Definição das variáveis principais consideradas no Programa Richardson 4.0

1) Ordens verdadeiras

```
real*16,dimension(:),allocatable     :: pV  ! ordens verdadeiras do erro verdadeiro
character*5,dimension(:),allocatable :: pVt ! pV em formato texto
```

Eh = erro de discretização da variável de interesse (qualquer) denotada por *Th*.

$Eh = c_0 h^{p_0} + c_1 h^{p_1} + c_2 h^{p_2} + c_3 h^{p_3} + \ldots$.

$1 \leq p_0 < p_1 < p_2 < p_3 \ldots$ são as ordens verdadeiras; p_0 é a ordem assintótica.

2) Ordem aparente (p_U) e razão de convergência de *Th*

```
real*16,dimension(:),allocatable :: pU_h    ! ordem aparente do erro estimado de Th
real*16,dimension(:),allocatable :: pU_h1   ! ordem aparente equivalente do erro estimado de Th
real*16,dimension(:),allocatable :: psi_v   ! Vetor razão de convergência psi para Th
```

p_U diz respeito à inclinação local do gráfico da estimativa de *Eh*, isto é, $Uh \times h$. A partir dos resultados obtidos nas malhas uniformes com espaçamentos entre os pontos nodais h_g, h_{g-1} e h_{g-2} o cálculo de p_U é obtido considerando-se a expressão:

pU_h = $p_{U,g} = \dfrac{\log[\psi]}{\log(r)}, \psi = \dfrac{Th_{g-1} - Th_{g-2}}{Th_g - Th_{g-1}}$ onde $r = h_g / h_{g-1} / h_{g-2}, g \geq 3$.

psi_v = ψ é denominado razão de convergência de *Th*.

pU_h1 = p_U *; a razão de convergência equivalente diz respeito a

$p_{U,g}{}^* = \dfrac{\log|\psi|}{\log(r)}$.

3) Estimador GCI (Roache)

```
real*16,dimension(:),allocatable :: U_GCI         ! Estimador GCI (Roache)
```

O estimador GCI (*Grid Convergence Index*) (ROACHE, 1998) considera a seguinte expressão:

$U_{GCI}(Th_g) = F_S \dfrac{|Th_g - Th_{g-1}|}{(r^{p^*} - 1)}$, $Fs = 1{,}25$ e $p^* = \min\{p_0, p_U\}$ se $g \geq 3$ malhas, ou $p^* = p_0$ quando p_U não puder ser calculada; para $g = 2$, admite-se $Fs = 3$ e $p^* = p_0$ (ROACHE, 2011).

4) Solução extrapolada e estimador Richardson

```
real*16,dimension(:),allocatable :: U_Ri_p0   ! Estimador Richardson com base na ordem assintótica (p0)
real*16,dimension(:),allocatable :: U_Ri_pU   ! Estimador Richardson com base na ordem aparente (pU)
real*16,dimension(:),allocatable :: T_inf_p0  ! Solução extrapolada com p0
real*16,dimension(:),allocatable :: T_inf_pU  ! Solução extrapolada com pU
real*16,dimension(:),allocatable :: Ti_pU1   ! Th extrapolado com pU equivalente
```

U_Ri_p0 = $U_{Ri,p_0} = U_{Ri,p_0}(Th_g) = \dfrac{(Th_g - Th_{g-1})}{(r^{p_0} - 1)}, r = h_g / h_{g-1}, g \geq 2$.

U_Ri_pU = $U_{Ri,p_U} = U_{Ri,p_U}(Th_g) = \dfrac{(Th_g - Th_{g-1})}{(r^{p_U} - 1)}, r = h_g / h_{g-1} / h_{g-2}, g \geq 3$.

T_inf_p0 = $Th_{\infty,p0} = Th_{\infty,p0}(Th_g) = Th_g + \dfrac{(Th_g - Th_{g-1})}{(r^{p_0} - 1)}, r = h_g / h_{g-1}, g \geq 2$.

T_inf_pU = $Th_{\infty,pU} = Th_{\infty,pU}(Th_g) = Th_g + \dfrac{(Th_g - Th_{g-1})}{(r^{p_U} - 1)}, r = h_g / h_{g-1} / h_{g-2}, g \geq 3.$

Ti_pU1 = $Th_{\infty,pU*} = Th_{\infty,pU}(Th_g) = Th_g + \dfrac{(Th_g - Th_{g-1})}{(r^{p_{U*}} - 1)}, r = h_g / h_{g-1} / h_{g-2}, g \geq 3.$

5) Solução convergente e estimador convergente

```
real*16,dimension(:),allocatable :: T_c            ! Solução numérica convergente
real*16,dimension(:),allocatable :: U_c            ! Estimador convergente
```

Th_{∞,p_0} e Th_{∞,p_U} constituem uma envolvente da solução analítica de Th, de modo que esse valor (desconhecido) pertence a $[Th_{\infty,p_0}, Th_{\infty,p_U}]$ se p_U for subconvergente, ou ao intervalo $[Th_{\infty,p_U}, Th_{\infty,p_0}]$ se p_U superconvergente. Com base no conceito de envolvente são obtidas as expressões para solução numérica convergente, representada por Th_C= T_c, onde $Th_C = \dfrac{Th_{\infty,p_0} + Th_{\infty,p_U}}{2}, g \geq 3;$ e sua respectiva incerteza representada por U_C = U_c, $U_C = \dfrac{|U_{Ri,p_0} - U_{Ri,p_U}|}{2}, \; g \geq 3.$

6) Ordem aparente equivalente da Solução convergente

```
real*16,dimension(:),allocatable :: pU_c1   ! ordem aparente equivalente do erro
estimado para solução convergente
```

pU_c1 $= \dfrac{\log\left|\dfrac{Th_{C\,g-1} - Th_{C\,g-2}}{Th_{C\,g} - Th_{C\,g-1}}\right|}{\log(r)}, \; r = h_g / h_{g-1} / h_{g-2}, g \geq 5.$

7) Solução extrapolada com pU equivalente

```
real*16,dimension(:),allocatable :: Ti_pU1        ! Th extrapolado com as malhas
1 a 3 e pU_h equivalente
```

Ti_pU1 = $Th_{\infty,pU*} = Th_{\infty,pU*}(Th_g) = Th_g + \dfrac{(Th_g - Th_{g-1})}{(r^{p_{U*}} - 1)}, r = h_g / h_{g-1} / h_{g-2}, g \geq 3.$

8) Ordem aparente equivalente do erro estimado de $Th_{\infty,pU*}$

```
real*16,dimension(:),allocatable :: pU_i1   ! ordem aparente equivalente do erro
estimado de Ti_pU*
```

pU_i1$= \dfrac{\log\left|\dfrac{Th_{\infty,pU*_{g-1}} - Th_{\infty,pU*_{g-2}}}{Th_{\infty,pU*_g} - Th_{\infty,pU*_{g-1}}}\right|}{\log(r)}$, onde $r = h_g / h_{g-1} / h_{g-2}$, $g \geq 5.$

9) Solução biextrapolada com pU equivalente

```
real*16,dimension(:),allocatable :: Tbi_pU1        ! Th biextrapolado com malhas
1 a 5 e pU_i equivalente
```

Tbi_pU1 = $(Th_{\infty,pU*})_g + \dfrac{((Th_{\infty,pU*})_g - (Th_{\infty,pU*})_{g-1})}{(r^{\text{pU\_i1}} - 1)}, h_g / h_{g-1} / h_{g-2}, g \geq 5.$

10) Ordem aparente equivalente do erro estimado de Tbi_pU1

```
real*16,dimension(:),allocatable :: pU_bi1  ! ordem aparente equivalente do erro
estimado de Tbi_pU
```

$$\texttt{pU\_bi1} = \frac{\log\left|\dfrac{(\text{Tbi\_pU1})_{g-1} - (\text{Tbi\_pU1})_{g-2}}{(\text{Tbi\_pU1})_{g} - (\text{Tbi\_pU1})_{g-1}}\right|}{\log(r)}, \text{ onde } r = h_g / h_{g-1} / h_{g-2},\ g \geq 7.$$

11) Solução numérica com MER

```
real*16,dimension(:,:),allocatable :: Tm_12 ! Th multiextrapolado com as malhas 1 e 2 e pV
real*16,dimension(:),allocatable :: T_MER    ! Th multiextrapolado (último nível de extrapolação em cada malha)
```

Em uma malha uniforme com espaçamento h_g entre os pontos nodais, onde g indica o nível de malha, com m aplicações da extrapolação de Richardson tem-se:

$$\texttt{Tm\_12} = Th_{g,m} = Th_{g,m-1} + \frac{Th_{g,m-1} - Th_{g-1,m-1}}{r^{p_{m-1}} - 1}.$$

Para $m = 1$, tem-se o primeiro nível de extrapolação e considera-se p_0. Para os demais níveis (variação de m), p_{m-1} corresponde aos próximos valores das ordens verdadeiras. Essa equação é válida para g = 2,..., G e m = 1,..., g-1. Em qualquer malha h_g, $Th_{g,0}$ representa a solução numérica (Th) sem o emprego de extrapolação. O emprego de MER, sobre Th, para obtenção de `Tm_12` é detalhado abaixo.

1) Obter soluções numéricas para variável de interesse Th em G malhas distintas: $Th_1, Th_2, Th_3, \ldots, Th_G$.
2) Fazer: $Th_{1,0} = Th_1, Th_{2,0} = Th_2, Th_{2,0} = Th_2, \ldots, Th_{G,0} = Th_G$.
3) Fornecer os valores de $p_0, p_1, \ldots, p_m$.
4) Para m = 1,...,G-1
   Para g = m + 1,...,G
   $$Th_{g,m} = Th_{g,m-1} + \frac{Th_{g,m-1} - Th_{g-1,m-1}}{r^{p_{m-1}} - 1}.$$

A solução numérica com MER para variável Th diz respeito à solução $Th_{g,m}$ em diversos níveis de malhas e de extrapolação. Isto é, a solução com MER envolve níveis de malhas e de extrapolação distintos. Ao se considerar, apenas, o nível máximo de extrapolação ($m = g - 1$) em cada malha (g) para $g = 2, \ldots, G$ malhas distintas, tem-se a seguinte solução (denotada por Tm e representada no código por `T_MER`): $Th_{2,1}, Th_{3,2}, \ldots, Th_{g,g-1}, \ldots, Th_{G,G-1}$. A tabela abaixo traz uma representação esquemática de Tm = `T_MER`.

$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	...	$m = G-2$	$m = G-1$
$\phi_{1,0} = \phi_1$					
$\phi_{2,0} = \phi_2$	$\phi_{2,1}$				
$\phi_{3,0} = \phi_3$	$\phi_{3,1}$	$\phi_{3,2}$			
...	...	...	...	...	...
$\phi_{G-1,0} = \phi_{G-1}$	$\phi_{G-1,1}$	$\phi_{G-1,2}$	...	$\phi_{G-1,G-2}$	
$\phi_{G,0} = \phi_G$	$\phi_{G,1}$	$\phi_{G,2}$	...	$\phi_{G,G-2}$	$\phi_{G,G-1}$

12) Ordem aparente equivalente do erro estimado de Tm = `T_MER`.

```
real*16,dimension(:),allocatable :: pU_MER ! Ordem aparente de Th multiextrapolado (último nível de extrapolação em cada malha)
```

pU_MER $= \dfrac{\log\left|\dfrac{Th_{g-1,m-1} - Th_{g-2,m-2}}{Th_{g,m} - Th_{g-1,m-1}}\right|}{\log(r)}$, onde $r = h_g / h_{g-1} / h_{g-2}$, $g \geq 3$.

Onde se considera, apenas, as soluções: $Th_{1,0} = Th_0, Th_{2,1}, Th_{3,2}, ..., Th_{g,m}, ..., Th_{g=G,m=G-1}$.

13) Estimador para MER com base na razão de convergência interníveis média, $(U_{Ri,m\Psi MER})$.

```
real*16,dimension(:),allocatable :: U_Ri_mpsi_MER ! Estimador Richardson com psi médio de MER interníveis (psi atribuido à malha intermediária do trio)
```

Admite-se, aqui, o emprego da razão de convergência interníveis média de Tm , como:

$(\Psi_{MER})_{g+1} = (m\Psi_{MER})_g = \dfrac{Th_{g,m} - Th_{g-1,m-1}}{Th_{g+1,m+1} - Th_{g,m}}$, U_Ri_mpsi_MER = $U_{Ri,m\Psi MER}(Th_{g,m}) = \dfrac{Th_{g,m} - Th_{g-1,m-1}}{(m\Psi_{MER})_g - 1}$;

para $Th_{2,1}, Th_{3,2}, ..., Th_{g,g-1}, ..., Th_{G-1,m=G-2}$.

E para $g = G$, $m = G-1$ considera-se $\Psi = (\Psi_{MER})_g^{\ 2} / (\Psi_{MER})_{g-1}$, isto é:

U_Ri_mpsi_MER = $U_{Ri,m\Psi MER}(Th_{g,m}) = \dfrac{Th_{g,m} - Th_{g-1,m-1}}{\Psi - 1}, g = G, m = G-1.$

Desse modo, U_Ri_mpsi_MER = $U_{Ri,m\Psi MER}(Th_{g,m})$ indica a estimativa de *Eh* associado à *Tm*, para $g = 2,...,G.$

14) Estimador Multicoeficiente (com base em MER) (U_{mc})

```
real*16,dimension(:),allocatable :: U_mc  ! Estimador multicoeficiente, com base em MER
```

O estimador Multicoeficiente considera que a estimativa para *Eh* é composta por "$m+1$" coeficientes, isto é,

$U_{mc} = c_0 h^{p_0} + c_1 h^{p_1} + c_2 h^{p_2} + ... + c_m h^{p_m}$,

onde $c_0, c_1, c_2, ..., c_m$ são os $m+1$ coeficientes da incerteza, e $p_0, p_1, p_2, ..., p_m$ são as $m+1$ primeiras ordens verdadeiras de *Eh*. Uma alternativa para o emprego desse estimador consiste em se adotar um processo recursivo para obtenção de $c_0, c_1, c_2, ..., c_m$ considerando-se o maior número possível de extrapolações em cada malha específica. Isto é, em cada malha *g*, com $g = 2,...,G$, considera-se o número máximo de termos possível na expressão da estimativa de *Eh*. Por exemplo: para $g = 2$ tem-se a estimativa de *Eh* com apenas um termo, $c_0 h^{p_0}$ (estimativa monocoeficiente); para $g = 3$ tem-se a estimativa de *Eh* com dois termos, $c_0 h^{p_0} + c_1 h^{p_1}$ (estimativa bicoeficiente); para $g = 4$ tem-se a estimativa de *Eh* com três termos, $c_0 h^{p_0} + c_1 h^{p_1} + c_2 h^{p_2}$ (estimativa tricoeficiente); e assim por diante.

Com relação à recursividade, considera-se a obtenção de *Tm* conforme descrito anteriormente. Então, ao se buscar a estimativa para *Eh* inerente ao cálculo de *Th* em uma malha uniforme (*g*) com espaçamento h_g, considerando-se o conceito do estimador U_{mc}, pode-se calcular a diferença entre a solução analítica estimada com o número máximo de extrapolações permitidas (*Tm*) e a solução numérica sem extrapolação, nesta mesma malha (Th_g).

Isto é, sobre U_{mc}, pode-se fazer:

U_mc = $U_{mc}(Th) = Tm - Th$,

ou ainda,

$U_{mc}(Th_g) = Th_{g,m} - Th_g, g \geq 2.$

Para *Tm*: $Th_{2,1}, Th_{3,2}, ..., Th_{g,g-1}, ..., Th_{G,G-1}$.