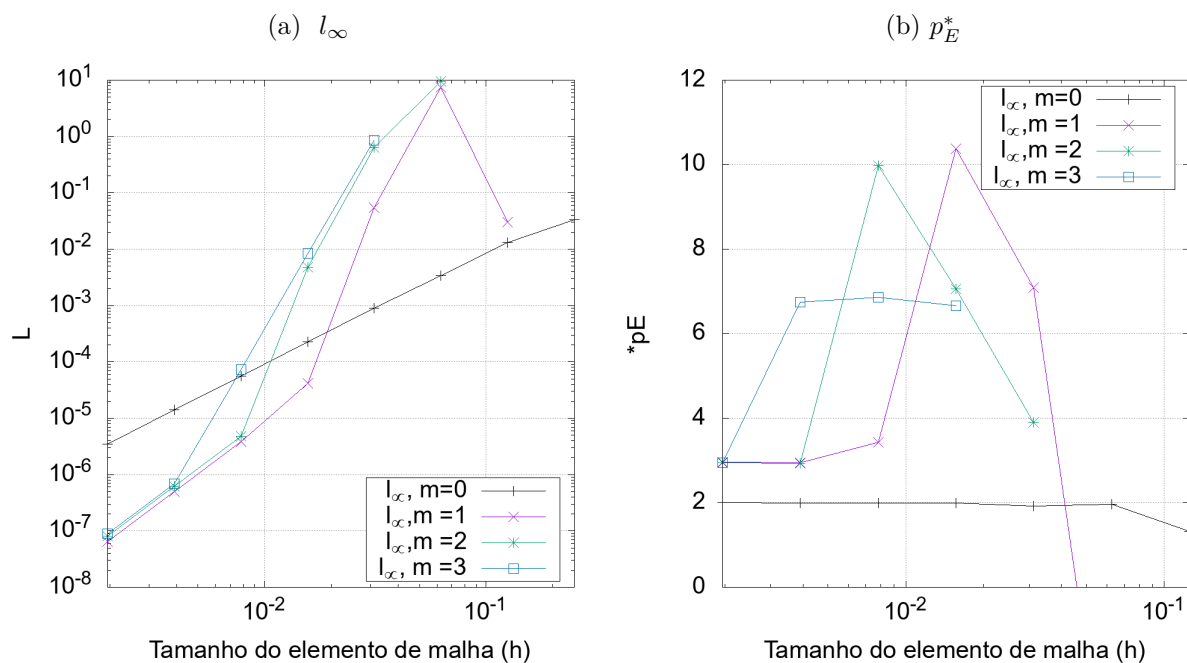
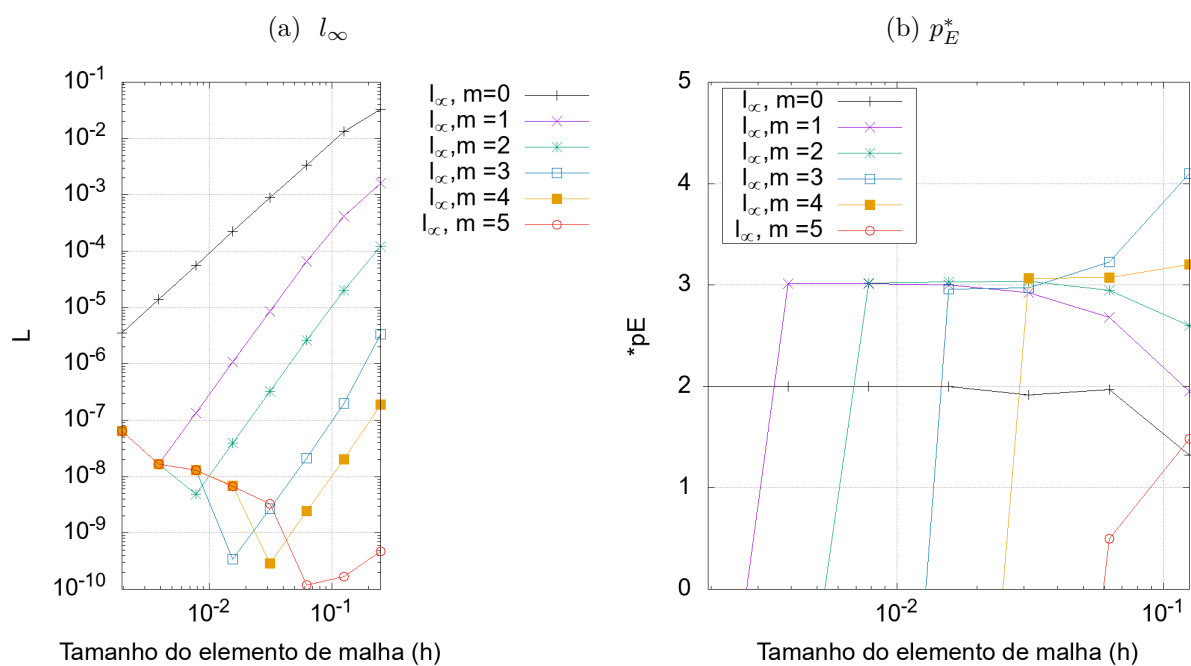


Figura 102 – Resultados: CRE-I, Variável l_∞ , Laplace 2D, Malha não uniforme.Figura 103 – Resultados: SER, Variável l_∞ , Laplace 2D, Malha não uniforme.

C.4 BURGERS 2D

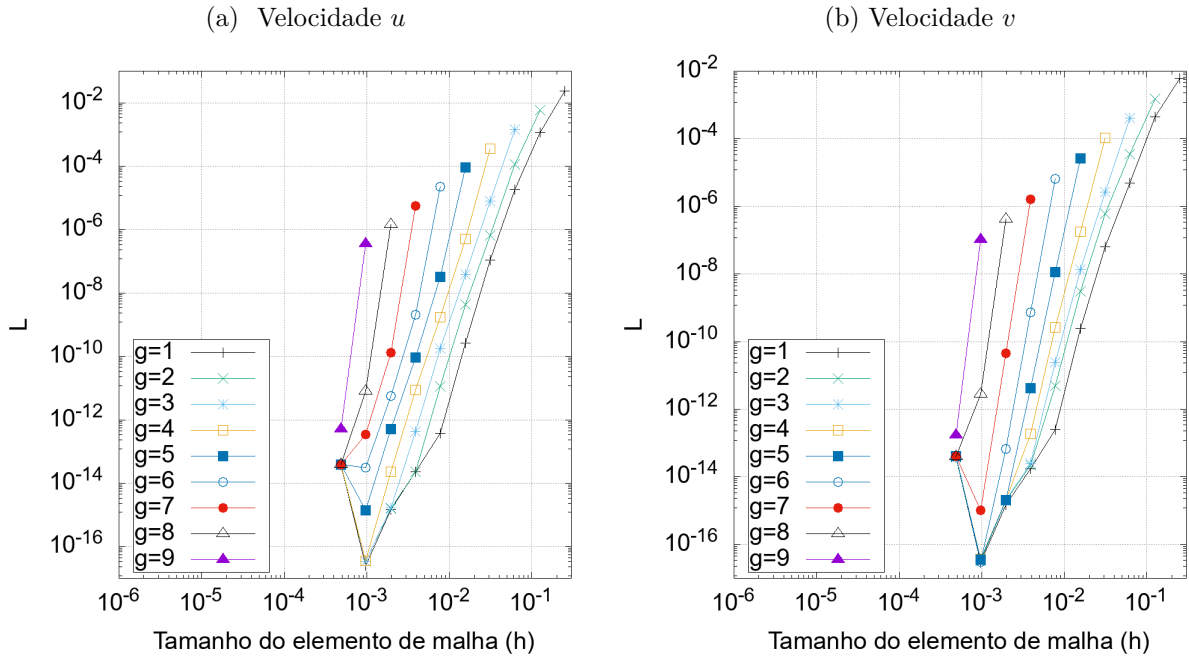
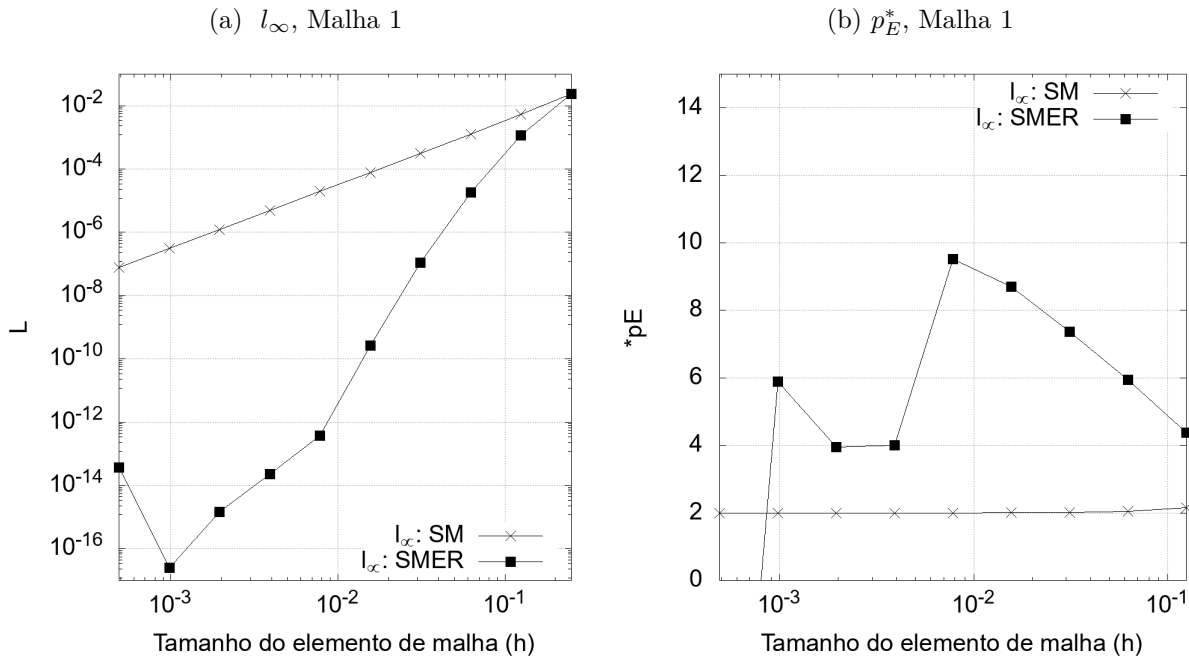
Figura 104 – Resultados: SMER, Malhas $g = 1, 2, \dots, 9$, Burgers 2D, Variável l_∞ , $Re = 1$.Figura 105 – Resultados: SMER, Malha base 1, Variável l_∞ , Burgers 2D, $Re = 1$, velocidade u .

Figura 106 – Resultados: SMER, Malha base 1, Variável l_∞ , Burgers 2D, $Re = 1$, velocidade v .

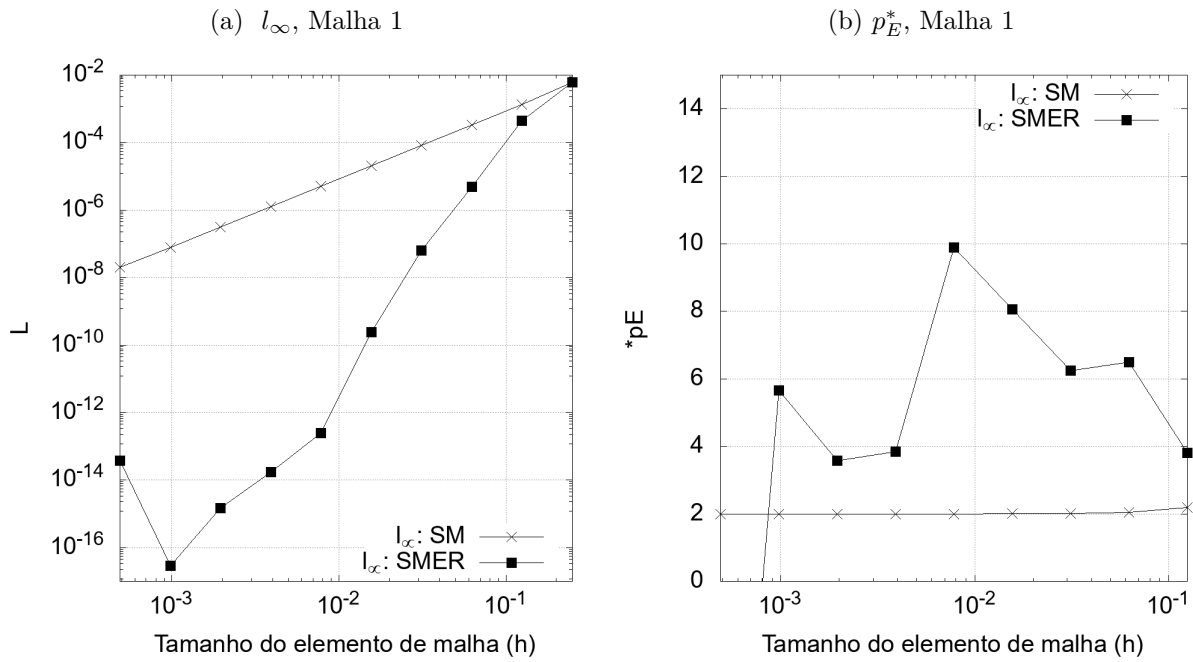


Figura 107 – Resultados: SMER-I, Conjunto β_2 , Variável l_∞ , Burgers 2D, $Re = 1$, velocidade u .

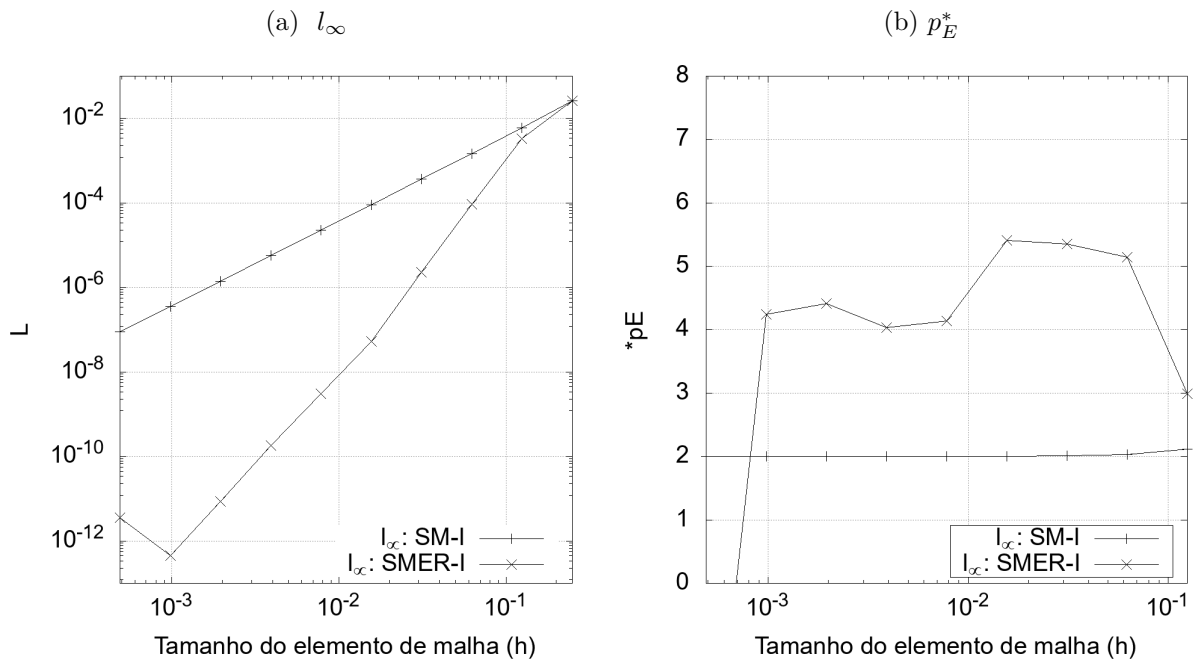


Figura 108 – Resultados: SMER-I, Conjunto β_2 , Variável l_∞ , Burgers 2D, $Re = 1$, velocidade v .

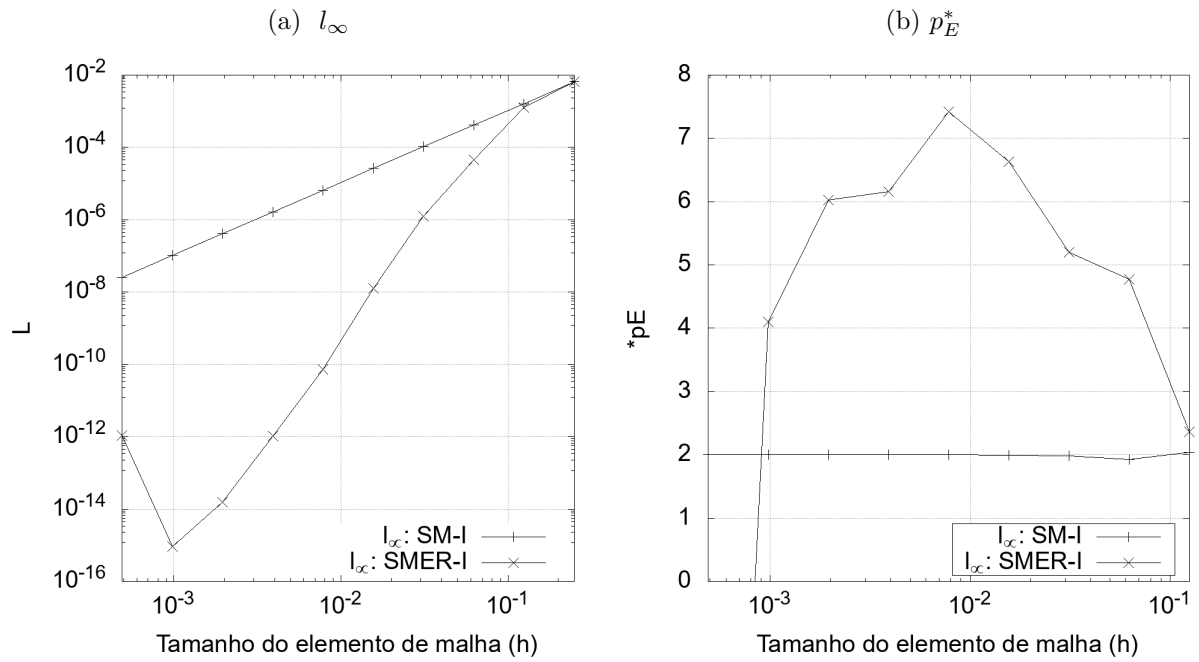


Figura 109 – Resultados: CRE, Variável l_∞ , Burgers 2D, $Re = 1$, velocidade u .

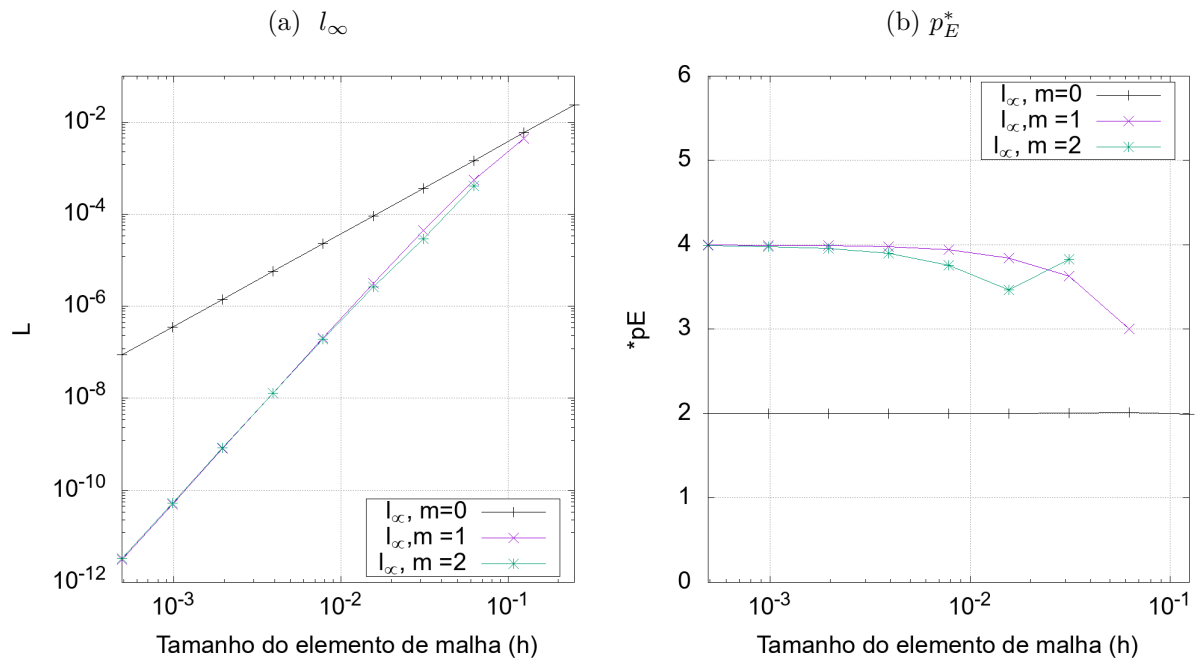


Figura 110 – Resultados: CRE, Variável l_∞ , Burgers 2D, $Re = 1$, velocidade v .

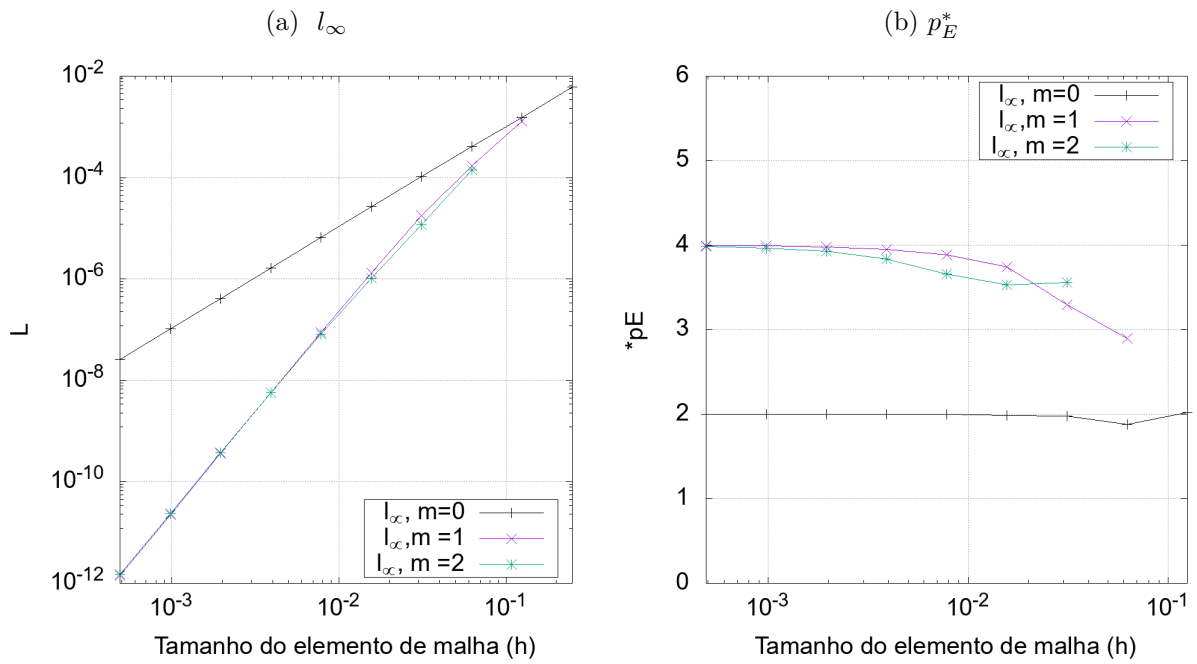


Figura 111 – Resultados: CRE-I, Variável l_∞ , Burgers 2D, $Re = 1$, velocidade u .

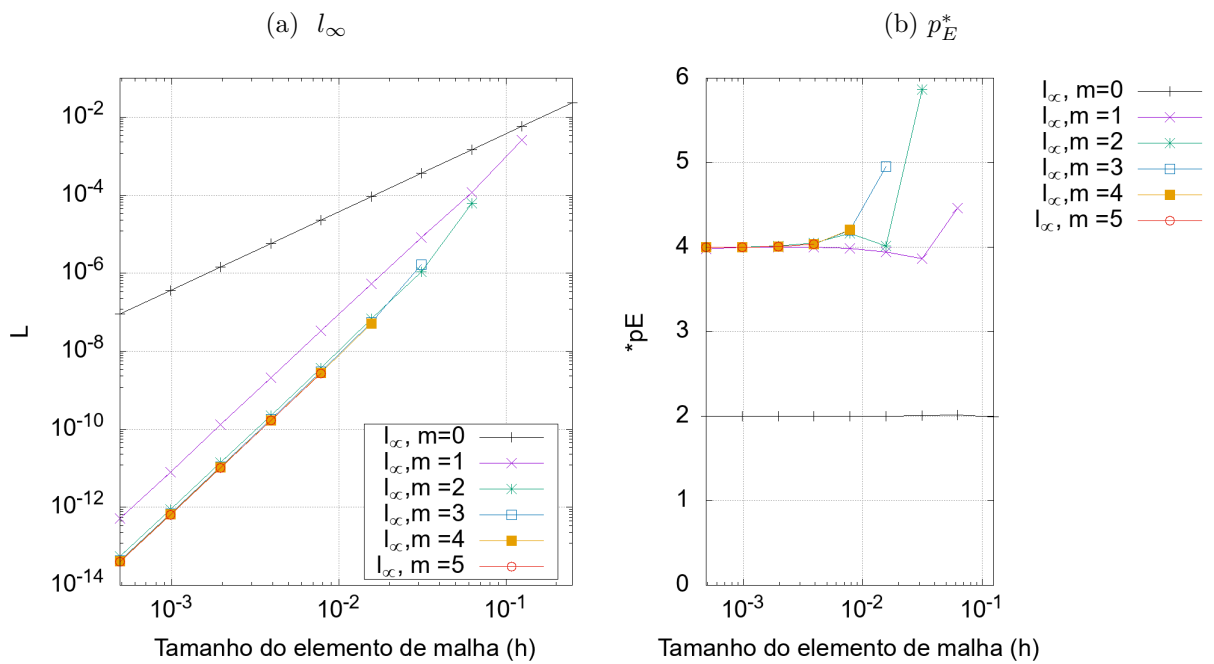


Figura 112 – Resultados: CRE-I, Variável l_∞ , Burgers 2D, $Re = 1$, velocidade v .

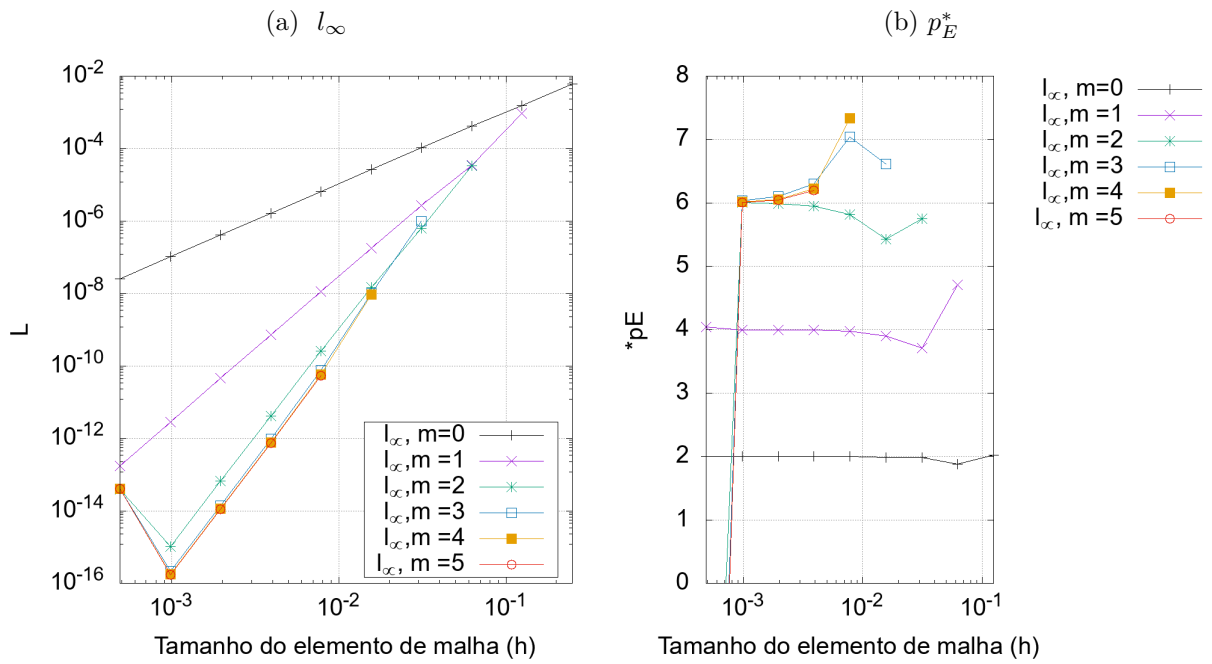


Figura 113 – Resultados: SER, Variável l_∞ , Burgers 2D, $Re = 1$, velocidade u .

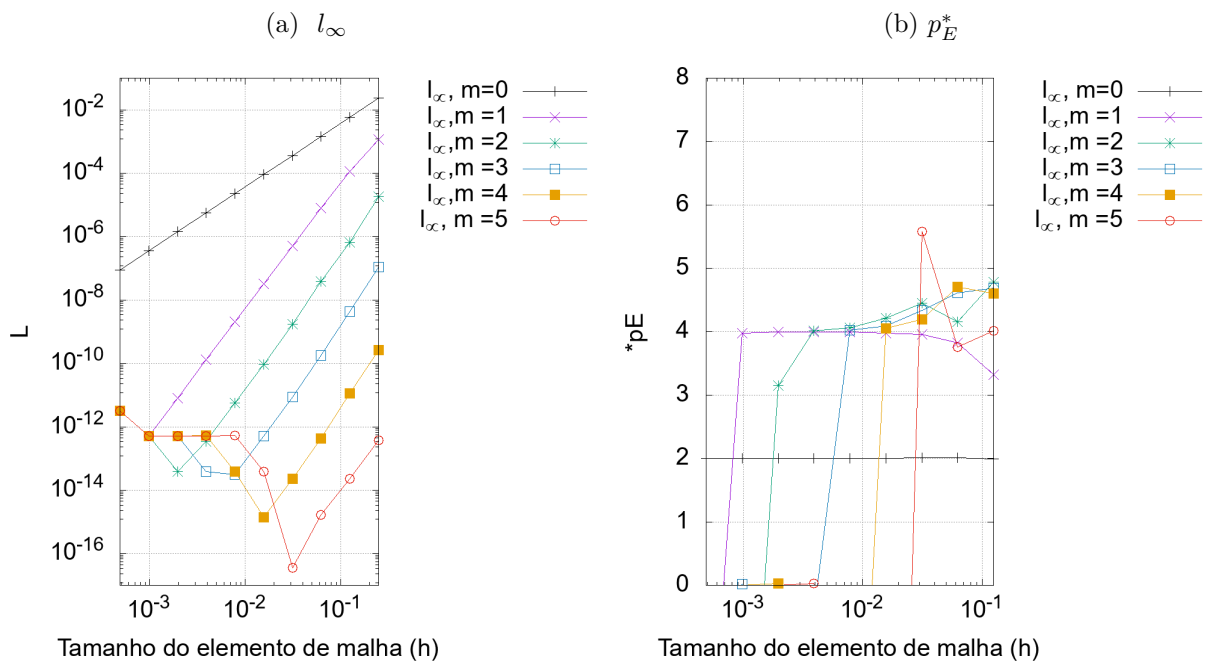
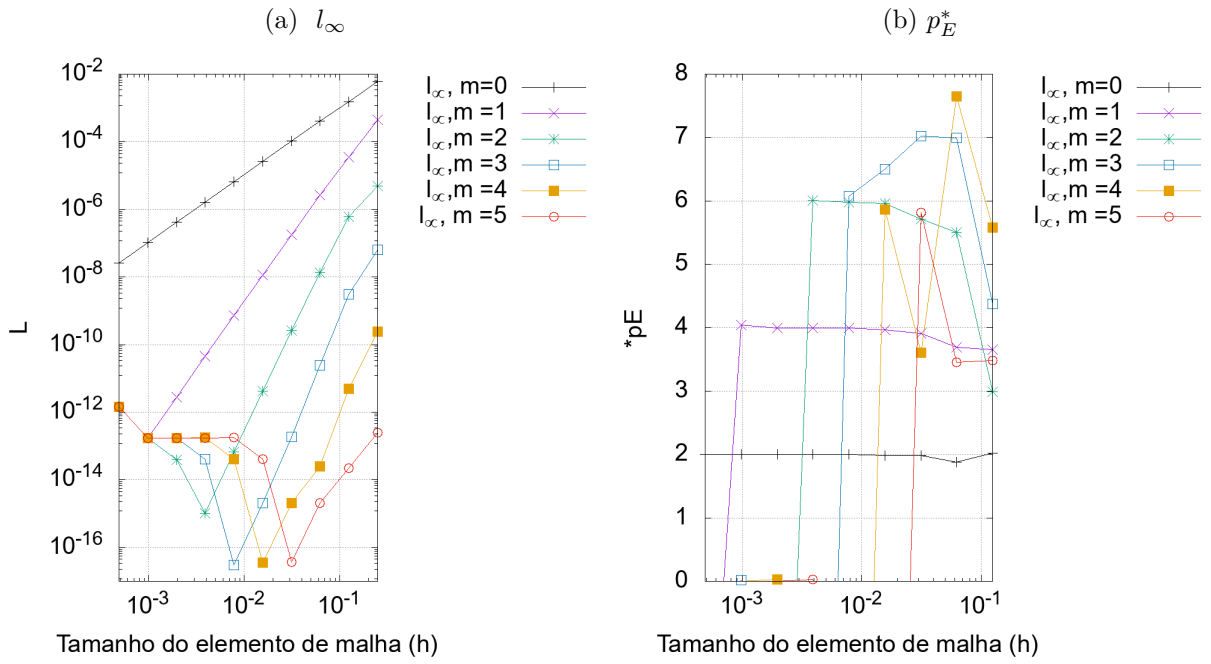


Figura 114 – Resultados: SER, Variável l_∞ , Burgers 2D, $Re = 1$, velocidade v .

C.5 NAVIER-STOKES

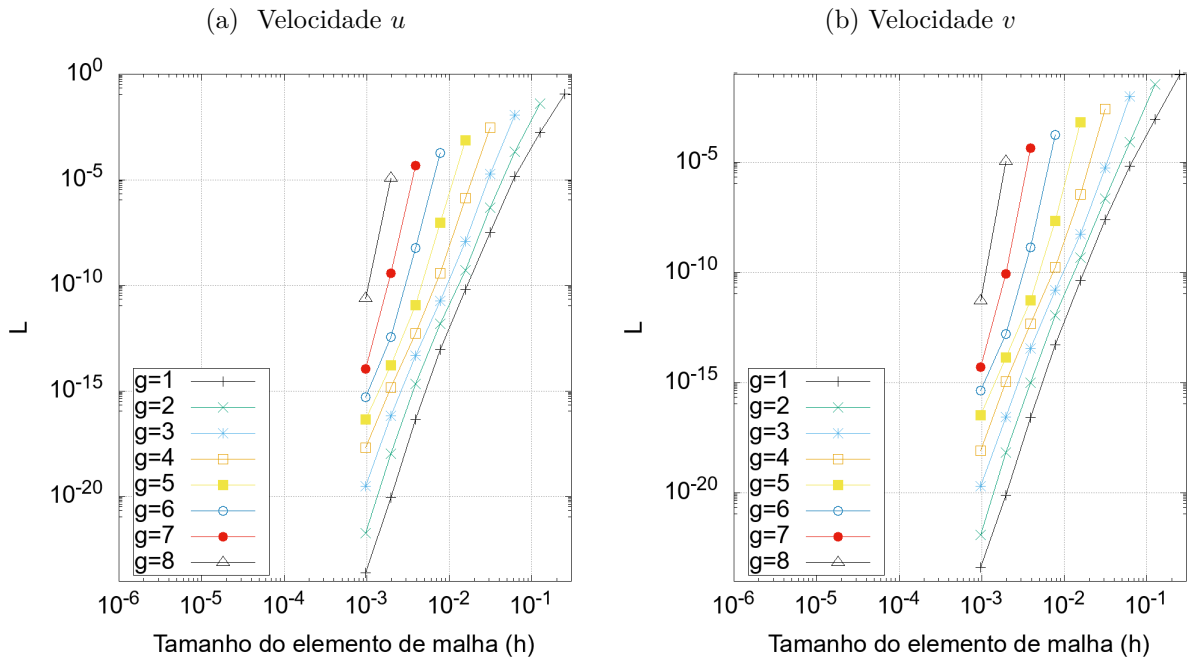
Figura 115 – Resultados: SMER, Variável l_∞ , Malhas $g = 1, 2, \dots, 8$, Navier-Stokes 2D.

Figura 116 – Resultados: SMER, Malha base 1, Variável l_∞ , Navier-Stokes 2D, velocidade u .

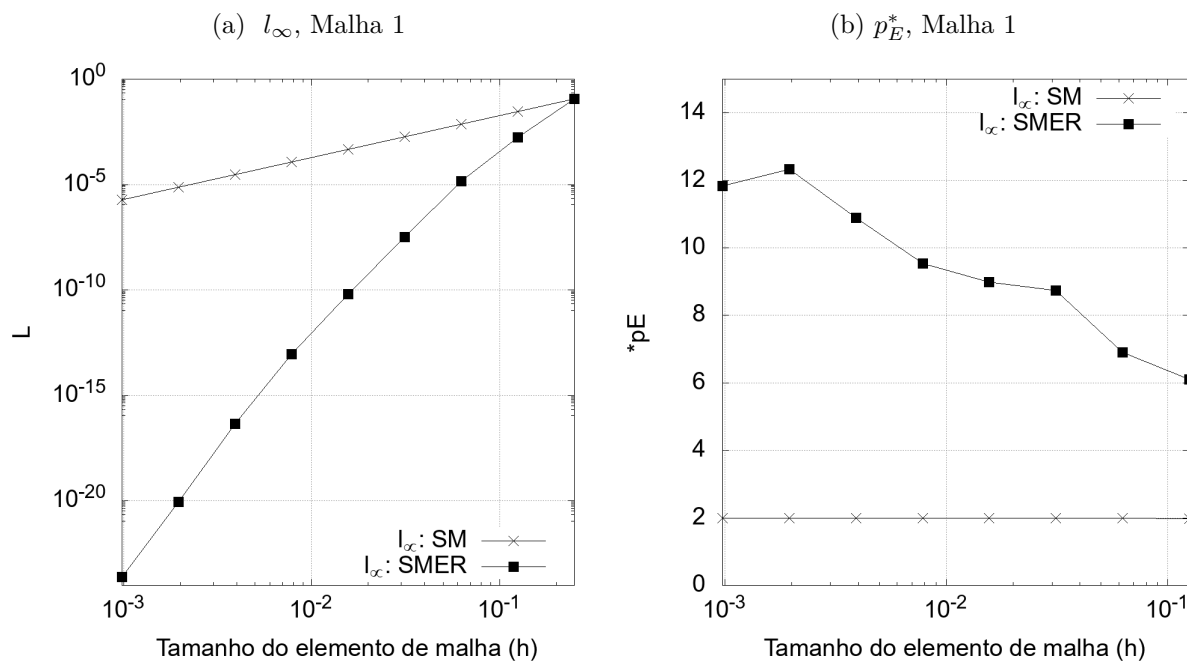


Figura 117 – Resultados: SMER, Malha base 1, Variável l_∞ , Navier-Stokes 2D, velocidade v .

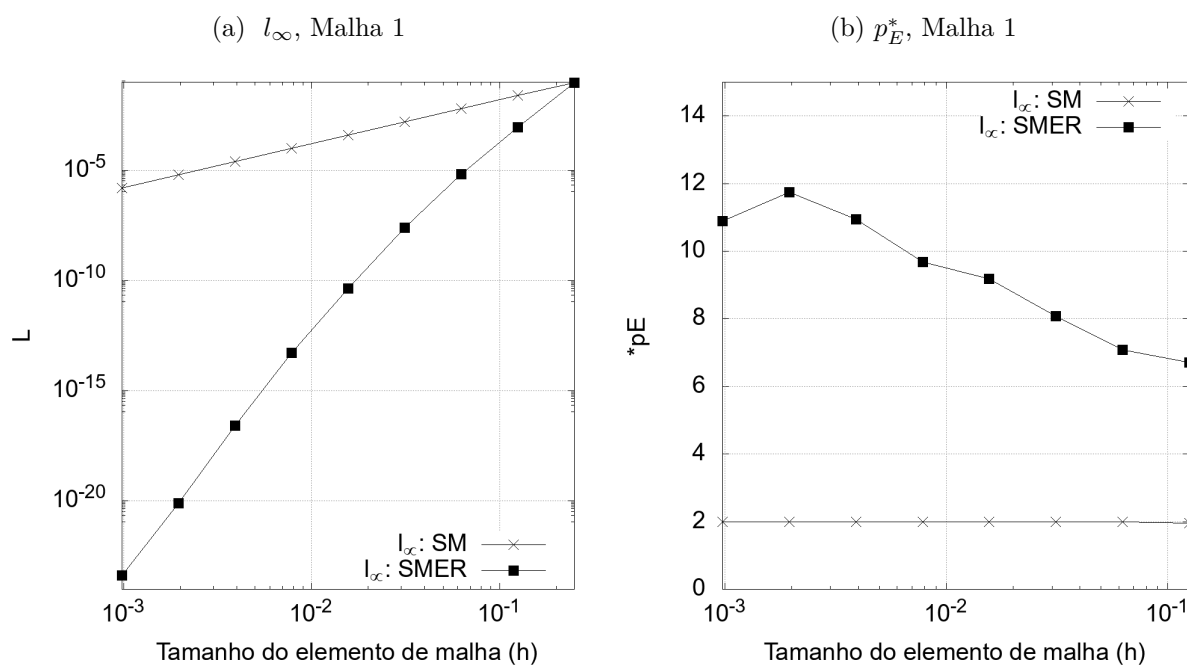


Figura 118 – Resultados: SMER-I, Conjunto β_2 , Variável l_∞ , Navier-Stokes 2D, velocidade u .

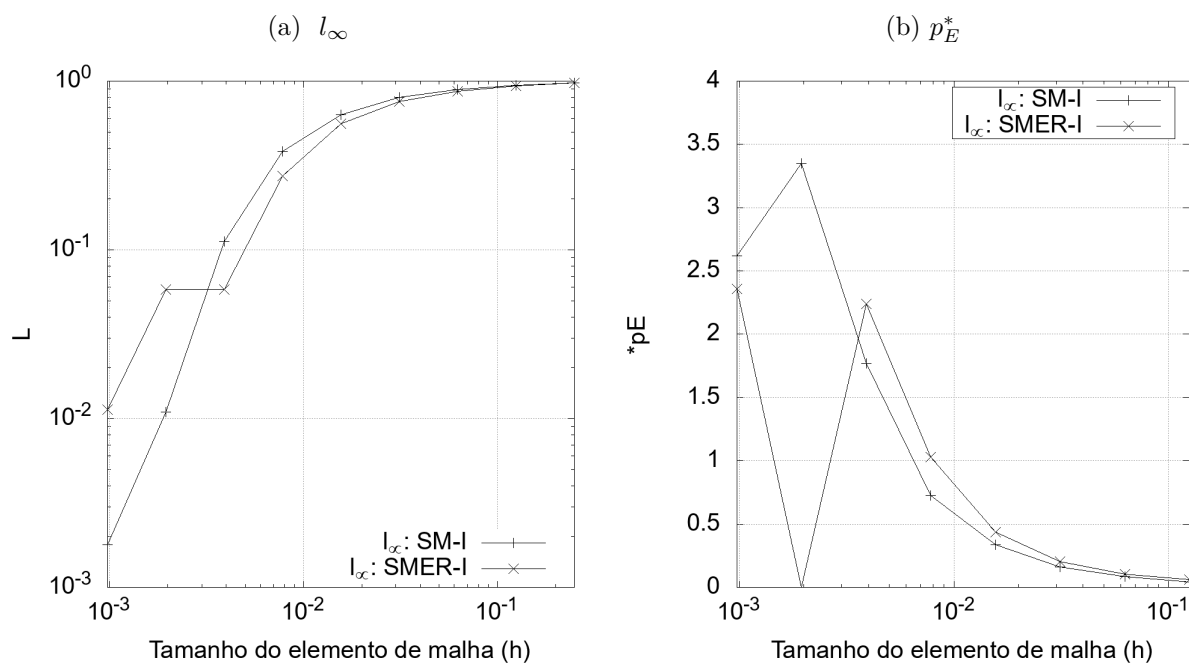


Figura 119 – Resultados: SMER-I, Conjunto β_2 , Variável l_∞ , Navier-Stokes 2D, velocidade v .

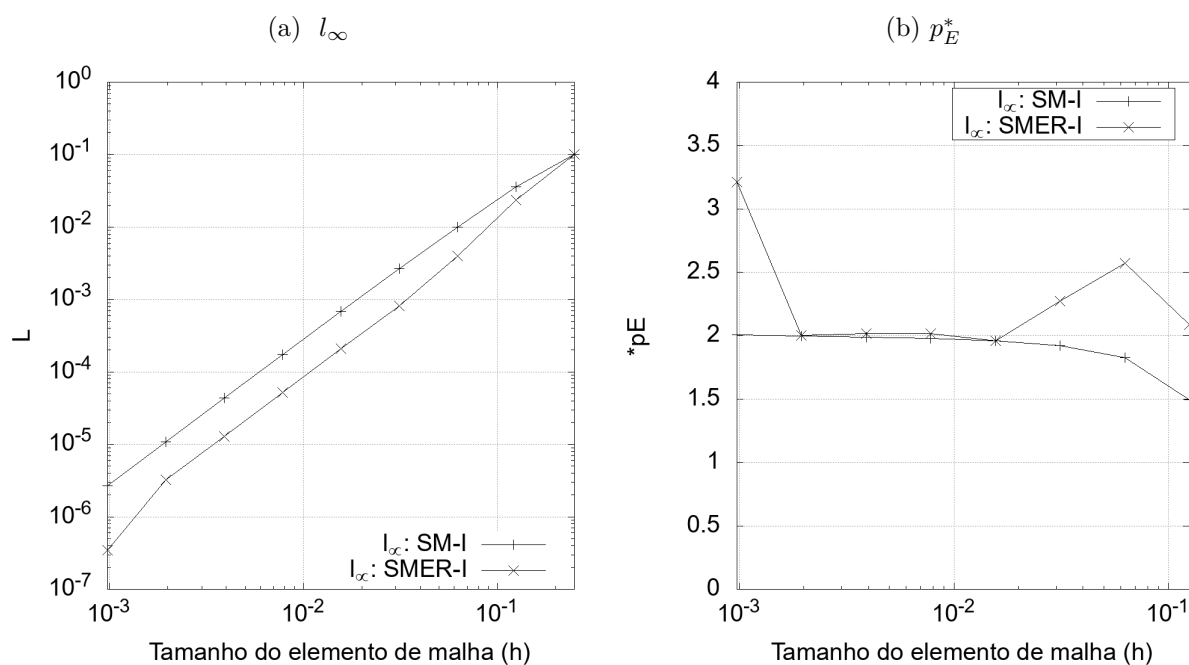


Figura 120 – Resultados: CRE-I, Variável l_∞ , Navier-Stokes 2D, velocidade u .

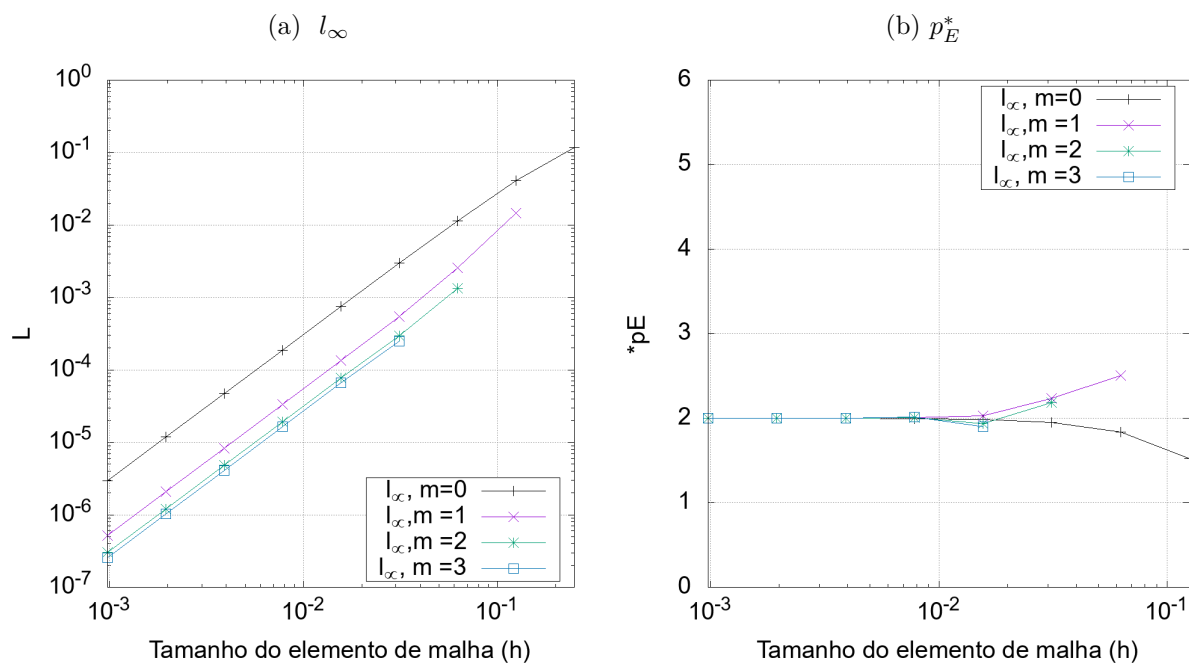


Figura 121 – Resultados: CRE-I, Variável l_∞ , Navier-Stokes 2D, velocidade v .

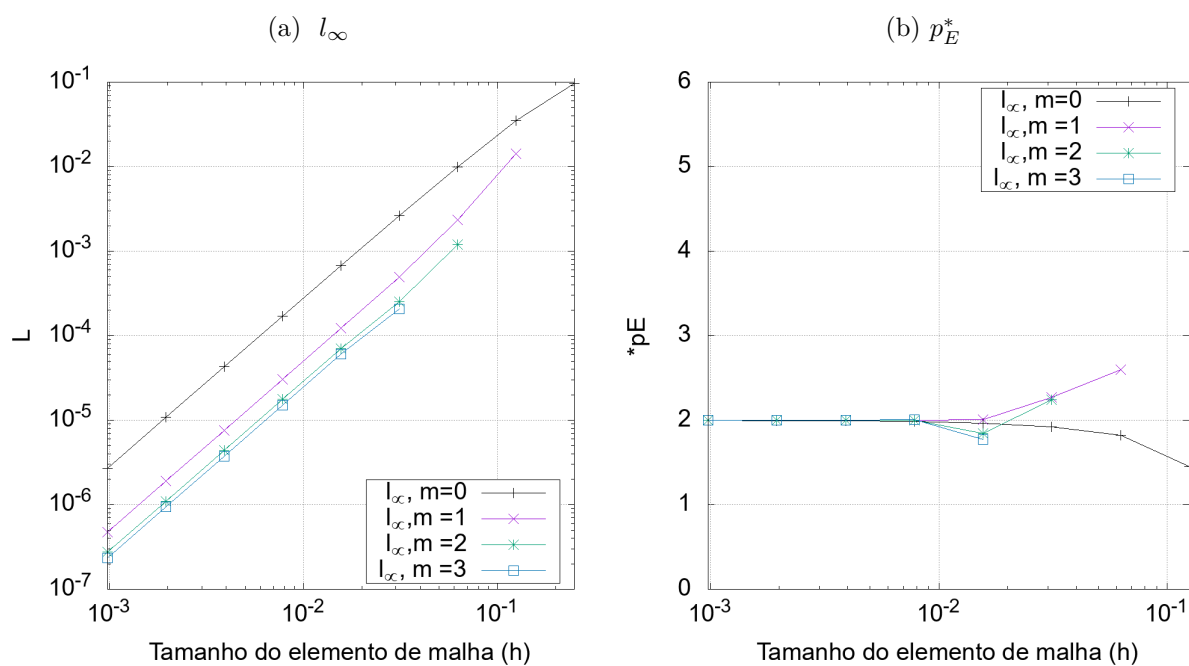


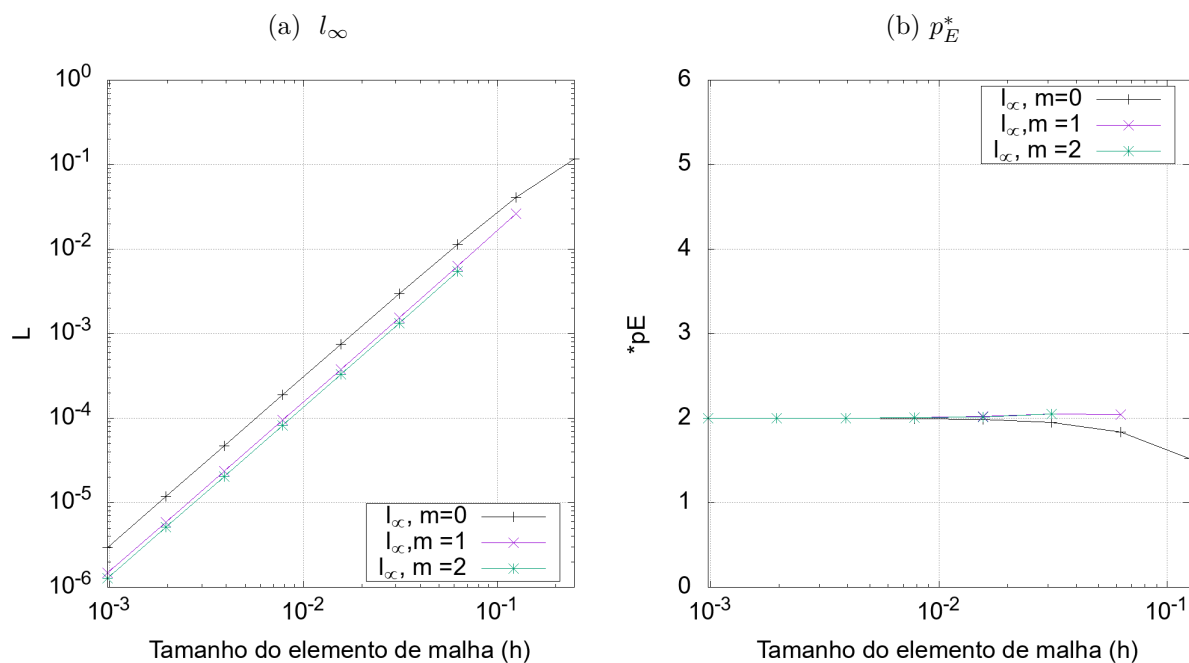
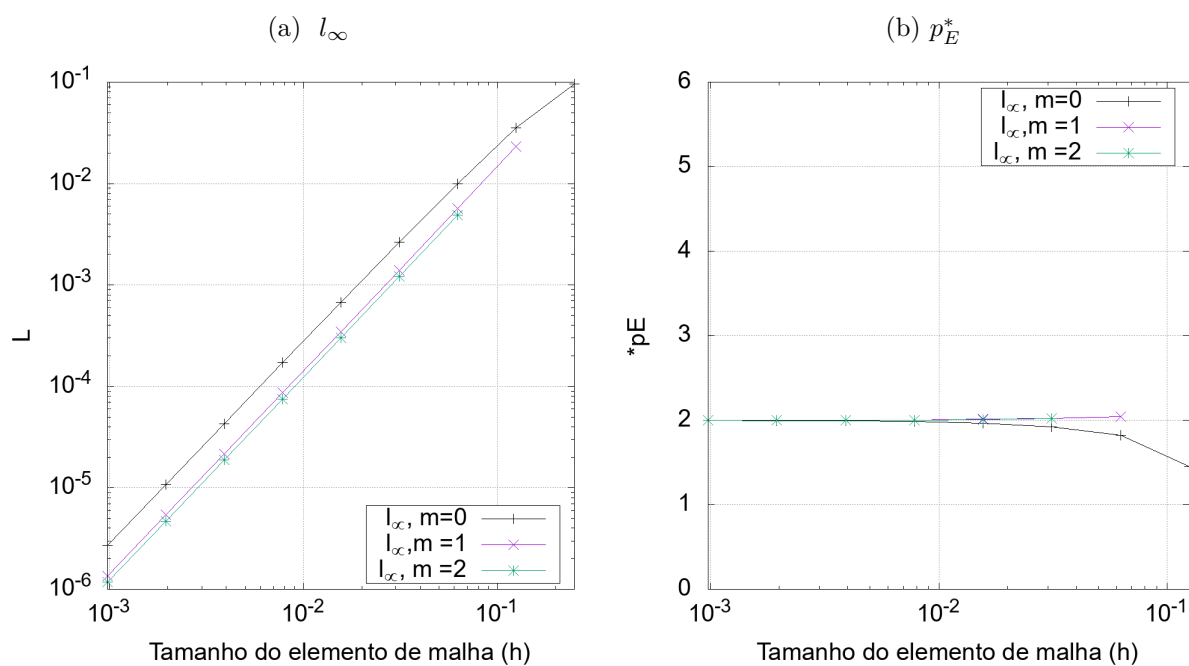
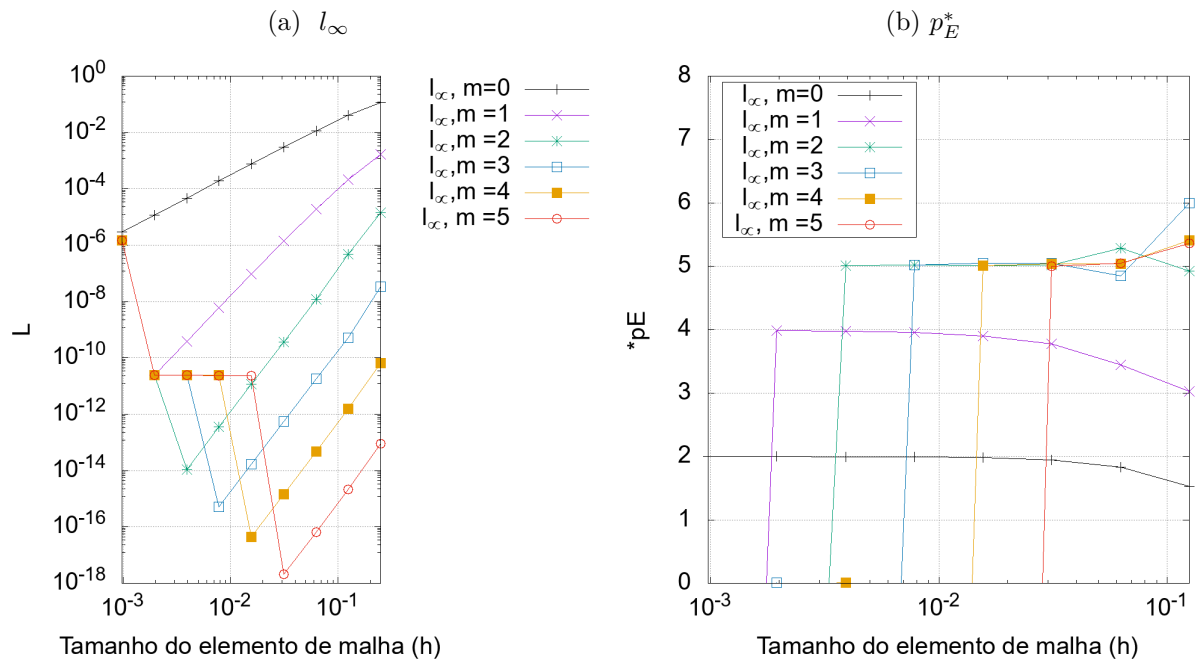
Figura 122 – Resultados: CRE, Variável l_∞ , Navier-Stokes 2D, velocidade u .Figura 123 – Resultados: CRE, Variável l_∞ , Navier-Stokes 2D, velocidade v .

Figura 124 – Resultados: SER, Variável l_∞ , Navier-Stokes 2D, velocidade u .Figura 125 – Resultados: SER, Variável l_∞ , Navier-Stokes 2D, velocidade v .