

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MÉTODOS NUMÉRICOS EM  
ENGENHARIA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO EM MECÂNICA COMPUTACIONAL  
SETORES DE TECNOLOGIA E DE CIÊNCIAS EXATAS**

**ORESTES HACKE**

**VERIFICAÇÃO DE SOLUÇÕES NUMÉRICAS DE PROBLEMAS  
TERMOELÁSTICOS EM MALHAS UNIFORMES**

**CURITIBA – PR**

**2006**

ORESTES HACKE

**VERIFICAÇÃO DE SOLUÇÕES NUMÉRICAS DE PROBLEMAS  
TERMOELÁSTICOS EM MALHAS UNIFORMES**

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Ciências, Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Área de Concentração em Mecânica Computacional, Setores de Tecnologia e de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Carlos Henrique Marchi, Dr. Eng.

CURITIBA – PR

2006

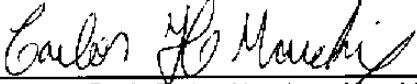
## TERMO DE APROVAÇÃO

**Orestes Hacke**

### **"Verificação de Soluções Numéricas de Problemas Termoelásticos em Malhas Uniformes"**

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia – Área de Concentração em Mecânica Computacional, Setores de Tecnologia e de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

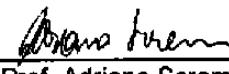
Orientador:

  
Prof. Carlos Henrique Marchi, Dr. Eng.

Departamento de Engenharia Mecânica da UFPR  
e Programa de Pós-Graduação em Métodos  
Numéricos em Engenharia da UFPR

  
Prof. Adair Roberto Aguiar, Ph.D.

Departamento de Estruturas da EESC / USP

  
Prof. Adriano Scremen, Dr. Eng.

Departamento de Engenharia Mecânica da UFPR  
e Programa de Pós-Graduação em Métodos  
Numéricos em Engenharia da UFPR

  
Prof. Heraldo Nélio Cambraia, Dr. Eng

Departamento de Engenharia Mecânica da UFPR

Curitiba, 31 de março de 2006.

## RESUMO

O principal objetivo desse trabalho é verificar o erro cometido na solução numérica de problemas termoelásticos em uma e em duas dimensões, em regime permanente e com a utilização de malhas uniformes. As soluções numéricas são obtidas empregando-se o método das diferenças finitas com algumas aproximações numéricas para a derivada de 1<sup>a</sup> ordem e de 2<sup>a</sup> ordem das variáveis envolvidas. O trabalho é subdivido em oito casos, tratando da condução térmica unidimensional, termoelasticidade unidimensional, condução térmica bidimensional e termoelasticidade bidimensional, todos em regime permanente. São avaliados o erro (E) de discretização verdadeiro e a incerteza(U). É feito o cálculo da incerteza das soluções numéricas com o emprego do estimador de erro de Richardson e GCI. Os estimadores são usados para verificar a confiabilidade da solução ( $U/E \geq 1$ ) e quanto a acurácia ( $U/E \approx 1$ ). São utilizadas malhas com números de elementos variando de 2 a 32768 nos casos unidimensionais e de 2 a 1024 em cada direção, nos problemas bidimensionais. A solução numérica dos casos propostos é obtida com a utilização do programa TERMOEL\_1D\_2D, escrito em *C++ Builder 6.0*. Verificou-se que quanto maior o número de elementos nas malhas, melhor a acurácia das soluções, que o estimador de Richardson fornece estimativas cada vez mais próximas do erro, que o estimador GCI leva a estimativas maiores do erro, mas que a partir de um certo número de elementos, o erro de arredondamento tem influência na solução.

Palavras-chave: diferenças finitas, erros numéricos, condução de calor, termoelasticidade, malhas uniformes, verificação.

## ABSTRACT

The main purpose of this work is to verify the committed error in the numeric solutions of the thermoplastics problems in one and in two dimensions, in permanent regime and with the uniform grids utilization. The numeric solutions are obtained using the finite differences method with some numeric approaches for the first-rate derivative order and second order of the involved variables. The work is subdivided in eight cases one-dimensional thermal conduction, one-dimensional thermo elasticity, two-dimensional thermal conduction and two-dimensional thermo elasticity, all in permanent regime. The true discretization error (E) and the uncertainty (U) of the numerical solutions are evaluated with the Richardson error estimator and GCI. The estimators are used to verify the solution reliability ( $U/E \geq 1$ ) e accuracy ( $U/E \approx 1$ ). Grids with elements number varying of 2 to 32768 in the one-dimensional cases and of 2 to 1024 in each direction in the two-dimensional cases are used. The numeric solution of the proposed cases is obtained with the program TERMOEL\_1D\_2D utilization, written in C++ Builder 6.0. It verified how much larger the elements number in the grids, better accuracy of the solutions, that Richardson's estimator supplies estimates every time nearest error, that the estimator GCI carrie the estimates larger of the error, but from elements number, rounding error has influence in the solution.

Keywords: finite differences, numerical error, heat conduction, thermo elasticity, uniform grids, verification.

## LISTA DE SÍMBOLOS

A	coeficientes do sistema de equações algébricas da variável dependente.
$A_x$	área perpendicular ao eixo x.
B	termos independentes do sistema de equações da variável dependente.
c	coeficientes da equação geral do erro de truncamento.
$c_p$	calor específico à pressão constante (J/kg.K).
CDS	<i>Central Differencing Scheme.</i>
DDS	<i>Downstream Differencing Scheme.</i>
$\dot{E}_{af}$	taxa de energia afluente no volume de controle (W).
$\dot{E}_{ef}$	taxa de energia efluente do volume de controle (W).
$\dot{E}_g$	taxa de energia gerada. (W)
$E(\phi)$	erro verdadeiro ou erro de discretização da solução numérica.
$f(x)$	valor da função de uma variável no ponto de abscissa x.
$f^i$	derivada de 1 <sup>a</sup> ordem de f.
$f^n$	derivada de ordem 'n' de f, onde 'n' é grafado em algarismos romanos e assume os valores ii, iii, iv, v, ...
F	força (N)
$F_s$	fator de segurança do estimador GCI.
GCI	<i>Grid Convergence Index.</i>
h	tamanho de um elemento da malha (m).
j	número do nó de uma malha.
k	condutividade térmica (W/mK).
L	comprimento do domínio de cálculo (m).
$L_x$	comprimento do domínio de cálculo na direção x (m).

$L_y$	comprimento do domínio de cálculo na direção y (m).
$p$	ordem prática do erro (adimensional).
$p_E$	ordem efetiva do erro (adimensional).
$p_L$	ordem assintótica do erro (adimensional).
$p_u$	ordem aparente do erro (adimensional).
$p_v$	ordens verdadeiras do erro (adimensional).
$q$	razão de refinamento da malha (adimensional).
$\dot{q}$	taxa de geração de energia por unidade de volume ( $\text{W/m}^3$ ).
$S$	termo fonte genérico das equações diferenciais.
$T$	temperatura (K ou $^{\circ}\text{C}$ ).
$\bar{T}$	temperatura média (K ou $^{\circ}\text{C}$ ).
TDMA	<i>Tridiagonal Matrix Algorithm.</i>
$u$	deslocamento na direção x (m).
$U$	incerteza ou erro estimado da solução numérica.
$U_{\text{GCI}}$	incerteza da solução numérica segundo o estimador GCI.
$U_{\text{Ri}}$	incerteza da solução numérica segundo o estimador de Richardson.
UDS	<i>Upwind Differencing Scheme.</i>
$v$	deslocamento na direção y (m).
$x, y, z$	coordenadas (m).

### Letras Gregas

$\alpha$	difusividade térmica ( $\text{m}^2/\text{s}$ ), coeficiente de expansão térmica ( $\text{K}^{-1}$ )
$\beta$	coeficiente de expansão térmica ( $\text{K}^{-1}$ ).
$\varepsilon$	erro de truncamento
$\varepsilon_x$	deformação na direção x (m/m).
$\phi$	solução numérica de uma variável genérica.
$\phi_\infty$	estimativa da solução analítica.
$\Phi$	solução analítica exata de uma variável genérica.
$\lambda$	solução numérica da variável dependente.
$\lambda_m$	solução numérica da média de $\lambda$ .

$(\chi_{CDS}^i)$	solução numérica da derivada de 1 <sup>a</sup> ordem de $\Lambda$ obtida por diferença central.
$(\chi_{DDS-2}^i)$	solução numérica da derivada de 1 <sup>a</sup> ordem de $\Lambda$ obtida com 2 pontos a jusante.
$(\chi_{UDS-2}^i)$	solução numérica da derivada de 1 <sup>a</sup> ordem de $\Lambda$ obtida com 2 pontos à montante.
$(\chi_{CDS}^{ii})$	solução numérica da derivada de 2 <sup>a</sup> ordem de $\Lambda$ obtida por diferença central.
$\Lambda$	solução analítica exata da variável dependente do problema.
$\Lambda_m$	solução analítica exata da média de $\Lambda$ .
$\Lambda^i$	solução analítica exata da derivada de primeira ordem de $\Lambda$ .
$\Lambda^n$	solução analítica exata da derivada de ordem 'n' de $\Lambda$ , onde 'n' é grafado com algarismos romanos e assume os valores i, ii, iii, iv, v, ...
$\mu$	razão ou coeficiente de Poisson.
$\rho$	massa específica (kg/m <sup>3</sup> )
$\sigma_x$	tensão normal na direção x (Pa).
$\sigma_y$	tensão normal na direção y (Pa).

## Subscritos

1	malha fina.
2	malha grossa.
3	malha supergrossa.
j	número do nó numa malha unidimensional.
j-1	nó à esquerda do nó j.
j+1	nó à direita do nó j.
i, j	localização do nó na linha i e coluna j de uma malha bidimensional
P	ponto genérico sobre a malha
E	ponto à direita de P, a uma distância h de P.
EE	ponto à direita de P, a uma distância 2h de P.
W	ponto à esquerda de P, a uma distância h de P.

WW	ponto à esquerda de P, a uma distância $2h$ de P.
N	ponto acima de P, a uma distância $h$ de P.
NN	ponto acima de P, a uma distância $2h$ de P.
S	ponto abaixo de P, a uma distância $h$ de P.
SS	ponto abaixo de P, a uma distância $2h$ de P.
NE	ponto correspondente ao $4^{\circ}$ vértice do quadrado cujos outros três vértices são N, P, E.
NW	ponto correspondente ao $4^{\circ}$ vértice do quadrado cujos outros três vértices são N, P, W.
SE	ponto correspondente ao $4^{\circ}$ vértice do quadrado cujos outros três vértices são S, P, E.
SW	ponto correspondente ao $4^{\circ}$ vértice do quadrado cujos outros três vértices são S, P, W.

## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO .....</b>	13
1.1. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA .....	13
1.2 JUSTIFICATIVA .....	14
1.3 OBJETIVOS DO TRABALHO .....	15
1.3.1 Objetivo Geral .....	15
1.3.2 Objetivos Específicos .....	16
1.4 RESTRIÇÕES DO TRABALHO .....	16
1.5. DELINEAMENTO DO TRABALHO .....	17
<b>CAPÍTULO 2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	18
2.1 TRANSFERÊNCIA DE CALOR .....	18
2.1.1 Equação da Difusão do Calor .....	19
2.1.2 Determinação da Equação da Difusão do Calor .....	20
2.2 ELASTICIDADE .....	23
2.2.1 Tensão .....	23
2.2.2 Tensor de Tensões .....	25
2.2.3 Deformação .....	27
2.3 MODELOS MATEMÁTICOS .....	28
2.4 APROXIMAÇÕES NUMÉRICAS .....	31
2.4.1 Aproximações para a Derivada de Primeira Ordem .....	33
2.4.2 Aproximações para a Derivada de Segunda Ordem .....	34
2.5 VERIFICAÇÃO .....	34
2.5.1 Ordens Verdadeiras e Ordem Assintótica do Erro .....	35
2.5.2 Estimador de Erro de Richardson .....	36
2.5.3 Ordem Aparente do Erro .....	37
2.5.4 Ordem Efetiva .....	37
2.5.5 Estimador GCI .....	38
<b>CAPÍTULO 3 - CONDUÇÃO DE CALOR UNIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE .....</b>	39
3.1 SOLUÇÕES ANALÍTICAS .....	39

3.1.1 Soluções Analíticas Quando S é Constante .....	39
3.1.2 Solução Analítica Para $S = \frac{e^x}{e-1}$ .....	41
<b>3.2 MODELO NUMÉRICO .....</b>	<b>42</b>
3.2.1 Distribuição de Temperaturas .....	42
3.2.2 Temperatura Média .....	44
3.2.3 Derivada da Temperatura em $x=1$ .....	44
3.2.4 Programa Computacional .....	45
<b>3.3 ERROS DE TRUNCAMENTO E ORDENS DO ERRO .....</b>	<b>45</b>
<b>3.4 SOLUÇÕES NUMÉRICAS DAS TRÊS VARIÁVEIS DE INTERESSE .....</b>	<b>47</b>
3.5 VERIFICAÇÃO DO CASO 3 .....	50
3.6 CONCLUSÃO .....	57
<b>CAPÍTULO 4 – TERMOELASTICIDADE UNIDIMENSIONAL PERMANENTE ....</b>	<b>58</b>
4.1 SOLUÇÕES ANALÍTICAS .....	58
4.2 MODELOS NUMÉRICOS .....	61
4.2.1 Deslocamentos .....	61
4.2.2 Deformações .....	63
4.2.3 Tensões .....	65
4.2.4 Força Normal em $x = 0$ .....	65
4.2.5 Programa Computacional .....	66
4.3 SOLUÇÕES NUMÉRICAS .....	67
4.4 VERIFICAÇÃO DO CASO 6 .....	69
4.5 CONCLUSÃO DO CAPÍTULO 4 .....	78
<b>CAPÍTULO 5 - CONDUÇÃO DE CALOR BIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE .....</b>	<b>79</b>
5.1 SOLUÇÕES ANALÍTICAS .....	79
5.1.1 Temperatura No Ponto $(3/4, 3/4)$ .....	79
5.1.2 Temperatura Média .....	80
5.1.3 Fluxo de Calor Através da Superfície .....	81
5.2 MODELOS NUMÉRICOS .....	81
5.2.1 Temperatura .....	81
5.2.2 Temperatura Média: $\bar{T}$ .....	83
5.2.3 Fluxo de Calor (q) .....	84
5.2.4 Programa Computacional .....	84

5.3 SOLUÇÕES NUMÉRICAS .....	85
5.4 VERIFICAÇÃO DO CASO 7 .....	87
5.4.1 Temperatura no Ponto (3/4, 3/4) .....	87
5.4.2 Temperatura Média ( $\bar{T}$ ) .....	89
5.4.4 Fluxo de Calor (q) .....	91
5.5 CONCLUSÃO DO CAPÍTULO 5 .....	94
<b>CAPÍTULO 6 - TERMOELASTICIDADE BIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE .....</b>	<b>96</b>
6.1 MODELO NUMÉRICO .....	97
6.1.1 Deslocamentos .....	97
6.1.2 Força .....	98
6.1.3 Programa Computacional .....	100
6.2 ORDENS DO ERRO DE TRUNCAMENTO .....	101
6.2.1 Deslocamentos .....	101
6.2.2 Força Normal .....	102
6.3 SOLUÇÕES NUMÉRICAS .....	104
6.4 VERIFICAÇÃO DO CASO 8 .....	107
6.4.1 Dos Deslocamentos .....	107
6.4.2 Das Forças Normais .....	110
6.5 CONCLUSÃO DO CAPÍTULO 6 .....	112
<b>CAPÍTULO 7 – CONCLUSÃO .....</b>	<b>114</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>116</b>
<b>APÊNDICES .....</b>	<b>118</b>
APÊNDICE A .....	119
APÊNDICE B .....	124
APÊNDICE C .....	129
APÊNDICE D .....	134
APÊNDICE E .....	136
APÊNDICE F .....	138

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

#### 1.1. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

A resolução de problemas de transferência de calor pode ser efetuada de duas formas: a analítica e a numérica. A solução numérica pode ser obtida por diversos métodos numéricos, dentre eles o método das diferenças finitas.

Como o método das diferenças finitas é um método iterativo, ele requer uma grande quantidade de cálculos, a utilização do computador devidamente programado, pode levar mais rapidamente a uma solução numérica aceitável.

A aplicação do método das diferenças finitas para a resolução de equações diferenciais, como as envolvidas na transmissão de calor, leva a resultados confiáveis e com a acurácia necessária?

Também, pode-se questionar se os erros de arredondamento cometidos pelo computador são relevantes quando comparados com os erros de truncamento causados pela aplicação do método das diferenças finitas.

Nesse trabalho será realizada uma investigação dos erros cometidos pela aplicação do método das diferenças finitas usando um programa de computador em C++ Builder, versão 6.0.

O problema a ser estudado é a análise dos erros cometidos na resolução de equações diferenciais da condução de calor unidimensional permanente, termoelástico unidimensional, condução de calor bidimensional permanente e termoelástico bidimensional permanente, através de aproximações numéricas, sendo utilizado o método das diferenças finitas.

## 1.2 JUSTIFICATIVA

A expansão ou contração dos materiais quando submetidos a uma variação de temperatura, é de fundamental importância na engenharia, pois quando a temperatura de um corpo varia de maneira não uniforme surgem tensões no corpo.

A quebra de um vidro quando a sua superfície é rapidamente aquecida é atribuída a essas tensões. A falha por fadiga pode ocorrer como resultado de variação de temperaturas. Segundo Timoshenko (1970), as consequências dessas tensões térmicas são importantes em muitos aspectos de engenharia, como em turbinas, aviação e reatores nucleares.

Atualmente o poder de processamento dos computadores, mesmo pessoais, é cada vez maior, permitindo que quantidades cada vez maiores de dados sejam analisadas e como consequência problemas como a distribuição de temperaturas numa placa, as tensões e as deformações produzidas podem ser determinadas ou até previstas com precisão.

O fato de dizer que os resultados podem ser calculados com precisão pode significar que eles podem não ser exatos, ou seja, conter erros, que podem ser desprezíveis, aceitáveis ou que levem a uma avaliação errônea da situação proposta.

“A análise do erro contido em um resultado produzido por um processo numérico, principalmente se através de uma máquina digital, é fundamental para quaisquer tipos de cálculos, em especial nos voltados para a engenharia.” (DIEGUEZ, 1992, p.29).

O controle sobre os erros existentes num determinado processo computacional, então, é de fundamental importância, haja visto que, uma solução apresentada pelo computador pode não ser tão precisa como se deseja, não só por causa de erros cometidos pelo executor de uma tarefa, mas por limitações computacionais e do método numérico utilizado.

Nesse trabalho serão analisados os erros quando for utilizado o método numérico das diferenças finitas. Portanto, além de se obter a solução numérica do problema e a solução analítica (ou exata) do problema, também será possível verificar o erro total cometido em cada um dos nós da malha através da aplicação do método das diferenças finitas.

A dificuldade encontrada na solução do problema de distribuição de temperaturas e cálculo de tensões provocadas pela variação de temperatura devido à quantidade de variáveis envolvidas, a geometria da peça, podem tornar a obtenção analítica dos valores dessas grandezas muito demorada e a mudança de valor de uma das variáveis implica numa nova série de cálculos, novamente demorados e a cada nova mudança o processo se repete.

A aplicação de um método numérico que permita modelar um problema termoelástico – 2Dp, ou seja um problema termoelástico bidimensional em regime permanente, e que possibilite a construção de um sistema computacional que resolva rapidamente o problema, e, a cada variação nos valores de uma ou mais variáveis, o processo possa ser repetido rapidamente e com precisão, deixando para o usuário do sistema a tarefa de análise dos resultados e permitindo uma tomada de decisão mais correta quanto a utilização dos materiais ou prevendo o comportamento térmico desses materiais, parece uma forma racional de tratar a questão.

Diante do exposto anteriormente se propõe a seguinte questão: como saber se o método numérico utilizado pode produzir resultados com a precisão necessária e a partir de que momento o esforço computacional estará sendo inútil em face da propagação dos erros nos cálculos? A resposta a essa questão é o principal motivo da realização desse trabalho.

### 1.3 OBJETIVOS DO TRABALHO

#### 1.3.1 Objetivo Geral

- Analisar os erros de discretização cometidos pela aplicação do método numérico das diferenças finitas na resolução de problemas de termoelasticidade.

### 1.3.2 Objetivos Específicos

- Verificar a ordem assintótica do erro de discretização para as variáveis de interesse.
- Verificar o erro de discretização das as variáveis de interesse.
- Construir um sistema computacional que calcule a distribuição de temperaturas, os deslocamentos, as deformações e as tensões produzidas em problemas termoelásticos unidimensionais e bidimensionais.
- Analisar o desempenho dos estimadores de Richardson GCI para erros de discretização.

### 1.4 RESTRIÇÕES DO TRABALHO

A análise dos erros restringe-se à transferência de calor por condução e termoelasticidade unidimensional e transferência de calor por condução e termoelasticidade bidimensional em regime permanente. Uma restrição do trabalho, então, é que não se leva em conta as outras formas de transferência de calor como a convecção e a irradiação.

No trabalho é utilizada a linguagem C++, o tipo das variáveis será long double que segundo Shildt, 1996, p. 37, tem uma precisão de 16 casas decimais.

Outras restrições são:

- A verificação dos erros é feita apenas para o método das diferenças finitas.
- As malhas utilizadas são uniformes.
- As aproximações numéricas são unidimensionais.

## 1.5. DELINEAMENTO DO TRABALHO

No capítulo 02 será feita uma revisão bibliográfica da transferência de calor, do método das diferenças finitas, dos estimadores do erro de truncamento, da ordem aparente e da ordem assintótica do erro de truncamento.

No capítulo 03 será analisado o problema de transferência de calor unidimensional permanente através da equação  $\frac{d^2T}{dx^2} = S$ , sendo utilizados três valores diferentes para S. Inicialmente S será igual a 0, depois igual a 2 e depois igual a  $\frac{e^x}{e-1}$ .

No capítulo 04 será tratado o problema termoelástico unidimensional permanente, sendo utilizada a distribuição de temperaturas obtidas de acordo com o capítulo 03, para os mesmos valores de S.

No capítulo 05 será analisado o problema da transferência de calor bidimensional permanente, com temperaturas prescritas nos contornos. Será obtida a solução analítica e a solução aproximada numericamente para a distribuição de temperaturas.

No capítulo 06 será analisado o problema termoelástico bidimensional permanente com temperaturas prescritas nos contornos. Serão calculadas as estimativas do erro de truncamento, bem como serão produzidas tantas iterações quantas necessárias para se atingir o erro de máquina.

No capítulo 7 será apresentada a conclusão do trabalho.

## CAPÍTULO 2

### REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

#### 2.1 TRANSFERÊNCIA DE CALOR

Segundo Incropera e De Witt (2003, p. 1), a transferência de calor (ou calor) é a energia térmica em trânsito devido a uma diferença de temperatura.

O calor pode passar de um ponto para outro de três formas: por condução, por convecção e por radiação. Num sólido, a condução pode ser creditada à atividade atômica em forma de vibrações dos retículos.

Pode-se, também, associar a transferência de energia à *ondas na estrutura dos retículos* induzidas pelo movimento atômico. Nos não condutores, a transferência de energia se dá exclusivamente através dessas ondas; em um condutor, a transferência também é devida ao movimento de translação dos elétrons livres.

Segundo Incropera e De Witt (2003, p. 37), o fluxo de calor é uma grandeza física vetorial, e a taxa de transferência de calor por condução (lei de Fourier) pode ser escrita da forma:

$$q'' = -k\nabla T = -k \left( i \frac{\partial T}{\partial x} + j \frac{\partial T}{\partial y} + k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (2.1)$$

onde  $\nabla$  é um operador diferencial e  $T(x,y,z)$  é o campo de temperatura escalar. Por essa equação nota-se que o vetor fluxo de calor encontra-se em uma direção perpendicular às superfícies isotérmicas.

Fazendo  $q_x'' = -k \frac{\partial T}{\partial x}$        $q_y'' = -k \frac{\partial T}{\partial y}$        $q_z'' = -k \frac{\partial T}{\partial z}$       (2.2)

Substituindo a equação (2.2) na equação (2.1), teremos:

$$\mathbf{q}'' = \mathbf{i} q_x'' + \mathbf{j} q_y'' + \mathbf{k} q_z'' \quad (2.3)$$

### 2.1.1 Equação da Difusão do Calor

Quando se conhece a distribuição de temperaturas, num determinado meio sólido, pode-se determinar, por exemplo, as tensões térmicas, expansões e deflexões.

Para obter-se a equação da difusão do calor, em coordenadas cartesianas, considera-se, inicialmente um volume de controle diferencial, considerando os processos relevantes de transferência de calor, onde são introduzidas as equações das taxas de transmissão de calor apropriadas. A equação diferencial obtida é:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho \cdot c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.4)$$

onde:

$\rho$  é a massa específica da substância que forma o corpo.

$c_p$  é o calor específico à pressão constante.

$k$  é a condutividade térmica do material.

$T$  é a temperatura.

$t$  é o tempo.

$\dot{q}$  é taxa de calor gerado por unidade de volume.

$x, y$  e  $z$  são as coordenadas cartesianas do ponto.

A resolução da equação anterior, para as condições de contorno descritas, dá a distribuição de temperatura como uma função do tempo.

### 2.1.2 Determinação da Equação da Difusão do Calor

Seja um meio homogêneo, no qual não existe advecção e a distribuição de temperatura  $T(x, y, z)$  está expressa em coordenadas cartesianas. Considerando um volume de controle infinitesimal, cujo volume seja  $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ , conforme a figura 2.1, a seguir.

Nessa figura 2.1 observa-se que as taxas de condução de calor, perpendiculares a cada uma das superfícies são dadas por  $q_x$ ,  $q_y$  e  $q_z$ . As taxas de condução de calor nas paredes opostas podem ser escritas como  $q_{x+dx}$ ,  $q_{y+dy}$  e  $q_{z+dz}$  que podem ser aproximada por uma expansão da série de Taylor, onde são desprezados os termos de ordem superior:

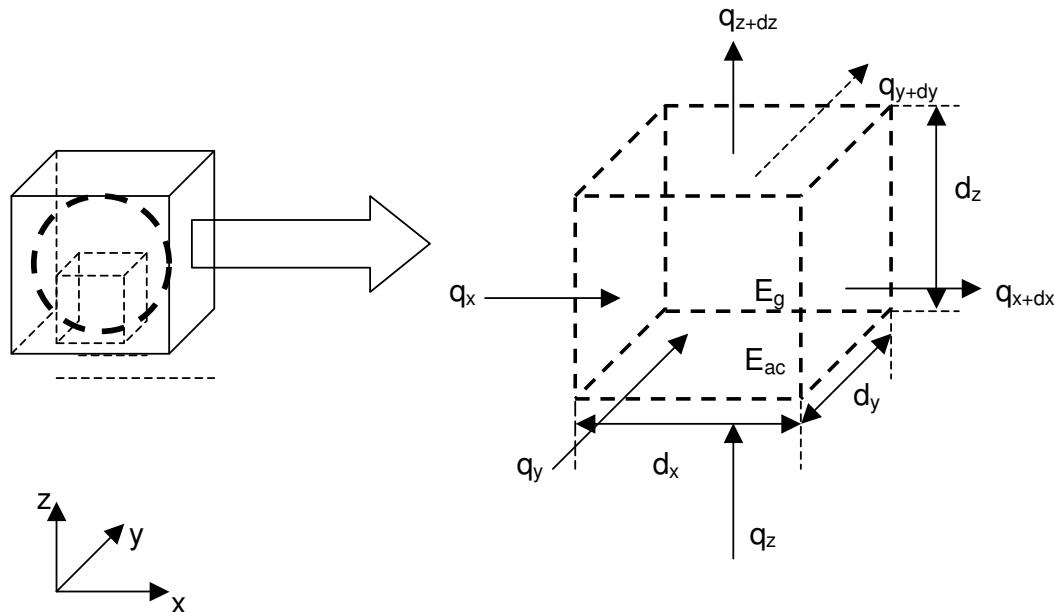


Figura 2.1: Volume de controle infinitesimal (diferencial), em coordenadas cartesianas, onde se pode observar que o volume é  $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ .

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \quad (2.5.a)$$

$$q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \quad (2.5.b)$$

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \quad (2.5.c)$$

Pode-se dizer que a taxa de energia afluente, denotada por  $\dot{E}_{af}$  é dada pela soma das taxas de condução de calor nas faces, ou seja:

$$\dot{E}_{af} = q_x + q_y + q_z \quad (2.6)$$

Da mesma forma, a taxa de energia efluente, denotada por  $\dot{E}_{ef}$  pode ser dada pela soma das taxas de condução de calor nas faces opostas, ou seja:

$$\dot{E}_{ef} = q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz} \quad (2.7)$$

Na parte interna do volume de controle pode existir também um termo que represente uma fonte de energia e que está associado à taxa de geração de energia térmica, que pode ser dado por:

$$\dot{E}_g = \dot{q} dxdydz \quad (2.8)$$

Onde  $\dot{q}$  é a taxa de energia gerada por unidade de volume. O material do volume de controle pode, ainda, apresentar variações na quantidade de energia térmica interna armazenada. Sem considerar a mudança de fase do material, pode-se desprezar a quantidade de calor latente do material do volume de controle, e então, a energia acumulada pode ser dada por:

$$\dot{E}_{ac} = \rho \cdot c_p \frac{\partial T}{\partial t} dxdydz \quad (2.9)$$

Aplicando o princípio da conservação da energia, temos:

$$\dot{E}_{af} + \dot{E}_g - \dot{E}_{ef} = \dot{E}_{ac} \quad (2.10)$$

que substituindo pelas equações 6,7 e 8, fornece:

$$q_x + q_y + q_z + \dot{q}dxdydz - (q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz}) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dxdydz \quad (2.11)$$

substituindo na equação anterior as equações 5, vem

$$q_x + q_y + q_z + \dot{q}dxdydz - \left( q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy + q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \right) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dxdydz$$

que pela redução dos termos semelhantes, fica:

$$\dot{q}dxdydz - \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \right) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dxdydz \quad (2.12)$$

Lembrando a lei de Fourier, podemos escrever as taxas de condução de calor como sendo

$$q_x = -kdydz \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.13.a)$$

$$q_y = -kdxdz \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.13.b)$$

$$q_z = -kdxdy \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.13.c)$$

Substituindo as equações 2.13 em 2.12, vem

$$\dot{q}dxdydz - \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( -kdydz \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left( -kdxdz \frac{\partial T}{\partial y} \right) dy + \frac{\partial}{\partial z} \left( -kdxdy \frac{\partial T}{\partial z} \right) dz \right) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dxdydz$$

Onde, organizando os termos e dividindo ambos os membros por  $dxdydz$ , obtém-se a equação 2.4, que é conhecida como equação da difusão do calor e é uma das expressões fundamentais para a análise da condução de calor, pois, a partir de sua solução pode-se obter a distribuição de temperaturas em função do tempo.

Na equação 2.4, considerando  $k$  constante, pode-se dividir os dois lados da igualdade por  $k$ , obtendo:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{\rho \cdot c_p}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.14)$$

Onde segundo Incropera e De Witt (2003, p. 43), a difusividade térmica do meio é denotada por  $\alpha$  e definida como sendo  $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$ .

Portanto, a equação 2.14 pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.15)$$

## 2.2 ELASTICIDADE

### 2.2.1 Tensão

Seja o corpo representado na figura 2.2 a seguir, onde se vê um corte transversal e o vetor força  $\Delta P$  atuando sobre a área  $\Delta A$ :

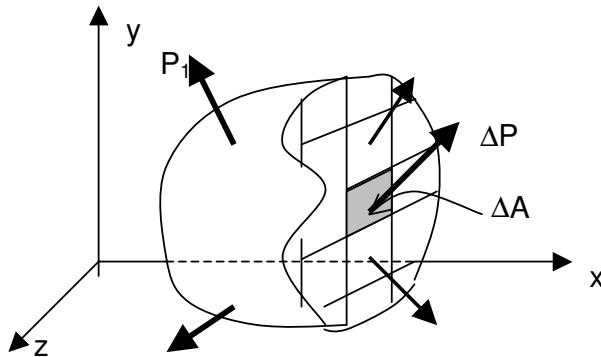


Figura 2.2: Esquema de um corpo livre com algumas forças internas.

Na figura 2.3 a seguir, vê-se as componentes da força  $\Delta P$ :

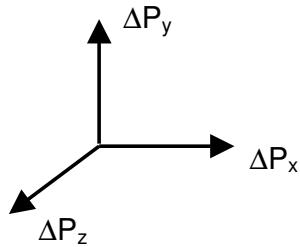


Figura 2.3: componentes ortogonais da força  $\Delta P$

Considerando que o meio seja homogêneo e não levando em conta a estrutura atômica, podem se escrever as tensões como:

$$\tau_{xx} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta P_x}{\Delta A} \right), \quad \tau_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta P_y}{\Delta A} \right), \quad \tau_{xz} = \left( \frac{\Delta P_z}{\Delta A} \right)$$

Nessa representação, o primeiro índice de  $\tau$  indica que o plano perpendicular ao eixo  $x$  é considerado, e o segundo designa a direção da componente da tensão.

A intensidade da força perpendicular ou normal à seção é chamada de tensão normal em um ponto. As tensões que causam tração à superfície do corte podem ser chamadas de *tensões de tração* e as que causam compressão de *tensões de compressão*.

As tensões normais são denotadas pela letra  $\sigma$  (sigma) com um índice que indica a direção do eixo ao invés de  $\tau$  com duplo índice. As demais componentes

agem paralelamente ao plano da área elementar e são chamadas de *tensões de cisalhamento* e são indicadas por  $\tau$ .

### 2.2.2 Tensor de Tensões

Seja um cubo infinitesimal, contendo o ponto onde a força  $\Delta P$  está atuando. As tensões que agem sobre o cubo estão representadas na figura 2.4, a seguir:

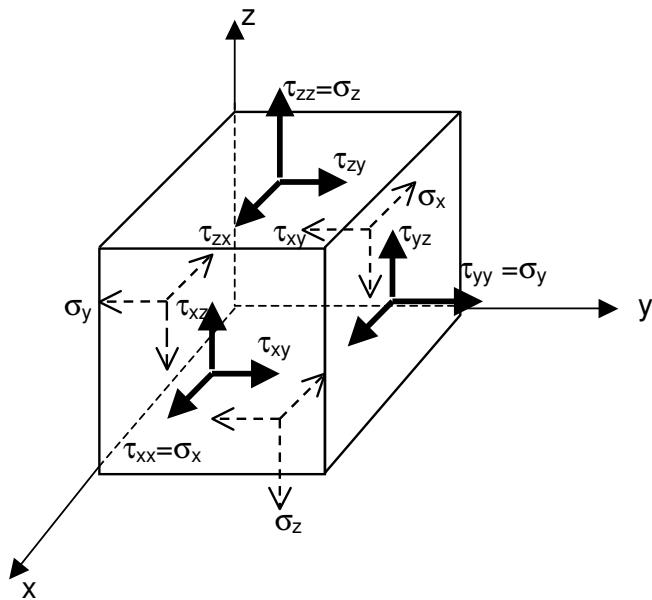


Figura 2.4: Tensões atuantes sobre um cubo infinitesimal

De acordo com a figura acima existem três tensões normais  $\tau_{xx} \equiv \sigma_x$ ,  $\tau_{yy} \equiv \sigma_y$ ,  $\tau_{zz} \equiv \sigma_z$  e seis tensões de cisalhamento  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zy}$ ,  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{zx}$ . O vetor força  $\Delta P$  tem três componentes  $\Delta P_x$ ,  $\Delta P_y$  e  $\Delta P_z$ , que podem ser escritas em forma de um vetor coluna:

$$\begin{pmatrix} \Delta P_x \\ \Delta P_y \\ \Delta P_z \end{pmatrix}$$

Da mesma forma, as componentes de tensão podem ser agrupadas da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Essa é uma matriz de representação do tensor de tensões e é um tensor de segunda ordem. O tensor de tensões é simétrico, ou seja,  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ . Para observar isto, considera-se um elemento infinitesimal de dimensões  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$  e calcula-se a soma dos momentos das forças em relação ao eixo  $x$ , conforme é mostrado na figura 2.5, a seguir:

A soma dos momentos, em relação ao eixo  $x$ , deve ser igual a zero:

$$M_A = 0$$

$$\tau_{yz} \cdot (dxdz) \cdot dy - \tau_{zy} \cdot (dxdy) \cdot dz = 0$$

$$\tau_{yz} \cdot (dxdz) \cdot dy = \tau_{zy} \cdot (dxdy) \cdot dz$$

Que simplificando, fica:  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$

Analogamente pode se mostrar que  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  e  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$

Dessa forma, os índices para as tensões de cisalhamento são comutativos e o tensor de tensões é simétrico.

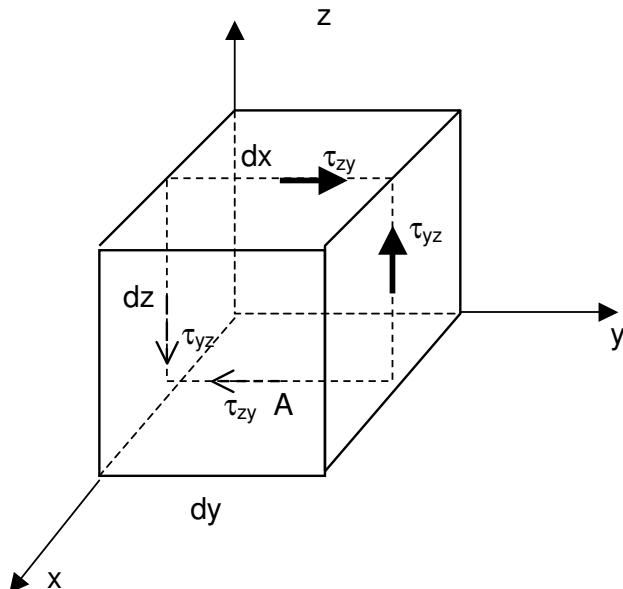


Fig 2.5: Elemento infinitesimal de um corpo em cisalhamento puro

### 2.2.3 Deformação

Um corpo sólido se deforma quando submetido a uma variação de temperatura ou quando recebe a ação de uma força externa. Quando uma barra de comprimento inicial  $\ell_0$  é submetida a uma força externa  $F$ , ela sofre uma variação no seu comprimento dado por  $\Delta\ell$  e o comprimento final passa a ser  $\ell$ .

De acordo com Popov (2001, p.87), o alongamento por unidade de comprimento, ou seja, a intensidade da deformação é denotada por  $\varepsilon$ , e dada por:

$$\varepsilon = \int_0^{\ell} \frac{d\ell}{\ell_0} = \frac{\Delta\ell}{\ell_0} \quad (2.17)$$

Onde  $\varepsilon$  é o alongamento por unidade de comprimento e é chamado de deformação linear.

Além da deformação linear, um corpo pode também sofrer uma deformação de cisalhamento.

De acordo com a equação (18), as deformações variam de ponto para ponto, e então, as definições de deformação devem se referir a um elemento infinitesimal. Na deformação linear, ocorrendo numa direção, como na figura 2.6 a seguir, os pontos A e B se movem para A' e B', respectivamente:

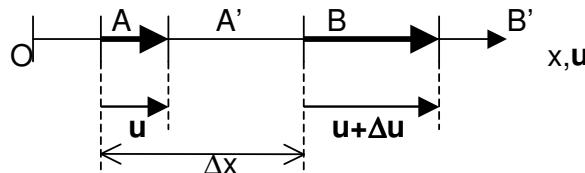


Figura 2.6: Deformação linear numa direção. O ponto A sofre um deslocamento  $u$  e o ponto B  $u+\Delta u$ , pois, além de  $u$ , comum a todo elemento  $\Delta x$ , ocorre a deformação  $\Delta u$  no elemento.

Levando isso em conta, a deformação linear pode ser dada por

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \frac{du}{dx} \quad (2.18)$$

Para o caso bidimensional, como mostrado na figura 2.7 a seguir, o corpo sofre deformações em direções ortogonais:

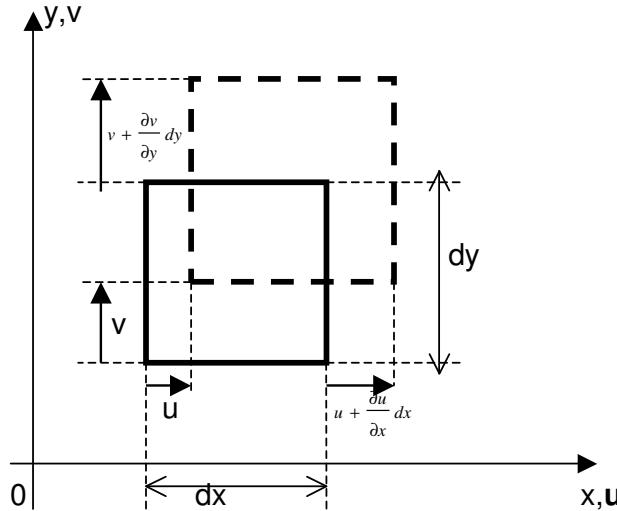


Figura 2.7: Um corpo sofrendo deformações ortogonais entre si.

### 2.3 MODELOS MATEMÁTICOS

O 1º caso a ser analisado é da condução de calor unidimensional permanente numa barra de condutividade térmica  $k$ , comprimento  $L$  e com as temperaturas prescritas nos contornos, ou seja,  $T(0) = T_o$  e  $T(L) = T_L$ . As variáveis de interesse serão: a temperatura no ponto médio da barra, ou seja,  $T(L/2)$  a temperatura média e a derivada da temperatura para  $x = L$ . Então, nesse caso, o problema a ser resolvido é:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = S \quad (2.19)$$

com condições de contorno:  $T(0) = T_o$ ,  $T(L) = T_L$  e  $S = 0$  (2.20)

variáveis de interesse:

$$T(L/2)$$

$$\bar{T} = \frac{1}{L} \cdot \int_0^L T(x) dx \quad (2.21)$$

$$I = \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} \quad (2.22)$$

O 2º caso é o mesmo do 1º, considerando  $S = 2$ .

$$\text{O 3º caso é o mesmo do 1º, considerando } S = \frac{e^x}{e-1}. \quad (2.23)$$

O 4º caso a ser analisado é o problema termoelástico 1Dp, com as temperaturas dadas no 1º caso e as variáveis de interesse serão: os deslocamentos ( $u$ ) para  $x = L/2$ , as deformações ( $\varepsilon_x$ ), as trações ( $\sigma_x$ ) e as forças ( $F_o$ ) em  $x = 0$ . Então, nesse caso o problema a ser resolvido é:

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \alpha \cdot \frac{dT}{dx} = 0 \quad (2.24)$$

com condições de contorno:  $u(0) = 0$  e  $u(L) = 0$  (2.25)

$$\varepsilon(x) = \frac{du}{dx} \quad (2.26)$$

$$\sigma_x = E \cdot (\varepsilon_x - \alpha \cdot \theta) \quad (2.27)$$

$$F_o = (\sigma_x)_o \cdot (A_x)_o \quad (2.28)$$

onde  $\alpha$  é o coeficiente de expansão térmica,  $E$  é o módulo de Young e  $A_x$  é a área transversal ao eixo  $x$ . Para esse caso as variáveis de interesse são:

$$u(L/2), \varepsilon(L/2), \sigma(L/2) \text{ e } F_o(0)$$

O 5º caso é o mesmo do 4º caso, com as temperaturas dadas no 2º caso.

O 6º caso é o mesmo do 4º caso, com as temperaturas dadas no 3º caso.

O 7º caso é a condução de calor bidimensional em regime permanente com temperaturas prescritas nos contornos. Será considerada uma placa retangular de comprimento  $L_x$  e largura  $L_y$ , como a mostrada na figura 2.8, sendo considerado  $L_x=L_y=L$ . Na face correspondente a  $(x, L)$  a temperatura será dada por  $T(x, L) = (\operatorname{sen}(\pi x/L))^2$  e nas outras faces a temperatura será mantida constante e igual a  $0^\circ\text{C}$ . Nesse caso quer-se encontrar a temperatura no ponto de coordenadas  $(3/4, 3/4)$ . Portanto, nesse caso, o problema a ser resolvido é:

$$\frac{\delta^2 T}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 T}{\delta y^2} = S \quad (2.29)$$

com  $T(x, 0) = T(0, y) = T(L, y) = 0$ , (2.30)

$$T(x, L) = \operatorname{sen}(\pi x/L) \text{ e } S = 0 \quad (2.31)$$

As variáveis de interesse são  $T(3/4, 3/4)$ ,  $\bar{T}$  e  $q$ , sendo  $\bar{T}$  e  $q$ , definidos por:

$$\bar{T} = \frac{1}{L_x} \cdot \frac{1}{L_y} \cdot \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} T(x, y) dx dy \quad (2.32)$$

$$q = -k \cdot \int_0^{L_x} \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{x,y=L_y} \right] dx \quad (2.33)$$

O 8º caso é um problema termoleástico bidimensional com condições de contorno de Dirichlet, com as temperaturas dadas no 7º caso. Nesse problema serão determinados os deslocamentos nas direções  $x$  e  $y$  no ponto de coordenadas  $(3/4, 3/4)$ . Será, também, obtida a força média em  $x = L$  e em  $y = L$ . Fazendo  $C_\mu = \frac{1+\mu}{1-\mu}$

onde  $\mu$  é a razão de Poisson, o problema a ser resolvido, nesse caso, será então:

$$C_u \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 \cdot C_u \cdot \alpha \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.34)$$

$$\text{com } u(x,0)=u(x,L)=u(0,y)=u(L,y) = 0 \quad (2.35)$$

$$C_u \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 2 \cdot C_u \cdot \alpha \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.36)$$

$$\text{com } v(x,0)=v(x,L)=v(0,y)=v(L,y) = 0 \quad (2.37)$$

$$F_x = W \cdot \int_0^1 (\sigma_x)_{x=1} dy \quad (2.38)$$

$$F_y = W \cdot \int_0^1 (\sigma_y)_{y=1} dx \quad (2.39)$$

onde  $\sigma_x$  é a tensão normal na direção  $x$  e  $\sigma_y$  é a tensão normal na direção  $y$  e que podem ser dadas por:

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\mu} \cdot \left[ \frac{\mu}{1-\mu} \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} - C_\mu \cdot \alpha \cdot (T - T_o) \right] \quad (2.40)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\mu} \cdot \left[ \frac{\mu}{1-\mu} \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} - C_\mu \cdot \alpha \cdot (T - T_o) \right] \quad (2.41)$$

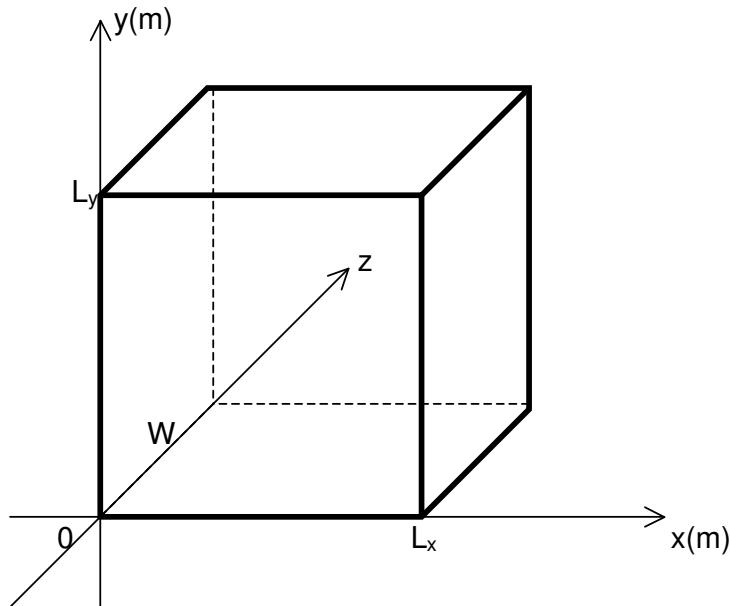


Figura 2.8: placa de comprimento  $L_x$ , largura  $L_y$  e espessura  $W$ .

Nos 7 primeiros casos a solução analítica será encontrada e no oitavo caso ela não será conhecida.

Na tabela 2.1 é mostrado um resumo dos 8 casos anteriores:

## 2.4 APROXIMAÇÕES NUMÉRICAS

Indicando a solução analítica por  $\Phi$  e a solução numérica por  $\phi$ , então, de acordo com Marchi e Silva (2002), o erro da solução numérica de uma variável de interesse é dado por:

$$E(\phi) = \Phi - \phi \quad (2.42)$$

Então

$$\Phi = \phi + E(\phi) \quad (2.43)$$

onde  $\Phi$  é a solução analítica,  $\phi$  é a solução numérica e  $E(\phi)$  é o erro.

A expressão anterior, pode ser escrita como:

$$\Lambda_j = (\lambda)_j + \varepsilon(\lambda)_j \quad (2.44)$$

onde  $\Lambda$  é a solução analítica,  $\lambda$  é aproximação numérica e  $\varepsilon$  é o erro de truncamento.

Tabela 2.1. Modelos Matemáticos

Caso	Equações diferenciais	Variáveis de interesse	Aproximação numérica
1 e 2	$\frac{d^2T}{dx^2} = S$	$T(L/2)$	$\lambda_{CDS}^{ii}$ : diferença central
		$\bar{T} = \frac{1}{L} \cdot \int_0^L T(x)dx$	$\lambda_m$ : regra do trapézio
		$I = \left. \frac{dT}{dx} \right _{x=L}$	$\lambda_{UDS}^i$
3	$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{e^x}{e-1}$	$T(L/2)$	$\lambda_{CDS}^{ii}$ : diferença central
		$\bar{T} = \frac{1}{L} \cdot \int_0^L T(x)dx$	$\lambda_m$ : regra do trapézio
		$I = \left. \frac{dT}{dx} \right _{x=L}$	$\lambda_{UDS-2}^i$
4, 5 e 6	$\frac{d^2u}{dx^2} - \alpha \cdot \frac{dT}{dx} = 0$	$u(L/2)$	$\lambda_{CDS}^{ii}$ : diferença central
		$\epsilon\left(\frac{L}{2}\right) = \left. \frac{du}{dx} \right _{x=\frac{L}{2}}$	$\lambda_{CDS}^i$ : diferença central
		$\sigma_x(1/2) = E \cdot (\epsilon_x - \alpha \cdot \theta)$	$\lambda_{CDS}^i$ : diferença central
		$F_o = (\sigma_x)_o \cdot (A_x)_o$	$\lambda_{DDS-2}^i$
7	$\frac{\delta^2 T}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 T}{\delta y^2} = 0$	$T(3/4, 3/4)$	$\lambda_{CDS}^{ii}$ : diferença central
		$\bar{T} = \frac{1}{L_x} \cdot \frac{1}{L_y} \cdot \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} T(x, y) dx dy$	Regra do Trapézio
		$q = -k \cdot \int_0^{L_x} \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{x,y=L_y} \right] dx$	$\lambda_{UDS-2}^i$
8	$C_u \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 \cdot C_u \cdot \alpha \cdot \frac{\partial T}{\partial x}$	$u(3/4, 3/4)$	$\lambda_{CDS}^{ii}$ : diferença central
			$\lambda_{CDS}^i$ : diferença central
		$v(3/4, 3/4)$	$\lambda_{CDS}^{ii}$ : diferença central
	$C_u \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 2 \cdot C_u \cdot \alpha \cdot \frac{\partial T}{\partial y}$	$\lambda_{CDS}^i$ : diferença central	
		$F_x = W \cdot \int_0^1 (\sigma_x)_{x=1} dy$	Regra do Trapézio
		$F_y = W \cdot \int_0^1 (\sigma_y)_{y=1} dx$	Regra do Trapézio

As soluções numéricas de cada termo em cada caso dado pela tabela 2.1, serão denotadas por  $\lambda_{CDS}^i$ ,  $\lambda_{UDS-2}^i$ ,  $\lambda_{DDS-2}^i$  para as derivadas primeiras,  $\lambda_{CDS}^{ii}$

para as derivadas segundas e  $\lambda_m$  para a média dos valores da variável de interesse.

Essas soluções podem ser obtidas a partir da série de Taylor, e conforme demonstradas no apêndice A e escritas nos itens 2.4.1 e 2.4.2, a seguir.

#### 2.4.1 Aproximações para a Derivada de Primeira Ordem

Nesse trabalho são utilizadas as seguintes aproximações para a derivada primeira:

- Com diferença central de 2 pontos:

$$(\lambda_{CDS}^i)_j = \frac{\Lambda_{j+1} - \Lambda_{j-1}}{2h} \quad (2.45)$$

com erro de truncamento dado por

$$\epsilon(\lambda_{CDS}^i)_j = -\Lambda_j^{iii} \cdot \frac{h^2}{6} - \Lambda_j^v \cdot \frac{h^4}{120} - \Lambda_j^{vii} \cdot \frac{h^6}{5040} - \dots \quad (2.46)$$

onde  $h$  é o tamanho de cada elemento da malha e que pode ser visualizado na figura 2.9, a seguir:

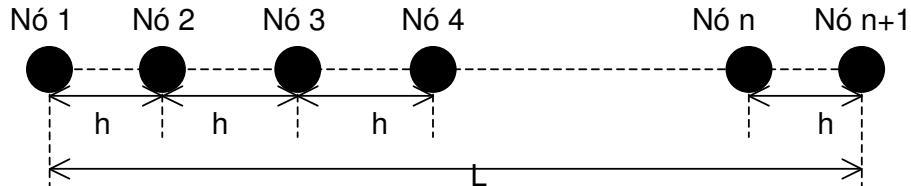


Fig 2.9: Discretização do comprimento da barra (malha uniforme)

- Com dois pontos à jusante

$$(\lambda_{DDS-2}^i)_j = \frac{4\Lambda_{j+1} - 3\Lambda_j - \Lambda_{j+2}}{2h} \quad (2.47)$$

com erro de truncamento dado por

$$\epsilon(\lambda_{DDS-2}^i)_j = \Lambda_j^{iii} \cdot \frac{h^2}{3} + \Lambda_j^v \cdot \frac{h^3}{4} + \Lambda_j^v \cdot \frac{7h^4}{60} + \dots \quad (2.48)$$

- Com dois pontos à montante

$$(\lambda_{UDS-2}^i)_j = \frac{3\Lambda_j + \Lambda_{j-2} - 4\Lambda_{j-1}}{2h} \quad (2.49)$$

com erro de truncamento dado por

$$\varepsilon(\lambda_{UDS-2}^i)_j = \Lambda_j^{iii} \cdot \frac{h^2}{3} - \Lambda_j^{iv} \cdot \frac{h^3}{4} + \Lambda_j^v \cdot \frac{7h^4}{60} - \dots \quad (2.50)$$

## 2.4.2 Aproximação para a Derivada de Segunda Ordem

- Com diferença central de 2 pontos

$$(\lambda_{CDS}^{ii})_j = \frac{\Lambda_{j-1} + \Lambda_{j+1} - 2\Lambda_j}{h^2} \quad (2.51)$$

com erro de truncamento dado por

$$\varepsilon(\lambda_{CDS}^{ii})_j = -\Lambda_j^{iv} \cdot \frac{h^2}{12} - \Lambda_j^{vi} \cdot \frac{h^4}{360} - \Lambda_j^{viii} \cdot \frac{h^6}{20160} - \dots \quad (2.52)$$

## 2.5 VERIFICAÇÃO

O erro cometido na solução numérica de uma variável de interesse é dada pela equação 2.39. De acordo com Marchi e Silva (2002) esse erro numérico pode ser classificado em 4 formas: erros de truncamento, que surgem das aproximações numéricas feitas na discretização do modelo matemático; erros de iteração, que é a diferença entre a solução exata e a solução iterativa da equação discretizada; erros de arredondamento que é devido ao número finito de dígitos da computação aritmética e erros de programação que são provocados pela pessoa que implementa o código e/ou utiliza.

O erro de truncamento, em geral diminui com a diminuição do valor de  $h$ , conforme pode ser visto nas equações 2.46, 2.48, 2.50 e 2.52, onde o erro de truncamento depende do valor de  $h$ . O erro de iteração diminui a medida que o número de iterações aumenta e o erro de arredondamento aumenta quando o

tamanho de cada elemento da malha é diminuído pois serão mais elementos considerados, portanto mais arredondamentos são feitos a cada iteração.

Nesse trabalho é considerado que não existem erros de iteração, de arredondamento ou de programação, ou seja, o erro da solução numérica definida pela equação 2.42 é devido apenas a erro de truncamento e, então, daqui para frente será chamado de erro de discretização ou simplesmente erro.

Nesse trabalho é feita uma verificação do erro através da determinação das ordens verdadeiras do erro de truncamento, da ordem assintótica do erro de truncamento, da ordem aparente do erro de truncamento e a avaliação do erro através do estimador de erro de Richardson para a ordem assintótica e para a ordem aparente.

Conforme Roache (1994) o erro de truncamento, pode ser dado por:

$$\varepsilon(\phi) = c_1 \cdot h^{p_1} + c_2 \cdot h^{p_2} + c_3 \cdot h^{p_3} + c_4 \cdot h^{p_4} + \dots \quad (2.53)$$

onde  $c_1, c_2, c_3, \dots$  são coeficientes que independem do valor de  $h$ ,  $p_1, p_2, p_3, p_4 \dots$  são números inteiros positivos.

### 2.5.1 Ordens Verdadeiras e Ordem Assintótica do Erro

Os expoentes de  $h$  na equação 2.53 para os quais os coeficientes são diferentes de zero, são as ordens verdadeiras do erro de truncamento e o menor desses expoentes é a ordem assintótica do erro.

Comparando a equação 2.53 com as equações 2.46, 2.48, 2.50 e 2.52 pode-se obter a tabela 2.2., a seguir, que mostra os valores possíveis para as ordens verdadeiras e da ordem assintótica do erro de truncamento para cada tipo de aproximação.

Os valores das ordens do erro de truncamento contidos na tabela 2.2 são os valores possíveis, pois eles dependem das derivadas envolvidas serem nulas ou não.

Tabela 2.2. Valores possíveis para as ordens do erro de truncamento

Solução numérica	Tipo da aproximação numérica	Ordens verdadeiras	Ordem assintótica
$\lambda_{CDS}^i$	Diferença central	2, 4, 6, 8 ...	2
$\lambda_{UDS-2}^i$	Dois pontos a montante	2, 3, 4, 5, ...	2
$\lambda_{DDS-2}^i$	Dois pontos a jusante	2, 3, 4, 5, ...	2
$\lambda_{CDS}^{ii}$	Diferença central	2, 4, 6, 8, ...	2

### 2.5.2 Estimador de Erro de Richardson

De acordo com Marchi e Silva (2002), a incerteza de uma solução numérica, é definida por

$$U_{Ri}(\phi) = \phi_{\infty} - \phi \quad (2.54)$$

Onde  $\phi$  representa a solução numérica,  $\phi_{\infty}$  é a estimativa da solução analítica. De acordo com Roache (1994), o valor de  $\phi_{\infty}$  pode ser obtido pela extrapolação de Richardson, ou seja,

$$\phi_{\infty} = \phi_1 + \frac{\phi_1 - \phi_2}{q^{p_L} - 1} \quad (2.55)$$

onde  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são as soluções numéricas obtidas na malha fina ( $h_1$ ) e na malha grossa ( $h_2$ ), respectivamente,  $p_L$  é a ordem assintótica do erro de discretização e  $q$  taxa de refinamento da malha, dado por

$$q = \frac{h_2}{h_1} \quad (2.56)$$

Substituindo a equação 2.55 na equação 2.54, o estimador de erro de Richardson fica

$$U_{Ri}(\phi) = \frac{\phi_1 - \phi_2}{q^{p_L} - 1} \quad (2.57)$$

### 2.5.3 Ordem Aparente do Erro

De acordo com De Vahl Davis (1983) a ordem aparente do erro pode ser dada por:

$$p_u = \frac{\log \left( \frac{\phi_2 - \phi_3}{\phi_1 - \phi_2} \right)}{\log q} \quad (2.58)$$

onde  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  e  $\phi_3$  são as soluções numéricas nas malhas fina ( $h_1$ ), grossa ( $h_2$ ) e super grossa ( $h_3$ ), respectivamente e  $q$  é taxa de refinamento, suposta constante entre as malhas. A dedução da equação 2.58 é mostrada no apêndice B.

A extrapolação de Richardson usando a ordem aparente do erro, fica:

$$\phi_\infty = \phi_1 + \frac{\phi_1 - \phi_2}{q^{p_u} - 1} \quad (2.59)$$

O estimador do erro de Richardson, com a ordem aparente é igual a:

$$U_{Ri}(\phi) = \frac{\phi_1 - \phi_2}{q^{p_u} - 1} \quad (2.60)$$

### 2.5.4 Ordem Efetiva

Segundo Marchi (2001), a ordem efetiva ( $p_E$ ) é definida como a inclinação da curva do erro de discretização  $E(\phi)$  em função de  $h$  e pode ser dada por

$$p_E = \frac{\log \left[ \frac{E(\phi_2)}{E(\phi_1)} \right]}{\log(q)} \quad (2.61)$$

### 2.5.5 Estimador GCI

De acordo com Roache (1994), através do estimador GCI (*Grid Convergence Index*), a incerteza de uma solução numérica para solução na malha fina, é dada por

$$U_{GCI}(p_L) = F_s \cdot \frac{\phi_1 - \phi_2}{q^{p_L} - 1} \quad (2.62)$$

onde  $F_s$  é um fator de segurança, geralmente igual a 3.

O estimador de erro GCI com a ordem aparente do erro, fica igual a:

$$U_{GCI}(p_U) = F_s \cdot \frac{\phi_1 - \phi_2}{q^{p_U} - 1} \quad (2.63)$$

## CAPÍTULO 3

### CONDUÇÃO DE CALOR UNIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE

Nesse capítulo são abordados os 1º, 2º e 3º casos da tabela 2.1. Será mostrada a solução analítica de cada caso, bem como a solução numérica aproximada.

Serão mostrados em forma de tabelas as soluções numéricas para malhas com diferentes números de elementos, o erro verdadeiro, as ordens verdadeiras, as ordens aparentes, as ordens efetivas, o valor da estimativa do erro de Richardson e os gráficos que mostram esses valores, para o 3º caso.

#### 3.1 SOLUÇÕES ANALÍTICAS

De acordo com Incropera e De Witt (2002, p.132), a condução de calor unidimensional permanente pode ser escrita como:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = S \quad (3.1)$$

com S sendo uma função de x, T sendo a temperatura num ponto qualquer e x a abscissa do ponto.

##### 3.1.1 Soluções Analíticas Quando S é Constante

Resolvendo a equação 3.1, para S = 0 com as condições de contorno T(0)=0°C e T(L) = 1°C, obtém-se a solução analítica da distribuição de temperaturas para o 1º caso

$$T(x) = x \quad (3.2)$$

Fazendo x = 1/2, encontra-se para T(1/2):

$$T\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}^{\circ}\text{C}$$

A temperatura média, no intervalo  $[0, 1]$ , é dada por:

$$\bar{T} = \int_0^1 T(x) dx \quad (3.3)$$

então

$$\bar{T} = \int_0^1 x dx \quad (3.4)$$

portanto

$$\bar{T} = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}^{\circ}\text{C}$$

A derivada de  $T(x)$  para  $x = 1\text{m}$ , pode ser dada por:

$$I = \left( \frac{dT}{dx} \right)_{x=1} \quad (3.5)$$

$$I = 1 \Big|_{x=1} \quad \text{ou seja} \quad I = 1^{\circ}\text{C/m}$$

Resolvendo a equação 3.1 para  $S = 2$ ,  $T(L) = 1^{\circ}\text{C}$ ,  $T(0) = 0^{\circ}\text{C}$  e  $L = 1\text{m}$ , obtém-se a solução analítica para a distribuição de temperaturas do 2º caso

$$T(x) = x^2 \quad (3.6)$$

$$\text{Fazendo } x = 1/2, \text{ obtém-se: } T\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}^{\circ}\text{C}$$

A temperatura média é obtida pela resolução da equação 3.3, para a distribuição de temperaturas dada pela equação 3.6, e que resulta

$$\bar{T} = \int_0^1 x^2 dx \quad (3.7)$$

$$\bar{T} = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}^{\circ}\text{C}$$

A derivada de  $T(x)$  para  $x = 1\text{m}$ , será:

$$I = \left( \frac{dT}{dx} \right)_{x=1} \rightarrow I = 2x \Big|_{x=1} \rightarrow I = 2^{\circ}\text{C/m}$$

### 3.1.2 Solução Analítica Para $S = \frac{e^x}{e-1}$

Resolvendo a equação 3.1 para  $S = \frac{e^x}{e-1}$ ,  $T(0)=0^\circ\text{C}$ ,  $T(L)=1^\circ\text{C}$  e  $L=1\text{m}$

obtém-se

$$T(x) = \frac{e^x - 1}{e - 1} \quad (3.8)$$

fazendo  $x=1/2$ , temos:  $T\left(\frac{1}{2}\right) = 0,377540668^\circ\text{C}$

A temperatura média, será dada pela resolução da equação 3.3 para a distribuição de temperaturas dada pela equação 3.8, da seguinte forma

$$\bar{T} = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{e - 1} dx \rightarrow \bar{T} = \left. \frac{e^x - x}{e - 1} \right|_0^1 \rightarrow \bar{T} = 0,418023293^\circ\text{C}$$

A derivada de  $T(x)$  para  $x = 1$  será:

$$I = \left. \left( \frac{dT}{dx} \right) \right|_{x=1} \rightarrow I = \left. \frac{e^x}{e-1} \right|_{x=1} \rightarrow I = 1,581976707^\circ\text{C/m}$$

A tabela 3.1, a seguir, mostra um resumo das soluções analíticas das três variáveis de interesse para os três primeiros casos:

Tabela 3.1. Soluções analíticas dos três primeiros casos

Caso	$T(1/2)$ (em $^\circ\text{C}$ )	$\bar{T}$ (em $^\circ\text{C}$ )	$I = \left. \left( \frac{dT}{dx} \right) \right _{x=1}$ (em $^\circ\text{C/m}$ )
1º	0,5	0,5	1
2º	0,25	0,333333333...	2
3º	0,377540668	0,418023293	1,581976707

## 3.2 MODELO NUMÉRICO

### 3.2.1 Distribuição de Temperaturas

De acordo com a equação 3.1 a condução de calor unidimensional permanente pode ser escrita como  $\frac{d^2T}{dx^2} = S$  com  $S$  sendo uma função de  $x$ ,  $T$  sendo a temperatura num ponto qualquer e  $x$  a abscissa do ponto.

Considerando uma barra de comprimento  $L$  disposta na direção  $Ox$ , como mostra a figura 3.1 a seguir, cuja origem coincide com a origem do eixo  $x$  e cuja extremidade está no ponto de abscissa  $x=L$ :

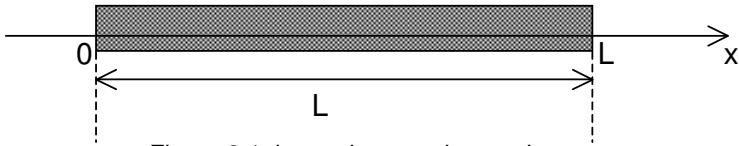


Figura 3.1: barra de comprimento  $L$

Para essa barra considera-se uma condução de calor unidimensional permanente ao longo da direção  $x$  com temperaturas das extremidades  $T(0)=T_0$  e  $T(L) = T_L$  mantidas constantes.

Para aplicar as equações das diferenças finitas deve-se discretizar a distância  $L$  ao longo da qual o calor irá se propagar, ou seja, considerar  $n+1$  pontos, chamados nós. Esse conjunto de nós é chamado de malha. A figura 3.2, a seguir, ilustra uma malha para essa situação:

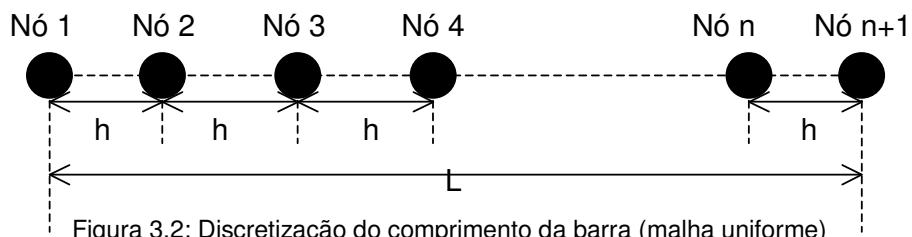


Figura 3.2: Discretização do comprimento da barra (malha uniforme)

Deve-se notar que os  $n+1$  nós utilizados, dividem a barra em  $n$  subintervalos, que nesse caso serão considerados com a mesma medida  $h$ , portanto:

$$h = \frac{L}{n} \quad (3.9)$$

De acordo com a equação 2.25a, a equação 3.1, pode ter a derivada segunda da temperatura, dada por

$$\frac{d^2(T_j)}{dx^2} = \frac{T_{j+1} + T_{j-1} - 2T_j}{h^2} \quad (3.10)$$

Para encontrar numericamente a derivada de segunda ordem, usando diferença central de três pontos, o erro de truncamento é dado por:

$$\varepsilon(T_j) = -T_j^{iv} \cdot \frac{h^2}{12} - T_j^{vi} \cdot \frac{h^4}{360} - T_j^{viii} \cdot \frac{h^6}{20160} - \dots \quad (3.11)$$

onde  $j$  é o número do nó interno, pois nos nós extremos a temperatura é prescrita.

Substituindo a equação (3.9) na equação (3.1) tem-se:

$$\frac{T_{j+1} + T_{j-1} - 2T_j}{h^2} = S \quad \text{ou} \quad 2T_j = T_{j-1} + T_{j+1} - Sh^2 \quad (3.12)$$

Aplicando a equação (3.12) em cada um dos nós internos obtém-se:

$$\begin{cases} 2T_2 = T_1 + T_3 - Sh^2 \\ 2T_3 = T_2 + T_4 - Sh^2 \\ 2T_4 = T_3 + T_5 - Sh^2 \\ \dots \\ 2T_{n-1} = T_{n-2} + T_n - Sh^2 \\ 2T_n = T_{n-1} + T_{n+1} - Sh^2 \end{cases} \quad (3.13)$$

Matricialmente, esse sistema é dado por:

$$[A].[T] = B \quad (3.14)$$

onde  $A$  é a matriz dos coeficientes,  $\phi$  é o vetor de soluções e  $B$  é o vetor dos termos fontes, então:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ & & & & & & & & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ \dots \\ T_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 - Sh^2 \\ -Sh^2 \\ -Sh^2 \\ -Sh^2 \\ \dots \\ T_{n+1} - Sh^2 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

A resolução do sistema de equações anterior levando em conta que  $T_1 = T_0$  e  $T_{n+1} = T_L$  fornece as temperaturas em cada um dos nós.

### 3.2.2 Temperatura Média

Para a temperatura média ( $\bar{T}$ ) usa-se o teorema do valor médio, aplicando a regra do trapézio para o cálculo da integral. De acordo com Swokowski (1994, p 359) para o teorema do valor médio e de acordo com Ruggiero e Lopes (1996, pp 296-299) para a regra do trapézio, tem-se que a temperatura média pode ser aproximada por:

$$\bar{T} = \frac{h}{2L} \cdot \sum_{j=2}^{N+1} (T_{j-1} + T_j) \quad (3.16)$$

O erro de truncamento cometido, será dado por:

$$\varepsilon(\bar{T}) = -\frac{h^3}{L} \cdot \sum_{j=2}^{N+1} \left( \frac{1}{12} \cdot T_{j-1}^{ii} + \frac{h^2}{480} \cdot T_{j-1}^{iv} + \dots \right) \quad (3.17)$$

### 3.2.3 Derivada da Temperatura em $x=1$

A derivada de primeira ordem com dois pontos a montante, pode ser dada por:

$$\frac{dT_j}{dx} = \frac{3T_j + T_{j-2} - 4T_{j-1}}{2h} \quad (3.18)$$

com erro de truncamento dado por

$$\varepsilon(I) = T_j^{iii} \cdot \frac{h^2}{3} - T_j^{iv} \cdot \frac{h^3}{4} + T_j^v \cdot \frac{7h^4}{60} - \dots \quad (3.19)$$

### 3.2.4 Programa Computacional

O programa computacional usado foi escrito em Linguagem C++ Builder 6.0, chamado TERMOEL\_1D\_2D, com todas as variáveis que representam as variáveis de interesse bem como todas as que podem apresentar parte decimal não nula sendo do tipo *long double*.

O programa está dividido em 6 partes, cada uma utilizada para a resolução de um ou mais dos casos considerados na tabela 2.1. A tela principal permite a entrada de dados do problema como condutividade do material, difusividade, tamanho da barra, número de nós, temperatura nos contornos e escolha do valor de S para os casos 1, 2 e 3. Caso os dados de entrada sejam os desse trabalho, basta que o usuário selecione qual caso resolver, se não, pode alterar os dados e verificar a solução de outros problemas.

Para a obtenção da solução numérica da temperatura em cada nó, ou seja, para a resolução do sistema de equações 3.13, foi aplicado o método TDMA (*TriDiagonal Matrix Algorithm*) descrito por Diegues (1992, p. 154, v.1), que fornece solução direta da temperatura em cada nó da malha.

O algoritmo da solução dos casos 1, 2 e 3, é:

Ler  $T_o$ ,  $T_L$ ,  $L$ , escolha\_de\_S;

Para  $i=1$  até 15 faça

$n=2^i$ ;

$h=L/n$ ;

Resolver o sistema de equações 3.13;

$Tmeio[i]=T[(n+2)/2]$ ;

$Erro\_Tmeio[i]=Tmeio\_an - Tmeio[i]$ ;

Calcular  $\bar{T}[i]$  com a equação 3.16;

$Erro\_Tbar[i]=Tbar\_an - Tbar[i]$ ;

Calcular  $I[i]$  com a equação 3.18;

$Erro\_I[i]=I\_an - I[i]$ ;

Mostrar  $Tmeio[i]$ ,  $\bar{T}[i]$  e  $I[i]$ ;

Gravar  $Tmeio[i]$ ,  $\bar{T}[i]$  e  $I[i]$ ;

```

Fim_para;
Para i=3 até 15 calcular  $p_U[i]$  de cada variável de interesse;
Para i=2 até 15 calcular  $p_E[i]$  de cada variável de interesse;
Para i=2 até 15 calcular  $U_{Ri}(p_L)/E(\phi)$  de cada variável de interesse;
Para i=3 até 15 calcular  $U_{Ri}(p_U)/E(\phi)$  de cada variável de interesse;

```

Para desenvolvimento do programa e obtenção das soluções foi utilizado um microcomputador *Pentium 4* com freqüência de *clock* de 2.8MHz, 512Mbyte de memória *RAM*. Para os 1º, 2º e 3º a memória necessária é obtida pela declaração das variáveis e o tempo de processamento é obtido pela atribuição do horário do sistema operacional a uma variável no início e a outra variável no final. O tempo de processamento será a diferença entre esses valores.

Os gráficos que aparecem nesse e nos capítulos seguintes foram obtidos com a utilização do *software Origin 6.1*.

No endereço <FTP://FTP.DEMEC.UFPR.BR/CFD/MONOGRAFIAS> estão o programa fonte, o programa executável e as tabelas com os resultados.

### 3.3. ERROS DE TRUNCAMENTO E ORDENS DO ERRO

Calculando as derivadas sucessivas da temperatura para os três primeiros casos, obtém-se a tabela 3.2, a seguir, que mostra o erro de truncamento e a ordens do erro de truncamento para a temperatura.

Tabela 3.2. Erros de truncamento e ordens do erro para  $T(1/2)$ 

Caso	S	Erro de truncamento	Ordens verdadeiras	Ordem assintótica
1º	0	0	0	0
2º	2	0	0	0
3º	$\frac{e^x}{e-1}$	$\neq 0$	2, 4, 6, ...	2

Na tabela 3.3, a seguir, tem-se o erro de truncamento e as ordens do erro de truncamento para o cálculo da temperatura média.

Tabela 3.3. Erro de truncamento e ordens do erro de  $\bar{T}$ 

Caso	S	Erro de truncamento	Ordens verdadeiras	Ordem assintótica
1º	0	0	0	0
2º	2	$\neq 0$	2	2
3º	$\frac{e^x}{e-1}$	$\neq 0$	2, 4, 6, ...	2

Na tabela 3.4, a seguir, tem-se o erro de truncamento e as ordens do erro de truncamento para a derivada da temperatura em  $x=L=1m$ .

Tabela 3.4. Erro e ordens do erro de truncamento de I

Caso	S	Erro de truncamento	Ordens verdadeiras	Ordem assintótica
1º	0	0	0	0
2º	2	0	0	0
3º	$\frac{e^x}{e-1}$	$\neq 0$	2, 3, 4, ...	2

### 3.4 SOLUÇÕES NUMÉRICAS DAS TRÊS VARIÁVEIS DE INTERESSE

As soluções numéricas da temperatura em cada um dos nós foram gravados em 28/02/2006 em arquivos no formato .DAT no diretório de trabalho e cujos nomes externos são “TCASO\_1.DAT” para o caso 1, “TCASO\_2.DAT” para o caso 2 e

“TCASO\_3.DAT” para o caso 3, todas obtidas com a utilização da malha com 32768 elementos.

A memória computacional necessária para esses casos é obtida pela declaração das variáveis.

Nesses três casos o sistema de equações 3.13 foi resolvido pelo algoritmo TDMA, que fornece de maneira direta as soluções para a temperatura em cada nó.

Para  $S = 0$ , a tabela 3.5 a seguir mostra os valores calculados pelo método das diferenças finitas para a temperatura do ponto médio, a temperatura média e a derivada da temperatura em  $x=1$ , em malhas com 2, 4, 8, ..., 32768 elementos ou subintervalos da malha.

Tabela 3.5. Valores de  $T(1/2)$ , de  $\bar{T}$  e  $I$  para o 1º caso.

Elementos	$T(1/2)$ (em °C)	$\bar{T}$ (em °C)	$I$ ( $x=L=1$ )
2	0,5	0,5	1
4	0,5	0,5	1
8	0,5	0,5	1
16	0,5	0,5	1
32	0,5	0,5	1
64	0,5	0,5	1
128	0,5	0,5	1
256	0,5	0,5	1
512	0,5	0,5	1
1024	0,5	0,5	1
2048	0,5	0,5	0,999999999999999
4096	0,5	0,5	1
8192	0,5	0,5	0,999999999999999
16384	0,5	0,5	0,999999999999999
32768	0,5000000000000006	0,5000000000000006	0,999999999999999

Nessa tabela pode-se observar que para  $T(1/2)$  até 16384 elementos a solução numérica é igual a solução analítica, porém para 32768 elementos aparece uma diferença na décima quinta casa decimal, tornando a solução numérica um pouco maior que a analítica. O mesmo ocorre para a temperatura média  $\bar{T}$ . Para a  $I$  em  $x=1$  observa-se que a partir de 2048 elementos a solução numérica apresenta uma pequena variação ficando pouco menor que a solução analítica.

Essa variação que a solução numérica apresenta, em relação à analítica, pode ser creditada a arredondamentos, já que computacionalmente, se trabalha com um número finito de algarismos para representar os números.

Para  $S=2$ , a tabela 3.6, a seguir, mostra os valores aproximados ou seja calculados numericamente da temperatura do ponto médio, da temperatura média e da derivada da temperatura para  $x=1$ .

Tabela 3.6. Soluções numéricas de  $T(1/2)$ , de  $\bar{T}$  e  $I$  para o 2º caso.

Elementos	$T(1/2)$ (em °C)	$\bar{T}$ (em °C)	$I$ ( $x=L=1$ )
2	0,25		2
4	0,25	0,34375	2
8	0,25	0,3359375	2
16	0,25	0,333984375	2
32	0,25	0,33349609375	2
64	0,25	0,3333740234375	2
128	0,25	0,333343505859375	2
256	0,25	0,333335876464844	2
512	0,25	0,333333969116211	2
1024	0,25	0,333333492279053	2
2048	0,25	0,333333373069763	2
4096	0,25	0,333333343267441	2
8192	0,25	0,33333333581686	1,999999999999999
16384	0,25	0,333333333954215	2
32768	0,2500000000000006	0,33333333488558	1,999999999999994

Observando essa tabela pode-se notar que para a variável  $T(1/2)$  a solução numérica é igual a solução analítica até 16384 elementos, porém para 32768 elementos a solução numérica apresenta uma diferença na décima quinta casa decimal, tornando a solução numérica ligeiramente maior que a analítica. De acordo com a tabela 3.2, para esse caso, o erro de truncamento é nulo, portanto o erro apresentado para 32768 elementos deve ser causado por arredondamento.

Para  $\bar{T}$ , a tabela 3.3 mostra que, nesse caso, existe erro de truncamento e na tabela 3.6 pode-se observar que a medida que o número de elementos aumenta, a solução numérica fica cada vez mais próxima da solução analítica.

Para a variável  $I$  em  $x=1$ , a tabela 3.4 mostra que o erro de truncamento é zero e como se pode verificar na tabela 3.6 isso é confirmado até 4096 elementos. Para 8196 elementos ou mais vê-se uma pequena diferença entre o valor numérico e a solução analítica. Essa diferença pode ser atribuída à erros de arredondamento.

Para  $S = \frac{e^x}{e-1}$ , a tabela 3.7, a seguir, mostra os valores da soluções numéricas obtidas para a temperatura no ponto  $x=1/2$ , da temperatura média e da derivada da temperatura em  $x=1m$ .

Tabela 3.7. Soluções numéricas de  $T(1/2)$ ,  $\bar{T}$  e  $I_{x=1}$  para o 3º caso.

Elementos	T(1/2)	$\bar{T}$	I (x=L=1)
2	0,380060328041566	0,440030164020783	1,47975868783374
4	0,378176489594189	0,423624826190446	1,55165819533926
8	0,377699996557438	0,419430001014026	1,57371915516685
16	0,37758052407714	0,418375366751795	1,57982187438152
32	0,37755063407744	0,418111336347933	1,58142631781523
64	0,377543160209204	0,418045305486071	1,58183762541301
128	0,377541291656612	0,418028796316471	1,58194174945669
256	0,377540824513119	0,418024668933182	1,58196794403920
512	0,377540707726911	0,418023637081679	1,58197451322116
1024	0,377540678530338	0,418023379118449	1,58197615808933
2048	0,377540671231194	0,418023314627619	1,58197656962831
4096	0,377540669406407	0,418023298504910	1,58197667255332
8192	0,377540668950211	0,418023294474233	1,58197669828960
16384	0,377540668836162	0,418023293466563	1,58197670472430
32768	0,377540668807658	0,418023293214651	1,58197670633299

Através das tabelas 3.2, 3.3 e 3.4 pode-se observar que existe erro de truncamento diferente de zero para as três variáveis de interesse e que através da tabela 3.7 pode-se ver que quanto maior o número de elementos utilizados a solução numérica fica cada vez mais próxima da solução analítica.

### 3.5 VERIFICAÇÃO DO CASO 3

A tabela 3.8, a seguir, mostra os valores de  $h$ ,  $\phi$ ,  $E(\phi)$ ,  $p_U$ , e  $p_E$  para  $T(1/2)$ .

Tabela 3.8: valor de  $h$ , da solução aproximada, do erro, da ordem aparente e da ordem efetiva para  $T(1/2)$ .

Elem	h	$\phi$	E( $\phi$ )	$p_u$	$p_E$
2	0,5	0,380060328041566	-0,00251965924342058		
4	0,25	0,378176489594189	-0,000635802796043818		1,98653652890217
8	0,125	0,377699996557438	-0,00159327759292922	1,98314821231184	1,99662255799323
16	0,0625	0,377580524077140	-3,98552789943763x $10^{-5}$	1,99577679027470	1,99915491322365
32	0,03125	0,377550634077440	-9,96527929476143x $10^{-6}$	1,99894355348746	1,99978868286853
64	0,015625	0,377543160209204	-2,49141105858146x $10^{-6}$	1,99973584813671	1,99994716787718
128	0,0078125	0,377541291656612	-6,22858467028619x $10^{-7}$	1,99993395911905	1,99998679180241
256	0,00390625	0,377540824513119	-1,55714973144411x $10^{-7}$	1,99998349276133	1,99999669807787
512	0,001953125	0,377540707726911	-3,89287655430995x $10^{-8}$	1,99999586472702	1,99999917515833
1024	0,0009765625	0,377540678530338	-9,73219285192793x $10^{-9}$	1,99999896232286	1,99999978265824
2048	0,00048828125	0,377540671231194	-2,43304839472815x $10^{-9}$	1,99999985176248	1,99999989223219
4096	0,000244140625	0,377540669460407	-6,08262002804684x $10^{-10}$	1,99999920938942	2,00000022740492
8192	0,0001220703125	0,377540668950211	-1,52065425545632x $10^{-10}$	2,00000237182231	2,00000071302531
16384	6,103515625x $10^{-5}$	0,377540668836162	-3,80163080648723x $10^{-11}$	1,9999999991428	2,00000183377080
32768	3,051757812x $10^{-5}$	0,377540668807658	-9,51246498020683x $10^{-12}$	2,00041750353216	1,99872728965794

Pela equação 2.58 nota-se que o cálculo da ordem aparente do erro utiliza as soluções numéricas obtidas em três malhas:  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  e  $\phi_3$ . Por isso na tabela 3.8 não

existe valor para a ordem aparente para malha com 2 e 4 elementos. Pela equação 2.61 observa-se que o cálculo da ordem efetiva do erro utiliza as soluções numéricas obtidas em duas malhas  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , então, na tabela 3.8 não existe valor para a ordem efetiva do erro para a malha com 2 elementos. Em todo o restante desse trabalho e para as tabelas em que são mostradas as ou utilizadas as ordens aparente e efetiva, isso irá ocorrer.

A tabela 3.9, a seguir, mostra o valor de  $\frac{U_{Ri}(p_L)}{E(\phi)}$  e  $\frac{U_{Ri}(p_U)}{E(\phi)}$  para  $T(1/2)$ .

Tabela 3.9: valor de  $h$ , e razão entre as incertezas e os erros para  $T(1/2)$ .

Elementos	$h$	$U_{Ri}(p_L)/E(\phi)$	$U_{Ri}(p_U)/E(\phi)$
2	0,5		
4	0,25	0,988239606206769	
8	0,125	0,99682231666389	1,01256046652799
16	0,0625	0,999219202679591	1,00312876399796
32	0,03125	0,999804715816734	1,00078148505149
64	0,015625	0,999951173620651	1,00019532711208
128	0,0078125	0,999987793328623	1,00004882964583
256	0,00390625	0,999996946486713	1,00001220251352
512	0,001953125	0,999999241098471	1,00000306290845
1024	0,0009765625	0,999999809711361	1,00000076872907
2048	0,00048828125	0,999999837762821	0,999999974763371
4096	0,000244140625	1,000000543397530	1,00000127407758
8192	0,0001220703125	0,999999393607095	0,999997201582164
16384	$6,103515625 \times 10^{-5}$	1,000000664739610	1,00000066481883
32768	$3,051757812 \times 10^{-5}$	0,998829782996483	0,998444472259907

Pela equação 2.57 pode-se verificar que o valor da estimativa do erro dada pelo estimador de Richardson depende de duas soluções numéricas  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , então não existem valores  $U_{Ri}(p_L)/E(\phi)$ ,  $U_{Ri}(p_U)/E(\phi)$  e  $U_{Ri}(p_E)/E(\phi)$  para uma malha com 2 elementos. Para  $U_{Ri}(p_U)/E(\phi)$  não existe valor para malha com 4 elementos porque a ordem aparente depende de 3 soluções numéricas.

Na tabela 3.8 pode-se verificar que até 2048 elementos as ordens aparente e efetiva do erro tendem monotonicamente para a ordem assintótica do erro, mas para 4096 elementos ou mais elas oscilam, indicando que o erro de arredondamento está afetando o resultado.

Na tabela 3.9 nota-se que  $U_{Ri}(p_L)/E(\phi)$  tende monotonicamente a 1 através de valores menores que 1 e que  $U_{Ri}(p_U)/E(\phi)$  tende monotonicamente a 1, através de valores maiores que 1. Para 2048 elementos ou mais essas razões oscilam em torno de 1 e pode-se notar que ambos os valores são ambos maiores que 1 ou ambos menores que 1.

A figura 3.1, a seguir, mostra o valor de  $p_U$  e de  $p_E$  em função de  $h$ , para  $T(1/2)$ .

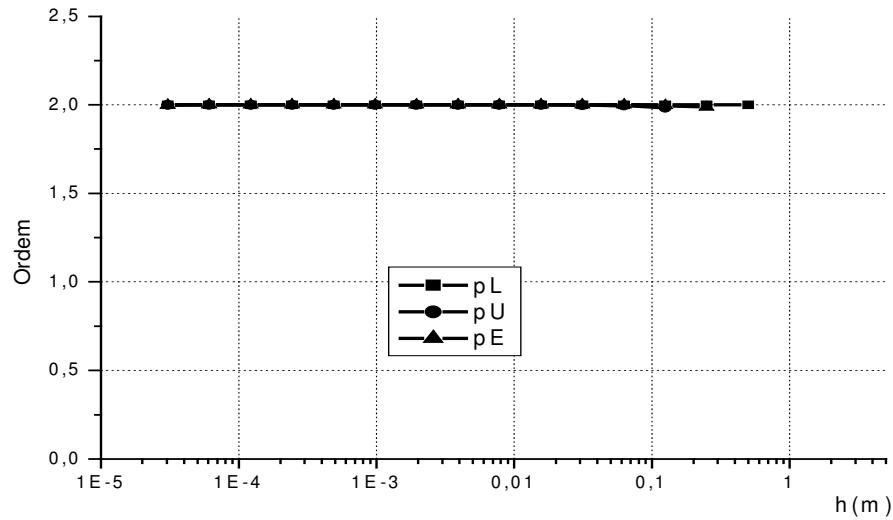


Figura 3.1: valores da ordem assintótica, da ordem aparente e da ordem efetiva para  $T(1/2)$ , em função de  $h$ .

Na figura 3.1 pode-se notar que as ordens assintótica, aparente e efetiva do erro são aproximadamente iguais para os valores de  $h$  utilizados.

A figura 3.2 a seguir, mostra os valores dos módulos de  $E(\phi)$ ,  $U_{Ri}(p_L)$  e  $U_{Ri}(p_U)$  em função de  $h$  para  $T(1/2)$ .

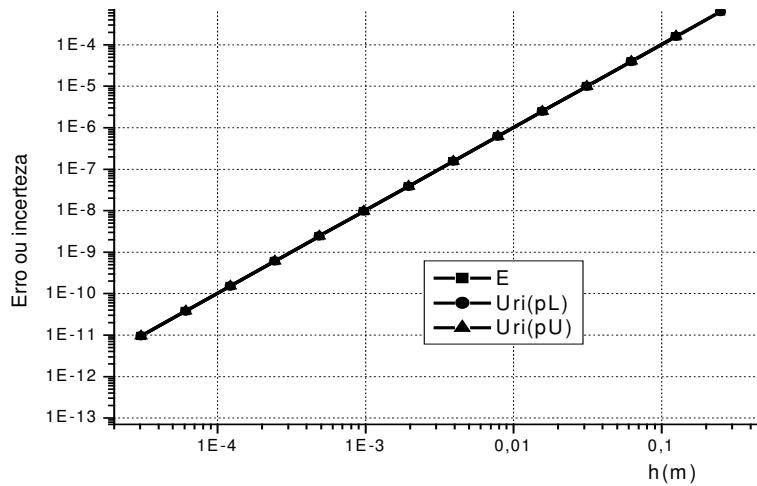


Figura 3.2.  $|E(\phi)|$ ,  $|U_{Ri}(p_L)|$  e  $|U_{Ri}(p_U)|$  para  $T(1/2)$ , em função de  $h$ .

A figura 3.2 mostra que os valores das estimativas do erro dadas pelo estimador de Richardson para a ordem assintótica e para a ordem efetiva do erro são muito próximas do erro verdadeiro.

A tabela 3.10, a seguir, mostra os valores de  $h$ ,  $\phi$ ,  $E(\phi)$ ,  $p_U$ , e  $p_E$ , para  $\bar{T}$ .

Tabela 3.10: solução numérica, erro, ordem aparente e efetiva para  $\bar{T}$ .

Elementos	$H$	$\phi$	$E(\phi)$	$p_U$	$p_E$
2	0,5	0,440030164020783	-0,022006870890109		
4	0,25	0,423624826190446	-0,005601533059772		1,97406039469287
8	0,125	0,419430001014026	-0,001406707883352	1,96748271190414	1,99349895634160
16	0,0625	0,418375366751795	-0,000352073621121	1,99186791426981	1,99837372653498
32	0,03125	0,418111336347933	-8,80432172590x10 <sup>-5</sup>	1,99796677911940	1,99959336829437
64	0,015625	0,418045305486071	-2,20123553970x10 <sup>-5</sup>	1,99949168780588	1,99989833811632
128	0,0078125	0,418028796316471	-5,503185797000x10 <sup>-6</sup>	1,99987292122627	1,99997458430892
256	0,00390625	0,418024668933182	-1,375802508000x10 <sup>-6</sup>	1,99996823010025	1,99999364665511
512	0,001953125	0,418023637081679	-3,439510050000x10 <sup>-7</sup>	1,99999205737222	1,99999841448625
1024	0,0009765625	0,418023379118449	-8,598777500001x10 <sup>-8</sup>	1,99999801880651	1,99999960152443
2048	0,00048828125	0,418023314627619	-2,149694500002x10 <sup>-8</sup>	1,99999949666278	1,99999991610930
4096	0,000244140625	0,418023298504910	-5,37423600015x10 <sup>-9</sup>	1,99999986577608	2,00000006710892
8192	0,0001220703125	0,418023294474233	-1,343559000003x10 <sup>-9</sup>	2,00000008947857	2
16384	6,103515625x10 <sup>-5</sup>	0,418023293466563	-3,358890000176x10 <sup>-10</sup>	1,99999892623816	2,00000322129031
32768	3,051757812x10 <sup>-5</sup>	0,418023293214651	-8,397699999577x10 <sup>-11</sup>	2,00003149790225	1,99991839452711

Na tabela 3.10 pode-se observar que quanto maior o número de elementos na malha, a solução numérica fica cada vez mais próxima da solução analítica, ou seja, o erro fica cada vez menor. A ordem aparente do erro tende monotonicamente para a ordem assintótica, através de valores menores que ela, até que o número de elementos seja de 4096. Já a ordem efetiva tende monotonicamente para a ordem assintótica até 2048 elementos. Para mais de 4096 elementos observa-se que quando a ordem aparente é maior que a assintótica, a efetiva é menor que a assintótica e vice-versa.

A tabela 3.11, mostra o valor de  $\frac{U_{Ri}(p_L)}{E(\phi)}$  e  $\frac{U_{Ri}(p_U)}{E(\phi)}$  para  $\bar{T}$ .

Tabela 3.11: valor de  $h$ , e razão entre as incertezas e os erros para  $\bar{T}$ .

Elementos	$h$	$U_{Ri}(p_L)/E(\phi)$	$U_{Ri}(p_U)/E(\phi)$
2	0,5		
4	0,25	0,976240947807286	
8	0,125	0,994005276685278	1,02444798469526
16	0,0625	0,998497850982655	1,006033760075743
32	0,03125	0,999624245463043	1,0015048261376
64	0,015625	0,99990604777956	1,0003759217177
128	0,0078125	0,99997651112075	1,00009396270834
256	0,00390625	0,999994128275463	1,0000234902638
512	0,001953125	0,999998534674967	1,00000587524462
1024	0,0009765625	0,999999631730425	1,00000146274342
2048	0,00048828125	0,999999922468529	1,00000038765099
4096	0,000244140625	1,00000006202182	1,00000018607107
8192	0,0001220703125	1	0,999999917304251
16384	6,103515625x10 <sup>-5</sup>	1,00000297710772	1,00000396947794
32768	3,051757812x10 <sup>-5</sup>	0,999924582661731	0,999895475143881

A figura 3.3, a seguir, mostra valor de  $p_L$ ,  $p_U$  e  $p_E$  em função de  $h$ , para  $\bar{T}$ .

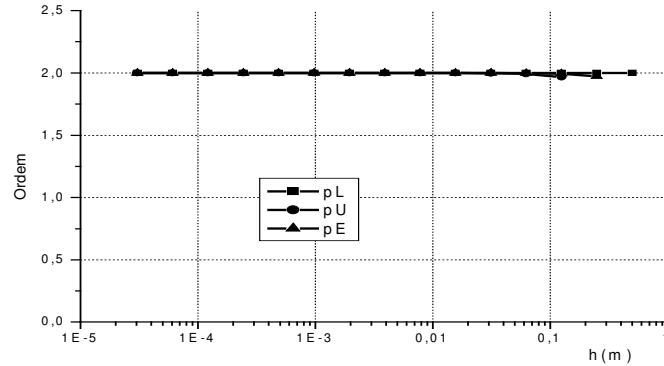


Figura 3.3: valores da ordem efetiva ( $p_U$ ) e da ordem efetiva ( $p_E$ ) para  $\bar{T}$ , em função de  $h$ .

A figura 3.4, a seguir, mostra os valores módulos de  $E(\phi)$ ,  $U_{Ri}(p_L)$  e  $U_{ri}(p_U)$  em função de  $h$ , para  $\bar{T}$ .

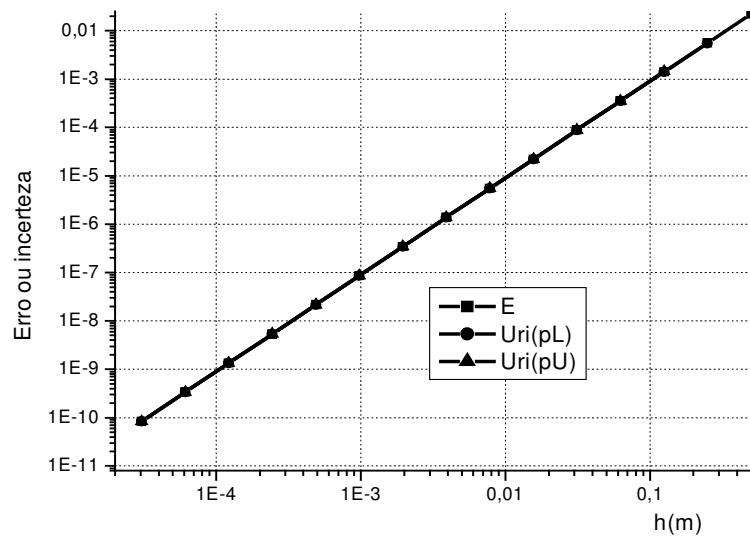


Figura 3.4:  $|E(\phi)|$ ,  $|U_{Ri}(p_L)|$  e  $|U_{ri}(p_U)|$  para  $\bar{T}$ , em função de  $h$ .

A tabela 3.12, a seguir, mostra os valores de  $h$ ,  $\phi$ ,  $E(\phi)$ ,  $p_U$ , onde:  $\phi$  = solução numérica,  $E(\phi)$  = erro verdadeiro,  $P_U$  = ordem aparente e  $h$ , para  $I_{x=1}$ .

Tabela 3.12:  $h$ ,  $\phi$ ,  $E(\phi)$ ,  $p_U$ ,  $p_E$  para I em  $x=1$ .

Elem	$h$	$\phi$	$E(\phi)$	$p_U$	$p_E$
2	0,5	1,47975868783374	0,10221801903559		
4	0,25	1,55165819533926	0,03031851153007		1,75337870551048
8	0,125	1,57371915516685	0,00825755170248	1,70448632755331	1,87641292425637
16	0,0625	1,57982187438152	0,00215483248781	1,85397144219139	1,93813837602778
32	0,03125	1,58142631781523	0,0005503890541	1,92737928689318	1,96905203782389
64	0,015625	1,58183762541301	0,00013908145632	1,96378329979905	1,98452169993187
128	0,0078125	1,58194174945669	3,4957412600x10 <sup>-5</sup>	1,9819144765993	1,99225976533563
256	0,00390625	1,5819679440392	8,7628301300x10 <sup>-6</sup>	1,99096287173162	1,99612961103801
512	0,001953125	1,58197451322116	2,1936481700x10 <sup>-6</sup>	1,99548283600118	1,99806473559064
1024	0,0009765625	1,58197615808933	5,4877999999x10 <sup>-7</sup>	1,99774176535178	1,99903234719209
2048	0,00048828125	1,58197656962831	1,3724102000x10 <sup>-7</sup>	1,99887097111271	1,99951615078443
4096	0,000244140625	1,58197667255332	3,4316010000x10 <sup>-8</sup>	1,999435496956	1,99975803112564
8192	0,0001220703125	1,5819766982896	8,57973000002x10 <sup>-9</sup>	1,99971814660462	1,99987766454691
16384	6,103515625x10 <sup>-5</sup>	1,5819767047243	2,14502999997x10 <sup>-9</sup>	1,99985874361981	1,9999344223994
32768	3,051757812x10 <sup>-5</sup>	1,58197670633299	5,36339999973x10 <sup>-10</sup>	1,99998654774139	1,99977806714836

Na tabela 3.12 observa-se que à medida que o número de elementos aumenta, a solução numérica se aproxima cada vez mais da solução analítica. Também, a medida que o número de elementos aumenta, a ordem aparente se aproxima monotonicamente da ordem assintótica através de valores menores e, para a ordem efetiva, até 16384 elementos se aproxima monotonicamente da ordem assintótica através de valores menores que a ordem assintótica.

A tabela 3.13, mostra os valores de  $h$ ,  $U_{Ri}(p_L)/E(\phi)$ , e  $U_{Ri}(p_U)/E(\phi)$ .

Tabela 3.13: valor de  $h$ , e razão entre as incertezas e os erros verdadeiros para I, em  $x=1$ .

Elem	$h$	$U_{Ri}(p_L)/E(\phi)$	$U_{Ri}(p_U)/E(\phi)$
2	0,5		
4	0,25	0,790490736264211	
8	0,125	0,890536752395362	1,18258435096533
16	0,0625	0,944036137254814	1,08304936877004
32	0,03125	0,971702605492156	1,03975963734802
64	0,015625	0,985771476809147	1,01946975158208
128	0,0078125	0,992865659636531	1,00963595803744
256	0,00390625	0,996427794878785	1,00479368250493
512	0,001953125	0,998212634982375	1,00239081754237
1024	0,0009765625	0,999105998760954	1,0011939079646
2048	0,00048828125	0,999552903351428	1,0005965616556
4096	0,000244140625	0,999776392028235	1,00029815708567
8192	0,0001220703125	0,999886942827634	1,00014744363605
16384	6,103515625x10 <sup>-5</sup>	0,999939394805458	1,00006994616105
32768	3,051757812x10 <sup>-5</sup>	0,999794906268226	0,999807336341816

Pela tabela 3.13 pode-se verificar que a razão  $U_{Ri}(p_L)/E(\phi)$  é menor que 1 para todos os valores de  $h$  e que a razão  $U_{Ri}(p_U)/E(\phi)$  é maior que 1 para todos os valores de  $h$ , exceto quando o número de elementos é de 32768.

A figura 3.5, a seguir, mostra o valor de  $p_L$ ,  $p_U$  e de  $p_E$  em função de  $h$ .

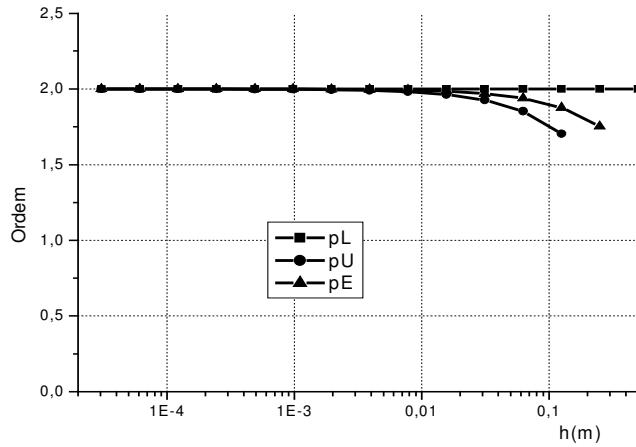


Figura 3.5: valores da ordem efetiva ( $p_U$ ), efetiva ( $p_E$ ) para  $I_{x=1}$ , em função de  $h$ .

Na figura 3.5 vê-se que quanto menor o valor de  $h$ , ou seja quanto maior o número de elementos, mais próxima da ordem assintótica está o valor da ordem aparente e o valor da ordem efetiva, e, que ambos se aproximam da ordem assintótica através de valores menores que o da ordem assintótica.

A figura 3.6, a seguir, mostra os valores dos módulos de  $E(\phi)$ ,  $U_{Ri}(p_L)$  e  $U_{Ri}(p_U)$  para  $I_{x=1}$ .

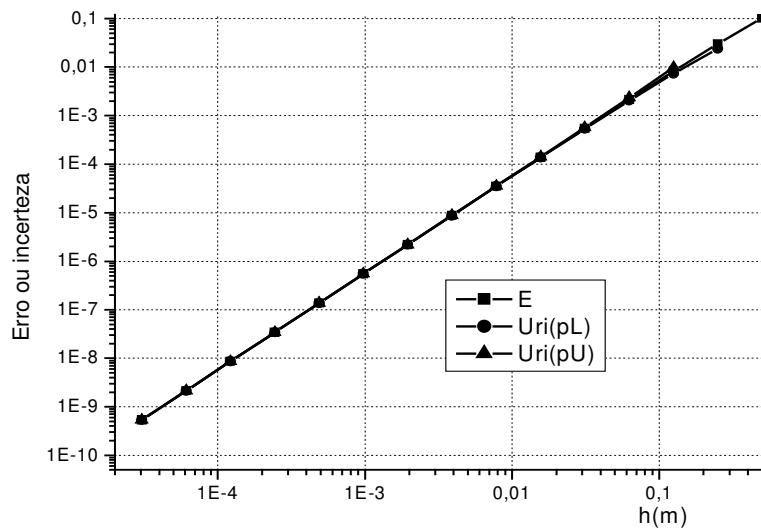


Figura 3.6:  $|E(\phi)|$ ,  $|U_{Ri}(p_L)|$  e  $|U_{Ri}(p_U)|$  para  $I_{x=1}$ , em função de  $h$ .

Na figura 3.6, pode-se observar que quanto maior o número de elementos e menor o valor de  $h$  o valor do erro e as estimativas do erro ficam cada vez mais próximos e cada vez mais próximos de zero.

### 3.6 CONCLUSÃO DO CAPÍTULO 3

Para as tabelas dos itens 3.4 e 3.5 onde as derivadas de ordem superior a 2 são nulas, observa-se que os resultados calculados numericamente são muito próximos dos valores analíticos, pois o erro de truncamento é nulo, restando apenas o erro de máquina.

Com relação à razão entre as estimativas do erro, dadas pelo estimador de erro de Richardson, e o erro verdadeiro, pode-se observar que, no 3º caso:

- Para  $T(1/2)$ ,  $\bar{T}$  e  $I$ , até o número de elementos em que os resultados, usando a ordem assintótica e a ordem aparente não oscilam, observa-se que :

$$\frac{U_{ri}(p_L)}{E} < 1 < \frac{U_{ri}(p_U)}{E}.$$

A ordem aparente e ordem efetiva tendem monotonicamente para a ordem assintótica definida nas tabelas 3.2, 3.3. e 3.4.

A partir do momento em que as ordens aparente e efetiva começam a oscilar, o erro de arredondamento está interferindo nos resultados obtidos.

## CAPÍTULO 4

### TERMOELASTICIDADE UNIDIMENSIONAL PERMANENTE

Nesse capítulo será discutido o erro produzido pela aplicação do método das diferenças finitas na resolução de um problema termoelástico unidimensional em regime permanente, conforme os casos 4, 5 e 6 definidos na tabela 2.1.

Inicialmente será mostrada a solução analítica de cada uma das variáveis de interesse da tabela 2.1 para os casos 4, 5 e 6, em seguida as aproximações numéricas com os respectivos erros de discretização, bem como as ordens do erro de truncamento, as soluções numéricas de cada variável de interesse em malhas com número de elementos variando de 2 até 32768.

Será feita uma verificação dos resultados obtidos para as variáveis de interesse do 6º caso descrito na tabela 2.1, através do cálculo do erro verdadeiro de discretização, das ordens aparente e efetiva do erro e das estimativas do erro dadas pelo estimador de Richardson. Esses resultados serão agrupados em tabelas e mostrados em gráficos.

#### 4.1 SOLUÇÕES ANALÍTICAS

As variáveis de interesse para os casos 4, 5 e 6 são  $u(L/2)$ ,  $\varepsilon(L/2)$ ,  $\sigma(L/2)$  e  $F(0)$ , obtidas através das equações:

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \alpha \cdot \frac{dT}{dx} = 0 \quad (4.1)$$

com  $u(0) = 0$  e  $u(L) = 0$ , e,  $\alpha$  é o coeficiente de expansão térmica do material.

$$\varepsilon(x) = \frac{du}{dx} \quad (4.2)$$

$$\sigma_x = E \cdot (\varepsilon_x - \alpha \cdot \theta) \quad (4.3)$$

onde  $E$  é o módulo de Young e  $\theta = T(x) - T_0$ .

$$F = (\sigma_x)_o \cdot (A_x)_o \quad (4.4)$$

A temperatura em cada nó é obtida como no capítulo 3.

A distribuição de temperaturas para o caso 4 é dada pela equação 3.2. Resolvendo a equação 4.1 para as condições de contorno dadas, encontra-se:

$$u(x) = \frac{\alpha \cdot x}{2} \cdot (x - 1) \quad (4.5)$$

Portanto, para o caso 4, é:

$$u(1/2) = -2 \times 10^{-6} \text{m}$$

Resolvendo a equação 4.2, para as condições de contorno dadas, encontra-se:

$$\varepsilon(x) = \frac{du}{dx} = \alpha \left( x - \frac{1}{2} \right) \quad (4.6)$$

Portanto, para o caso 4

$$\varepsilon(1/2) = 0$$

Resolvendo a equação 4.3, para as condições dadas, tem-se:

$$\sigma(x) = -\frac{E\alpha}{2} \quad (4.7)$$

Portanto, para o caso 4

$$\sigma(1/2) = -880000 \text{Pa}$$

Resolvendo a equação 4.4 para as condições dadas, encontra-se:

$$F(x) = -\frac{E\alpha A_0}{2} \quad (4.8)$$

Portanto, para o caso 4

$$F(0) = -88N$$

Para o 5º caso, a distribuição de temperaturas é dada pela equação 3.6.

Resolvendo a equação 4.1 para as condições de contorno, tem-se:

$$u(x) = \frac{\alpha \cdot x}{3} \cdot (x^2 - 1) \quad (4.9)$$

Portanto, para o 5º caso

$$u(1/2) = -2 \times 10^{-6} \text{m}$$

Resolvendo a equação 4.2 para as condições de contorno dadas, encontra-se:

$$\varepsilon(x) = \alpha \cdot \left( x^2 - \frac{1}{3} \right) \quad (4.10)$$

Portanto

$$\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{4}{3} \times 10^{-6} = -1,3333333333 \times 10^{-6} \text{ m/m}$$

Resolvendo a equação 4.3 para as condições de contorno dadas, encontra-se

$$\sigma(x) = -\frac{E\alpha}{3} \quad (4.11)$$

Substituindo as constantes, a solução analítica da tração, para o caso 5, é

$$\sigma\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{176}{3} \times 10^4 \text{ Pa} = -586666,666666 \text{ Pa}$$

Resolvendo a equação 4.4 para as condições dadas, fica

$$F(0) = -\frac{E\alpha A_o}{3} \quad (4.12)$$

Substituindo as constantes, a solução analítica da força em  $x=0$ , será:

$$F_0 = -\frac{176}{3} N = -58,66666666 N$$

Para o 6º caso, a distribuição de temperaturas é dada pela equação 3.8. Resolvendo a equação 4.1, para as condições dadas, os deslocamentos são dados por

$$u(x) = \alpha \cdot \left( \frac{e^x - 1}{e - 1} - x \right) \quad (4.13)$$

Portanto, a solução analítica para o deslocamento, no caso 6, é

$$u\left(\frac{1}{2}\right) = -1,959349299 \times 10^{-6} \text{ m}$$

Resolvendo a equação 4.2, para as condições dadas, as deformações, são dadas por

$$\varepsilon(x) = \alpha \cdot \left( \frac{e^x}{e - 1} - 1 \right) \quad (4.14)$$

Portanto, a solução analítica para a deformação, no caso 6, é

$$\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right) = -6,477219893 \times 10^{-7} \text{ m/m}$$

Resolvendo a equação 4.3, para as condições dadas, as trações serão dadas por

$$\sigma(x) = E\alpha \cdot \left( \frac{1}{e-1} - 1 \right) \quad (4.15)$$

Portanto, a solução analítica para a tração, para o caso 6, é

$$\sigma\left(\frac{1}{2}\right) = -7,357209959 \times 10^5 \text{ Pa}$$

Resolvendo a equação 4.4. para as condições dadas, encontramos

$$F(x) = E\alpha A_0 \cdot \left( \frac{1}{e-1} - 1 \right) \quad (4.16)$$

Portanto, a solução analítica da tração, para o caso 6, é dada por

$$F(0) = -73,57209959 \text{ N}$$

A tabela 4.1, a seguir, mostra um resumo das soluções analíticas das variáveis de interesse para os casos 4, 5 e 6, descritos na tabela 2.1.

Tabela 4.1: Soluções analíticas para os casos 4, 5 e 6

Caso	S	$u(1/2)$ (em m)	$\varepsilon(1/2)$ (em m/m)	$\sigma(1/2)$ (em Pa)	$F_0$ (em N)
4	0	$-2 \times 10^{-6}$	0	-880000	-88
5	2	$-2 \times 10^{-6}$	$-1,3333333333 \times 10^{-6}$	-586666,6666666	-58,666666666
6	$\frac{e^x}{e-1}$	$-1,959349299 \times 10^{-6}$	$-6,477219893 \times 10^{-7}$	$-7,357209959 \times 10^{-5}$	-73,57209959

## 4.2 MODELOS NUMÉRICOS

### 4.2.1 Deslocamentos

Os deslocamentos na direção x podem ser dados pela equação

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \alpha \frac{dT}{dx} = 0, \text{ que pode ser discretizada por :}$$

$$\frac{u_w + u_e - 2u_p}{h^2} - \frac{\alpha(T_e - T_w)}{2h} = 0 \quad (4.17)$$

Na equação anterior  $\frac{d^2u}{dx^2}$  foi aproximada por  $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{T_w + T_e - 2T_p}{h^2}$ , cujo erro de truncamento é dado por:

$$\varepsilon_1(x)_p = -u_p^{iv} \cdot \frac{h^2}{12} - u_p^{vi} \cdot \frac{h^4}{360} - u_p^{viii} \cdot \frac{h^6}{20160} + \dots$$

Na mesma equação,  $\frac{dT}{dx}$  foi aproximada por  $\frac{dT}{dx} = \frac{T_e - T_w}{2h}$ , com erro de truncamento dado por:

$$\varepsilon_2(x)_p = -T_p^{iii} \cdot \frac{h^2}{6} - T_p^v \cdot \frac{h^4}{120} - T_p^{vii} \cdot \frac{h^6}{5040} - \dots$$

O erro total de truncamento, será:

$$\varepsilon(u) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

A equação 4.12 pode ser reescrita como

$$u_w - 2u_p + u_e = \alpha \cdot h \cdot (T_e - T_w) \quad (4.18)$$

Que pode ser escrita como um sistema de equações da forma:

$$A \cdot U = B$$

onde A é a matriz dos coeficientes, U é o vetor solução dos deslocamentos e B é vetor com os termos fontes. Aplicando a equação 4.13 levando em conta que  $u_1=0$  e  $u_{n+1}=0$ , o sistema de equações 4.14 fica:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & & 1 & -2 \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ \dots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot h \cdot (T_3 - T_1) \\ \alpha \cdot h \cdot (T_4 - T_2) \\ \alpha \cdot h \cdot (T_5 - T_3) \\ \alpha \cdot h \cdot (T_6 - T_4) \\ \dots \\ \alpha \cdot h \cdot (T_n - T_{n-2}) \\ \alpha \cdot h \cdot (T_{n+1} - T_{n-1}) \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

que é um sistema tridiagonal que pode ser resolvido pelo método TDMA.

Para S constante, tem-se que  $u^{iv}=u^v=u^{vi}=\dots=0$  e  $T^{iii}=T^{iv}=T^v=\dots=0$ , então para os casos 4 e 5, o erro de truncamento no cálculo dos deslocamentos será  $\varepsilon_1 = 0$  e no cálculo das temperaturas será  $\varepsilon_2 = 0$ , portanto o erro total, no cálculo dos deslocamentos será:

$$\varepsilon(u) = 0 \quad (4.20)$$

Então, para os casos 4 e 5:

- As ordens verdadeiras do erro de truncamento não existem.

- A ordem assintótica do erro de truncamento não existe.

Para  $S = \frac{e^x}{e-1}$ , tem-se que  $u^{iv} = u^{vi} = u^{viii} = \dots = \frac{\alpha \cdot e^x}{e-1}$  e  $T^{iii} = T^v = T^{vii} = \dots = \frac{e^x}{e-1}$ , então para o caso 6, o erro de truncamento no cálculo dos deslocamentos será  $\epsilon_1(u_p) = -\frac{\alpha \cdot e^{x_p}}{e-1} \cdot \left( \frac{h^2}{12} + \frac{h^4}{360} + \frac{h^6}{20160} + \dots \right)$  e no cálculo das temperaturas será  $\epsilon_2(T_p) = -\frac{e^{x_p}}{e-1} \cdot \left( \frac{h^2}{6} + \frac{h^4}{120} + \frac{h^6}{5040} + \dots \right)$ , portanto o erro de truncamento total, no cálculo dos deslocamentos será

$$\epsilon = -\frac{e^{x_p}}{e-1} \cdot (\alpha + 1) \cdot \left( \frac{3h^2}{12} + \frac{4h^4}{360} + \frac{5h^6}{20160} + \dots \right) \quad (4.21)$$

Portanto, para o caso 6:

- as ordens verdadeiras do erro de truncamento são 2, 4, 6, ...
- a ordem assintótica do erro de truncamento é 2.

#### 4.2.2 Deformações

As deformações, podem ser dadas por  $\epsilon_x = \frac{\delta u}{\delta x}$  para nós internos da malha.

Essa equação pode ser discretizada por

$$(\epsilon_x)_p = \frac{u_E - u_W}{2h} \quad (4.22)$$

que é a aproximação para  $\epsilon_x = \frac{\delta u}{\delta x}$  para nós internos da malha, com erro de truncamento dado por

$$\epsilon(\epsilon_x)_p = -u_p^{iii} \cdot \frac{h^2}{6} - u_p^v \cdot \frac{h^4}{120} - u_p^{vii} \cdot \frac{h^6}{5040} + \dots$$

Para o nó 1, deve ser usado a aproximação UDS-2, ou seja,

$$(\varepsilon_x)_p = \frac{4u_E - 3u_P - u_{EE}}{2h} \quad \text{com erro de truncamento dado por}$$

$$\varepsilon(\varepsilon_x) = u_P^{iii} \cdot \frac{h^2}{3} + u_P^{iv} \cdot \frac{h^3}{4} + u_P^v \cdot \frac{7h^4}{60} + \dots$$

$$\text{Para o nó } n+1 \text{ deve ser usado a aproximação } (\varepsilon_x)_p = \frac{3u_P + u_{WW} - 4u_W}{2h} \text{ com}$$

$$\text{erro de truncamento dado por } \varepsilon(\varepsilon_x) = u_P^{iii} \cdot \frac{h^2}{3} - u_P^{iv} \cdot \frac{h^3}{4} + u_P^v \cdot \frac{7h^4}{60} - \dots$$

Para  $S$  constante tem-se que  $u^{iv} = u^v = u^{vi} = \dots = 0$  então para os casos 4 e 5, o erro de truncamento no cálculo das deformações, para os nós internos e nós extremos, será

$$\varepsilon(\varepsilon_x) = 0 \quad (4.23)$$

Então, para os casos 4 e 5:

- As ordens verdadeiras do erro de truncamento não existem.
- A ordem assintótica do erro de truncamento não existe.

Para  $S = \frac{e^x}{e-1}$ , tem-se que  $u^{iv} = u^{vi} = u^{viii} = \dots = \frac{\alpha \cdot e^x}{e-1}$ , então para o caso 6, o

erro de truncamento no cálculo das deformações, o erro de truncamento é:

$$\text{- pontos internos} \quad \varepsilon(\varepsilon_x)_p = -\frac{\alpha \cdot e^x}{e-1} \cdot \left( \frac{h^2}{6} + \frac{h^4}{120} + \frac{h^6}{5040} + \dots \right) \quad (4.24)$$

$$\text{- nó 1} \quad \varepsilon(\varepsilon_x) = \frac{\alpha \cdot e^x}{e-1} \cdot \left( \frac{h^2}{3} + \frac{h^3}{4} + \frac{7h^4}{60} + \dots \right) \quad (4.25)$$

$$\text{- nó } n+1 \quad \varepsilon(\varepsilon_x) = \frac{\alpha \cdot e^x}{e-1} \cdot \left( \frac{h^2}{3} - \frac{h^3}{4} + \frac{7h^4}{60} - \dots \right) \quad (4.26)$$

portanto:

- as ordens verdadeiras do erro são 2, 4, 6, ....
- a ordem assintótica do erro é  $p_L = 2$ .

#### 4.2.3 Tensões

A equação  $\sigma_x = E \left[ \frac{\delta u}{\delta x} - \alpha \cdot (T(x) - T_o) \right]$  fornece as tensões ao longo da direção x e pode ser discretizada por

$$(\sigma_x)_P = E[(\varepsilon_x)_P - \alpha \cdot (T_P - T_o)] \quad (4.27)$$

Para S constante e conforme itens anteriores, o erro de truncamento de  $\varepsilon_x$  e de  $T_P$  são nulos, então

$$\varepsilon(\sigma) = 0 \quad (4.28)$$

Para  $S = \frac{e^x}{e-1}$  o erro de truncamento, no cálculo de  $T(x)_P$  é dado por

$\varepsilon(T)_P = -\frac{e^x}{e-1} \left( \frac{h^2}{12} + \frac{h^4}{360} + \frac{h^6}{20160} + \dots \right)$  e o erro de truncamento no cálculo de  $\frac{\delta u}{\delta x}$  é o

mesmo de  $\varepsilon_x$  e é dado por :

$$\text{- pontos internos} \quad \varepsilon(\sigma_x)_P = -\frac{\alpha \cdot e^x}{e-1} \cdot \left( \frac{h^2}{6} + \frac{h^4}{120} + \frac{h^6}{5040} + \dots \right) \quad (4.29)$$

$$\text{- nó 1} \quad \varepsilon(\sigma_x)_P = \frac{\alpha \cdot e^x}{e-1} \cdot \left( \frac{h^2}{3} + \frac{h^3}{4} + \frac{7h^4}{60} + \dots \right) \quad (4.30)$$

$$\text{- nó } n+1 \quad \varepsilon(\sigma_x)_P = \frac{\alpha \cdot e^x}{e-1} \cdot \left( \frac{h^2}{3} - \frac{h^3}{4} + \frac{7h^4}{60} - \dots \right) \quad (4.31)$$

Como nos nós extremos a temperatura é prescrita, então, não existe erro de truncamento para  $T(x)$  nesses nós. O erro de truncamento para esses nós será dado pelo erro de  $\varepsilon_x$ . Nos nós internos existe erro de truncamento no cálculo de  $T(x)$  e de  $\varepsilon_x$ .

Portanto, para os nós internos:

- as ordens verdadeiras são 2, 4, 6, ....
- a ordem assintótica é  $p_L = 2$ .

#### 4.2.4 Força Normal em $x = 0$

De acordo com Popov (2001, p. 64), a força normal em  $x = 0$ , dada por

$$F_o = (\sigma_x)_o \cdot A_x \quad (4.32)$$

e como  $A_x$  é constante, o erro de truncamento para  $F_o$  é o mesmo que de  $\sigma_x$  para o nó 1.

Portanto:

- As ordens verdadeiras são 2, 3, 4, 5, ....
- A ordem assintótica é  $p_L = 2$ .

#### 4.2.5 Programa Computacional

O programa computacional utilizado para resolver os casos 4, 5 e 6 é o mesmo descrito na seção 3.2.4, apenas utilizando outra rotina para o cálculo das variáveis de interesse. A memória computacional necessária, também é obtida da mesma forma. O algoritmo para a solução dos casos 4, 5 e 6, é:

```

Ler T_o, T_L, L, α, escolha_de_S;
Para i=1 até 15 faça
  n=2^i;  h=L/n;
  Resolver o sistema de equações 3.13;
  Resolver o sistema de equações 4.19;
  Umeio[i]=u(n+2)/2;
  Erro_umeio[i]=umeio_an - umeio[i];
  Calcular ε_xmeio [i] com a equação 4.22;
  Erro_ε_xmeio [i]=ε_x_an - ε_xmeio[i];
  Calcular σmeio[i] com a equação 4.27;
  Erro_σmeio[i]=σmeio_an - σmeio[i];
  Calcular F_o com a equação 4.32;
  Erro_Fo[i]=F_o_an - F_o[i];
  Mostrar umeio[i], ε_x[i], σ[i], F_o[i];
  Gravar umeio[i], ε_x[i], σ[i], F_o[i];
Fim_para;
Para i=3 até 15 calcular p_U[i] de cada variável de interesse;
Para i=2 até 15 calcular p_E[i] de cada variável de interesse;
Para i=2 até 15 calcular U_Ri(p_L)/E(φ) de cada variável de interesse;
Para i=3 até 15 calcular U_Ri(p_U)/E(φ) de cada variável de interesse;
```

### 4.3 SOLUÇÕES NUMÉRICAS

As soluções numéricas das três variáveis de interesse estão nos arquivos “CASO4.DAT”, “CASO5.DAT” e “CASO6.DAT”, gravados em 28/02/2006. Também, nos arquivos “u\_CASO4.DAT”, “u\_CASO5.DAT” e “u\_CASO6.DAT” estão gravados os deslocamentos em cada nó, para os casos 4, 5 e 6, obtidas para a malha com 32768 elementos.

A memória computacional necessária para esses casos é obtida pela declaração das variáveis.

Nesses três casos os sistemas de equações 3.13 e 4.19 foram resolvidos pelo algoritmo TDMA, que fornece de maneira direta as soluções para a temperatura e para o deslocamento em cada nó.

A tabela 4.2, a seguir, mostra as soluções numéricas obtidas pela aplicação das aproximações anteriores, das 4 variáveis de interesse para o caso 4.

Tabela 4.2. Soluções numéricas para $u(1/2)$ , $\varepsilon_x(1/2)$ , $\sigma(1/2)$ e $F(0)$ do caso 4				
N de el.	$u(1/2)$ (m)	$\varepsilon_x(1/2)$	$\sigma(1/2)$ (Pa)	$F(0)$ (N)
2	$-2 \times 10^{-6}$	0	-880000	-88
4	$-2 \times 10^{-6}$	$-2,06795153138257 \times 10^{-25}$	-880000	-88
8	$-2 \times 10^{-6}$	$1,24077091882954 \times 10^{-24}$	-880000	-88
16	$-2 \times 10^{-6}$	$-1,65436122510606 \times 10^{-24}$	-880000	-88
32	$-2 \times 10^{-6}$	0	-880000	-88
64	$-2 \times 10^{-6}$	$-6,61744490042422 \times 10^{-24}$	-880000	-88
128	$-2 \times 10^{-6}$	$-5,29395592033938 \times 10^{-23}$	-880000	-88
256	$-2 \times 10^{-6}$	$-1,05879118406788 \times 10^{-22}$	-880000	-88
512	$-2 \times 10^{-6}$	$-4,23516473627150 \times 10^{-22}$	-880000	-88
1024	$-2 \times 10^{-6}$	$1,05879118406788 \times 10^{-21}$	-880000	-88
2048	$-2 \times 10^{-6}$	0	-880000	-88
4096	$-2 \times 10^{-6}$	$3,38813178901720 \times 10^{-21}$	$-879999,999999999$	$-87,999999999999$
8192	$-2 \times 10^{-6}$	$-6,7762635780344 \times 10^{-21}$	-880000	-88
16384	$-2 \times 10^{-6}$	$2,87991202066462 \times 10^{-20}$	$-879999,999999996$	$-87,999999999996$
32768	$-2,00000000000004 \times 10^{-6}$	$1,35525271560688 \times 10^{-20}$	-880000,000000017	-88,0000000000017

Na tabela 4.2 pode-se observar que os valores das 4 variáveis de interesse tem valor praticamente igual às respectivas soluções analíticas que podem ser vistas na tabela 4.1. Para os deslocamentos, até 16384 elementos o valor calculado numericamente é igual à solução analítica, ocorrendo uma pequena variação para 32768 elementos e, como nesse caso, o erro é dado pela equação 4.20 e vale zero, essa variação é devida a erro de arredondamento.

Para as deformações a solução analítica é 0 (zero) e a tabela 4.2 mostra que as soluções numéricas são muito próximas de 0 (zero) porém oscilam entre valores positivos e negativos e, em módulo, vão aumentando à medida que o número de

elementos da malha aumenta. Pela equação 4.23 esse erro deveria ser nulo, então, a diferença observada na tabela 4.2 pode ser atribuída a erros de arredondamento.

Para as trações e força a solução analítica é muito próxima da solução numérica, apenas aparecendo os erros de arredondamento quando o número de elementos na malha é grande.

A tabela 4.3, a seguir, mostra as soluções numéricas obtidas pela aplicação das aproximações numéricas, das 4 variáveis de interesse para o caso 5.

Tabela 4.3. Soluções numéricas para  $u(1/2)$ ,  $\epsilon_x(1/2)$ ,  $\sigma(1/2)$  e  $F(0)$  do caso 5

N de el.	$u(1/2)$ (m)	$\epsilon_x(1/2)$	$\sigma(1/2)$ (Pa)	$F(0)$ (N)
2	$-2 \times 10^{-6}$	0	-440000	-88
4	$-2 \times 10^{-6}$	$-1 \times 10^{-6}$	-550000	-66
8	$-2 \times 10^{-6}$	$-1,25 \times 10^{-6}$	-577500	-60,5
16	$-2 \times 10^{-6}$	$-1,3125 \times 10^{-6}$	-584375	-59,125
32	$-2 \times 10^{-6}$	$-1,328125 \times 10^{-6}$	-586093,75	-58,78125
64	$-2 \times 10^{-6}$	$-1,33203125 \times 10^{-6}$	-586523,4375	-58,6953125
128	$-2 \times 10^{-6}$	$-1,3330078125 \times 10^{-6}$	-586630,859375	-58,673828125
256	$-2 \times 10^{-6}$	$-1,333251953125 \times 10^{-6}$	-586657,71484375	-58,66845703125
512	$-2 \times 10^{-6}$	$-1,33331298828125 \times 10^{-6}$	-586664,428710937	-58,6671142578125
1024	$-2 \times 10^{-6}$	$-1,33332824707031 \times 10^{-6}$	-586666,107177734	-58,6667785644531
2048	$-2 \times 10^{-6}$	$-1,33333206176758 \times 10^{-6}$	-586666,526794434	-58,6666946411133
4096	$-2 \times 10^{-6}$	$-1,33333301544189 \times 10^{-6}$	-586666,631698609	-58,6666736602783
8192	$-2 \times 10^{-6}$	$-1,33333325386048 \times 10^{-6}$	-586666,657924653	-58,6666684150696
16384	$-2 \times 10^{-6}$	$-1,33333331346509 \times 10^{-6}$	-586666,664481160	-58,6666671037674
32768	$-2,00000000000004 \times 10^{-6}$	$-1,3333332836630 \times 10^{-6}$	-586666,666120304	-58,666667759433

Na tabela anterior, pode-se ver que a solução numérica para os deslocamentos é igual à solução analítica, o que confere com a equação 4.16, apenas apresentando uma variação quando o número de elementos é 32768, atribuída a erros de arredondamento. Para as demais variáveis, quanto maior o número de elementos na malha, mais próximas as soluções numéricas estão da solução analítica.

A tabela 4.4, a seguir, mostra as soluções numéricas obtidas pela aplicação das aproximações numéricas, das 4 variáveis de interesse para o caso 6.

Comparando os resultados analíticos da tabela 4.1 com os resultados numéricos obtidos na tabela 4.4, observa-se que quanto maior o número de elementos utilizados, mais próximos da solução analítica se tornam as soluções numéricas do caso 6.

Tabela 4.4. Soluções numéricas para  $u(1/2)$ ,  $\varepsilon_x(1/2)$ ,  $\sigma(1/2)$  e  $F(0)$  do caso 6

N de el.	$u(1/2)$ (m)	$\varepsilon_x(1/2)$	$\sigma(1/2)$ (Pa)	$F(0)$ (N)
2	$-2 \times 10^{-6}$	0	-668906,177353156	-88
4	$-1,96970176158937 \times 10^{-6}$	$-4,87294041623243 \times 10^{-7}$	-719192,966264330	-76,6129698392548
8	$-1,96194944196838 \times 10^{-6}$	$-6,07710235326180 \times 10^{-7}$	-731600,119826971	-74,2730630569816
16	$-1,96000008922601 \times 10^{-6}$	$-6,37725023799678 \times 10^{-7}$	-734691,474993731	-73,7405429979487
32	$-1,95951204391421 \times 10^{-6}$	$-6,45223121579181 \times 10^{-7}$	-735463,659350005	-73,6133958102711
64	$-1,95938998835054 \times 10^{-6}$	$-6,47097295742691 \times 10^{-7}$	-735656,664499895	-73,5823239184498
128	$-1,95935947169426 \times 10^{-6}$	$-6,47565817385938 \times 10^{-7}$	-735704,913228091	-73,5746433356037
256	$-1,95935184235734 \times 10^{-6}$	$-6,47682946428069 \times 10^{-7}$	-735716,975250176	-73,5727339929513
512	$-1,95934993501231 \times 10^{-6}$	$-6,47712228603058 \times 10^{-7}$	-735719,990745700	-73,5722580002067
1024	$-1,95934945817538 \times 10^{-6}$	$-6,47719549141458 \times 10^{-7}$	-735720,744618956	-73,5721391694215
2048	$-1,95934933896610 \times 10^{-6}$	$-6,47721379275725 \times 10^{-7}$	-735720,933087231	-73,5721094826213
4096	$-1,95934930916378 \times 10^{-6}$	$-6,47721836809267 \times 10^{-7}$	-735720,980204296	-73,5721020635315
8192	$-1,95934930171320 \times 10^{-6}$	$-6,47721951192661 \times 10^{-7}$	-735720,991983564	-73,5721002090852
16384	$-1,95934929985055 \times 10^{-6}$	$-6,4772197788473 \times 10^{-7}$	-735720,994928377	-73,5720997455144
32768	$-1,95934929938493 \times 10^{-6}$	$-6,47721986937465 \times 10^{-7}$	-735720,995664599	-73,5720996296284

#### 4.4 VERIFICAÇÃO DO CASO 6

A tabela 4.5, a seguir, mostra a solução numérica, o erro, a ordem aparente do e a ordem efetiva erro, para  $u(1/2)$ .

Tabela 4.5. Solução numérica, erro, ordens aparente e efetiva do erro para  $u(1/2)$  do caso 6.

Elem	$h$	$\phi$	$E(\phi)$	$p_u$	$p_E$
2	0,5	$-2 \times 10^{-6}$	$4,06507007703271 \times 10^{-3}$		
4	0,25	$-1,96970176158937 \times 10^{-6}$	$1,03524623596971 \times 10^{-3}$		1,973308
8	0,125	$-1,96194944196838 \times 10^{-6}$	$2,60014273870706 \times 10^{-9}$	1,96653395739802	1,99331122781973
16	0,0625	$-1,96000008922601 \times 10^{-6}$	$6,50789996337056 \times 10^{-10}$	1,99163287790510	1,998326844512
32	0,03125	$-1,95951204391421 \times 10^{-6}$	$1,62744684537056 \times 10^{-10}$	1,99790817118744	1,99958165091898
64	0,015625	$-1,95938998835054 \times 10^{-6}$	$4,06891208670557 \times 10^{-11}$	1,99947703964147	1,99989540891945
128	0,0078125	$-1,95935947169426 \times 10^{-6}$	$1,01724645870558 \times 10^{-11}$	1,99986925974120	1,99997385171371
256	0,00390625	$-1,95935184235734 \times 10^{-6}$	$2,54312766705574 \times 10^{-12}$	1,99996731397951	1,9999934642009
512	0,001953125	$-1,95934993501231 \times 10^{-6}$	$6,35782637055648 \times 10^{-13}$	1,99999183097425	1,99999836553908
1024	0,0009765625	$-1,95934945817538 \times 10^{-6}$	$1,58945707055668 \times 10^{-13}$	1,99999796531481	1,99999956621075
2048	0,00048828125	$-1,95934933896610 \times 10^{-6}$	$3,97364270558083 \times 10^{-14}$	1,99999942514683	1,99999998940241
4096	0,000244140625	$-1,95934930916378 \times 10^{-6}$	$9,93410705574004 \times 10^{-15}$	1,999999999999499	1,99999995762967
8192	0,0001220703125	$-1,95934930171320 \times 10^{-6}$	$2,48352705582637 \times 10^{-15}$	2,000000000002002	1,99999983043863
16384	$6,103515625 \times 10^{-5}$	$-1,95934929985055 \times 10^{-6}$	$6,20877055747943 \times 10^{-16}$	1,99999612722242	2,00001094014258
32768	$3,051757812 \times 10^{-5}$	$-1,95934929938493 \times 10^{-6}$	$1,55257055647824 \times 10^{-16}$	2,00013167738708	1,99964878536208

Pela tabela anterior, observa-se que a medida que o número de elementos na malha aumenta o erro diminui, ou seja, a solução numérica vai se aproximando cada vez mais da solução analítica, a ordem aparente do erro de discretização para o deslocamento vai se aproximando de 2, que é a ordem assintótica do erro de truncamento, através de valores menores que 2, até que o número de elementos se torna igual a 4096 e a ordem efetiva tende monotonicamente para a ordem

assintótica, através de valores menores que ela, até que o número de elementos seja 2048, passando a oscilar a partir disso.

A partir do momento que a ordem aparente e a ordem efetiva começam a oscilar, o erro de arredondamento passa a ser considerável na solução numérica.

A figura 4.1, a seguir, mostra a ordem assintótica do erro, a ordem aparente e a ordem efetiva do erro, em função de  $h$ .

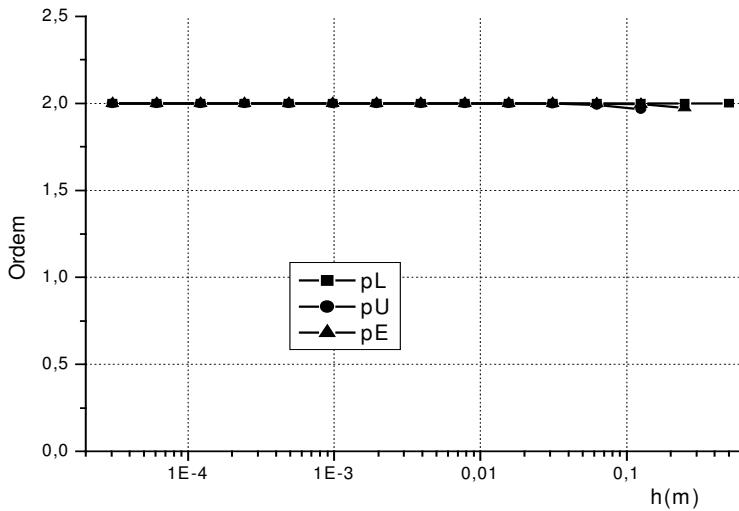


Figura 4.1: Ordem assintótica, aparente e efetiva do erro para  $u(1/2)$ , em função de  $h$ , do caso 6.

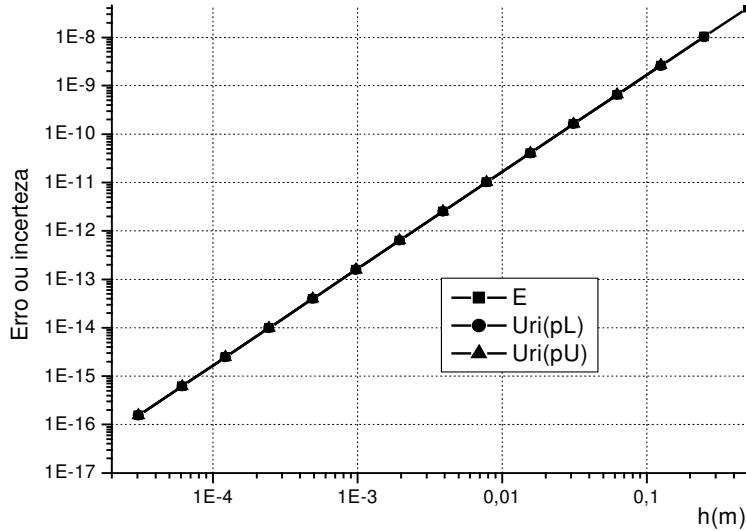
A tabela 4.6, a seguir, mostra o valor de  $U_{Ri}(p_L)/E(\phi)$  e  $U_{Ri}(p_U)/E(\phi)$  para  $u(1/2)$  do caso 6.

Na tabela 4.6 pode-se observar que  $U_{Ri}(p_L)/E(\phi)$  para  $u(1/2)$  tende monotonicamente para 1, através de valores menores que 1, até que o número de elementos se torna igual a 2048 e  $U_{Ri}(p_U)/E(\phi)$  tende monotonicamente para 1, através de valores maiores que 1, até que o número de elementos se torna igual a 2048. Para mais de 2048 elementos na malha as razões oscilam afetadas pelo erro de arredondamento.

A figura 4.2, a seguir, mostra o módulo do erro e das estimativas do erro dadas pelo estimador de Richardson para a ordem assintótica e para a ordem aparente, em função de  $h$ :

Tabela 4.6:  $U_{Ri}(p_L)/E(\phi)$  e  $U_{Ri}(p_U)/E(\phi)$  para  $u(1/2)$  do caso 6.

Elem	h(m)	$U_{Ri}(p_L)/E(\phi)$	$U_{Ri}(p_U)/E(\phi)$
2	0,5		
4	0,25	0,975556582833963	
8	0,125	0,993832569982281	1,02517548352824
16	0,0625	0,998454572310500	1,00621295935857
32	0,03125	0,999613419404544	1,00154826988554
64	0,015625	0,999903340820055	1,00038675812273
128	0,0078125	0,999975834071108	1,00009666993211
256	0,00390625	0,999993960040133	1,00002416872528
512	0,001953125	0,999998488438221	1,00000603924533
1024	0,0009765625	0,999999599093664	1,00000147954352
2048	0,00048828125	0,99999990205751	1,00000052148306
4096	0,000244140625	0,999999960836881	0,99999960841507
8192	0,0001220703125	0,999999843292032	0,999999843273528
16384	$6,103515625 \times 10^{-5}$	1,000010110876980	1,00001369012766
32768	$3,051757812 \times 10^{-5}$	0,999675448258539	0,999553801261509

Figura 4.2:  $|E(\phi)|$ ,  $|U_{Ri}(p_L)|$  e  $|U_{Ri}(p_U)|$  em função de  $h$  para  $u(1/2)$  do caso 6.

A tabela 4.7, a seguir, mostra o valor de  $h$ , da solução numérica, do erro, da ordem aparente e da ordem efetiva do erro para  $ex(1/2)$  do caso 6

Pela tabela 4.7, observa-se que a medida que o número de elementos na malha aumenta o erro diminui, a ordem aparente do erro de discretização para o deslocamento vai se aproximando de 2, que é a ordem assintótica do erro de truncamento, através de valores maiores que 2, até que o número de elementos se torna igual a 4096 e a ordem efetiva tende monotonicamente para a ordem assintótica, através de valores maiores que ela, até que o número de elementos seja 2048, passando a oscilar a partir disso.

Tabela 4.7: Solução numérica, erro, ordens aparente e efetiva do erro para  $\varepsilon_x(1/2)$  do caso 6

Elem	H	$\phi$	$E(\phi)$	$p_U$	$p_E$
2	0,5	0	-6,4772198932045x10 <sup>-7</sup>		
4	0,25	-4,87294041623243x10 <sup>-7</sup>	-1,60427947697207x10 <sup>-8</sup>		2,013448
8	0,125	-6,07710235326180 x10 <sup>-7</sup>	-4,00117539942702x10 <sup>-8</sup>	2,01676316174791	2,00342971292402
16	0,0625	-6,37725023799678 x10 <sup>-7</sup>	-9,99696552077221x10 <sup>-9</sup>	2,00428401451882	2,00086172270552
32	0,03125	-6,45223121579181 x10 <sup>-7</sup>	-2,49886774126921x10 <sup>-9</sup>	2,00107695630453	2,00021570038205
64	0,015625	-6,47097295742691 x10 <sup>-7</sup>	-6,24693577759215x10 <sup>-10</sup>	2,00026961313434	2,00005394197163
128	0,0078125	-6,47565817385938 x10 <sup>-7</sup>	-1,56171934512215x10 <sup>-10</sup>	2,00006742669234	2,000013486549
256	0,00390625	-6,47682946428069 x10 <sup>-7</sup>	-3,90428923812149x10 <sup>-11</sup>	2,00001685813662	2,00000337170737
512	0,001953125	-6,47712228603058 x10 <sup>-7</sup>	-9,76071739221487x10 <sup>-12</sup>	2,00000421462421	2,00000084295193
1024	0,0009765625	-6,47719549141458 x10 <sup>-7</sup>	-2,44017899221486x10 <sup>-12</sup>	2,00000105380886	2,00000021038084
2048	0,00048828125	-6,47721379275725 x10 <sup>-7</sup>	-6,10044725214845x10 <sup>-13</sup>	2,00000026250390	2,00000005401165
4096	0,000244140625	-6,47721836809267 x10 <sup>-7</sup>	-1,52511183214873x10 <sup>-13</sup>	2,00000007804181	1,99999998192117
8192	0,0001220703125	-6,47721951192661 x10 <sup>-7</sup>	-3,81277892148758x10 <sup>-14</sup>	1,99999989279113	2,00000024931132
16384	6,103515625x10 <sup>-5</sup>	-6,47721979788473 x10 <sup>-7</sup>	-9,53197721484131x10 <sup>-15</sup>	2,00000184146842	1,99999547284948
32768	3,051757812x10 <sup>-5</sup>	-6,47721986937465 x10 <sup>-7</sup>	-2,38298521485655x10 <sup>-15</sup>	1,99999212962811	2,00000550251809

A figura 4.3, a seguir, mostra a ordem assintótica, a ordem aparente e a ordem efetiva para  $\varepsilon_x(1/2)$  do caso 6.

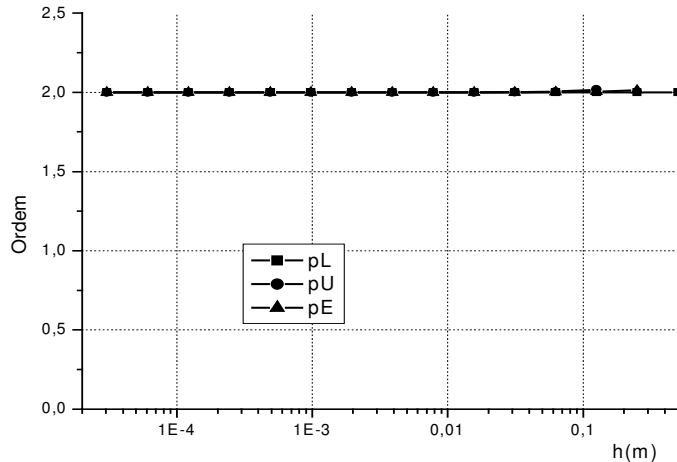


Figura 4.3: Ordem assintótica ( $p_L$ ), ordem aparente ( $p_U$ ) e ordem efetiva ( $p_E$ ) do erro para  $\varepsilon_x(1/2)$ , em função de  $h$ , do caso 6.

A tabela 4.8, a seguir, mostra o valor de  $U_{Ri}(p_L)/E(\phi)$  e  $U_{Ri}(p_U)/E(\phi)$  para  $\varepsilon_x(1/2)$  do caso 6.

A tabela 4.8 mostra que até 2048 elementos na malha a razão  $U_{Ri}(p_L)/E(\phi)$  tende monotonicamente para 1, através de valores maiores que 1 e que até 4096

elementos,  $U_{Ri}(p_U)/E(\phi)$  tende a 1, através de valores menores que 1. Para mais elementos, as duas razões oscilam.

Tabela 4.8:  $U_{Ri}(p_L)/E(\phi)$  e  $U_{Ri}(p_U)/E(\phi)$  para  $\varepsilon_x(1/2)$  do caso 6.

Elem	$h(m)$	$U_{Ri}(p_L)/E(\phi)$	$U_{Ri}(p_U)/E(\phi)$
2	0,5		
4	0,25	1,01248031328503	
8	0,125	1,00317349846898	0,987781096575234
16	0,0625	1,00079663877776	0,996843998442192
32	0,03125	1,00019936438554	0,999204465933301
64	0,015625	1,00004985389941	0,999800704833693
128	0,0078125	1,00001246427615	0,999950150430807
256	0,00390625	1,00000311612292	0,999987535999598
512	0,001953125	1,00000077905324	0,999996883919832
1024	0,0009765625	1,00000019443320	0,999999220507416
2048	0,00048828125	1,00000004991737	0,999999807312274
4096	0,000244140625	0,99999983291612	0,999999911165664
8192	0,0001220703125	1,00000023041261	1,000000329494680
16384	$6,103515625 \times 10^{-5}$	0,999995816031072	0,999994114161811
32768	$3,051757812 \times 10^{-5}$	1,00000508541624	1,000012359254400

A figura 4.4 mostra o módulo do erro, das estimativas do erro dadas pelo estimador de Richardson para a ordem assintótica e para a ordem aparente do erro.

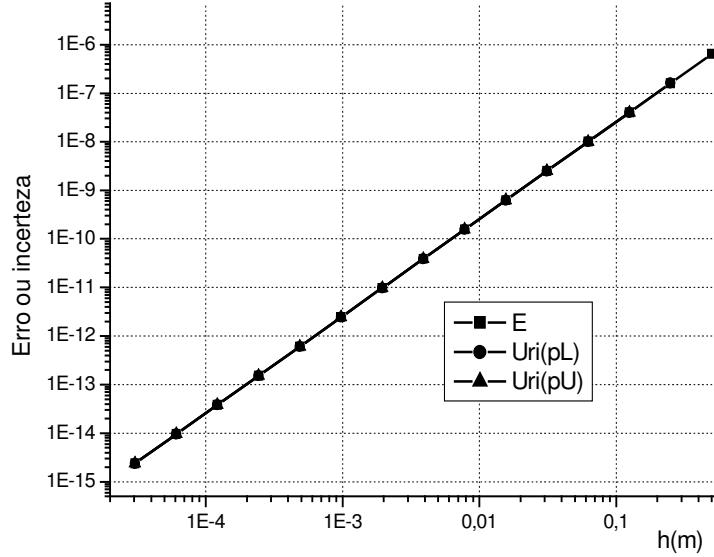


Figura 4.4:  $|E(\phi)|$ ,  $|U_{Ri}(p_L)|$  e  $|U_{Ri}(p_U)|$ , em função de  $h$ , para  $\varepsilon_x(1/2)$  do caso 6.

A tabela 4.9, a seguir, mostra o valor de  $h$ , da solução numérica, do erro, da ordem aparente e da ordem efetiva do erro para  $\sigma(1/2)$  do caso 6

Tabela 4.9: Solução numérica, erro, ordens aparente e efetiva do erro para  $\sigma(1/2)$  do caso 6

Elem	h	$\phi$	$E(\phi)$	$p_U$	$p_E$
2	0,5	-668906,177353156	-66814,8185568295		
4	0,25	-719192,966264330	-16528,0296456555		2,015253
8	0,125	-731600,119826971	-4120,87608301446	2,01900726061607	2,00389176026282
16	0,0625	-734691,474993731	-1029,52091625446	2,00486085119167	2,0009779408744
32	0,03125	-735463,659350005	-257,33655998046	2,00122218335299	2,00024479935841
64	0,015625	-735656,664499895	-64,3314100904599	2,00030598399415	2,00006121949358
128	0,0078125	-735704,913228091	-16,0826818944599	2,00007652341795	2,00001530609689
256	0,00390625	-735716,975250176	-4,02065980945991	2,00001913259134	2,00000382651205
512	0,001953125	-735719,990745700	-1,0051642854599	2,00000478294825	2,00000095719709
1024	0,0009765625	-735720,744618956	-0,251291029459878	2,00000119606843	2,00000024058268
2048	0,00048828125	-735720,933087231	-0,0628227544598872	2,00000029853895	2,00000006671385
4096	0,000244140625	-735720,980204296	-0,0157056894598782	2,00000011482230	1,99999992238849
8192	0,0001220703125	-735720,991983564	-0,0039264214598802	1,9999978566492	2,00000033255924
16384	6,103515625x10 <sup>-5</sup>	-735720,994928377	-0,000981608459881045	2,00000195964115	1,99999545132304
32768	3,051757812x10 <sup>-5</sup>	-735720,995664599	-0,000245386459880592	1,99996325717319	2,0000920376773

Pela tabela anterior pode-se notar que quanto maior o número de elementos na malha, menor é o erro, a ordem aparente tende monotonicamente para a ordem assintótica, através de valores maiores que ela, até que o número de elementos seja igual 4096 e que a ordem efetiva tem o mesmo comportamento, porém até 2048 elementos.

A figura 4.5 mostra a ordem assintótica, a ordem aparente e a ordem efetiva do erro para  $\sigma(1/2)$ , em função de  $h$ , do caso 6.

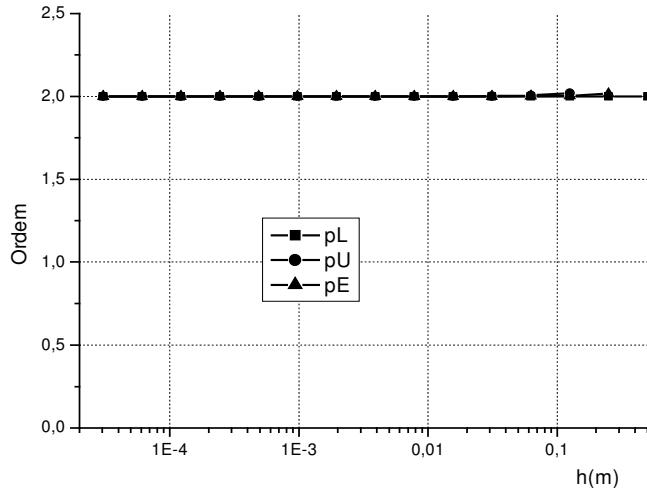


Figura 4.5: Ordem assintótica ( $p_L$ ), ordem aparente ( $p_U$ ) e ordem efetiva ( $p_E$ ) do erro para  $\sigma(1/2)$  do caso 6.

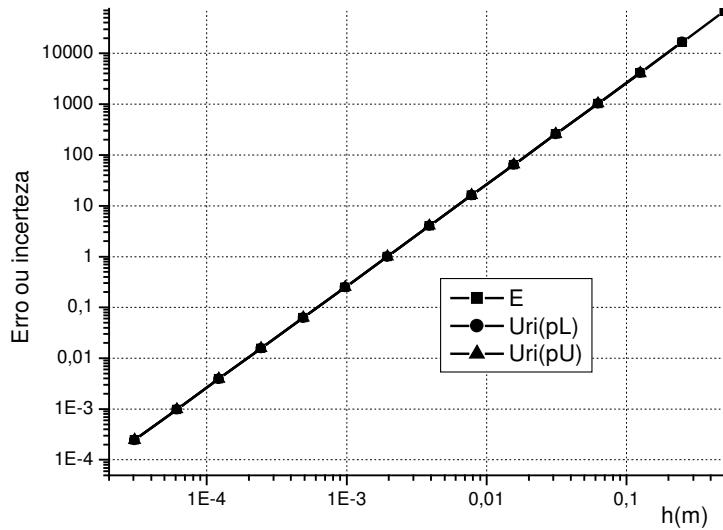
A tabela 4.10, a seguir, mostra os valores de  $U_{Ri}(p_L)/E(\phi)$  e  $U_{Ri}(p_U)/E(\phi)$  para  $\sigma(1/2)$  do caso 6.

Tabela 4.10:  $U_{Ri}(p_L)/E(\phi)$  e  $U_{Ri}(p_U)/E(\phi)$  para  $\sigma(1/2)$  do caso 6.

Elem	h(m)	$U_{Ri}(p_L)/E(\phi)$	$U_{Ri}(p_U)/E(\phi)$
2	0,5		
4	0,25	1,01417884353886	
8	0,125	1,00360160579940	0,98616360408141
16	0,0625	1,00090411567573	0,99642026735795
32	0,03125	1,00022626184251	0,999097266105236
64	0,015625	1,00005658002628	0,99977382474509
128	0,0078125	1,00001414591225	0,999943425382593
256	0,00390625	1,00000353645274	0,999985854316629
512	0,001953125	1,00000088463825	0,999996464263755
1024	0,0009765625	1,00000022234563	0,999999116944196
2048	0,00048828125	1,00000006165669	0,999999785748148
4096	0,000244140625	0,999999928271737	0,999999822153410
8192	0,0001220703125	1,00000030735004	1,00000050543780
16384	6,103515625x10-5	0,999995796136483	0,999993985053167
32768	3,051757812x10-5	1,00008506358868	1,00011902478042

Pela tabela anterior pode ser verificado que  $U_{Ri}(p_L)/E(\phi)$  tende monotonicamente para 1, através de valores maiores que 1, até 2048 elementos na malha e  $U_{Ri}(p_U)/E(\phi)$  tende monotonicamente para 1, através de valores menores que 1, até 4096 elementos na malha. A partir disso as razões oscilam.

A figura 4.6 mostra o módulo do erro, das estimativas do erro dadas pelo estimador de Richardson para a ordem assintótica e para a ordem aparente do erro.

Figura 4.6:  $|E(\phi)|$ ,  $|U_{Ri}(p_L)|$  e  $|U_{Ri}(p_U)|$  para  $\sigma(1/2)$  do caso 6.

A tabela 4.11, a seguir, mostra o valor de  $h$ , da solução numérica, do erro, da ordem aparente e da ordem efetiva do erro para  $F(0)$  do caso 6

Tabela 4.11: Solução numérica, erro, ordens aparente e efetiva do erro para  $F(0)$  do caso 6

Elem	h	$\phi$	$E(\phi)$	$p_U$	$p_E$
2	0,5	-88	14,4279004090015		
4	0,25	-76,6129698392548	3,0408702482563		
8	0,125	-74,2730630569816	0,7009634659831	2,28286856668133	2,11707310047161
16	0,0625	-73,7405429979487	0,1684434069502	2,13554328145376	2,057075292356
32	0,03125	-73,6133958102711	0,0412962192726	2,06633631804716	2,0281823489558
64	0,015625	-73,5823239184498	0,0102243274513	2,03281756377431	2,01400376003983
128	0,0078125	-73,5746433356037	0,00254374460519999	2,01632238296818	2,00698021206289
256	0,00390625	-73,5727339929513	0,000634401952799998	2,00813976160212	2,00348471267085
512	0,001953125	-73,5722580002067	0,000158409208199997	2,00406454507411	2,001741001135737
1024	0,0009765625	-73,5721391694215	3,95784229999946x10-5	2,00203094315142	2,00087016601693
2048	0,00048828125	-73,5721094826213	9,89162279999706x10-6	2,00101513449456	2,00043499823084
4096	0,000244140625	-73,5721020635315	2,47253299999473x10-6	2,00050749249913	2,00021744984901
8192	0,0001220703125	-73,5721002090852	6,18086699995246x10-7	2,00025371110312	2,00010864969319
16384	6,103515625x10-5	-73,5720997455144	1,54515899998542x10-7	2,00012689174532	2,0000539194255
32768	3,051757812x10-5	-73,5720996296284	3,86298999940915x10-8	2,00008340757082	1,9999654541976

Pela tabela anterior, observa-se que, quanto maior o número de elementos na malha, menor é o erro, a ordem aparente do erro de discretização para o deslocamento vai se aproximando de 2, que é a ordem assintótica do erro de truncamento, através de valores menores que 2 e com a ordem efetiva ocorre o mesmo, porém até 16384 elementos.

A figura 4.7 mostra a ordem assintótica, a ordem aparente e a ordem efetiva do erro em função de  $h$ , para  $F(0)$  do caso 6.

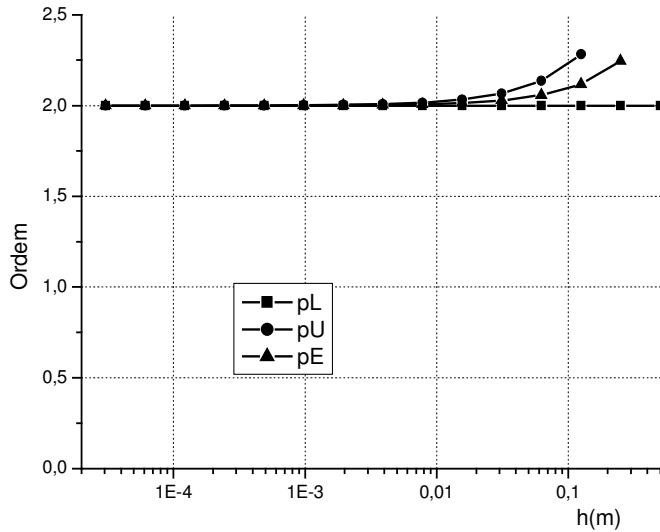


Figura 4.7: Ordem assintótica ( $p_L$ ), ordem aparente ( $p_U$ ) e ordem efetiva ( $p_E$ ) do erro para  $F(0)$  do caso 6.

A tabela 4.12, a seguir, mostra o valor de  $U_{Ri}(p_L)/E(\phi)$  e  $U_{Ri}(p_U)/E(\phi)$  para  $F(0)$  do caso 6.

Tabela 4.12:  $U_{Ri}(p_L)/E(\phi)$  e  $U_{Ri}(p_U)/E(\phi)$  para  $F(0)$  do caso 6.

Elem	h(m)	$U_{Ri}(p_L)/E(\phi)$	$U_{Ri}(p_U)/E(\phi)$
2	0,5		
4	0,25	1,24822054555705	
8	0,125	1,11270981338592	0,863358593706961
16	0,0625	1,05380607978785	0,93146563809838
32	0,03125	1,02630208380005	0,965714034290652
64	0,015625	1,01300523903406	0,982853779042904
128	0,0078125	1,00646671713808	0,991426047727866
256	0,00390625	1,00322445098249	0,99571279477283
512	0,001953125	1,00161000741624	0,997856337495388
1024	0,0009765625	1,00080444673957	0,998928148206235
2048	0,00048828125	1,00040208434442	0,999464073686818
4096	0,000244140625	1,00020098147907	0,99973200203537
8192	0,0001220703125	1,00010041741919	0,999865949387411
16384	6,103515625x10-5	1,00004983306158	0,999932562938958
32768	3,051757812x10-5	0,999968073281537	0,999890994492737

A figura 4.8 mostra o módulo do erro, das estimativas do erro dadas pelo estimador de Richardson para a ordem assintótica e para a ordem aparente do erro de  $F(0)$ .

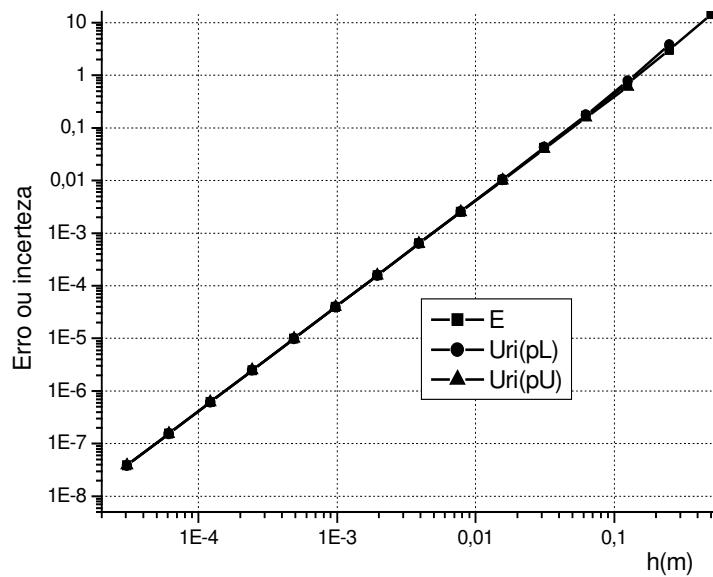


Figura 4.8:  $|E(\phi)|$ ,  $|U_{Ri}(p_L)|$  e  $|U_{Ri}(p_U)|$  para  $F(0)$  do caso 6.

#### 4.5 CONCLUSÃO DO CAPÍTULO 4

Observando as tabelas e gráficos pode-se concluir que:

- até 2048 elementos na malha, o erro cometido no cálculo de  $u(1/2)$  para o caso 6, é maior que  $U_{Ri}(p_L)$  e menor que  $U_{Ri}(p_U)$ .
- até 2048 elementos na malha, o erro cometido no cálculo de  $\varepsilon_x(1/2)$  e de  $\sigma(1/2)$  para o caso 6, é menor que  $U_{Ri}(p_L)$  e maior que  $U_{Ri}(p_U)$ .
- até 16385 elementos na malha, o erro cometido no cálculo de  $F(0)$  para o caso 6, é menor que  $U_{Ri}(p_L)$  e maior que  $U_{Ri}(p_U)$ .

Para todas as variáveis de interesse a ordem aparente e a ordem efetiva tendem monotonicamente para a ordem assintótica até 2048 elementos na malha, passando a oscilar após isso, exceto para  $F(0)$  onde as ordens aparentes tendem para a ordem assintótica até 16384 elementos. Quando as ordens começam a oscilar o erro de arredondamento está influenciando no resultado. Para todas as variáveis de interesse, quanto maior o número de elementos na malha, ou seja, quanto menor o tamanho de cada subdivisão da malha, menor é o erro cometido pela utilização do método numérico finitas no cálculo das variáveis de interesse.

## CAPÍTULO 5

### CONDUÇÃO DE CALOR BIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE

Neste capítulo será tratado o problema da transferência de calor bidimensional numa placa retangular com temperaturas prescritas nos contornos. Serão obtidas as soluções analítica e numérica da distribuição da temperatura, da temperatura média na placa e do fluxo de calor através da superfície da placa cujas coordenadas vão de  $(0, L_y)$  até  $(L_x, L_y)$ . A seguir será feita uma análise dos erros cometidos pela aplicação do método de diferenças finitas na resolução numérica do problema.

#### 5.1 SOLUÇÕES ANALÍTICAS

##### 5.1.1 Temperatura no Ponto $(3/4, 3/4)$

Seja uma placa de comprimento  $L_x$  e largura  $L_y$ , de acordo com a figura 5.1 a seguir:

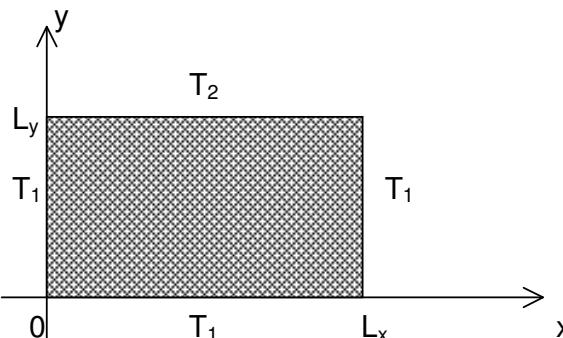


Figura 5.1: placa retangular submetida a temperaturas  $T_2$  e  $T_1$ .

Na figura 5.1 é considerado que  $T(x, L_y) = T_2 = \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right)$  e que  $T(0, y) = T(L_x, y) = T(x, 0) = T_1 = 0$ .

De acordo com Incropera e De Witt (1992, p78), A condução de calor bidimensional, em regime permanente, com propriedades constantes e sem geração de calor, numa placa plana é dada por:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (5.1)$$

com condições de contorno:

$$T(0, y) = 0, T(x, 0) = 0, T(L_x, y) = 0 \text{ e } T(x, L_y) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \quad (5.2)$$

Como demonstrado no apêndice C, a resolução da equação 5.2, leva a

$$T(x, y) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \cdot \frac{\operatorname{senh}\left(\frac{\pi y}{L_x}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right)} \quad (5.3)$$

Substituindo na equação anterior, os valores  $L_x = L_y = 1$ , a solução analítica para a temperatura no ponto considerado, será igual a:

$$T\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) = 0,320098522049454 \text{ } ^\circ\text{C}$$

### 5.1.2 Temperatura Média

De acordo com McCallum et al (1997, p. 128), o valor médio de uma função com duas variáveis é:

$$\text{valor médio de } f \text{ na região } R = \frac{1}{\text{área de } R} \cdot \int_R f \cdot dA \quad (5.4)$$

Então, aplicando a equação 5.4, a temperatura média é dada por

$$\bar{T} = \frac{1}{L_x} \cdot \frac{1}{L_y} \cdot \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} T(x, y) \cdot dx \cdot dy \quad (5.5)$$

Resolvendo a equação 5.5, como mostrado no apêndice D, fica:

$$\bar{T} = \frac{2L_x}{L_y \cdot \pi^2 \cdot \operatorname{senh}\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right)} \cdot \left[ \cosh\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right) - 1 \right] \quad (5.6)$$

Fazendo  $L_x = L_y = 1\text{m}$  encontra-se:

$$\bar{T} = 0,185855618271389 \text{ } ^\circ\text{C}$$

### 5.1.3 Fluxo de Calor Através da Superfície

A quantidade de calor transmitida através da superfície ( $x, y=L_y$ ) é dada por:

$$q = -k \cdot \int_0^{L_x} \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{x,y=L_y} \right] \cdot dx \quad (5.7)$$

que resolvida para as condições dadas, conforme pode ser visto no anexo E, encontra-se

$$q = -2k \cdot \coth\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right) \quad (5.8)$$

Fazendo  $L_x = L_y = 1\text{m}$  e considerando  $k = 401\text{W/mK}$ , tem-se:

$$q = -805,00098230425\text{W}$$

## 5.2 MODELOS NUMÉRICOS

### 5.2.1 Temperatura

Para a solução numérica do problema, considera-se uma malha regular de pontos (nós) com  $m$  linhas e  $n$  colunas, como ilustra a figura 5.2.

A solução numérica da equação  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$  pode ser obtida através da aproximação para as derivadas, usando diferença central de 3 pontos, como dado a seguir:

Segundo o eixo x:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{T_w + T_e - 2T_p}{h^2} - T_{p,x}^{iv} \cdot \frac{h^2}{12} - T_{p,x}^{vi} \cdot \frac{h^4}{360} - T_{p,x}^{viii} \cdot \frac{h^6}{20160} - T_{p,x}^x \cdot \frac{h^8}{1814400} - \dots \quad (5.9)$$

onde a derivada segunda, em relação a x, é aproximada por:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{T_w + T_e - 2T_p}{h^2} \quad (5.10)$$

com erro de truncamento dado por:

$$\epsilon_x = -T_{p,x}^{iv} \cdot \frac{h^2}{12} - T_{p,x}^{vi} \cdot \frac{h^4}{360} - T_{p,x}^{viii} \cdot \frac{h^6}{20160} - T_{p,x}^x \cdot \frac{h^8}{1814400} - \dots \quad (5.11)$$

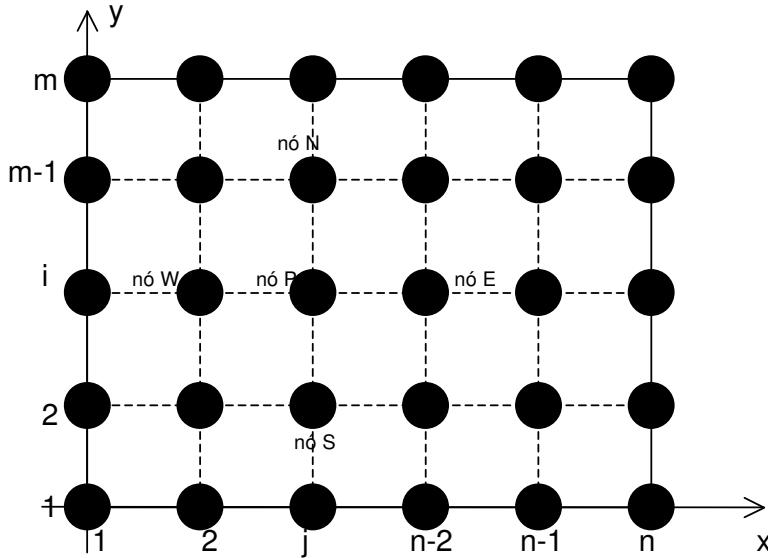


Figura 5.2: Malha utilizada para a resolução numérica, onde se pode ver o nó P e os 4 nós vizinhos.

Segundo o eixo y:

$$\frac{d^2 T}{dy^2} = \frac{T_n + T_s - 2T_p}{h^2} - T_{p,y}^{iv} \cdot \frac{h^2}{12} - T_{p,y}^{vi} \cdot \frac{h^4}{360} - T_{p,y}^{viii} \cdot \frac{h^6}{20160} - T_{p,y}^x \cdot \frac{h^8}{1814400} - \dots \quad (5.12)$$

onde a derivada segunda, em relação a y, é aproximada por:

$$\frac{d^2T}{dy^2} = \frac{T_N + T_S - 2T_P}{h^2} \quad (5.13)$$

com erro de truncamento dado por:

$$\epsilon_y = -T_P^{iv} \cdot \frac{h^2}{12} - T_P^{vi} \cdot \frac{h^4}{360} - T_P^{viii} \cdot \frac{h^6}{20160} - T_P^X \cdot \frac{h^8}{1814400} - \dots \quad (5.14)$$

Substituindo as equações 5.9 e 5.12 na equação 5.2, fica:

$$\frac{T_W + T_E - 2T_P}{h^2} + \epsilon_x + \frac{T_N + T_S - 2T_P}{h^2} + \epsilon_y = 0$$

onde, fazendo  $\epsilon = \epsilon_x + \epsilon_y$ , tem-se:

$$\frac{T_W + T_E + T_N + T_S - 4T_P}{h^2} + \epsilon = 0 \quad (5.15)$$

portanto, a temperatura do nó P, é dada por:

$$T_P = \frac{T_W + T_E + T_N + T_S}{4} \quad \text{ou} \quad 4T_P = T_W + T_E + T_N + T_S \quad (5.16)$$

com erro de truncamento  $\epsilon$ .

Portanto, de maneira geral, pode-se dizer que para o nó (i, j), a temperatura será aproximada por:

$$T_{i,j} = \frac{T_{i,j-1} + T_{i,j+1} + T_{i+1,j} + T_{i-1,j}}{4} \quad (5.17)$$

A resolução desse sistema pode ser feita através da aplicação do método iterativo de Gauss – Seidel.

A solução analítica da temperatura é dada pela equação 5.4 e como  $T_x^{iv}$ ,  $T_x^{vi}$ ,  $T_x^{viii}$  .... são diferentes de zero, para o ponto (3/4; 3/4) e  $T_y^{iv}$ ,  $T_y^{vi}$ ,  $T_y^{viii}$ , ... também são diferentes de zero para o ponto (3/4, 3/4), então:

- as ordens verdadeiras para o erro no cálculo de  $T(3/4, 3/4)$  são: 2, 4, 6, ...
- a ordem assintótica do erro no cálculo de  $T(3/4, 3/4)$  é 2.

### 5.2.2 Temperatura Média: $\bar{T}$

A solução numérica para temperatura média é dada pela regra do trapézio, da seguinte forma:

$$\bar{T} = \frac{h_x \cdot h_y}{4 \cdot L_x \cdot L_y} \cdot \sum_{j=2}^{N_y} \left( \sum_{i=2}^{N_x} (T_{i,j} + T_{i-1,j} + T_{i-1,j-1} + T_{i,j-1}) \right) \quad (5.18)$$

portanto, o erro de truncamento para o cálculo da temperatura média será o mesmo do cálculo da temperatura, ou seja:

- as ordens verdadeiras para o erro no cálculo de  $\bar{T}$  são: 2, 4, 6, ...
- a ordem assintótica do erro no cálculo de  $\bar{T}$  é 2.

### 5.2.3 Fluxo de Calor (q)

A solução analítica do fluxo de calor é dada pela equação 5.7. Para a solução numérica foi utilizada, nessa equação, a aproximação da derivada primeira da temperatura com dois pontos a montante (UDS-2), ou seja:

$$\left. \frac{\delta T}{\delta y} \right|_P = \frac{3T_P + T_{WW} - 4T_W}{2h}$$

que escrita em função dos índices das temperaturas fica:

$$\left. \frac{\delta T}{\delta y} \right|_P = \frac{3T_{n,j} + T_{n-2,j} - 4T_{n-1,j}}{2h_y} \quad (5.19)$$

O cálculo do fluxo de calor, então será dado por:

$$q = -k \cdot \sum_{j=2}^{n-1} \left( \frac{3T_{n,j} + T_{n-2,j} - 4T_{n-1,j}}{2} \right) \quad (5.20)$$

com erro de truncamento, na aproximação da derivada dada por:

$$\varepsilon_p = T_{P_y}^{iii} \cdot \frac{h^2}{3} - T_{P_y}^{iv} \cdot \frac{h^3}{4} + T_{P_y}^v \cdot \frac{7h^4}{60} - \dots \quad (5.21)$$

como  $T_{P_y}^{iii} \neq 0$ ,  $T_{P_y}^{iv} \neq 0$ , ...,  $T_{P_y}^v \neq 0$ , então,

- as ordens verdadeiras do erro de truncamento são: 2, 3, 4, ...
- a ordem assintótica do erro de truncamento será:  $p_L = 2$

### 5.2.4 Programa Computacional

Para a resolução do caso 7 foi utilizado o mesmo programa computacional citado na seção 3.2.4, apenas utilizando outra rotina. A solução numérica é dada

pelo sistema de equações 5.16 é feito pelo método iterativo de Gauss-Seidel, onde são feitas tantas iterações quantas necessárias até atingir o erro de máquina.

O algoritmo para a solução do caso 7 é

Para  $i=1$  até 10 faça

$n=2^i;$

$hx=hy= L/n;$

Resolver o sistema de equações 5.16;

$T34[i]=T[3*i/4, 3*i/4];$

$Erro\_T34[i]=T34\_an - T34[i];$

Calcular  $\bar{T}[i]$  com a equação 5.18;

$Erro\_T[i]=\bar{T}\_an - \bar{T}[i];$

Calcular  $q[i]$  com a equação 5.20;

$Erro\_q = q\_an - q[i];$

Mostrar  $T34[i]$ ,  $\bar{T}[i]$ ,  $q[i]$ ;

Gravar  $T34[i]$ ,  $\bar{T}[i]$ ,  $q[i]$ ;

Fim\_Para;

Gravar  $T[i][j]$ ;

Para  $i=2$  até 10 calcular  $Uri(pL)$  de cada variável de interesse;

Para  $i=3$  até 10 calcular  $pU$  e  $Uri(pU)$  de cada variável de interesse;

Para  $i=2$  até 10 calcular  $pE$  e  $Uri(pE)$  de cada variável de interesse;

### 5.3 SOLUÇÕES NUMÉRICAS

Para a obtenção da solução numérica foi utilizado o programa de computador, escrito em C++ *Builder* 6.0, TERMOEL\_1D\_2D, que torna possível a determinação do número de elementos em cada direção, até um valor máximo de 1024. Pode-se efetuar o cálculo das temperaturas a cada vez, ou utilizar dados armazenados na base de dados.

As soluções numéricas para as três variáveis de interesse estão gravadas no arquivo “CARGA.DAT” e a temperatura em cada um dos nós para a malha com 1024

elementos em cada direção, está gravada no arquivo “T\_CASO7.DAT”, ambos gravados em 28/02/2006.

A tabela 5.1 a seguir mostra o tempo (em s) gasto pela CPU e o número de iterações necessárias para atingir o erro de máquina em função do número de elementos em cada direção:

Tabela 5.1: Tempo de CPU ( $t_{CPU}$ ) e número de iterações para atingir o erro de máquina

$N_x=N_y$	Tempo de cpu (s)	Número de iterações que atinge $\epsilon_\pi$
2	0	2
4	0	50
8	0	229
16	0	900
32	1	3400
64	5	13200
128	74	50650
256	1164	195550
512	17584	744550
1024	255308	2829290

Para a obtenção da memória computacional necessária foi utilizada a alocação dinâmica de memória conforme descrito por Jamsa e Klander (1999, p.515). A seguir é mostrado o fragmento do código em C para alocar memória suficiente para uma matriz T, para armazenar as temperaturas de malhas com até 1024 elementos em cada direção, ou seja, 1025 nós em cada direção:

```
long double **T;
T = new long double*[1025];
for(i=0;i<1025;i++)
    T[i]=new long double[1025];
```

A tabela 5.2, a seguir, mostra as soluções numéricas para as três variáveis de interesse, para o 7º caso e para número de elementos em cada direção variando de 2, 4, 8, ..., 1024.

Na tabela 5.2 pode-se observar que à medida que o número de elementos aumenta, a solução numérica vai ficando cada vez mais próxima do valor analítico de cada variável de interesse, ou seja, o erro de discretização vai ficando cada vez menor à medida que h diminui.

Tabela 5.2. Soluções numéricas de  $T(3/4, 3/4)$ ,  $\bar{T}$  e  $q$ 

Elementos	$T(3/4, 3/4)$	$\bar{T}$	$q$
2	0,3625	0,190898662815205	-401
4	0,331812061579181	0,18749999974362	-646,872501539374
8	0,323154989776496	0,187467274251788	-755,095120977838
16	0,320871392622591	0,186280657972426	-791,059706491333
32	0,320292299879568	0,185962091382369	-801,326744085314
64	0,320147001686275	0,185881056476619	-804,058667949682
128	0,320110644116813	0,1858607102902	-804,76243358749
256	0,320101552657349	0,185855618271389	-804,940973775803
512	0,320099279694874	0,185854344924768	-804,985933401296
1024	0,320098710624421	0,185854027657833	-804,997193155396

A ordem assintótica do erro de truncamento para as três variáveis é 2, então, o erro de truncamento deve diminuir  $(h_2/h_1)^2$  vezes, quando se passa de uma malha grossa ( $h_2$ ) para uma malha fina ( $h_1$ ). Esse fato pode ser verificado nas tabelas 5.3, 5.5 e 5.7 onde a cada refinamento da malha o erro verdadeiro fica dividido por aproximadamente 4, na maioria desses refinamentos.

## 5.4 VERIFICAÇÃO DO CASO 7

### 5.4.1 Temperatura no Ponto $(3/4, 3/4)$

A tabela 5.3, a seguir, mostra a solução numérica, a ordem aparente do erro de truncamento e a ordem efetiva do erro de truncamento para cada valor de  $h$ .

Tabela 5.3. Solução numérica, ordem aparente e efetiva para  $T(3/4, 3/4)$ 

Elementos	$h_x = h_y$	Sol. Numérica	$p_U$	$p_E$
2	0,5	0,3625		
4	0,25	0,331812061579181		1,8559389794692
8	0,125	0,323154989776496	1,82572070001096	1,93824577316789
16	0,0625	0,320871392622591	1,92257095601444	1,98359028029189
32	0,03125	0,320292299879568	1,97944184665516	1,99591806834957
64	0,015625	0,320147001686275	1,99477765369357	1,99933180701189
128	0,0078125	0,320110644116813	1,99868910158789	2,00126045070812
256	0,00390625	0,320101552657349	1,99967194135943	2,00604207546444
512	0,001953125	0,320099279694874	1,99993804427238	2,02461468668729
1024	0,0009765625	0,320098722424421	2,02811242989618	2,01397273571000

A figura 5.2 mostra a ordem aparente e a ordem efetiva do erro de truncamento, em função de  $h$ .

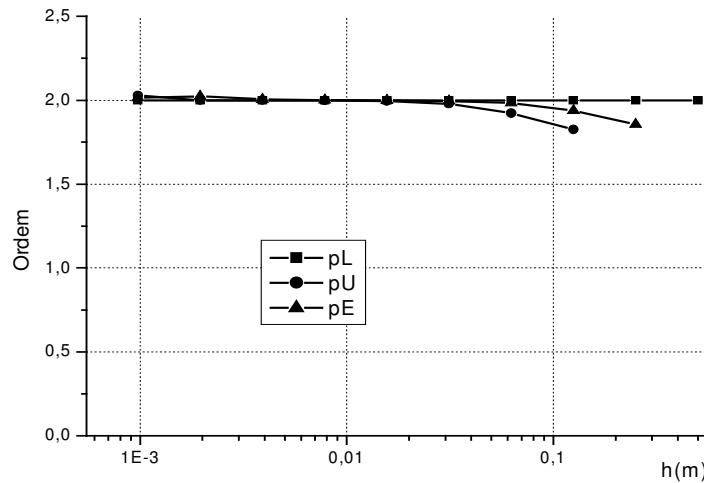


Figura 5.2. Ordem assintótica:  $p_L$ , ordem aparente:  $p_U$  e ordem efetiva:  $p_E$  do erro de truncamento para  $T(3/4, 3/4)$ .

Observando a tabela 5.3 e a figura 5.2 pode-se ver que a medida que o número de elementos aumenta em cada direção a solução numérica fica cada vez mais próxima da solução analítica, que até 512 elementos em cada direção, a ordem aparente tende monotonicamente para a ordem assintótica através de valores menores que ela e que até 64 elementos em cada direção a ordem efetiva tende monotonicamente para a ordem assintótica através de valores menores, mas a partir disso se torna maior que a ordem assintótica.

A tabela 5.4. a seguir, mostra os valores do erro verdadeiro de discretização, da estimativa do erro dada pelo estimador de Richardson para  $p_L$  e  $p_U$ , e das razões entre as estimativas de erro e o erro verdadeiro.

Tabela 5.4. Erro verdadeiro:  $E(\phi)$ , estimador de erro de Richardson:  $U_{Ri}(p_L)$  e  $U_{Ri}(p_U)$  e as razões:  $U_{Ri}(p_L)/E(\phi)$  e  $U_{Ri}(p_U)/E(\phi)$  para  $T(3/4, 3/4)$

$h_x = h_y$	$E(\phi)$	$U_{Ri}(p_L)$	$U_{Ri}(p_U)$	$U_{Ri}(p_L)/E(\phi)$	$U_{Ri}(p_U)/E(\phi)$
0,5	-0,0424014609655				
0,25	-0,0117135225447	-0,0102294085951		0,8732909138053	
0,125	-0,0030564507420	-0,0028856906009	-0,0034018131695	0,9441312307641	1,1129945994709
0,0625	-0,0007728535881	-0,0007611990513	-0,0008182061197	0,9849201232201	1,0586819188053
0,03125	-0,0001937608451	-0,0001930309143	-0,0001967424683	0,9962328260091	1,0153881613096
0,015625	-4,8462651864e-5	-4,8432731097e-5	-4,8667197380e-5	0,9993826015393	1,0042206835182
0,0078125	-1,2105082402e-5	-1,2119189821e-5	-1,2133883676e-5	1,0011654128297	1,0023792711993
0,00390625	-3,0136229383e-6	-3,0304864880e-6	-3,0314054770e-6	1,0055957729331	1,0059007178650
0,001953125	-7,4066046333e-7	-7,5765415833e-7	-7,5769754260e-7	1,0229439747950	1,0230025498966
0,0009765625	-1,8339001033e-7	-1,8575681766e-7	-1,8100588789e-7	1,0129058683806	0,9869997147754

A figura 5.3, a seguir, mostra o módulo do erro e das estimativas do erro dadas pelo estimador de Richardson para a ordem assintótica e para a ordem aparente, em função de  $h$ .

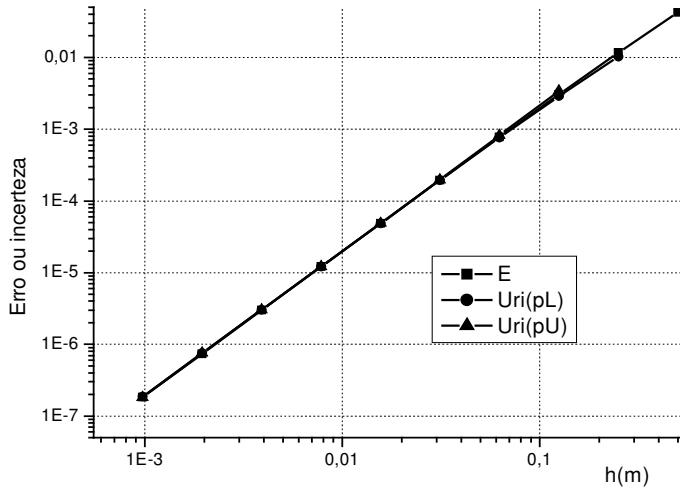


Figura 5.3:  $|E(\phi)|$ ,  $|U_{ri}(p_L)|$  e  $|U_{ri}(p_U)|$ : para  $T(3/4, 3/4)..\dots$

Pela tabela 5.4 pode-se observar que a razão entre o valor dado pelo estimador de Richardson para a ordem assintótica e o erro verdadeiro vai aumentado e ficando cada vez mais próximo de 1 até 128 elementos em cada direção, continuando a aumentar quando ultrapassa 1 e a razão entre o valor dado pelo estimador de Richardson para a ordem aparente e o erro verdadeiro vai diminuindo e ficando cada vez mais próximo de 1, porém sempre maior que 1, para os valores de  $h$  utilizados.

Nota-se, então, através dessa tabela que, até 128 elementos, ou  $h_x=h_y=0,0078125m$ :

$$\frac{U_{ri}(p_L)}{E} < 1 < \frac{U_{ri}(p_U)}{E}$$

#### 5.4.2 Temperatura Média ( $\bar{T}$ )

A tabela 5.5 mostra a solução numérica, e as ordens aparente e efetiva do erro de discretização, no cálculo da solução numérica da temperatura média.

Tabela 5.5. Solução numérica da temperatura média, ordem aparente e efetiva do erro de discretização

Elementos	$h_x = h_y$	Sol. Numérica	$p_U$	$p_E$
2	0,5	0,190898662815205		
4	0,25	0,187499999974362		-1,6157497975866
8	0,125	0,187467274251788	-0,01382525435952	1,64472108096429
16	0,0625	0,186280657972426	1,53193902238904	1,91865562235402
32	0,03125	0,185962091382369	1,89718660455449	1,98009074693007
64	0,015625	0,185881056476619	1,97497958367806	1,99525010072429
128	0,0078125	0,1858607102902	1,99378507338938	1,9996347996175
256	0,00390625	0,185855618271389	1,99844875475909	2,00319759150722
512	0,001953125	0,185854344924768	1,99961255639627	2,0140385590021
1024	0,0009765625	0,185854027657833	2,00465294	2,04230924

A figura 5.4 mostra a ordem assintótica, aparente e efetiva, em função de  $h$ , no cálculo numérico da temperatura média.

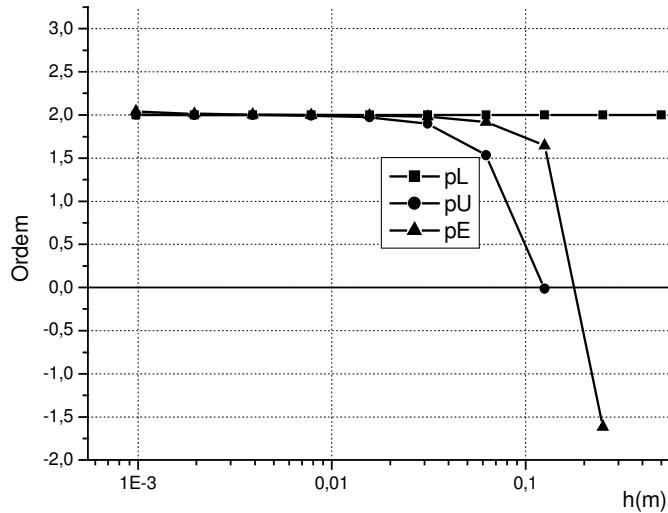


Figura 5.4. Ordem assintótica ( $p_L$ ), ordem aparente ( $p_U$ ) e ordem efetiva ( $p_E$ ) do erro de discretização para a temperatura média ( $\bar{T}$ )

Pela tabela 5.5, pode-se notar que, à medida que  $h$  diminui o erro verdadeiro diminui, ficando aproximadamente dividido por 4 à medida que  $h$  divide por 2, a ordem aparente vai aumentando se aproximando da ordem assintótica, a ordem efetiva vai aumentando, porém ultrapassa a ordem assintótica quando o número de elementos fica igual a 256. A ordem efetiva é para todos os valores de  $h$ , maior que a ordem aparente.

A tabela 5.6. mostra o erro verdadeiro de discretização e as estimativas do erro, usando o estimador de Richardson para o erro de discretização na solução numérica da temperatura média.

Tabela 5.6. Erro verdadeiro:  $E(\phi)$ , estimador de erro de Richardson:  $U_{Ri}(p_L)$  e  $U_{Ri}(p_U)$  e as razões:  $U_{Ri}(p_L)/E(\phi)$  e  $U_{Ri}(p_U)/E(\phi)$  para  $\bar{T}$

$h_x = h_y$ (m)	$E(\phi)$	$U_{Ri}(p_L)$	$U_{Ri}(p_U)$	$U_{Ri}(p_L)/E(\phi)$	$U_{Ri}(p_U)/E(\phi)$
0.5	-0,0050447368767				
0.25	-0,0016460740359	-0,0011328874357		-0,688236015520	
0.125	-0,0016133483132	-1,0908574191e-5	-2,8463569537e-6	0,006761450148	0,001764254445
0.0625	-0,0004267320339	-0,0003955387598	0,0012202701427	0,926901962724	-2,85957004814
0,03125	-0,0001081654439	-0,0001061888634	-0,000116911132	0,981726321930	1,080854738845
0,015625	-2,7130538102E-5	-2,701163525e-5	-2,764538958e-5	0,995617379529	1,018976825116
0,0078125	-6,7843516827E-6	-6,782062140e-6	-6,821157315e-6	0,999662525895	1,005425077288
0,00390625	-1,6923328717E-6	-1,697339604e-6	-1,699775185e-6	1,002958479428	1,004397665309
0,001953125	-4,1898625068E-7	-4,244488737e-7	-4,246008918e-7	1,013037714193	1,013400537777
0,0009765625	-1,01719316E-7	-1,057755645e-7	-1,052823415e-7	1,039681050677	1,035280164596

A figura 5.5 mostra o erro verdadeiro, e as estimativas do erro, usando o estimador de Richardson para a temperatura média, para  $h$  variando de 0,5m a 0,0009765625m.

Na tabela 5.6 pode-se observar que a razão entre o valor dado pelo estimador de Richardson para a ordem assintótica e o erro verdadeiro vai aumentando, porém ultrapassa 1, quando o número de elementos fica igual a 256, a razão entre o valor dado pelo estimador de Richardson para a ordem aparente e o erro verdadeiro vai diminuindo sem se tornar menor que 1.

Nota-se, então, através dessa tabela que até 256 elementos:

$$\frac{U_{Ri}(p_L)}{E} < 1 < \frac{U_{Ri}(p_U)}{E}$$

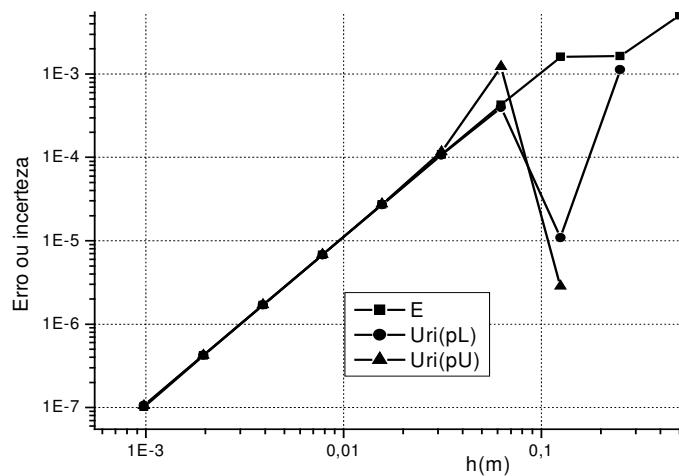


Figura 5.5. Erro verdadeiro de discretização ( $E$ ), estimativa do erro da solução numérica da temperatura média.

#### 5.4.4 Fluxo de Calor (q)

A tabela 5.7 mostra a solução numérica e as ordens aparente e efetiva do erro de discretização no cálculo do fluxo de calor, através da superfície 1 da placa.

Tabela 5.7. Solução numérica da temperatura média, ordem aparente e efetiva do erro de discretização do fluxo de calor

Elementos	$h_x = h_y$ (m)	Sol. Numérica (°C)	$p_u$	$p_E$
2	0,5	-401		
4	0,25	-646,872501539374		1,35326156188727
8	0,125	-755,095120977838	1,18390832638425	1,66381605897953
16	0,0625	-791,059706491333	1,589355318362153	1,83984664952145
32	0,03125	-801,326744085314	1,80855700455849	1,92384542831717
64	0,015625	-804,058667949682	1,91003078977629	1,96316447364943
128	0,0078125	-804,76243358749	1,95675029828388	1,98192303981518
256	0,00390625	-804,940973775803	1,97884622180272	1,99103867009396
512	0,001953125	-804,985933401296	1,98954692942175	1,99548608645976
1024	0,0009765625	-804,997193155396	1,99745469720162	1,98962080293728

Pela tabela 5.7 pode-se notar que o erro verdadeiro diminui, ficando aproximadamente dividido por valores inferiores a 4 à medida que  $h$  divide por 2 em quanto o valor de  $h$  é grande, mas quando  $h$  se torna muito pequeno o erro fica dividido por um número cada vez mais próximo de 4, a ordem aparente vai aumentando se aproximando monotonicamente da ordem assintótica por valores inferiores e a ordem efetiva vai aumentando, se aproximando monotonicamente da ordem assintótica por valores inferiores. A ordem efetiva é para todos os valores de  $h$ , maior que a ordem aparente.

A figura 5.6 mostra a ordem assintótica, a ordem aparente e a ordem efetiva do erro de discretização no cálculo do fluxo de calor (q) em função de  $h$ .

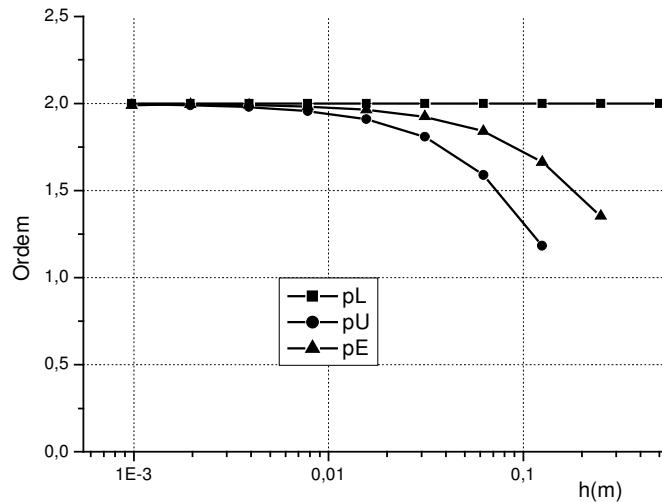


Figura 5.6. Ordem assintótica ( $p_L$ ), aparente ( $p_U$ ) e efetiva ( $p_E$ ) para o erro de discretização da solução numérica de  $q$ .

A tabela 5.8 mostra o erro verdadeiro de discretização, as estimativas do erro de discretização, dadas pelo estimador de Richardson e as razões entre as estimativas do erro e o erro verdadeiro.

Tabela 5.8. Erro verdadeiro:  $E(\phi)$ , estimador de erro de Richardson:  $U_{Ri}(p_L)$  e  $U_{Ri}(p_U)$  e as razões:  $U_{Ri}(p_L)/E(\phi)$  e  $U_{Ri}(p_U)/E(\phi)$  para  $q$

$h_x = h_y$ (m)	$E(\phi)$	$U_{Ri}(p_L)$	$U_{Ri}(p_U)$	$U_{Ri}(p_L)/E(\phi)$	$U_{Ri}(p_U)/E(\phi)$
0,5	-404,000982626498				
0,25	-158,128481087124	-81,957500513124		0,518296893448110	
0,125	-49,9058616486595	-36,074206479488	-85,0864176515352	0,722845078468993	1,70493835474777
0,0625	-13,9412761351645	-11,988195171165	-17,9004512148861	0,859906586379622	1,28398943119241
0,03125	-3,67423854118351	-3,4223458646603	-4,1020279945143	0,931443570225564	1,11642941756117
0,015625	-0,94231467681551	-0,9106412881227	-0,99048378943136	0,966387673383291	1,0511178630674
0,0078125	-0,23854903900751	-0,2345885459360	-0,24420484875057	0,983397572725567	1,02370921202026
0,00390625	-0,06000885069451	-0,0595133961043	-0,06069126862282	0,991743641405549	1,01137195464356
0,001953125	-0,01504922520151	-0,0149865418310	-0,01513220098642	0,995834777560388	1,00551362504029
0,0009765625	-0,003789471102	-0,0037532513667	-0,00376209335976	0,990442007902638	0,99277531322661

Pela tabela 5.8 pode-se verificar que a razão entre o valor dado pelo estimador de Richardson para a ordem assintótica e o erro verdadeiro vai aumentando, ficando cada vez mais próximo de 1, a razão entre o valor dado pelo estimador de Richardson para a ordem aparente e o erro verdadeiro vai diminuindo, se aproximando monotonicamente de 1, sem se tornar menor que 1 e sendo para todos os valores de  $h$ , maior que a mesma razão para a ordem assintótica.

Nota-se, então, que  $\frac{U_{Ri}(p_L)}{E} < 1 < \frac{U_{Ri}(p_U)}{E}$ .

A figura 5.7 mostra o módulo do erro e das estimativas do erro dadas pelo estimador de Richardson para ordem assintótica e para a ordem efetiva.

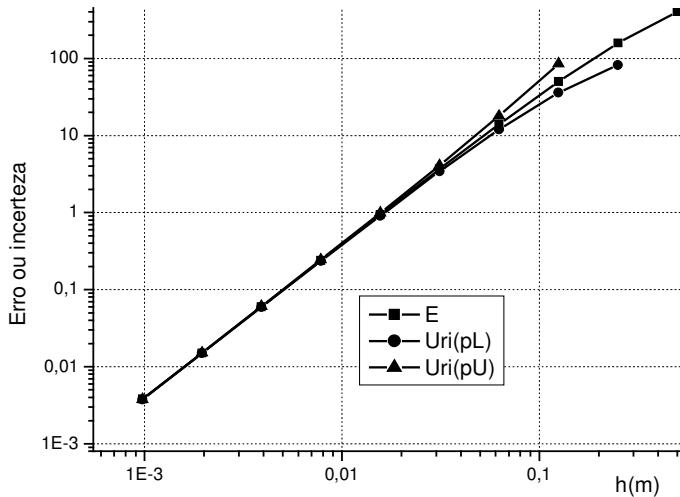


Figura 5.7:  $E$ ,  $U_{Ri}(p_L)$  e  $U_{Ri}(p_U)$  em função de  $h$ , para o fluxo de calor.

## 5.5 CONCLUSÃO DO CAPÍTULO 5

A partir das tabelas e gráficos produzidos pode-se observar que o módulo da estimativa do erro obtido pelo estimador de Richardson fica cada vez mais próximo do erro verdadeiro a medida que o número de elementos na malha em cada direção aumenta, e isso pode ser visualizado nos gráficos 5.3, 5.5 e 5.7.

Além do erro de truncamento que pode existir quando se obtém uma solução numérica para um problema, existem também os erros de arredondamento e quando se utilizam dados que já foram obtidos por uma aproximação numérica, o novo erro soma-se ao primeiro.

Nos problemas bidimensionais, que envolvem a discretização em duas direções haverá erro de truncamento na aproximação das derivadas segundas nas duas direções.

A partir das tabelas e gráficos pode-se afirmar que o estimador de Richardson fornece aproximações do erro cometido na aplicação de um método numérico que são tanto melhores quanto maior for o número de elementos, ou seja, o erro fica limitado pelos valores de  $U_{Ri}(p_L)$  e de  $U_{Ri}(p_U)$ .

Também, pode-se observar que a ordem efetiva do erro é maior que a ordem aparente do erro e que ambas tendem a ordem assintótica do erro.

## CAPÍTULO 6

### TERMOELASTICIDADE BIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE

Neste capítulo será abordado o problema termoelástico bidimensional em uma placa retangular em regime permanente, ou seja, o caso 8 definido na tabela 2.1. Quando necessário, serão usadas as mesmas condições de contorno para a distribuição de temperaturas e os resultados obtidos no capítulo 5.

Será utilizada uma malha regular para determinar as soluções numéricas das variáveis de interesse definidas na tabela 2.1. Essa malha está representada na figura 6.1 sendo refinada na razão 2 em cada direção, iniciando com 4 elementos em cada direção e terminando com 1024 elementos em cada direção.

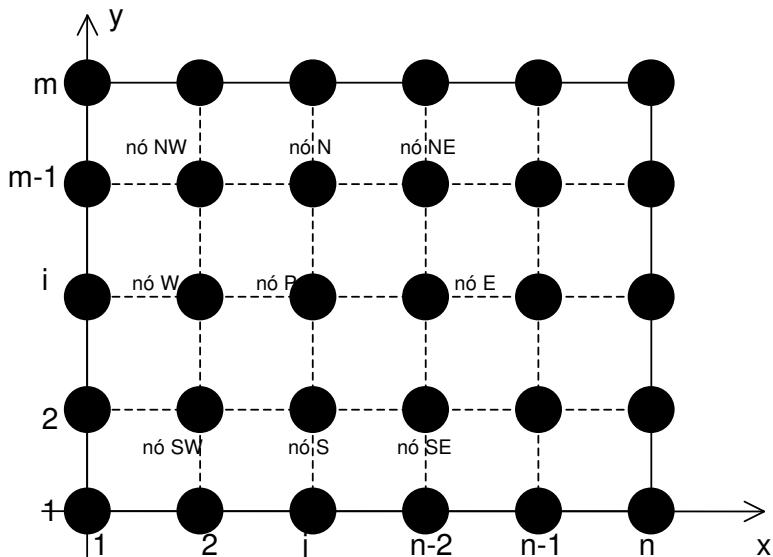


Figura 6.1: Malha utilizada para a resolução numérica, onde se pode ver o nó P e os 8 nós vizinhos.

A seguir será feita uma análise dos erros de discretização através da estimativa do erro usando o estimador de Richardson para a ordem assintótica e aparente do erro de truncamento e do estimador GCI para a ordem prática do erro de truncamento.

## 6.1 MODELO NUMÉRICO

### 6.1.1 Deslocamentos

De acordo Timoshenko e Goodier (1970, p478), os deslocamentos nas direções x e y, conforme definidos na tabela 2.1, podem ser dados pelas equações

$$(1 + C_u) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C_u \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 2 \cdot C_u \cdot \alpha \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \quad (6.1)$$

$$(1 + C_u) \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + C_u \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 2 \cdot C_u \cdot \alpha \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \quad (6.2)$$

onde  $C_\mu = \frac{1+\mu}{1-\mu}$ , sendo  $\mu$  a razão de Poisson.

Conforme demonstrado no apêndice F, a equação 6.1 pode ser aproximada por

$$a_p^u \cdot u_p = a_w^u \cdot u_w + a_e^u \cdot u_e + a_s^u \cdot u_s + a_n^u \cdot u_n + b_p^u \quad (6.3)$$

onde:

$$\begin{cases} a_w^u = a_e^u = \frac{1+C_\mu}{h_x^2} \\ a_s^u = a_n^u = \frac{1}{h_y^2} \\ a_p^u = a_w^u + a_e^u + a_s^u + a_n^u \\ b_p^u = C_\mu \cdot \left[ \frac{v_{SW} + v_{NE} - v_{SE} - v_{NW}}{4 \cdot h_x \cdot h_y} - \alpha \left( \frac{T_e - T_w}{h_x} \right) \right] \end{cases} \quad (6.4)$$

Conforme demonstrado no apêndice F, a equação 6.2 pode ser aproximada por

$$a_p^v \cdot v_p = a_n^v \cdot v_n + a_s^v \cdot v_s + a_w^v \cdot v_w + a_e^v \cdot v_e + b_p^v \quad (6.5)$$

onde:

$$\begin{cases} a_N^v = a_S^v = \frac{1+C_\mu}{h_y^2} \\ a_W^v = a_E^v = \frac{1}{h_x^2} \\ a_P^v = a_N^v + a_S^v + a_W^v + a_E^v \\ b_P^v = C_\mu \cdot \left[ \frac{u_{NE} + u_{SW} - u_{NW} - u_{SE}}{4 \cdot h_x \cdot h_y} - \alpha \cdot \left( \frac{T_N - T_S}{h_y} \right) \right] \end{cases} \quad (6.6)$$

### 6.1.2 Força

A força normal em  $x = 1$  pode ser dada por

$$F_x = W \cdot \int_0^1 (\sigma_x)_{x=1} dy \quad (6.7)$$

e a força normal em  $y = 1$  pode ser dada por

$$F_y = W \cdot \int_0^1 (\sigma_y)_{y=1} dx \quad (6.8)$$

onde  $\sigma_x$  é a deformação normal na direção  $x$  e  $\sigma_y$  é a deformação normal na direção  $y$  e que podem ser dadas por:

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\mu} \cdot \left[ \frac{\mu}{1-\mu} \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} - C_\mu \cdot \alpha \cdot (T - T_o) \right] \quad (6.9)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\mu} \cdot \left[ \frac{\mu}{1-\mu} \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} - C_\mu \cdot \alpha \cdot (T - T_o) \right] \quad (6.10)$$

onde  $E$  é o módulo de Young,  $\mu$  é a razão de Poisson,  $\alpha$  é o coeficiente de expansão térmica,  $T_o$  é a temperatura inicial e  $T$  é a temperatura.

Nas equações 6.9 e 6.10 a solução numérica pode ser obtida substituindo as derivadas pelas aproximações numéricas convenientes. Nesse caso foi utilizada a aproximação com dois pontos a montante (UDS -2) como a seguir:

Derivada de  $u$  em relação a  $x$ :

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_p = \frac{3u_p + u_{WW} - 4u_w}{2h_x} + u_p^{iii} \cdot \frac{h_x^2}{3} - u_p^{iv} \cdot \frac{h_x^3}{4} + u_p^v \cdot \frac{7.h_x^4}{60} - \dots \quad (6.11)$$

portanto a derivada  $\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_p$  é aproximada por:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_p = \frac{3u_p + u_{WW} - 4u_w}{2h_x} \quad (6.12)$$

com erro de truncamento dado por:

$$\varepsilon_u = u_p^{iii} \cdot \frac{h_x^2}{3} - u_p^{iv} \cdot \frac{h_x^3}{4} + u_p^v \cdot \frac{7.h_x^4}{60} - \dots \quad (6.13)$$

A derivada de  $v$  em relação a  $y$ :

$$\left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_p = \frac{3v_p + v_{SS} - 4v_s}{2h_y} + v_p^{iii} \cdot \frac{h_y^2}{3} - v_p^{iv} \cdot \frac{h_y^3}{4} + v_p^v \cdot \frac{7.h_y^4}{60} - \dots \quad (6.14)$$

então a derivada  $\left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_p$  é aproximada por:

$$\left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_p = \frac{3v_p + v_{SS} - 4v_s}{2h_y} \quad (6.15)$$

com erro de truncamento dado por:

$$\varepsilon_v = v_p^{iii} \cdot \frac{h_y^2}{3} - v_p^{iv} \cdot \frac{h_y^3}{4} + v_p^v \cdot \frac{7.h_y^4}{60} - \dots \quad (6.16)$$

Substituindo as equações 6.12 e 6.14 na equação 6.9, vem

$$(\sigma_x)_p = \frac{E}{1+\mu} \cdot \left[ \frac{\mu}{1-\mu} \cdot \left( \frac{3u_p + u_{WW} - 4u_w}{2h_x} + \frac{3v_p + v_{SS} - 4v_s}{2h_y} \right) + \right. \\ \left. + \frac{3u_p + u_{WW} - 4u_w}{2h_x} - C_\mu \cdot \alpha \cdot (T_p - T_o) \right] \quad (6.17)$$

Substituindo as equações 6.12 e 6.14 na equação 6.10, vem

$$(\sigma_y)_p = \frac{E}{1+\mu} \cdot \left[ \frac{\mu}{1-\mu} \cdot \left( \frac{3u_p + u_{WW} - 4u_w}{2h_x} + \frac{3v_p + v_{SS} - 4v_s}{2h_y} \right) + \right. \\ \left. + \frac{3v_p + v_{SS} - 4v_s}{2h_y} - C_\mu \cdot \alpha \cdot (T_p - T_o) \right] \quad (6.18)$$

Com as duas equações anteriores pode-se obter as tensões nos pontos P correspondentes a  $x=1$  e a  $y=1$ .

Para a obtenção da força normal resolve-se as equações 6.7 e 6.8 usando a regra do trapézio, que aplicada a essas duas equações resulta em

$$F_x = \frac{W.h_y}{2L_y} \cdot \sum_{i=2}^{N_y} (\sigma_{x_{i,N_x-1}} + \sigma_{x_{i,N_x}}) \quad (6.19)$$

$$F_y = \frac{W.h_x}{2L_x} \cdot \sum_{j=2}^{N_x} (\sigma_{y_{N_y-1,j}} + \sigma_{y_{N_y,j}}) \quad (6.20)$$

### 6.1.3 Programa Computacional

O programa computacional usado para a resolução do caso 8 é o mesmo descrito na seção 3.2.4, apenas utilizando outra rotina com código específico para esse caso. Em cada nó, a solução numérica da temperatura é dada pelo sistema de equações 5.16, do deslocamento na direção x é dado pelo sistema de equações 6.3 e do deslocamento na direção y é dado pelo sistema de equações 6.5. Essas soluções são obtidas usando o método iterativo de Gauss-Seidel, onde são feitas tantas iterações quantas necessárias até atingir o erro de máquina.

O algoritmo para a solução do caso 8 é

Para  $i=1$  até 10 faça

$n=2^i;$

$hx=hy= L/n;$

Resolver o sistema de equações 5.16;

$T34[i]=T[3*i/4, 3*i/4];$

$Erro\_T34[i]=T34\_an - T34[i];$

Resolver o sistema de equações 6.3;

$u34[i]=u[3*i/4, 3*i/4];$

Resolver o sistema de equações 6.5;

$v34[i]=v[3*i/4, 3*i/4];$

Calcular  $\sigma_x[i]$  pela equação 6.17;

Calcular  $\sigma_y[i]$  pela equação 6.18;

Calcular  $F_x[i]$  pela equação 6.19;

Calcular  $F_y[i]$  pela equação 6.20;  
 Mostrar  $u34[i]$ ,  $v34[i]$ ,  $\sigma_x[i]$ ,  $\sigma_y[i]$ ,  $F_x[i]$ ,  $F_y[i]$ ;  
 Gravar  $u34[i]$ ,  $v34[i]$ ,  $\sigma_x[i]$ ,  $\sigma_y[i]$ ,  $F_x[i]$ ,  $F_y[i]$ ;  
 Fim\_Para;  
 Gravar  $T[i][j]$ ,  $u[i][j]$ ,  $v[i][j]$ ;  
 Para  $i=3$  até 10 calcular  $pU$  e  $p$  de cada variável de interesse;  
 Para  $i=2$  até 10 calcular  $Ur(pL)$  de cada variável de interesse;  
 Para  $i=3$  até 10 calcular  $Uri(pU)$  e  $U_{GCI}(p)$  de cada variável de interesse;

## 6.2 ORDENS DO ERRO DE TRUNCAMENTO

### 6.2.1 Deslocamentos

De acordo com o apêndice F, a aproximação dos deslocamentos, conforme visto no item 6.1, será dado, na direção x, em relação a x, por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_w + u_e - 2u_p}{h_x^2} \quad (6.21)$$

com erro de truncamento dado por

$$\epsilon_{u_x} = -u_{p_x}^{iv} \cdot \frac{h_x^2}{12} - u_{p_x}^{vi} \cdot \frac{h_x^4}{360} - u_{p_x}^{viii} \cdot \frac{h_x^6}{20160} - u_{p_x}^X \frac{h_x^8}{1814400} - \dots \quad (6.22)$$

A aproximação dos deslocamentos, na direção x, em relação a y, é dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_s + u_n - 2u_p}{h_y^2} \quad (6.23)$$

com erro de truncamento dado por:

$$\epsilon_{u_y} = -u_{p_y}^{iv} \cdot \frac{h_y^2}{12} - u_{p_y}^{vi} \cdot \frac{h_y^4}{360} - u_{p_y}^{viii} \cdot \frac{h_y^6}{20160} - u_{p_y}^X \frac{h_y^8}{1814400} - \dots \quad (6.24)$$

a aproximação dos deslocamentos na direção y, em relação a y, é dada por

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{v_w + v_e - 2v_p}{h_x^2} \quad (6.25)$$

com erro de truncamento dado por:

$$\varepsilon_{u_y} = -u_{P_y}^{iv} \cdot \frac{h_y^2}{12} - u_{P_y}^{vi} \cdot \frac{h_y^4}{360} - u_{P_y}^{viii} \cdot \frac{h_y^6}{20160} - u_{P_y}^X \cdot \frac{h_y^8}{1814400} - \dots \quad (6.26)$$

A aproximação dos deslocamentos na direção y, em relação a x, é dada por

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{v_w + v_E - 2v_P}{h_x^2} \quad (6.27)$$

com erro de truncamento dado por:

$$\varepsilon_{v_x} = -v_{P_x}^{iv} \cdot \frac{h_x^2}{12} - v_{P_x}^{vi} \cdot \frac{h_x^4}{360} - v_{P_x}^{viii} \cdot \frac{h_x^6}{20160} - v_{P_x}^X \cdot \frac{h_x^8}{1814400} - \dots \quad (6.28)$$

Pelas equações anteriores observa-se que o menor valor do expoente de h é que corresponde a um coeficiente não nulo é 2, portanto a ordem assintótica do erro de truncamento na aproximação da derivada segunda dos deslocamentos por diferenças centrais de 3 pontos é :

$$p_L(u) = 2 \quad \text{e} \quad p_L(v) = 2 \quad (6.29)$$

onde  $p_L(u)$  é a ordem assintótica do erro de truncamento na aproximação da derivada segunda dos deslocamentos na direção horizontal (u), e  $p_L(v)$  é a ordem assintótica do erro de truncamento na aproximação da derivada segunda dos deslocamentos na direção vertical (v).

### 6.2.2 Força Normal

Para o cálculo da força normal utilizam-se as equações 6.7 e 6.8, onde se observa que cada força depende das tensões produzidas.

A tensão na direção x, é dada pela equação 6.9, mostrada a seguir

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\mu} \cdot \left[ \frac{\mu}{1-\mu} \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} - C_\mu \cdot \alpha \cdot (T - T_o) \right]$$

e a tensão na direção y é dada pela equação 6.10:

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\mu} \cdot \left[ \frac{\mu}{1-\mu} \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} - C_\mu \cdot \alpha \cdot (T - T_o) \right]$$

Como se pode observar, as tensões dependem da derivada primeira dos deslocamentos na direção x, em relação a x e da derivada primeira dos deslocamentos na direção y, em relação a y.

Para o cálculo numérico dessas derivadas foi utilizada a aproximação com dois pontos a montante, UDS-2, cuja expressão geral é:

$$A_P^i = (\lambda_{UDS-2}^i)_P + \varepsilon(\lambda_{UDS-2}^i)_P \quad (6.30)$$

onde  $(\lambda_{UDS-2}^i)_P$  representa a aproximação numérica da derivada e  $\varepsilon(\lambda_{UDS-2}^i)_P$  representa o erro de truncamento cometido no cálculo da derivada primeira pela aproximação UDS-2 e cujos valores são dados por:

$$(\lambda_{UDS-2}^i)_P = \frac{3A_P + A_{WW} - 4A_W}{2h} \quad (6.31)$$

$$\varepsilon(\lambda_{UDS-2}^i)_P = A_P^{iii} \cdot \frac{h^2}{3} - A_P^{iv} \cdot \frac{h^3}{4} + A_P^v \cdot \frac{7h^4}{60} - \dots \quad (6.32)$$

Aplicando as equações 6.31 e 6.32 para as derivadas dos deslocamentos, tem-se:

Para a derivada de u, na direção x, em relação a x:

$$u_P^i = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_P = \frac{3u_P + u_{WW} - 4u_W}{2.h_x} \quad (6.33)$$

com erro de truncamento dado por:

$$\varepsilon_u = u_P^{iii} \cdot \frac{h_x^2}{3} - u_P^{iv} \cdot \frac{h_x^3}{4} + u_P^v \cdot \frac{7.h_x^4}{60} - \dots \quad (6.34)$$

Para a derivada de v, na direção y, em relação a y

$$v_P^i = \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_P = \frac{3v_P + v_{SS} - 4v_S}{2.h_y} \quad (6.35)$$

com erro de truncamento dado por:

$$\varepsilon_v = v_P^{iii} \cdot \frac{h_y^2}{3} - v_P^{iv} \cdot \frac{h_y^3}{4} + v_P^v \cdot \frac{7.h_y^4}{60} - \dots \quad (6.36)$$

Pelas equações 6.34 e 6.36 pode-se observar que o menor expoente de  $h$  e que corresponde a um coeficiente não nulo é 2, portanto a ordem assintótica do erro pela utilização dessa aproximação numérica, no cálculo das derivadas dos deslocamentos é 2, ou seja:

$$p_L(u) = 2 \quad \text{e} \quad p_L(v) = 2 \quad (6.37)$$

Como no cálculo das tensões são utilizadas essas derivadas, então, a ordem assintótica do erro de truncamento no cálculo das tensões será, também, igual a 2, ou seja:

$$p_L(\sigma_x) = 2 \quad \text{e} \quad p_L(\sigma_y) = 2 \quad (6.38)$$

Para o cálculo das forças normais nas direções  $x$  e  $y$ , utiliza-se a tensão na direção  $x$  e na direção  $y$ , portanto a ordem assintótica do erro de truncamento no cálculo da força normal é 2, ou seja:

$$p_L(F_x) = 2 \quad \text{e} \quad p_L(F_y) = 2 \quad (6.39)$$

### 6.3 SOLUÇÕES NUMÉRICAS

Para a obtenção da solução numérica foi utilizado o programa de computador, escrito em C++ *Builder* 6.0, TERMOEL\_1D\_2D, que torna possível a determinação do número de elementos em cada direção, até um valor máximo de 1024. Pode-se efetuar o cálculo das temperaturas a cada vez, ou utilizar dados armazenados na base de dados.

Como todas as variáveis que envolvem números decimais foram definidos como *long double*, onde cada uma ocupa um espaço de 10 bytes, uma matriz com 1024 linhas e 1024 colunas irá ocupar um espaço de 10485760 bytes, ou seja, 10,5 Mbyte.

Nesse programa são utilizadas três dessas matrizes: uma para a temperatura, uma para os deslocamentos na direção  $x$  e outra para os deslocamentos na direção  $y$ .

De acordo com Jamsa e Klander (1999, p. 515), o operador *new* com o ponteiro  $*$ , podem ser utilizados para alocar dinamicamente a memória necessária para

armazenar e realizar as operações sobre os elementos das matrizes que contém os valores da temperatura (T), dos deslocamentos na direção x (u), dos deslocamentos na direção y (v), das tensões na direção x ( $\sigma_x$ ) e das tensões na direção y ( $\sigma_y$ ).

O código, em linguagem de programação C++, para essas alocações está descrito a seguir:

```

long double **T;
long double **u;
long double **v;
long double ** $\sigma_x$ ;
long double ** $\sigma_y$ ;

T = new long double*[1025];
for(i=0;i<1025;i++)
    T[i]=new long double[1025];

u = new long double*[1025];
for(i=0;i<1025;i++)
    u[i]=new long double[1025];

v = new long double*[1025];
for(i=0;i<1025;i++)
    v[i]=new long double[1025];

 $\sigma_x$  = new long double*[1025];
for(i=0;i<1025;i++)
    sx[i]=new long double[1025];

 $\sigma_y$  = new long double*[1025];
for(i=0;i<1025;i++)
    sy[i]=new long double[1025];

```

As soluções numéricas para as variáveis de interesse estão gravadas no arquivo “CASO8.DAT”, a temperatura em cada um dos nós para a malha com 1024 elementos em cada direção, está gravada no arquivo “TCASO\_8.DAT”, o deslocamento na direção x está gravado no arquivo “uCASO\_8.DAT” e o deslocamento na direção y está gravado no arquivo “vCASO\_8.DAT”.

A tabela 6.1 a seguir mostra o tempo (em s) gasto pela CPU e o número de iterações necessárias para atingir o erro de máquina em função do número de elementos em cada direção.

Tabela 6.1: Número de iterações e tempo para atingir erro de máquina

$N_x = N_y$	Número de iterações para atingir o erro de máquina para as variáveis $u$ e $v$	Tempo gasto, em s, para atingir o erro de máquina para as variáveis $u$ e $v$
4	48	0
8	204	0
16	803	0
32	3090	1
64	11780	18
128	44723	286
256	169202	4335
512	637940	65098

Na tabela 5.1 pode-se observar que o número de iterações multiplica por aproximadamente 4 e o tempo fica multiplicado por aproximadamente 16 a cada refinamento da malha. Por esse motivo não foi utilizada a malha com 1024 elementos em cada direção, pois levaria em torno de 12 dias só para os deslocamentos.

Na seqüência desse trabalho e por causa do motivo acima o número máximo de elementos em cada direção será 512.

A tabela 6.2, a seguir, mostra as soluções numéricas para o deslocamento na direção horizontal e o deslocamento na direção vertical no ponto de coordenadas  $(3/4, 3/4)$ ; a força normal em  $x=1m$  e a força normal em  $y=1$ . Para a obtenção das soluções numéricas das forças normais foi considerado que a espessura da placa é constante e igual a 1m.

Tabela 6.2. Deslocamento na direção horizontal ( $u$ ) e deslocamento vertical ( $v$ ) no ponto  $(3/4, 3/4)$ ; força normal em  $x=1m$  ( $F_x$ ) e força normal em  $y=1m$  ( $F_y$ ).

Elem.	$h_x = h_y$ (m)	$u(3/4, 3/4)$ (m)	$v(3/4, 3/4)$ (m)	$F_x$ (N)	$F_y$ (N)
4	0,25	4,01105250354279e-7	-1,22238165145581e-6	-288663,236892044	-892358,330404029
8	0,125	4,85009553922464e-7	-1,17428660283289e-6	-363471,172385744	-1155074,93199802
16	0,0625	5,13793546155854e-7	-1,15537187586918e-6	-392489,024765256	-1361705,2225826
32	0,03125	5,21978839591828e-7	-1,14950937706017e-6	-401468,181207765	-1493738,23246381
64	0,015625	5,24137426890739e-7	-1,14790540624212e-6	-403979,551150735	-1568041,69040052
128	0,0078125	5,24689204312759e-7	-1,14748959940496e-6	-404652,590754524	-1607280,15282755
256	0,00390625	5,24828490474869e-7	-1,14738403854275e-6	-404830,695719154	-1627381,15301178
512	0,001953125	5,24863383505467e-7	-1,14735736064812e-6	-404877,369218031	-1637536,44372347

## 6.4 VERIFICAÇÃO DO CASO 8

### 6.4.1 Dos Deslocamentos

De acordo com a equação 6.37, a ordem assintótica do erro de truncamento, no cálculo do deslocamento horizontal, é 2. A tabela 6.3 mostra as estimativas do erro no cálculo dos deslocamentos na direção horizontal, calculadas através das equações 2.32, 2.35 e 2.36.

Tabela 6.3. Estimativa do erro de discretização para  $u(3/4, 3/4)$

Elem.	$hx = hy$ (m)	$UR_i(p_L)$	$UR_i(p_U)$	$UGCI(p)$
4	0,25			
8	0,125	2,7968101189395e-8		8,3904303568185e-8
16	0,0625	9,59466407779667e-9	1,50310872494809e-8	4,50932617484428e-8
32	0,03125	2,72843114532467e-9	3,25258548085589e-9	9,75775644256768e-9
64	0,015625	7,19529099637e-10	7,73141915509191e-10	2,31942574652757e-9
128	0,0078125	1,8392580734e-10	1,89479992517927e-10	5,6843997755378e-10
256	0,00390625	4,64287207033333e-11	4,70328388523096e-11	1,41098516556929e-10
512	0,001953125	1,16310101993333e-11	1,16628705996142e-11	3,49886117988427e-11

Na tabela anterior,  $p$  é a ordem prática do erro de truncamento e é o menor valor entre  $p_L$  e  $p_U$ .

A tabela 6.4 mostra as razões  $UR_i(p_U)/UR_i(p_L)$  e  $UGCI(p)/UR_i(p_L)$ , para o deslocamento do ponto  $(3/4, 3/4)$  na direção horizontal.

Tabela 6.4. Razões  $UR_i(p_U)/UR_i(p_L)$  e  $UGCI(p)/UR_i(p_L)$  para  $u(3/4, 3/4)$

Elem	$hx = hy$	$UR_i(p_U)/UR_i(p_L)$	$UGCI(p)/UR_i(p_L)$
4	0,25		
8	0,125		3,0000000000000000
16	0,0625	1,566609015970120	4,699827047910370
32	0,03125	1,192108324386120	3,576324973158360
64	0,015625	1,074510976552910	3,223532929658730
128	0,0078125	1,030197965463650	3,090593896390940
256	0,00390625	1,013011733681750	3,039035201045270
512	0,001953125	1,002739263377370	3,008217790132130

Pode-se notar, através dessa tabela que à medida que o número de elementos em cada direção aumenta, a razão  $UR_i(p_U)/UR_i(p_L)$  se torna cada vez mais próxima de 1 e a razão  $UGCI(p)/UR_i(p_L)$  se aproxima do fator de segurança, que nesse caso é 3.

A ordem prática ( $p$ ) do erro de truncamento é o menor valor entre a ordem assintótica e a ordem aparente do erro de truncamento.

A tabela 6.5 mostra as estimativas do erro de discretização no cálculo do deslocamento na direção vertical para o ponto (3/4, 3/4).

Tabela 6.5. Estimativa do erro de discretização para  $v(3/4, 3/4)$

Elem.	$hx = hy$	$URi(pL)$	$URi(pU)$	$UGCI(p)$
4	0,25			
8	0,125	1,60316828743067e-8		4,809504862292e-8
16	0,0625	6,30490898790333e-9	1,22605535432396e-8	3,67816606297188e-8
32	0,03125	1,95416626967e-9	2,6331820037384e-9	7,89954601121519e-9
64	0,015625	5,3465693935e-10	6,04134196280348e-10	1,81240258884104e-9
128	0,0078125	1,38602279053333e-10	1,4551470050413e-10	4,36544101512389e-10
256	0,00390625	3,518695407e-11	3,59169708239227e-11	1,07750912471768e-10
512	0,001953125	8,89263154333334e-12	9,02235404832605e-12	2,70670621449781e-11

Na tabela anterior, pode-se observar que a estimativa do erro vai diminuindo a medida que o número de elementos aumenta. A tabela 6.6 mostra as razões  $URi(pU)/URi(pL)$  e  $UGCI(p)/URi(pL)$ , para o deslocamento do ponto (3/4, 3/4) na direção vertical.

Tabela 6.6. Razões  $URi(pU)/URi(pL)$  e  $UGCI(p)/URi(pL)$  para  $v(3/4, 3/4)$

Elem	$hx = hy$	$URi(pU)/URi(pL)$	$UGCI(p)/URi(pL)$
4	0,25		
8	0,125		2,999999999999999
16	0,0625	1,944604365703430	5,833813097110290
32	0,03125	1,347470808706090	4,042412426118270
64	0,015625	1,129947358421670	3,389842075265000
128	0,0078125	1,049872350570350	3,149617051711040
256	0,00390625	1,020746801569420	3,062240404708270
512	0,001953125	1,014587639706040	3,043762919118110

Nessa tabela pode-se notar que a razão  $URi(pU)/URi(pL)$  se torna cada vez mais próxima de 1 a medida que o número de elementos aumenta e que a razão  $UGCI(p)/URi(pL)$  se aproxima de 3 à medida que o número de elementos aumenta.

A figura 6.2 mostra os módulos das incertezas do erro de truncamento no cálculo do deslocamento do ponto (3/4, 3/4) na direção x.

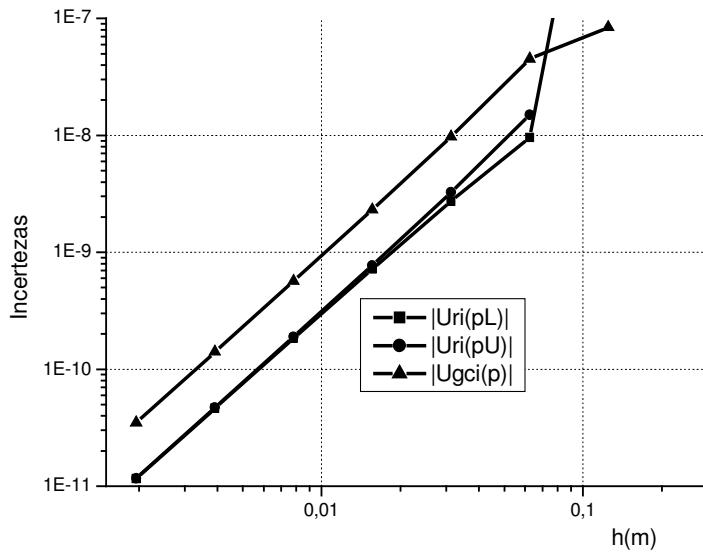


Figura 6.2.  $|U_{Ri}(p_L)|$ ,  $|U_{Ri}(p_U)|$  e  $|U_{GCI}(p)|$  em função de  $h$ , para  $u(3/4, 3/4)$ .

A figura 6.3 mostra o módulo das estimativas do erro de discretização em função de  $h$ , para os deslocamentos na direção  $y$ .

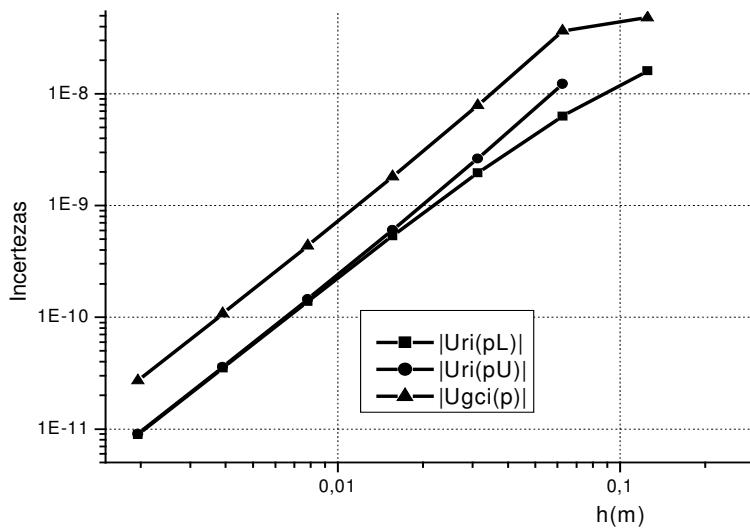


Figura 6.3.  $|U_{Ri}(p_L)|$ ,  $|U_{Ri}(p_U)|$  e  $|U_{GCI}(p)|$  em função de  $h$ , para  $v(3/4, 3/4)$ .

A tabela 6.7 mostra os valores das ordens aparentes dos erros de truncamento para o deslocamento na direção horizontal e na direção vertical no ponto (3/4, 3/4).

Tabela 6.7. Ordens aparentes dos deslocamentos na direção horizontal:  $u(3/4, 3/4)$  e na direção vertical:  $v(3/4, 3/4)$ .

Elem	$h_x = h_y$	$p_u$ (para $u(3/4, 3/4)$ )	$p_u$ (para $v(3/4, 3/4)$ )
4	0,25		
8	0,125		
16	0,0625	1,54347810796549	,3463784253645
32	0,03125	1,81416066026985	,68992232141497
64	0,015625	1,92294669670933	,86986783027559
128	0,0078125	1,96792911043963	,94766250835753
256	0,00390625	1,98603448950805	,97783844118701
512	0,001953125	1,99704112340732	,98435831829729

#### 6.4.2 Das Forças Normais

Segundo a equação 6.39, a ordem assintótica do erro de discretização no cálculo numérico das forças normais em  $x = 1m$  e  $y = 1m$ , é 2.

A tabela 6.8 mostra as ordens aparentes do erro para  $F_x$  e  $F_y$ :

Tabela 6.8: Ordens aparentes do erro, para  $F_x$  e  $F_y$ .

Elem.	$h_x=h_y$ (m)	$P_u$ para $F_x$	$P_u$ para $F_y$
4	0,25		
8	0,125		
16	0,0625	1,36625056773629	0,346455611260659
32	0,03125	1,69228892828644	0,646153092675241
64	0,015625	1,83810535195197	0,829397408610054
128	0,0078125	1,89971125847893	0,921160842362867
256	0,00390625	1,91796366834144	0,965001221437365
512	0,001953125	1,93205220370713	0,985035749000226

Na tabela 6.7 os espaços para os valores da ordem aparente para 8 e 16 elementos em cada direção estão vazios porque para calcular a ordem aparente são necessárias soluções numéricas em três malhas.

As estimativas do erro de truncamento no cálculo numérico das forças normais são obtidas pela aplicação das equações 2.32, 2.35 e 2.36. A tabela 6.9 mostra as estimativas do erro de truncamento no cálculo da força normal em  $x=1m$ .

Tabela 6.9. Estimativas do erro de discretização para  $F_x$  em  $x=1m$ 

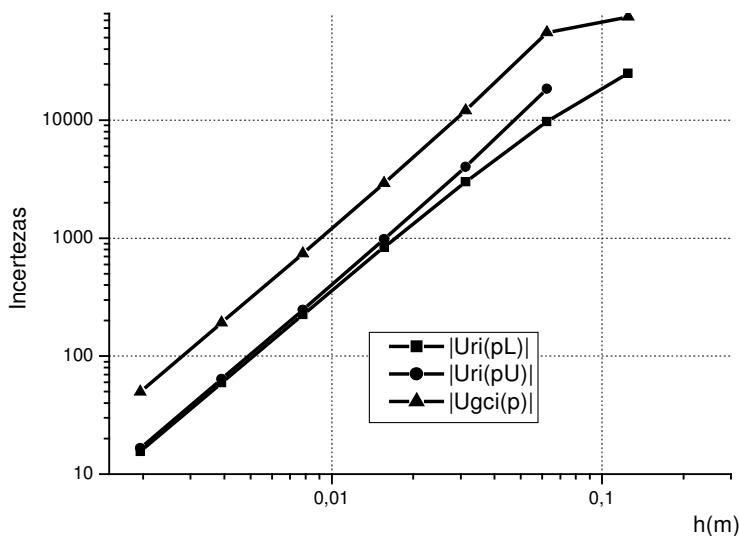
Elem.	$h_x = h_y$	$U_{Ri}(p_L)$	$U_{Ri}(p_U)$	$U_{Gci}(p)$
4	0,25			
8	0,125	-24935,9784979		-74807,9354937
16	0,0625	-9672,61745983733	-18389,0418940569	-55167,1256821707
32	0,03125	-2993,052147503	-4023,4779085684	-12070,4337257052
64	0,015625	-837,123314323333	-975,137164917654	-2925,41149475296
128	0,0078125	-224,346534596333	-246,409635207491	-739,228905622474
256	0,00390625	-59,3683215433333	-64,0920556293149	-192,276166887945
512	0,001953125	-15,557832959	-16,5745355188782	-49,7236065566346

A tabela 6.10 mostra as razões  $U_{Ri}(p_U)/U_{Ri}(p_L)$  e  $U_{Gci}(p)/U_{Ri}(p_L)$  para a força normal  $F_x$  em  $x = 1$ .

Tabela 6.10 Razões  $U_{Ri}(p_U)/U_{Ri}(p_L)$  e  $U_{Gci}(p)/U_{Ri}(p_L)$  para  $F_x$  em  $x=1$ .

Elem	$h_x = h_y$	$U_{Ri}(p_U)/U_{Ri}(p_L)$	$U_{Gci}(p)/U_{Ri}(p_L)$
4	0,25		
8	0,125		3,000000000000000
16	0,0625	1,901144335585680	5,703433006757040
32	0,03125	1,344272572038230	4,032817716114680
64	0,015625	1,164866810221240	3,494600430663720
128	0,0078125	1,098343844048480	3,295031532145440
256	0,00390625	1,079566576301700	3,238699728905110
512	0,001953125	1,065349882760510	3,196049648281520

A figura 6.4 mostra os módulos das incertezas do erro de truncamento no cálculo da força normal  $F_x$  em  $x=1m$ .

Figura 6.4  $|U_{Ri}(p_L)|$ ,  $|U_{Ri}(p_U)|$  e  $|U_{Gci}(p)|$  em função de  $h$  para a força normal  $F_x$  em  $x=1m$ .

A tabela 6.11 mostra as estimativas do erro de discretização para a força normal  $F_y$  em  $y=1m$

Tabela 6.11. Estimativa do erro de discretização para  $F_y$  em  $y=1m$

Elem.	$h_x = h_y$	$U_{Ri}(p_L)$	$U_{Ri}(p_U)$	$U_{Gci}(p)$
4	0,25			
8	0,125	-87572,2005313303		-262716,601593991
16	0,0625	-68876,7635281933	-761256,645670702	-2283769,93701211
32	0,03125	-44011,0032937367	-233691,034497778	-701073,103493335
64	0,015625	-24767,8193122367	-95635,6610330219	-286906,983099066
128	0,0078125	-13079,4874756767	-43908,6590845965	-131725,977253789
256	0,00390625	-6700,33339474333	-21113,0505852953	-63339,1517558858
512	0,001953125	-3385,09690389667	-10369,2883573241	-31107,8650719723

A figura 6.5 mostra o módulo das estimativas do erro de discretização, no cálculo de  $F_y$  em  $y=1$ , em função de  $h$ .

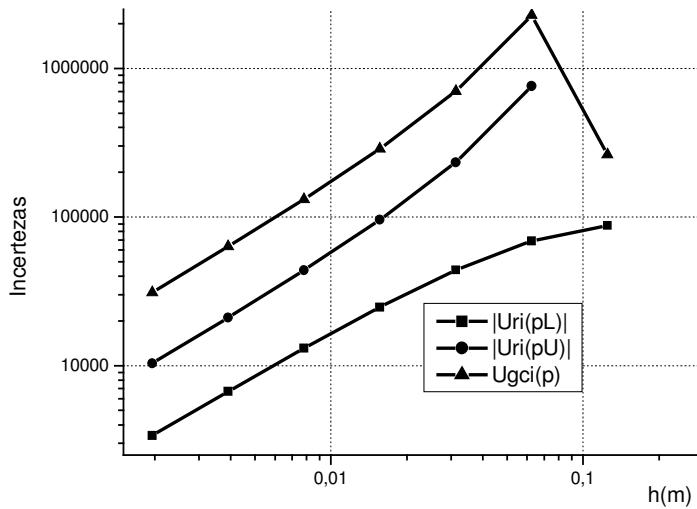


Figura 6.5  $|U_{Ri}(p_L)|$ ,  $|U_{Ri}(p_U)|$  e  $|U_{Gci}(p)|$  em função de  $h$  para a força normal  $F_y$  em  $y=1m$ .

## 6.5 CONCLUSÃO DO CAPÍTULO 6

A solução numérica dos deslocamentos na direção x envolve a aproximação numérica das derivadas  $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}$ ,  $\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}$ ,  $\frac{\delta}{\delta x} \left( \frac{\delta v}{\delta y} \right)$  e  $\frac{\delta T}{\delta x}$ , que quando substituídas na

equação 6.1 introduzem, cada uma, um erro de truncamento. O erro de truncamento total será, então a soma de todos esses erros. O mesmo ocorre para os deslocamentos na direção vertical.

Através das tabelas 6.2, 6.4, 6.8 e 6.10 pode-se notar que a incerteza do erro de truncamento vai diminuindo à medida que o número elementos aumenta.

Para todas as variáveis, a razão de refinamento da malha, calculado pela equação 2.31 é 2 e a ordem assintótica do erro de truncamento é 2. Isso significa que o erro de truncamento deve dividir por 4 a cada refinamento da malha. A tabela 6.12 mostra as estimativas do erro de truncamento para 256 elementos em cada direção dividida pelas estimativas do erro de truncamento para 512 elementos, de cada variável de interesse.

Tabela 6.12. Razão entre as estimativas do erro de truncamento para a malha com 256 elementos em cada direção e para malha com 512 elementos em cada direção.

Variável	$\frac{U_{Ri}(p_L)_{256}}{U_{Ri}(p_L)_{512}}$	$\frac{U_{Ri}(p_U)_{256}}{U_{Ri}(p_U)_{512}}$	$\frac{U_{GCI}(p)_{256}}{U_{GCI}(p)_{512}}$
u(3/4, 3/4)	3,991804659065180	4,032698335336530	4,032698335336530
v(3/4, 3/4)	3,956866299760170	3,980886876256700	3,980886876256710
$F_x _{x=1}$	3,815976280230560	3,866899048622800	3,866899048622800
$F_y _{y=1}$	1,979362359473490	2,036113748382990	2,036113748382990

Pela tabela anterior nota-se que os valores das razões são aproximadamente iguais a 4. Supondo que não existe erro de programação, o fato de não serem exatamente iguais a 4 significa que além do erro de truncamento, existe erro de arredondamento.

A ordem aparente do erro de truncamento fica cada vez mais próxima da ordem assintótica do erro de truncamento, à medida que o número de elementos aumenta.

Observando as tabelas 6.3, 6.5 e 6.8 nota-se que a razão  $U_{Ri}(p_U)/U_{Ri}(p_L)$  fica cada vez mais próxima de 1 à medida que o número de elementos aumenta e que a razão  $U_{GCI}(p)/U_{Ri}(p_L)$  fica cada vez mais próxima de 3 que é o fator de segurança utilizado na equação 2.36.

Como não se tem a solução analítica não se pode obter o erro verdadeiro de discretização para os deslocamentos e para a força normal.

## CAPÍTULO 7

### CONCLUSÃO

Nesse trabalho foi realizada uma verificação dos erros cometidos pela aplicação do método das diferenças finitas em problemas termoelásticos unidimensionais e bidimensionais em regime permanente com malhas uniformes. Os problemas foram divididos em 8 casos sendo que nos três primeiros é tratada apenas a parte térmica unidimensional, onde foram calculados analiticamente e numericamente a temperatura no ponto médio, a temperatura média e a derivada da temperatura na extremidade. Os três seguintes são problemas termoelásticos unidimensionais em que foram resolvidos analiticamente e numericamente o deslocamento, a deformação e a tração no ponto médio, bem como a força normal numa das extremidades. O 7º caso é o problema térmico bidimensional, onde foram determinados analiticamente e numericamente a temperatura no ponto de coordenadas  $(3/4, 3/4)$ , a temperatura média na placa e o fluxo de calor na face norte. O último caso é o problema termoelástico bidimensional e, nesse caso, foram determinados numericamente os deslocamentos no ponto de coordenadas  $(3/4, 3/4)$  e a força normal sobre as faces norte e leste da placa.

Após esse trabalho pode-se concluir que a medida que o número de elementos na malha aumenta a solução numérica se aproxima cada vez mais da solução analítica, nos sete primeiros casos, as ordens aparente e efetiva do erro de discretização tendem para a ordem assintótica do erro, porém quando o número de elementos se torna muito grande elas começam a oscilar em torno da ordem assintótica, indicando a presença de erro de arredondamento. Além disso, é possível concluir que o estimador de Richardson fornece um valor próximo do erro de discretização no intervalo em que a ordem aparente tende monotonicamente para a ordem assintótica. Já o estimador GCI conduz a estimativas maiores do erro por causa do fator de segurança empregado.

Com esse trabalho, mostra-se que é possível utilizar o computador, programado em linguagem C++ Builder 6.0, para a resolução de problemas termoelásticos unidimensionais e bidimensionais, e, obter soluções numéricas muito próximas das soluções analíticas. Também, observa-se que mesmo que a solução

analítica não seja conhecida pode-se obter soluções numéricas confiáveis e acuradas.

Para trabalhos futuros fica como sugestão: a consideração de geometrias diferentes; a utilização de malhas não uniformes; a produção de erros de discretização usando o mesmo programa, com as adaptações necessárias, em computadores com outros sistemas operacionais, com outros processadores e o mesmo algoritmo em linguagens de programação diferentes.

## REFERÊNCIAS

BRAGA FILHO, Washington. **Transmissão de Calor**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.

CLÁUDIO, Dalcidio Moraes; MARINS, Jussara Maria. **Cálculo Numérico Computacional: Teoria e Prática**. São Paulo: Editora Atlas S.A. 1989.

DE VAHL DAVIS, G. **Natural convection of air in a square cavity: a bench mark numerical solution**. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 3, p. 249 – 264, 1983.

DIEGUEZ, José Paulo P. **Métodos Numéricos Computacionais para a Engenharia**. Rio de Janeiro: Interciência, 1992. v.I.

. **Métodos Numéricos Computacionais para a Engenharia**. Rio de Janeiro: Interciência, 1992. v.II.

FLETCHER, Clive A. J. **Computational Techniques For Fluid Dynamics**. USA: Springer-Verlag, 1988.

INCROPERA, Frank P.; DEWITT, David P. **Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa**. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Koogan, 1992.

INCROPERA, Frank P.; DEWITT, David P. **Fundamentos de transferência de calor e de massa**. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos, 2003.

JAMSA, Kris, KLANDER, Lars. **Programando em C/C++ - A Bíblia**. Tradução e revisão técnica: Jeremias René D. Pereira dos Santos. São Paulo: MAKRON Books, 1999.

KREITH, Frank; BOHN, Mark S.. **Princípios de Transferência de Calor**. Tradução All Tasks. Revisão técnica Flávio Maron Vichi e Maria Teresa Castilho Mansor. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.

KREYSZIG, E. **Advanced Engineering Mathematics**. 8<sup>th</sup> ed. New York: Wiley 1999. DEMIRDZIC, I.; MARTINOVIC, D. **Finite volume method for thermo-elasto-plastic stress analysis**. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 109, p.331 –349

MALISKA, Clovis R. **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional**. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos, 1995.

MARSDEN, Jerrold E.; HUGHES, Thomas J. R. **Mathematical foundations of elasticity**. USA: Dover Publications, 1993.

MARCHI, C. H.; SILVA, A. F. C. **Multi-dimensional Discretization Error Estimation for Convergent Apparent Order.** *J. of the Braz. Soc. Of Mech. Sci. & Eng.* v. 27, p. 432-439, 2005.

MARCHI, C. H.; SILVA, A. F. C. **Unidimensional Numerical Solution Error Estimation for Convergent Apparent Order.** *Numerical Heat Transfer.* v. 42, p. 167 – 188, 2002

MARCHI, Carlos Henrique. **Verificação de Soluções Numéricas Unidimensionais em Dinâmica dos Fluidos.** Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica), Universidade Federal de Santa Catarina , Florianópolis, 2001.

McCALLUM, William G.; HUGUES-HALLETT; GLEASON, ANDREW M.; et al. **Cálculo de Várias Variáveis.** Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1997.

POPOV, Egor P. **Introdução à mecânica dos sólidos.** Trad. Mauro O. C. Amorelli. São Paulo: Edgard Blücher, 1978.

ROACHE, P. J. **Perspective: a method for uniform reporting of grid refinement studies.** *ASME Journal of Fluids Engineering*, v. 116, p.405-413, 1994.

\_\_\_\_\_. **Verification and Validation in Computational Science and Engineering,** Albuquerque, USA: Hermosa, 1998.

RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais.** 2. ed. São Paulo: MAKRON Books, 1996.

SCHILDIT, Herbert. **C – completo e total.** São Paulo: MAKRON Books do Brasil, 1996.

SWOKOWSKI, Earl W. **Cálculo Com Geometria Analítica.** São Paulo: MAKRON Books do Brasil, 1994. v.1.

\_\_\_\_\_. **Cálculo Com Geometria Analítica.** São Paulo: MAKRON Books do Brasil, 1994. v.2.

TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. **Theory of elasticity.** Japan: McGraw-Hill, 1970.

## APÊNDICES

## APÊNDICE A

### DEDUÇÃO DAS APROXIMAÇÕES NUMÉRICAS PARA A DERIVADA E DOS ERROS DE TRUNCAMENTO CAUSADOS PELA APROXIMAÇÃO

#### 1. SÉRIE DE TAYLOR

Segundo Swokowski (2001, v. 2, p.84), se uma função admite uma representação em série de potências

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cdot (x - c)^n] \quad (A1.1)$$

com raio de convergência  $r > 0$ , então  $f^{(k)}(c)$  existe para todo inteiro positivo  $k$  e  $a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$ . Então

$$\begin{aligned} f(x) = f(c) + f'(c) \cdot (x - c) + \frac{f''(c)}{2!} \cdot (x - c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!} \cdot (x - c)^3 + \dots \\ + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \cdot (x - c)^n + \dots \end{aligned} \quad (A1.2)$$

Através da expressão anterior pode-se obter aproximações para a derivada. Para isso, seja a figura A1.1 onde se vê os pontos WW, W, P, E e EE, de abscissas  $x_{WW}$ ,  $x_W$ ,  $x_P$ ,  $x_E$  e  $x_{EE}$ , tal forma que  $x_{EE} - x_E = x_E - x_P = x_P - x_W = x_W - x_{WW} = h$ .

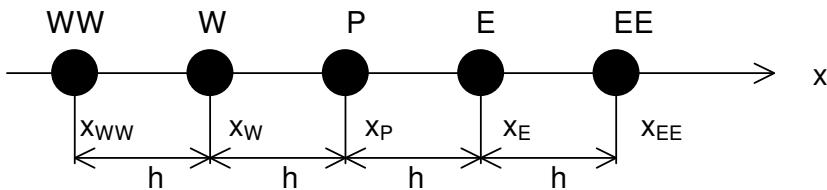


Figura A1.1. Ponto P e os quatro pontos usados para a aproximação da derivada no ponto P.

Considerando na equação A2.2,  $c = x_P = P$ ,  $x_E = E$ ,  $x_{EE} = EE$ ,  $x_W = W$ ,  $x_{WW} = WW$ ,  $f(x_P) = f_P$ ,  $f(x_E) = f_E$ ,  $f(x_{EE}) = f_{EE}$ ,  $f(x_W) = f_W$ ,  $f(x_{WW}) = f_{WW}$ ,  $f'(x_P) = f'_P$ ,  $f''(x_P) = f''_P$ ,  $f'''(x_P) = f'''_P$ , e assim por diante, pode-se encontrar o valor de  $f_E$ :

$$f_E = f_p + f_p^i \cdot (x_E - x_p) + f_p^{ii} \cdot \frac{(x_E - x_p)^2}{2} + f_p^{iii} \cdot \frac{(x_E - x_p)^3}{6} + f_p^{iv} \cdot \frac{(x_E - x_p)^4}{24} + \dots$$

como  $x_E - x_p = h$ , então

$$f_E = f_p + f_p^i h + f_p^{ii} \frac{h^2}{2} + f_p^{iii} \frac{h^3}{6} + f_p^{iv} \frac{h^4}{24} + f_p^v \frac{h^5}{120} + f_p^{vi} \frac{h^6}{720} + f_p^{vii} \frac{h^7}{5040} + \dots \quad (\text{A1.3})$$

Procedendo da mesma forma para  $f_W$

$$f_W = f_p + f_p^i \cdot (x_W - x_p) + f_p^{ii} \cdot \frac{(x_W - x_p)^2}{2} + f_p^{iii} \cdot \frac{(x_W - x_p)^3}{6} + f_p^{iv} \cdot \frac{(x_W - x_p)^4}{24} + \dots$$

como  $x_W - x_p = -h$ , então

$$f_W = f_p + f_p^i (-h) + f_p^{ii} \frac{(-h)^2}{2} + f_p^{iii} \frac{(-h)^3}{6} + f_p^{iv} \frac{(-h)^4}{24} + f_p^v \frac{(-h)^5}{120} + f_p^{vi} \frac{(-h)^6}{720} + f_p^{vii} \frac{(-h)^7}{5040} + \dots$$

$$f_W = f_p - f_p^i h + f_p^{ii} \frac{h^2}{2} - f_p^{iii} \frac{h^3}{6} + f_p^{iv} \frac{h^4}{24} - f_p^v \frac{h^5}{120} + f_p^{vi} \frac{h^6}{720} - f_p^{vii} \frac{h^7}{5040} + \dots \quad (\text{A1.4})$$

Procedendo da mesma forma para  $f_{EE}$

$$f_{EE} = f_p + f_p^i \cdot (x_{EE} - x_p) + f_p^{ii} \cdot \frac{(x_{EE} - x_p)^2}{2} + f_p^{iii} \cdot \frac{(x_{EE} - x_p)^3}{6} + f_p^{iv} \cdot \frac{(x_{EE} - x_p)^4}{24} + \dots$$

como  $x_{EE} - x_p = 2h$ , fica

$$f_{EE} = f_p + f_p^i (2h) + f_p^{ii} \frac{(2h)^2}{2} + f_p^{iii} \frac{(2h)^3}{6} + f_p^{iv} \frac{(2h)^4}{24} + f_p^v \frac{(2h)^5}{120} + f_p^{vi} \frac{(2h)^6}{720} + f_p^{vii} \frac{(2h)^7}{5040} + \dots$$

$$f_{EE} = f_p + f_p^i (2h) + f_p^{ii} \frac{4h^2}{2} + f_p^{iii} \frac{8h^3}{6} + f_p^{iv} \frac{16h^4}{24} + f_p^v \frac{32h^5}{120} + f_p^{vi} \frac{64h^6}{720} + f_p^{vii} \frac{128h^7}{5040} + \dots \quad (\text{A1.5})$$

Procedendo da mesma forma para  $f_{WW}$

$$f_{WW} = f_p + f_p^i \cdot (x_{WW} - x_p) + f_p^{ii} \cdot \frac{(x_{WW} - x_p)^2}{2} + f_p^{iii} \cdot \frac{(x_{WW} - x_p)^3}{6} + f_p^{iv} \cdot \frac{(x_{WW} - x_p)^4}{24} + \dots$$

como  $x_{WW} - x_p = -2h$ , então

$$f_{WW} = f_p + f_p^i (-2h) + f_p^{ii} \frac{(-2h)^2}{2} + f_p^{iii} \frac{(-2h)^3}{6} + f_p^{iv} \frac{(-2h)^4}{24} + f_p^v \frac{(-2h)^5}{120} + f_p^{vi} \frac{(-2h)^6}{720} + f_p^{vii} \frac{(-2h)^7}{5040} + \dots$$

$$f_{WW} = f_P - f_P^i(2h) + f_P^{ii} \frac{4h^2}{2} - f_P^{iii} \frac{8h^3}{6} + f_P^{iv} \frac{16h^4}{24} - f_P^v \frac{32h^5}{120} + f_P^{vi} \frac{64h^6}{720} - f_P^{vii} \frac{128h^7}{5040} + \dots \quad (A1.6)$$

## 2. APROXIMAÇÕES PARA A DERIVADA PRIMEIRA

### 2.1. COM DIFERENÇA CENTRAL (CDS)

Subtraindo a equação A1.4 da equação A1.3, fica

$$f_E - f_W = 2f_P^i h + 2f_P^{iii} \frac{h^3}{6} + 2f_P^v \frac{h^5}{120} + 2f_P^{vii} \frac{h^7}{5040} + 2f_P^{ix} \frac{h^9}{362880} + \dots$$

então, isolando a derivada primeira, tem-se

$$f_P^i = \frac{f_E - f_W}{2h} - f_P^{iii} \frac{h^2}{6} - f_P^v \frac{h^4}{120} - f_P^{vii} \frac{h^6}{5040} - f_P^{ix} \frac{h^8}{362880} - \dots \quad (A2.7)$$

Considerando que a equação A2.7 seja escrita  $f_P^i = (\lambda_{CDS}^i)_P + \epsilon(\lambda_{CDS}^i)_P$

onde  $f_P^i$  é o valor exato da derivada primeira no ponto P,  $(\lambda_{CDS}^i)_P$  é a aproximação da derivada primeira no ponto P e  $\epsilon(\lambda_{CDS}^i)_P$  é o erro de truncamento no cálculo da derivada no ponto P, então, a solução aproximada da derivada no ponto P, usando diferença central é

$$(\lambda_{CDS}^i)_P = \frac{f_E - f_W}{2h} \quad (A2.8)$$

E o erro de truncamento, nessa aproximação é dado por

$$\epsilon(\lambda_{CDS}^i)_P = -f_P^{iii} \frac{h^2}{6} - f_P^v \frac{h^4}{120} - f_P^{vii} \frac{h^6}{5040} - f_P^{ix} \frac{h^8}{362880} - \dots \quad (A2.9)$$

### 2.2. COM DOIS PONTOS A JUSANTE (DDS-2)

Multiplicando a equação A1.3 por quatro e desse resultado subtraindo a equação A1.5, tem-se:

$$4f_E - f_{EE} = 3f_P + 2f_P^i h - 4f_P^{iii} \frac{h^3}{6} - 12f_P^{iv} \frac{h^4}{24} - 28f_P^v \frac{h^5}{120} - 60f_P^{vi} \frac{h^6}{720} - \dots$$

Então, isolando a derivada primeira, fica

$$f_P^i = \frac{4f_E - 3f_P - f_{EE}}{2h} + f_P^{iii} \frac{h^2}{3} + f_P^{iv} \frac{h^3}{4} + f_P^v \frac{7h^4}{60} + f_P^{vi} \frac{h^5}{24} + \dots \quad (\text{A2.10})$$

Considerando que a equação A2.10 seja escrita  $f_P^i = (\lambda_{DDS-2}^i)_P + \epsilon(\lambda_{DDS-2}^i)_P$

onde  $f_P^i$  é o valor exato da derivada primeira no ponto P com dois pontos a jusante,  $(\lambda_{DDS-2}^i)_P$  é a aproximação da derivada primeira no ponto P e  $\epsilon(\lambda_{DDS-2}^i)_P$  é o erro de truncamento no cálculo da derivada no ponto P, então, a solução aproximada da derivada no ponto P, usando dois pontos a jusante é

$$(\lambda_{DDS-2}^i)_P = \frac{4f_E - 3f_P - f_{EE}}{2h} \quad (\text{A2.11})$$

E o erro de truncamento, nessa aproximação, é dado por

$$\epsilon(\lambda_{DDS-2}^i)_P = f_P^{iii} \frac{h^2}{3} + f_P^{iv} \frac{h^3}{4} + f_P^v \frac{7h^4}{60} + f_P^{vi} \frac{h^5}{24} + \dots \quad (\text{A2.12})$$

### 2.3. COM DOIS PONTOS A MONTANTE (UDS-2)

Multiplicando a equação A1.4 por quatro e desse resultado subtraindo a equação A1.6, tem-se:

$$4f_w - f_{ww} = 3f_P - 2f_P^i h + 4f_P^{iii} \frac{h^3}{6} - 12f_P^{iv} \frac{h^4}{24} + 28f_P^v \frac{h^5}{120} - 60f_P^{vi} \frac{h^6}{720} - \dots$$

Então, isolando a derivada primeira, fica

$$f_P^i = \frac{3f_P - 4f_w + f_{ww}}{2h} + f_P^{iii} \frac{h^2}{3} - f_P^{iv} \frac{h^3}{4} + f_P^v \frac{7h^4}{60} - f_P^{vi} \frac{h^5}{24} + \dots \quad (\text{A2.13})$$

Considerando que a equação A2.13 seja escrita  $f_P^i = (\lambda_{UDS-2}^i)_P + \epsilon(\lambda_{UDS-2}^i)_P$

onde  $f_P^i$  é o valor exato da derivada primeira no ponto P com dois pontos a montante,  $(\lambda_{UDS-2}^i)_P$  é a aproximação da derivada primeira no ponto P e  $\epsilon(\lambda_{UDS-2}^i)_P$  é o erro de truncamento no cálculo da derivada no ponto P, então, a solução aproximada da derivada no ponto P, usando dois pontos a jusante é

$$(\chi_{UDS-2}^i)_p = \frac{3f_p - 4f_w + f_{ww}}{2h} \quad (A2.14)$$

E o erro de truncamento, nessa aproximação, é dado por

$$\varepsilon(\chi_{UDS-2}^i)_p = f_p^{iii} \frac{h^2}{3} - f_p^{iv} \frac{h^3}{4} + f_p^v \frac{7h^4}{60} - f_p^{vi} \frac{h^5}{24} + \dots \quad (A2.15)$$

### 3. APROXIMAÇÃO PARA A DERIVADA SEGUNDA COM DIFERENÇA CENTRAL DE TRÊS PONTOS (CDS-2)

Observando que nas equações A1.3 e A1.4, os termos correspondentes às derivadas de ordem ímpar são opostos, pode-se efetuar a soma de ambas e eliminar esses termos. Após a soma, tem-se

$$f_E + f_W = 2f_p + 2f_p^{ii} \frac{h^2}{2} + 2f_p^{iv} \frac{h^4}{24} + 2f_p^{vi} \frac{h^6}{720} + 2f_p^{viii} \frac{h^8}{40320} + \dots$$

então, isolando a derivada segunda, tem-se

$$f_p^{ii} = \frac{f_E + f_W - 2f_p}{h^2} - f_p^{iv} \frac{h^2}{12} - f_p^{vi} \frac{h^4}{360} - f_p^{viii} \frac{h^6}{20160} - f_p^x \frac{h^8}{1814400} - \dots \quad (A3.16)$$

Considerando que a equação A3.16 seja escrita  $f_p^{ii} = (\chi_{CDS-2}^{ii})_p + \varepsilon(\chi_{CDS-2}^{ii})_p$

onde  $f_p^{ii}$  é o valor exato da derivada segunda no ponto P;  $(\chi_{CDS-2}^{ii})_p$  é a aproximação da derivada primeira no ponto P e  $\varepsilon(\chi_{CDS}^{ii})_p$  é o erro de truncamento no cálculo da derivada no ponto P, então, a solução aproximada da derivada no ponto P, usando diferença central é

$$f_p^{ii} = \frac{f_E + f_W - 2f_p}{h^2} \quad (A3.17)$$

E o erro de truncamento, nessa aproximação, é dado por

$$\varepsilon(\chi_{CDS-2}^{ii})_p = -f_p^{iv} \frac{h^2}{12} - f_p^{vi} \frac{h^4}{360} - f_p^{viii} \frac{h^6}{20160} - f_p^x \frac{h^8}{1814400} - \dots \quad (A3.18)$$

## APÊNDICE B

### DEDUÇÃO DA ORDEM APARENTE DO ERRO DE TRUNCAMENTO

De acordo com Marchi e Silva (2002), o erro da solução numérica de uma variável de interesse é a diferença entre a solução analítica  $\Phi$  e a solução numérica  $\phi$ , ou seja:

$$E(\phi) = \Phi - \phi \quad (B.1)$$

Para o cálculo da ordem aparente ( $p_U$ ), primeiro leva-se em conta como estimar o erro numérico ou a incerteza numérica, que é dada por:

$$U(\phi) = \phi_\infty - \phi \quad (B.2)$$

onde:

$\phi_\infty$  = solução analítica estimada

$\phi$  = solução numérica

$U(\phi)$  = incerteza numérica de  $\phi$

Se o erro numérico for causado apenas por erros de truncamento, pode-se dizer que ele pode ser dado, conforme Roache (1994), por:

$$E(\phi) = C_1 \cdot h^{p_L} + C_2 \cdot h^{p_2} + C_3 \cdot h^{p_3} + \dots \quad (B.3)$$

onde:

$C_1, C_2, C_3, \dots$  são coeficientes que independem de  $h$ .

$p_L, p_2, p_3, \dots$  são números inteiros positivos que representam as ordens verdadeiras de  $E(\phi)$ .

$p_L$  = ordem assintótica de  $E(\phi)$

$\phi$  = variável de interesse

$h$  = tamanho dos elementos da malha

No caso de  $h \rightarrow 0$  a equação (03) se reduz a

$$E(\phi) = C_1 \cdot h^{p_L} \quad (B.4)$$

De onde observa-se que  $E(\phi) \rightarrow 0$  para  $h \rightarrow 0$ .

É possível prever o comportamento assintótico do erro de discretização com relação a  $h$  e  $p_L$ , antes de obter a solução numérica. Por exemplo considerando uma malha fina ( $h_1$ ) e uma malha grossa ( $h_2$ ), tem-se:

$$E(\phi_1) = C_1 \cdot h_1^{p_L} \quad (B.5)$$

$$E(\phi_2) = C_2 \cdot h_2^{p_L} \quad (B.6)$$

Dividindo membro a membro as equações B.5 e B.6, fica:

$$\frac{E(\phi_1)}{E(\phi_2)} = \frac{C_1 h_1^{p_L}}{C_2 h_2^{p_L}} \quad \text{ou seja} \quad \frac{E(\phi_1)}{E(\phi_2)} = \left( \frac{h_1}{h_2} \right)^{p_L} \quad (B.7)$$

Então, quanto maior é o valor de  $p_L$ , maior é a redução do erro com  $h$ .

Considerando o Estimador de Richardson, a incerteza ( $U$ ) de uma solução numérica ( $\phi$ ) é:

$$U_{Ri}(\phi) = K_U \cdot h^{p_L} \quad (B.8)$$

Onde:  $K_U$  = coeficiente que é suposto independente de  $h$

$h$  = tamanho dos elementos da malha

$p_L$  = ordem assintótica dos erros de truncamento

Substituindo a equação (B.2) na equação (B.6) tem-se:

$$\phi_\infty - \phi = K_U \cdot h^{p_L} \quad (B.9)$$

Considerando-se as malhas fina ( $h_1$ ) e grossa ( $h_2$ ) citadas anteriormente e aplicando a elas a equação B.9, tem-se:

$$\phi_\infty - \phi_1 = K_U \cdot h_1^{p_L} \quad (B.10)$$

$$\phi_{\infty} - \phi_2 = K_U \cdot h_2^{p_L} \quad (B.11)$$

dividindo a equação B.11 pela equação B.10 fica:

$$\frac{\phi_{\infty} - \phi_2}{\phi_{\infty} - \phi_1} = \frac{K_U \cdot h_2^{p_L}}{K_U \cdot h_1^{p_L}}$$

que simplificada, e fazendo a razão de refinamento  $q = h_2/h_1$ :

$$\frac{\phi_{\infty} - \phi_2}{\phi_{\infty} - \phi_1} = q^{p_L}$$

para isolar  $\phi_{\infty}$  faz-se:

$$\phi_{\infty} \cdot q^{p_L} - \phi_1 \cdot q^{p_L} = \phi_{\infty} - \phi_2$$

ou seja

$$\phi_{\infty} = \frac{\phi_1 \cdot q^{p_L} - \phi_2}{q^{p_L} - 1}$$

onde subtraindo e somando  $\phi_1$  ao numerador, fica:

$$\phi_{\infty} = \frac{\phi_1 \cdot q^{p_L} - \phi_1 + \phi_1 - \phi_2}{q^{p_L} - 1}$$

separando as frações, tem-se:

$$\phi_{\infty} = \frac{\phi_1 \left( q^{p_L} - 1 \right)}{q^{p_L} - 1} + \frac{\phi_1 - \phi_2}{q^{p_L} - 1}$$

portanto:

$$\phi_{\infty}(p_L) = \phi_1 + \frac{\phi_1 - \phi_2}{q^{p_L} - 1} \quad (B.12)$$

onde  $q = h_2/h_1$  é a razão de refino da malha.

A equação B.12 representa a extrapolação de Richardson, que substituída na equação B.2 resulta em:

$$U_{Ri}(p_L) = \frac{\phi_1 - \phi_2}{q^{p_L} - 1} \quad (B.13)$$

que representa a incerteza ou estimativa do erro de discretização segundo o estimador de Richardson, para a solução numérica  $\phi_1$ .

A equação B.9 pode ser escrita como

$$\phi_\infty - \phi = K_U \cdot h^{p_U} \quad (B.14)$$

onde  $p_U$  é a ordem aparente da incerteza (Marchi, 2001).

Aplicando a equação B.12 a uma malha fina ( $h_1$ ), a uma malha grossa ( $h_2$ ) e a outra supergrossa ( $h_3$ ) que têm soluções numéricas  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  e  $\phi_3$ , tem-se:

$$\phi_\infty - \phi_1 = K_U \cdot h_1^{p_U} \quad (B.15)$$

$$\phi_\infty - \phi_2 = K_U \cdot h_2^{p_U} \quad (B.16)$$

$$\phi_\infty - \phi_3 = K_U \cdot h_3^{p_U} \quad (B.17)$$

considerando a razão de refino da malha constante, dado por  $q = \frac{h_3}{h_2} = \frac{h_2}{h_1}$  e

usando um procedimento análogo ao aplicado às equações B.10 e B.11, obtém-se:

$$\phi_\infty(p_U) = \phi_1 + \frac{\phi_1 - \phi_2}{q^{p_U} - 1} \quad (B.18)$$

Para determinar a ordem aparente ( $p_U$ ), isola-se  $\phi_\infty$  na equação B.15 e substitui-se nas equações B.16 e B.17 produzindo:

$$\phi_1 + K_U \cdot h_1^{p_U} - \phi_2 = K_U \cdot h_2^{p_U} \quad (B.19)$$

$$\phi_1 + K_U \cdot h_1^{p_U} - \phi_3 = K_U \cdot h_3^{p_U} \quad (B.20)$$

Dividindo membro a membro a equação B.20 pela equação B.19, vem:

$$\frac{\phi_1 + K_U h_1^{p_U} - \phi_3}{\phi_1 + K_U h_1^{p_U} - \phi_2} = \left( \frac{h_3}{h_2} \right)^{p_U} \text{ e, como } K_U h_1^{p_U} = \phi_\infty - \phi_1 \text{ e } q = \frac{h_3}{h_2}, \text{ então:}$$

$$\frac{\phi_1 + \phi_\infty - \phi_1 - \phi_3}{\phi_1 + \phi_\infty - \phi_1 - \phi_2} = q^{p_U} \quad \text{ou seja:}$$

$$\frac{\phi_\infty - \phi_3}{\phi_\infty - \phi_2} = q^{p_U} \quad (B.21)$$

Calculando o logaritmo decimal nos dois membros da equação B.21, vem:

$$\log \left( \frac{\phi_\infty - \phi_3}{\phi_\infty - \phi_2} \right) = \log \left( q^{p_U} \right)$$

$$\log \left( \frac{\phi_\infty - \phi_3}{\phi_\infty - \phi_2} \right) = p_U \cdot \log q$$

Então:

$$p_U = \frac{\log \left( \frac{\phi_\infty - \phi_3}{\phi_\infty - \phi_2} \right)}{\log q}$$

Quando  $h \rightarrow 0$  tem-se que:  $\phi_1 \rightarrow \phi_\infty$  e  $\phi_2 \rightarrow \phi_\infty$ , portanto, a ordem aparente  $p_U$ , pode ser dada por:

$$p_U = \frac{\log \left( \frac{\phi_2 - \phi_3}{\phi_1 - \phi_2} \right)}{\log q} \quad (B.22)$$

A equação B.18 representa a extração de Richardson tomando por base a ordem aparente  $p_U$ . A sua substituição na equação B.2, leva a:

$$U_{Ri}(p_U) = \frac{\phi_1 - \phi_2}{q^{p_U} - 1} \quad (B.23)$$

que representa a incerteza da solução numérica ( $\phi_1$ ) na malha fina ( $h_1$ ).

## APÊNDICE C

### DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURAS PARA O CASO 5

Seja uma placa de comprimento  $L_x$  e largura  $L_y$ , de acordo com a figura C.1 a seguir:

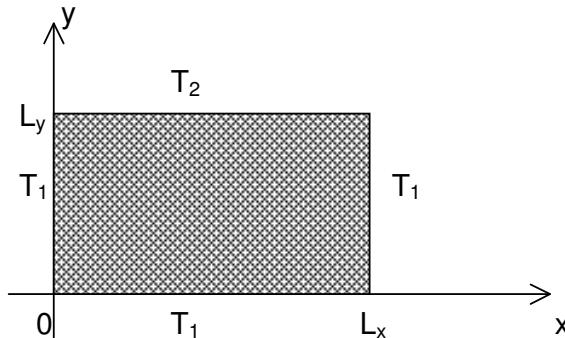


Figura C.1: placa retangular submetida a temperaturas  $T_2$  e  $T_1$ .

De acordo com Incropera e De Witt (2003, p.86), condução de calor bidimensional, em regime permanente, com propriedades constantes, numa placa plana é dada por:

$$\frac{\delta^2 T}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 T}{\delta y^2} = S \quad (C.1)$$

A solução da equação C.1 fornece a distribuição de temperaturas  $T(x,y)$  na placa. Para a resolução dessa equação, supõe-se  $S=0$ , então a equação C.1 se transforma em:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{d^2 T}{dy^2} = 0 \quad (C.2)$$

com condições de contorno:  $T(0, y) = T_1 = 0$  e  $T(x, 0) = T_1 = 0$

$$T(L_x, y) = T_1 = 0 \quad \text{e} \quad T(x, L_y) = T_2 = \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right)$$

Para a solução da equação C.2, aplica-se a técnica da separação das variáveis, tendo em vista que a solução procurada pode ser dada pelo produto de

duas funções, uma que depende unicamente de  $x$  e a outra que depende unicamente de  $y$ , ou seja a solução é da forma:

$$T(x, y) = X(x) \cdot Y(y) = X \cdot Y \quad (C.3)$$

Substituindo a equação C.3 na equação C.2, fica:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}(X \cdot Y) + \frac{d^2}{dy^2}(X \cdot Y) &= 0 \\ \frac{d}{dx} \left( \frac{dX}{dx} \cdot Y + X \cdot 0 \right) + \frac{d}{dy} \left( 0 \cdot Y + \frac{dY}{dy} \cdot X \right) &= 0 \\ \frac{d^2X}{dx^2} \cdot Y + \frac{dX}{dx} \cdot 0 + \frac{d^2Y}{dy^2} \cdot X + \frac{dY}{dy} \cdot 0 &= 0 \end{aligned}$$

Então

$$\frac{d^2X}{dx^2} \cdot Y + \frac{d^2Y}{dy^2} \cdot X = 0$$

Dividindo ambos os membros por  $XY$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{X} \cdot \frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \cdot \frac{d^2Y}{dy^2} &= 0 \text{ ou} \\ -\frac{1}{X} \cdot \frac{d^2X}{dx^2} &= \frac{1}{Y} \cdot \frac{d^2Y}{dy^2} \end{aligned} \quad (C.4)$$

A equação C.4 é, portanto, separável, pois, o lado esquerdo da equação depende unicamente de  $x$  e o lado direito depende unicamente de  $y$ . Portanto a igualdade pode ser aplicada em geral (para qualquer  $x$  ou qualquer  $y$ ) apenas se ambos os lados forem iguais à mesma constante. Identificando essa constante de separação, como  $\lambda^2$ , tem-se:

$$-\frac{1}{X} \cdot \frac{d^2X}{dx^2} = \lambda^2 \Rightarrow \frac{d^2X}{dx^2} = -\lambda^2 X \quad \text{então} \quad \frac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \quad (C.5)$$

e

$$\frac{1}{Y} \cdot \frac{d^2Y}{dy^2} = \lambda^2 \Rightarrow \frac{d^2Y}{dy^2} = \lambda^2 Y \quad \text{então} \quad \frac{d^2Y}{dy^2} - \lambda^2 Y = 0 \quad (C.6)$$

As soluções gerais para as equações C.5 e C.6 são:

$$X = C_1 \cdot \cos(\lambda x) + C_2 \cdot \sin(\lambda x)$$

$$Y = C_3 \cdot e^{-\lambda y} + C_4 \cdot e^{\lambda y}$$

Substituindo esses resultados na equação C.3, fica:

$$T(x, y) = (C_1 \cdot \cos(\lambda x) + C_2 \cdot \sin(\lambda x)) \cdot (C_3 \cdot e^{-\lambda y} + C_4 \cdot e^{\lambda y}) \quad (\text{C.7})$$

Aplicando a condição de contorno  $T(0, y) = 0$ :

$$T(x, y) = (C_1 \cdot \cos(\lambda x) + C_2 \cdot \sin(\lambda x)) \cdot (C_3 \cdot e^{-\lambda y} + C_4 \cdot e^{\lambda y})$$

$$T(0, y) = (C_1 \cdot \cos(\lambda \cdot 0) + C_2 \cdot \sin(\lambda \cdot 0)) \cdot (C_3 \cdot e^{-\lambda y} + C_4 \cdot e^{\lambda y})$$

$$0 = C_1 \cdot (C_3 \cdot e^{-\lambda y} + C_4 \cdot e^{\lambda y})$$

Então

$$C_1 = 0$$

Substituindo o valor de  $C_1$  na equação C.7, fica:

$$T(x, y) = C_2 \cdot \sin(\lambda x) \cdot (C_3 \cdot e^{-\lambda y} + C_4 \cdot e^{\lambda y}) \quad (\text{C.8})$$

Aplicando, na equação anterior, a condição de contorno  $T(x, 0) = 0$ , tem-se:

$$T(x, y) = C_2 \cdot \sin(\lambda x) \cdot (C_3 \cdot e^{-\lambda y} + C_4 \cdot e^{\lambda y})$$

$$T(x, 0) = C_2 \cdot \sin(\lambda x) \cdot (C_3 \cdot e^{-\lambda \cdot 0} + C_4 \cdot e^{\lambda \cdot 0})$$

$$0 = C_2 \cdot \sin(\lambda x) \cdot (C_3 + C_4)$$

Então:

$$C_3 = -C_4$$

Substituindo o valor de  $C_3$  na equação C.8, fica

$$T(x, y) = C_2 \cdot \sin(\lambda x) \cdot (-C_4 \cdot e^{-\lambda y} + C_4 \cdot e^{\lambda y})$$

ou

$$T(x, y) = -C_2 \cdot C_4 \cdot \sin(\lambda x) \cdot (e^{-\lambda y} + e^{\lambda y}) \quad (\text{C.9})$$

Aplicando agora, na equação anterior, a condição de contorno  $T(L_x, y) = 0$ , tem-se:

$$T(L_x, y) = -C_2 \cdot C_4 \cdot \sin(\lambda L_x) \cdot (e^{-\lambda y} + e^{\lambda y})$$

$$0 = -C_2 \cdot C_4 \cdot \sin(\lambda L_x) \cdot (e^{-\lambda y} + e^{\lambda y})$$

ou

$$0 = C_2 \cdot C_4 \cdot \sin(\lambda L_x) \cdot (e^{-\lambda y} + e^{\lambda y})$$

onde, fazendo  $\sin(\lambda L_x) = 0$ , tem-se  $\lambda = \frac{n\pi}{L_x}$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ , a equação C.9, fica:

$$T(x, y) = C_2 \cdot C_4 \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right) \cdot (e^{-\lambda y} + e^{\lambda y}) \quad (\text{C.10})$$

Lembrando que:  $\sinh(\lambda y) = \frac{e^{-\lambda y} + e^{\lambda y}}{2}$  ou  $e^{-\lambda y} + e^{\lambda y} = 2 \cdot \sinh\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right)$ , então, a

equação C.10, fica

$$T(x, y) = C_2 \cdot C_4 \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right) \cdot 2 \cdot \sinh\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (\text{C.11})$$

Fazendo  $C_n = 2 \cdot C_2 \cdot C_4$ , a equação C.11, fica:

$$T(x, y) = C_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right) \cdot \sinh\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (\text{C.12})$$

Aplicando na equação C.12 a condição de contorno  $T(x, L_y) = \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right)$  e

considerando  $n=1$ , obtém-se:

$$T(x, L_y) = C_n \cdot \sin\left(\frac{1 \cdot \pi x}{L_x}\right) \cdot \sinh\left(\frac{1 \cdot \pi \cdot L_y}{L_x}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) = C_n \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \cdot \sinh\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right)$$

onde, isolando  $C_n$ , encontra-se

$$C_n = \frac{1}{\sinh\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right)}$$

Substituindo o valor de  $C_n$  na equação C.12, obtém-se:

$$T(x, y) = \frac{1}{\sinh\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right)} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \cdot \sinh\left(\frac{\pi y}{L_x}\right)$$

Portanto a solução analítica da distribuição de temperaturas na placa é dada por

$$T(x, y) = \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \cdot \frac{\text{senh}\left(\frac{\pi y}{L_x}\right)}{\text{senh}\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right)} \quad (\text{C.13})$$

A partir da equação C.13, pode-se obter a solução analítica da temperatura em qualquer ponto da placa.

## APÊNDICE D

### DEDUÇÃO DA TEMPERATURA MÉDIA PARA O CASO 5

Para calcular a temperatura média  $\bar{T}$ , utiliza-se a equação:

$$\bar{T} = \frac{1}{L_x} \cdot \frac{1}{L_y} \cdot \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} T(x, y) dx dy \quad (D.1)$$

Substituindo a equação C.13 na equação D.1 e resolvendo, fica:

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \frac{1}{L_x \cdot L_y} \cdot \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \left[ \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \cdot \frac{\operatorname{senh}\left(\frac{\pi y}{L_x}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right)} \right] dx dy \\ \bar{T} &= \frac{1}{L_x \cdot L_y \cdot \operatorname{senh}\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right)} \cdot \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \left[ \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \cdot \operatorname{senh}\left(\frac{\pi y}{L_x}\right) \right] dx dy \end{aligned} \quad (D.2)$$

Calculando a integral:  $\int_0^{L_x} \left[ \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \cdot \operatorname{senh}\left(\frac{\pi y}{L_x}\right) \right] dx =$ , tem-se:

$$\int_0^{L_x} \left[ \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \cdot \operatorname{senh}\left(\frac{\pi y}{L_x}\right) \right] dx = \operatorname{senh}\left(\frac{\pi y}{L_x}\right) \cdot \int_0^{L_x} \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) dx = \frac{2 \cdot L_x}{\pi} \cdot \operatorname{senh}\left(\frac{\pi y}{L_x}\right)$$

substituindo esse resultado na equação 11, fica:

$$\bar{T} = \frac{1}{L_x \cdot L_y \cdot \operatorname{senh}\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right)} \cdot \int_0^{L_y} \left[ \frac{2 \cdot L_x}{\pi} \cdot \operatorname{senh}\left(\frac{\pi y}{L_x}\right) \right] dy$$

$$\bar{T} = \frac{1 \cdot 2 \cdot L_x}{L_x \cdot L_y \cdot \pi \cdot \operatorname{senh}\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right)} \cdot \int_0^{L_y} \left[ \operatorname{senh}\left(\frac{\pi y}{L_x}\right) \right] dy$$

$$\bar{T} = \frac{2}{L_y \cdot \pi \cdot \operatorname{senh}\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right)} \cdot \int_0^{L_y} \operatorname{senh}\left(\frac{\pi y}{L_x}\right) \cdot dy \quad (\text{D.3})$$

Calculando a integral:  $\int_0^{L_y} \operatorname{senh}\left(\frac{\pi y}{L_x}\right) \cdot dy$ , encontra-se:

$$\int_0^{L_y} \operatorname{senh}\left(\frac{\pi y}{L_x}\right) \cdot dy = \frac{L_x}{\pi} \cdot \left[ \cosh\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right) - 1 \right]$$

Substituindo o resultado anterior na equação D.3, fica:

$$\bar{T} = \frac{2}{L_y \cdot \pi \cdot \operatorname{senh}\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right)} \cdot \frac{L_x}{\pi} \cdot \left[ \cosh\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right) - 1 \right]$$

Então, a temperatura média será dada por:

$$\bar{T} = \frac{2L_x}{L_y \cdot \pi^2 \cdot \operatorname{senh}\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right)} \cdot \left[ \cosh\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right) - 1 \right] \quad (\text{D.4})$$

## APÊNDICE E

### DEDUÇÃO DO FLUXO DE CALOR PARA O CASO 5

Na figura C.1, quantidade de calor transmitida através da superfície ( $x, y=L_y$ ), a partir da lei de Fourier, é dada por:

$$q = -k \cdot \int_0^{L_x} \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{x,y=L_y} \right] \cdot dx \quad (E.1)$$

Encontrando  $\frac{\partial T}{\partial y}$  a partir da equação C.13 tem-se:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\pi}{L_x} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \cdot \frac{\cosh\left(\frac{\pi y}{L_x}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right)}$$

então

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{x,y=L_y} = \frac{\pi}{L_x} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \cdot \frac{\cosh\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right)}$$

Substituindo o resultado anterior na equação E.1, fica:

$$q = -k \cdot \int_0^{L_x} \left[ \frac{\pi}{L_x} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \cdot \frac{\cosh\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right)} \right] \cdot dx$$

$$q = -k \cdot \frac{\pi}{L_x} \cdot \frac{\cosh\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right)} \cdot \int_0^{L_x} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \cdot dx$$

$$q = -k \cdot \frac{\pi}{L_x} \cdot \frac{\cosh\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right)} \cdot \frac{2L_x}{\pi}$$

Então:

$$q = -2k \cdot \frac{\cosh\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right)}$$

Portanto

$$q = -2k \cdot \coth\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right) \quad (\text{E.2})$$

## APÊNDICE F

### DEMONSTRAÇÃO DA APROXIMAÇÃO NUMÉRICA DOS DESLOCAMENTOS NA DIREÇÃO HORIZONTAL E VERTICAL

Os deslocamentos nas direções x e y, conforme definidos na tabela 2.1, podem ser dados pelas equações

$$(1 + C_u) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C_u \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 2 \cdot C_u \cdot \alpha \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \quad (F.1)$$

$$(1 + C_u) \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + C_u \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 2 \cdot C_u \cdot \alpha \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \quad (F.2)$$

A derivada primeira da temperatura, em relação a x, é aproximada por:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_E - T_W}{2h_x} \quad (F.3)$$

com erro de truncamento dado por

$$\epsilon_{T_x} = -T_P^{iii} \cdot \frac{h_x^2}{6} - T_P^v \cdot \frac{h_x^4}{120} - T_P^{vii} \cdot \frac{h_x^6}{5040} - \dots \quad (F.4)$$

A derivada primeira da temperatura em relação a y, é aproximada por:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{T_N - T_S}{2h_y} \quad (F.5)$$

com erro de truncamento dado por:

$$\epsilon_{T_y} = -T_P^{iii} \cdot \frac{h_y^2}{6} - T_P^v \cdot \frac{h_y^4}{120} - T_P^{vii} \cdot \frac{h_y^6}{5040} - \dots \quad (F.6)$$

A derivada segunda dos deslocamentos na direção horizontal, em relação a x, será aproximada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_W + u_E - 2u_P}{h_x^2} \quad (F.7)$$

Com erro de truncamento dado por:

$$\epsilon_{u_x} = -u_{P_x}^{iv} \cdot \frac{h_x^2}{12} - u_{P_x}^{vi} \cdot \frac{h_x^4}{360} - u_{P_x}^{viii} \cdot \frac{h_x^6}{20160} - u_{P_x}^X \cdot \frac{h_x^8}{1814400} - \dots \quad (F.8)$$

A derivada segunda dos deslocamentos na direção horizontal, em relação a y, será aproximada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_s + u_n - 2u_p}{h_y^2} \quad (\text{F.9})$$

com erro de truncamento dado por:

$$\varepsilon_{u_y} = -u_p^{iv} \cdot \frac{h_y^2}{12} - u_p^{vi} \cdot \frac{h_y^4}{360} - u_p^{viii} \cdot \frac{h_y^6}{20160} - u_p^x \cdot \frac{h_y^8}{1814400} - \dots \quad (\text{F.10})$$

A derivada segunda dos deslocamentos na direção vertical, em relação a x, será aproximada por:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{v_w + v_e - 2v_p}{h_x^2} \quad (\text{F.11})$$

com erro de truncamento dado por:

$$\varepsilon_{v_x} = -v_p^{iv} \cdot \frac{h_x^2}{12} - v_p^{vi} \cdot \frac{h_x^4}{360} - v_p^{viii} \cdot \frac{h_x^6}{20160} - v_p^x \cdot \frac{h_x^8}{1814400} - \dots \quad (\text{F.12})$$

A derivada segunda dos deslocamentos na direção vertical, em função de y, será aproximada por:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{v_s + v_n - 2v_p}{h_y^2} \quad (\text{F.13})$$

com erro de truncamento dado por:

$$\varepsilon_{v_y} = -v_p^{iv} \cdot \frac{h_y^2}{12} - v_p^{vi} \cdot \frac{h_y^4}{360} - v_p^{viii} \cdot \frac{h_y^6}{20160} - v_p^x \cdot \frac{h_y^8}{1814400} - \dots \quad (\text{F.14})$$

A derivada cruzada  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)$  pode ser aproximada da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_E - \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_W}{2h_x}$$

$$\text{mas } \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_E = \frac{v_{NE} - v_{SE}}{2h_y} \quad \text{e} \quad \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_W = \frac{v_{NW} - v_{SW}}{2h_y}$$

com erros de truncamento dados por

$$\varepsilon_{v_{xy}} = -v_p^{ii} \cdot \frac{h^2}{6} - v_p^v \cdot \frac{h^4}{120} - v_p^{vii} \cdot \frac{h^6}{5040} - \dots \quad (\text{F.15})$$

portanto

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{v_{SW} + v_{NE} - v_{SE} - v_{NW}}{4 \cdot h_x \cdot h_y} \quad (\text{F.16})$$

A derivada cruzada  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)$  pode ser aproximada da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_N - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_S}{2h_y}$$

$$\text{mas } \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_N = \frac{u_{NE} - u_{NW}}{2h_x} \quad \text{e} \quad \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_S = \frac{u_{SE} - u_{SW}}{2h_x}$$

com erro de truncamento dado por

$$\epsilon_{u_{yx}} = -v_P^{iii} \cdot \frac{h^2}{6} - v_P^v \cdot \frac{h^4}{120} - v_P^{vii} \cdot \frac{h^6}{5040} - \dots \quad (\text{F.17})$$

portanto

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{u_{NE} + u_{SW} - u_{SE} - u_{NW}}{4 \cdot h_x \cdot h_y} \quad (\text{F.18})$$

Substituindo as equações F.3, F.7, F.9 E F.15 na equação F.1, obtém-se:

$$(1 + C_\sigma) \left( \frac{u_W + u_E - 2u_P}{h_x^2} \right) + \frac{u_S + u_N - 2u_P}{h_y^2} + C_\mu \left( \frac{v_{SN} + v_{NE} - v_{SE} - v_{NW}}{4 \cdot h_x \cdot h_y} \right) = 2 \cdot C_\mu \cdot \alpha \left( \frac{T_E - T_W}{2 \cdot h_x} \right)$$

que desenvolvendo leva a:

$$\begin{aligned} \left( \frac{1 + C_\mu}{h_x^2} + \frac{1 + C_\mu}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) u_P &= \left( \frac{1 + C_\mu}{h_x^2} \right) u_W + \left( \frac{1 + C_\mu}{h_x^2} \right) u_E + \frac{1}{h_y^2} u_S + \frac{1}{h_y^2} u_N + \\ &+ C_\mu \left( \frac{v_{SW} + v_{NE} - v_{SE} - v_{NW}}{4 \cdot h_x \cdot h_y} \right) - C_\mu \cdot \alpha \left( \frac{T_E - T_W}{h_x} \right) \end{aligned}$$

e que pode ser escrita como:

$$a_P^u \cdot u_P = a_W^u \cdot u_W + a_E^u \cdot u_E + a_S^u \cdot u_S + a_N^u \cdot u_N + b_P^u \quad (\text{F.19})$$

onde:

$$\begin{cases} a_w^u = a_e^u = \frac{1+C_\mu}{h_x^2} \\ a_s^u = a_n^u = \frac{1}{h_y^2} \\ a_p^u = a_w^u + a_e^u + a_s^u + a_n^u \\ b_p^u = C_\mu \cdot \left[ \frac{v_{SW} + v_{NE} - v_{SE} - v_{NW}}{4 \cdot h_x \cdot h_y} - \alpha \cdot \left( \frac{T_e - T_w}{h_x} \right) \right] \end{cases} \quad (\text{F.20})$$

Substituindo as equações F.5, F.11, F.13 e F.16 na equação F.2, obtém-se:

$$(1+C_\mu) \left( \frac{v_s + v_n - 2v_p}{h_y^2} \right) + \frac{v_w + v_e - 2v_p}{h_x^2} + C_\mu \cdot \left( \frac{u_{NE} + u_{SW} - u_{NW} - u_{SE}}{4 \cdot h_x \cdot h_y} \right) = 2 \cdot C_\mu \cdot \alpha \cdot \left( \frac{T_n - T_s}{2 \cdot h_y} \right)$$

que desenvolvendo, leva a:

$$\begin{aligned} \left( \frac{1+C_\mu}{h_y^2} + \frac{1+C_\mu}{h_y^2} + \frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_x^2} \right) \cdot v_p &= \left( \frac{1+C_\mu}{h_y^2} \right) \cdot v_n + \left( \frac{1+C_\mu}{h_y^2} \right) \cdot v_s + \frac{1}{h_x^2} \cdot v_w + \frac{1}{h_x^2} \cdot v_e + \\ &+ C_\mu \cdot \left( \frac{u_{NE} + u_{SW} - u_{NW} - u_{SE}}{4 \cdot h_x \cdot h_y} \right) - C_\mu \cdot \alpha \cdot \left( \frac{T_n - T_s}{h_y} \right) \end{aligned}$$

e que pode ser reescrita como:

$$a_p^v \cdot v_p = a_n^v \cdot v_n + a_s^v \cdot v_s + a_w^v \cdot v_w + a_e^v \cdot v_e + b_p^v \quad (\text{F.21})$$

onde:

$$\begin{cases} a_n^v = a_s^v = \frac{1+C_\mu}{h_y^2} \\ a_w^v = a_e^v = \frac{1}{h_x^2} \\ a_p^v = a_n^v + a_s^v + a_w^v + a_e^v \\ b_p^v = C_\mu \cdot \left[ \frac{u_{NE} + u_{SW} - u_{NW} - u_{SE}}{4 \cdot h_x \cdot h_y} - \alpha \cdot \left( \frac{T_n - T_s}{h_y} \right) \right] \end{cases} \quad (\text{F.22})$$