

## **CAPÍTULO 6**

# **SIMULAÇÃO DE GRANDES ESCALAS DE ESCOAMENTOS TURBULENTOS**

### **6.1. TURBULÊNCIA**

A turbulência nos fluidos está entre os mais complexos e espetaculares fenômenos encontrados na natureza. É naturalmente tridimensional e dependente do tempo. É caracterizada por processos não lineares de troca de massa, energia e quantidade de movimento, o que se dá via interações entre estruturas das mais variadas escalas de tempo e de comprimento. A importância prática da compreensão da turbulência é muito grande e crescente com o tempo. A turbulência é estudada por físicos, químicos, engenheiros (mecânicos, aeronáuticos, nucleares, termo-hidráulicos), matemáticos, biólogos, médicos, sociólogos, economistas, meteorologistas e astrofísicos, cada um com suas motivações particulares geradas pela busca de compreender fenômenos naturais.

Basicamente existem duas correntes de estudos da turbulência: os experimentalistas de laboratórios e os experimentalistas numéricos. Experimentação numérica é, atualmente uma realidade, e, a metodologia de Simulação de Grandes Escalas se coloca como uma das mais promissoras ferramentas de análise. Esta metodologia teve seu início ligado aos trabalhos do meteorologista Smagorinsky (1963), com a motivação de simular apenas as grandes escalas dos escoamentos atmosféricos, na impossibilidade de simular todo o espectro de escalas. As primeiras aplicações em problemas de engenharia se iniciaram com Deardorff (1970). Durante estes quarenta anos, esta metodologia já evoluiu bastante. Novos modelos foram desenvolvidos e muitas pesquisas têm atestado o potencial desta metodologia tanto para análise de problemas de engenharia quanto para análise física e fenomenológica dos mais diversos escoamentos turbulentos.

Turbulência ocorre com muita frequência na natureza e tem sido objeto de estudos por mais de 150 anos. Na verdade desde Leonardo da Vinci (1510) os estudos neste domínio têm acontecido. Ele fez interpretações muito importantes com base em observações visuais apenas: a esteira de vórtices gerada à jusante de um obstáculo é composta por uma larga

quantidade de frequências e de formas diversas. Este fato foi também observado por ele nos movimentos turbilhonares presentes no escoamento gerado pela “queda de água” em um reservatório. A Figura 6.1(a) ilustra o desenho elaborado por ele e, na Figura 6.1(b) tem-se uma fotografia do impacto de uma pequena cascata visualizada na Serra das Mantiqueiras. A água oxidada permitiu uma boa visualização das múltiplas escalas da turbulência presentes neste problema. Esta multiplicidade de escalas foi, provavelmente, precursora do processo de decomposição de escalas proposto por Reynolds (1894).



Figura 6.1. Múltiplas escalas da turbulência presentes em cascata de água: (a) desenho de Leonardo da Vinci e (b) fotografia feita e cedida por Finotti (aluno de iniciação científica, 1999)

É grande o investimento em pesquisas relacionadas à compreensão e ao controle dos escoamentos turbulentos, devido à enorme gama de implicações práticas advindas, envolvendo sistemas de transportes (aeronaves, navios, automóveis), sistemas de conversão e transmissão de energia (motores, turbinas, compressores, trocadores de calor) e também aplicações geofísicas (meteorologia, qualidade do ar, dispersão de poluentes nos mares). A necessidade de modelos matemáticos e de métodos de solução de equações é crescente. Grandes esforços tem sido dispensados e com tendência de crescer ao longo do tempo, para o desenvolvimento de ferramentas numéricas que possam ser empregadas tanto para a realização do que hoje se chama *experimentação numérica* quanto para a obtenção de informações para a aplicação imediata em atividades de engenharia. Dentre as maiores dificuldades encontradas no desenvolvimento da modelagem matemática dos escoamento turbulentos, encontra-se a problemática da modelagem da turbulência,.

## 6.2. METODOLOGIAS DE SIMULAÇÃO

Como assinalado nas unidades precedente, são numerosas as formas de se modelar e simular os efeitos da turbulência. Elas variam desde as correlações e diagramas empíricos até as modernas metodologias de simulação numérica. Um exemplo das primeiras são os diagramas de cálculo de perda de carga (diagramas de Moody) utilizados para dimensionar sistemas de bombeamento e ventilação. Neles se leva em conta o número de Reynolds, a geometria dos condutos e a rugosidade de suas paredes internas. Quanto às metodologias de simulação numérica mais clássicas, mas não menos importantes, discussões preliminares foram apresentadas antes. Lembra-se que este capítulo é dedicado à metodologia de Simulação de Grandes Escalas (SGE), considerada uma das mais modernas formas de se analisar as causas e os efeitos ligados aos escoamentos turbulentos. No entanto, antes de se entrar neste assunto especificamente, serão feitas considerações sobre a metodologia de Simulação Numérica Direta (SND).

### 6.3. SIMULAÇÃO NUMÉRICA DIRETA

Como discutido no capítulo de Fundamentos da Turbulência nos Fluidos, uma das principais características dos escoamentos turbulentos é o alto grau de liberdade que caracteriza este tipo de sistema dinâmico. Mostrou-se, inclusive, que o número de graus de liberdade ( $N_{gl}$ ) pode ser estimado em função do número de Reynolds, como apresentado no Capítulo 5. Com esta equação conclui-se que, quanto maior for o número de Reynolds, maior será o número de graus de liberdade.

A forma mais intuitiva de se simular um escoamento passa pela solução das equações de Navier-Stokes. Se a malha de discretização for suficientemente fina, todos os fenômenos físicos serão resolvidos, ou seja, todos os graus de liberdade e todo o processo de interação não linear entre eles. Este tipo de simulação é conhecido como Simulação Numérica Direta (SND) da turbulência. Obviamente, por questões de capacidade computacional, esta metodologia só pode ser utilizada para escoamentos a baixos números de Reynolds. Isto é uma consequência do fato que cada grau de liberdade corresponde a uma equação linear discretizada. A título de exemplo, voltando-se à Figura 5.4, estima-se  $Re = 4.000$  o que fornece um  $N_{gl} = 1,3 \times 10^8$ . Observa-se que, numa estimativa grosseira, a solução deste problema, via SND, exigiria a solução de 130 milhões de equações simultâneas. As perspectivas para a solução direta deste problema são muito otimistas pois nos dias atuais já

se fala na solução de 20 milhões de equações simultâneas. No entanto este número de Reynolds é muito modesto diante dos valores que caracterizam uma grande maioria dos problemas de engenharia e de geofísica. Um outro exemplo extremo, ilustrado na Figura 5.3, mostra que um escoamento típico atmosférico é caracterizado por um  $Ng_l=10^{24}$ . A solução direta deste tipo de sistema dinâmico está fora de todas as esperanças atuais.

Diante desta rápida exposição, conclui-se que a maior parte dos problemas práticos não podem ser solucionados via SND. Neste sentido, Smagorinsky (1963), utilizando das idéias de decomposição das escalas de Reynolds (1894), propôs uma nova filosofia de modelagem, com a qual a separação em um campo médio e nas respectivas flutuações não é mais utilizada, mas sim, a separação das altas e das baixas frequências, utilizando-se de um processo de filtragem. O comprimento característico do filtro (que determina a frequência de corte) é baseado no tamanho da malha de discretização. Este assunto é o objeto central deste capítulo, o qual será discutido com mais detalhes na unidade seguinte.

#### 6.4. SIMULAÇÃO DE GRANDES ESCALAS

Simulação de Grandes Escalas é uma metodologia intermediária à Simulação Direta e à simulação via equações médias de Reynolds. Em SGE as estruturas turbulentas transportadoras de energia e quantidade de movimento são resolvidas diretamente da solução das equações filtradas, enquanto que apenas as menores estruturas são modeladas. Considerando-se que as menores estruturas tendem a ser mais homogêneas e isotrópicas e menos afetadas pelas condições de contorno, espera-se que os modelos advindos sejam mais universais e independentes dos diferentes tipos de escoamentos, quando comparados com as metodologias clássicas, nas quais o conceito de média é utilizado.

As metodologias de SND e SGE são semelhantes no sentido que ambas permitem a obtenção de resultados tridimensionais e transientes das equações de Navier-Stokes. Sendo assim, SGE continua a exigir malhas refinadas. No entanto, torna-se possível resolver escoamentos a altos números de Reynolds, devido ao processo de separação de escalas utilizado e ao processo de modelagem dos tensores sub-malha adicionais que aparecem.

Devido a estas características a SGE se tornou uma das mais promissoras metodologias para solução de escoamentos turbulentos. Nos próximos capítulos serão fornecidos detalhes sobre os processos de filtragem e de modelagem sub-malha.

### 6.4.1. Processos de filtragem das equações e de separação das escalas

Nesta unidade restringir-se-á aos escoamentos incompressíveis cujas equações de transporte são as seguintes:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right], \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j T) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \alpha \frac{\partial T}{\partial x_j} \right), \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (6.3)$$

Estas equações representam respectivamente a conservação da quantidade de movimento, da energia e da massa. Trata-se de um sistema de 5 equações e 5 incógnitas, constituindo-se, portanto, num sistema de equações fechado. Conforme já argumentado, a solução direta destas equações só é possível para baixos números de Reynolds. Para escoamentos a altos números de Reynolds, a alternativa é o processo de filtragem e de separação das escalas. Para tanto, as variáveis presentes nestas equações governantes são separadas em uma parte dita de grandes escalas  $\bar{f}(\bar{x}, t)$  e em outra parte dita sub-malha  $f'(\bar{x}, t)$ :

$$f(\bar{x}, t) = \bar{f}(\bar{x}, t) + f'(\bar{x}, t). \quad (6.4)$$

A parte filtrada é dada por

$$\bar{f}(\bar{x}, t) = \int_D f(\bar{x}', t) G(\bar{x} - \bar{x}') d\bar{x}', \quad (6.5)$$

onde a função filtro é definida de diversas formas, entre as quais, uma das mais utilizadas, é a função filtro por volume, dada pela equação abaixo:

$$G(\bar{x}) = \begin{cases} 1/\Delta^3 & \text{se } |\bar{x}| \leq \Delta/2 \\ 0 & \text{se } |\bar{x}| > \Delta/2 \end{cases}, \quad (6.6)$$

onde  $\Delta$  é o tamanho característico do filtro, o qual caracteriza a frequência de corte da filtragem. Em particular, se  $\Delta$  for tomado como o tamanho da malha, o processo de filtragem se confunde com a filtragem imposta pela discretização, uma vez que no interior de um volume de discretização todas as variáveis são mantidas constantes, ver Figura 5.8. Outro tipo de filtro sugerido pela literatura é dado por uma função gauseana, como pode ser visto no Capítulo 5 (5.2.3.1).

Em função do processo de filtragem acima, as propriedades clássicas da decomposição não são mais verificadas, ou seja:

$$\begin{cases} \overline{u_i u_j'} \neq 0 \\ \overline{u_i} \neq \bar{u}_i \end{cases} \quad (6.7)$$

Aplicando-se o processo de filtragem às equações governantes (6.1) a (6.3) obtém-se as seguintes equações:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j}) = -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right], \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_j T}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \alpha \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right), \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0. \quad (6.10)$$

O sistema de equações acima modelam o transporte das variáveis  $\bar{u}_i$  e  $\bar{T}$ . Nota-se que os termos não lineares se apresentam na forma de dois produtos filtrados, o que torna impossível a solução deste sistema de equações. Desta forma, faz-se necessário decompor as escalas, utilizando a Equação (6.4), o que modificará apenas o termo não linear ou de transporte convectivo destas equações, da seguinte forma:

$$\overline{u_i u_j} = \overline{(\bar{u}_i + u_i')(\bar{u}_j + u_j')} = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} + \overline{u_i' \bar{u}_j} + \overline{\bar{u}_i u_j'} + \overline{u_i' u_j'}, \quad (6.11)$$

$$\overline{u_j T} = \overline{(\bar{u}_j + u_j')(\bar{T} + T')} = \overline{\bar{u}_j \bar{T}} + \overline{u_j' \bar{T}} + \overline{\bar{u}_j T'} + \overline{u_j' T'}. \quad (6.12)$$

Observa-se que o processo de decomposição ainda não resolve o problema colocado, pois os últimos membros das Equações (6.11) e (6.12) continuam dependendo de dois produtos filtrados. Objetivando expressar estes termos em função do produto das variáveis filtradas, utiliza-se um tensor e um fluxo turbulento adicionais, definidos das seguintes formas:

$$L_{ij} = \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j, \quad (6.13)$$

$$L_{\theta j} = \overline{\tilde{u}_j \tilde{T}} - \bar{u}_j \bar{T}. \quad (6.14)$$

Substituindo-se as Equações (6.13) e (6.14) nas Equações (6.11) e (6.12), obtém-se as seguintes equações:

$$\overline{u_i u_j} = \bar{u}_i \bar{u}_j + \overline{u'_i \tilde{u}_j} + \overline{\tilde{u}_i u'_j} + \overline{u'_i u'_j} + L_{ij}, \quad (6.15)$$

$$\overline{u_j T} = \bar{u}_j \bar{T} + \overline{u'_j \tilde{T}} + \overline{\tilde{u}_j T'} + \overline{u'_j T'} + L_{\theta j}. \quad (6.16)$$

Finalmente, estes dois termos estão escritos em função do produto das variáveis filtradas e de alguns tensores e fluxos adicionais, identificados a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tau_{ij} = \overline{u'_i u'_j} & \Rightarrow \text{Tensor de Reynolds sub-malha} \\ C_{ij} = \overline{u'_i \tilde{u}_j} + \overline{\tilde{u}_i u'_j} & \Rightarrow \text{Tensor cruzado} \\ L_{ij} = \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j & \Rightarrow \text{Tensor de Leonard} \\ \theta_j = \overline{u'_j \tilde{T}'} & \Rightarrow \text{Fluxo turbulento sub-malha} \\ C_{\theta j} = \overline{\tilde{u}_j T'} + \overline{u'_j T'} & \Rightarrow \text{Fluxo turbulento cruzado} \\ L_{\theta j} = \overline{\tilde{u}_j \tilde{T}} - \bar{u}_j \bar{T} & \Rightarrow \text{Fluxo turbulento de Leonard.} \end{array} \right. \quad (6.17)$$

Substituindo-se estes resultados nas Equações (6.8) e (6.9) obtém-se as equações governantes filtradas, nas seguintes formas:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - (\tau_{ij} + C_{ij} + L_{ij}) \right], \quad (6.18)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_j \bar{T}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \alpha \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} - (\theta_j + C_{\theta j} + L_{\theta j}) \right], \quad (6.19)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0. \quad (6.20)$$

Este é um sistema de cinco equações e cinco variáveis de transportadas ( $\bar{u}_i, \bar{T}$  e  $\bar{p}$ ) acrescidas dos três tensores ( $\tau_{ij}, C_{ij}$  e  $L_{ij}$ ) e dos três vetores fluxos turbulentos ( $\theta_j, C_{\theta j}$  e  $L_{\theta j}$ ). Trata-se então de um sistema de equações aberto com mais equações que incógnitas. Este problema tem sua origem no termo não linear da equação de conservação da quantidade de movimento e no termo de transporte convectivo da equação da conservação da energia. Observa-se que eles apareceram do processo de geração das Equações (6.18), (6.19) e (6.20) que governam o transporte de momentos estatísticos de primeira ordem. Os tensores e vetores incógnitas já citados têm como componentes, correlações ou momentos de segunda ordem. É sempre possível se gerar equações de transporte para estes momentos de segunda ordem, o que acarretaria no aparecimento de momentos de terceira ordem e assim sucessivamente. Este é o clássico problema de fechamento da turbulência, um dos maiores desafios científicos da física moderna, o qual está completamente em aberto, não contando ainda com uma teoria fechada.

Métodos paliativos de fechamento da turbulência foram propostos ao longo das últimas décadas. Neste capítulo dedica-se à modelagem sub-malha da turbulência que conduz à metodologia de Simulação de Grandes Escalas, a qual é objeto de discussão no próximo item.

#### 6.4.2. Modelagem sub-malha da turbulência

Os modelos de turbulência podem ser classificados em dois grupos básicos: aqueles



que dependem da viscosidade turbulenta (hipótese de Boussinesq) e aqueles baseados em equações algébricas, os quais não dependem da viscosidade turbulenta. No presente estudo restringir-se-á ao primeiro grupo, ou seja, àqueles que dependem da viscosidade turbulenta.

Boussinesq propôs expressar o tensor de Reynolds sub-malha em função da taxa de deformação gerada pelo campo de velocidade filtrado e da energia cinética turbulenta, como segue:

$$\tau_{ij} = -\nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} k \delta_{ij}, \quad (6.21)$$

onde a viscosidade turbulenta  $\nu_t$  pode ser calculada via diferentes modelos. Os mais utilizados serão descritos posteriormente. A energia cinética turbulenta sub-malha pode ser incorporada à pressão estática. Os tensores cruzado e de Leonard podem ser modelados seguindo a idéia de Clark *et al.* (1979) que sugerem expressar a soma destes tensores como uma expansão de Taylor do campo de velocidade filtrado. Com base nisto Findikakis e Street (1979) demonstraram que:

$$L_{ij} + C_{ij} \cong \frac{\Delta_k}{12} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k}, \quad (6.22)$$

onde  $k=1,2,3$ . Com esta expressão calcula-se explicitamente estes tensores em função do campo filtrado de velocidade.

Shaanan *et al.* (1975) estimaram que, quando um esquema de transporte convectivo de até segunda ordem é utilizado, os tensores de Leonard e cruzado podem ser desprezados. Por outro lado, quando se utiliza esquemas de ordens mais elevadas ou métodos espectrais, este tensor não pode ser mais desprezado. Silveira-Neto *et al.* (1993), em experiências numéricas sobre uma expansão brusca, evidenciaram que mesmo para esquemas de terceira ordem estes dois tensores podem ser desprezíveis face ao tensor de Reynolds sub-malha. Para tanto foram definidos três termos de difusão como segue:

$$D_R = \left\| \overline{\vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}} \right\|, \quad (6.23)$$

$$D_L = \left\| \overline{\vec{\nabla} \cdot (L_{ij} + C_{ij})} \right\|, \quad (6.24)$$

$$D_M = \left\| \overline{\nabla \cdot (2\nu \overline{\delta}_{ij})} \right\|, \quad (6.25)$$

onde  $D_R$ ,  $D_L$  e  $D_M$  são respectivamente os efeitos da difusão associada ao tensor de Reynolds sub-malha, aos tensores de Leonard e cruzado e ao tensor viscoso respectivamente. Estes efeitos foram calculados em simulações de grandes escalas com as equações (21) e (22), onde a viscosidade turbulenta foi avaliada com um modelo de Smagorinsky (1963) a ser descrito ainda.

Na Figura 6.1 mostra-se os efeitos relativos destes tipos de difusão. Plotou-se o valor máximo calculado sobre cada seção perpendicular ao canal, os quais foram plotados em função da coordenada longitudinal. Nas regiões mais distantes do degrau ( $x/H$  maior) os efeitos  $D_R$  são da ordem de 40 vezes os efeitos de  $D_L$  e  $D_M$ . Este resultado está de acordo com os resultados de Antonopoulos-Domis (1981) obtidos com um método de discretização semelhante. Desta forma a inclusão ou não destes tensores depende da ordem de precisão do esquema de transporte conectivo.

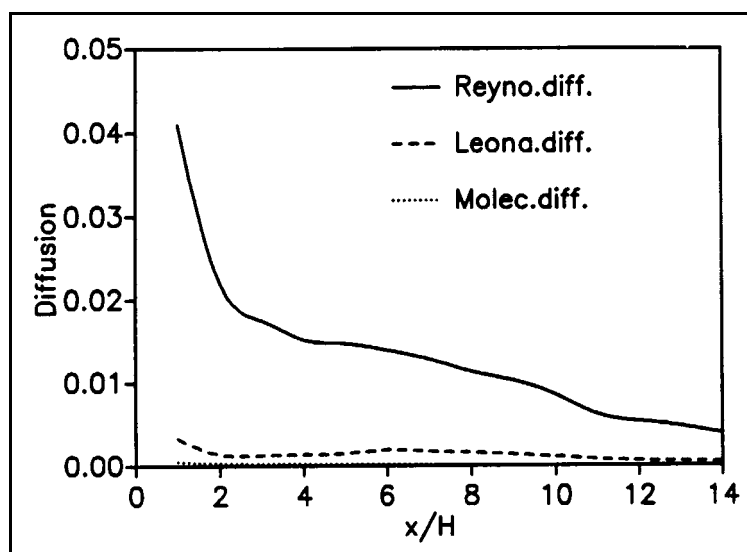


Figura 6.1. Comparação dos efeitos de difusão molecular, de Leonard e cruzado e de Reynolds sub-malha (Silveira-Neto *et al.*, 1993).

Resta ainda o problema ligado ao cálculo da viscosidade turbulenta  $\nu_t$ , objeto de diferentes tipos de modelos a serem descritos nos itens que seguem.

#### 6.4.3. Modelo sub-malha de Smagorinsky

Este modelo foi proposto por Smagorinsky (1963), baseando-se na hipótese do equilíbrio local para as pequenas escalas, ou seja, que a produção de tensões turbulentas sub-malha seja igual à dissipação:

$$\wp = \varepsilon, \quad (6.26)$$

onde a produção pode ser escrita em função da taxa de cisalhamento do campo filtrado e a dissipação pode ser escrita em função da escala de velocidade e do comprimento característicos sub-malha:

$$\wp = -\overline{u'_i u'_j} S_{ij} = 2\nu_t S_{ij} S_{ij}, \quad (6.27)$$

$$\varepsilon = -c_1 \overline{(u'_i u'_j)^3} / \ell. \quad (6.28)$$

Observa-se que  $-\overline{u'_i u'_j}$ , na Equação (6.27), contém apenas a parte anisotrópica do tensor de Reynolds sub-malha. Na última equação,  $\overline{(u'_i u'_j)^3}$  e  $\ell$  são as escalas de velocidade e de comprimento sub-malha respectivamente. Supõe-se ainda que a viscosidade turbulenta sub-malha seja proporcional a estas duas escalas, conforme a equação seguinte:

$$\nu_t = c_1 \ell \overline{(u'_i u'_j)^3}^{1/2}. \quad (6.29)$$

Utilizando-se este conjunto de equações pode-se exprimir a viscosidade turbulenta em função da taxa de deformação e da escala de comprimento:

$$\nu_t = (C_S \ell)^2 \sqrt{2 S_{ij} S_{ij}}. \quad (6.30)$$

O comprimento característico  $\ell$  é calculado em função da malha de discretização. A constante de Smagorinsky  $C_S=0,18$  foi determinada analiticamente por Lilly (1967), para turbulência homogênea e isotrópica. No entanto o valor desta constante tem sido questionado e adaptado segundo o tipo de código de cálculo utilizado pela comunidade, e do tipo de escoamento em análise. Apesar disto, este primeiro modelo sub-malha tem sido largamente

utilizado e permitiu o início de uma das mais promissoras linhas de pesquisa na área da simulação numérica de escoamentos turbulentos. No campo da modelagem sub-malha, avanços consideráveis têm sido conseguidos, chegando à novas concepções como os modelos dinâmicos que não necessitam do uso desta constante *ad-hoc*. Nesta nova concepção de modelagem, esta constante é substituída por uma função avaliada dinamicamente durante a simulação.

#### 6.4.4. Modelo sub-malha Função Estrutura de Velocidade

Em uma simulação de grandes escalas os fluxos turbulentos de quantidade de movimento e de calor são modelados via conceitos de viscosidade e de difusão turbulentas. Chollet e Lesieur (1982) apresentaram o formalismo para o cálculo de  $\nu_t$  (viscosidade turbulenta) e  $\alpha_t$  (difusividade turbulenta) no espaço de Fourier. Estas quantidades servem à modelagem das interações das grandes estruturas que correspondem aos pequenos números de onda  $k < k_c$  com as estruturas sub-malha relativas aos grandes números de onda  $k > k_c$ , onde  $k_c$  é o número de onda de corte (ver Figura 6.2) determinado pela malha de discretização utilizada, ( $k_c = \pi / \Delta$ ).

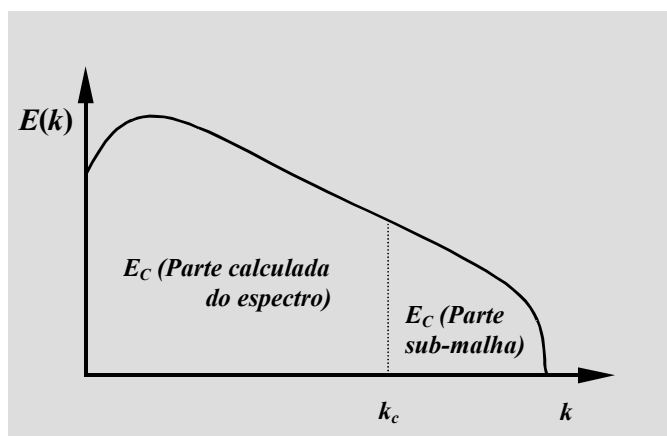


Figura 6.2. Espectro de energia cinética turbulenta e número de onda de corte.

A partir do formalismo desenvolvido por Kraichnan (1976), Cholet e Lesieur (1982) utilizaram a teoria EDQNM, Lesieur (1997), para fechar as equações de conservação. Eles obtiveram a seguinte equação para a viscosidade turbulenta:

$$\nu_t(k_c, t) = \nu_t^+ \sqrt{\frac{E(k_c, t)}{k_c}}. \quad (6.31)$$

A constante  $\nu_t^+$  é determinada fazendo-se um balanço de energia como segue:

$$\int_0^{k_c} 2\nu_t k^2 E(k, t) dk = \varepsilon(t), \quad (6.32)$$

onde  $\varepsilon(t)$  é o fluxo de energia cinética turbulenta através do espectro de energia de Kolmogorov:

$$E(k, t) = C_K \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad (6.33)$$

o que permite obter

$$\nu_t^+ = (2/3) C_K^{-3/2}, \quad (6.34)$$

onde  $C_K = 1,4$  é a constante de Kolmogorov. Percebe-se que o cálculo de  $\nu_t$  passa pelo cálculo do espectro de energia cinética turbulenta no espaço de Fourier. O cálculo desta grandeza no espaço físico é bastante difícil de ser realizado. Uma forma de resolver este problema é utilizar o conceito de função estrutura de velocidade de ordem 2, o que deu origem a um novo tipo de modelagem sub-malha, proposto por Métails e Lesieur (1991). Um resumo desta modelagem é aqui apresentado.

A função estrutura de ordem 2 da velocidade é definida como segue:

$$F_2(\vec{x}, r, t) = \overline{\|\vec{u}(\vec{x} + \vec{r}, t) - \vec{u}(\vec{x}, t)\|^2}, \quad (6.35)$$

onde o operador “ $\overline{\quad}$ ” denota o processo de média espacial em torno do ponto  $\vec{r}$  e no interior de uma esfera de raio  $r$ . A literatura, Batchelor (1953), mostra que existe um dualismo entre a função estrutura  $F_2(\vec{r}, t)$  (definida no espaço físico) e o espectro de energia  $E(k, t)$  (definido no espaço de Fourier), válido para turbulência homogênea e isotrópica. Nestas condições, utiliza-se um espectro de energia que apresenta uma zona inercial em  $k^{-5/3}$  e obtém-se a relação procurada:

$$E(\vec{x}, k_c, t) = 0,03 \Delta F(\vec{x}, \Delta, t), \quad (6.36)$$

onde  $\Delta$  é o tamanho característico da malha e  $k_c = \pi / \Delta$  é o número de onda de corte. Substituindo-se a Equação (6.36) na Equação (6.31) obtém-se o seguinte resultado:

$$\nu_t(\vec{x}, \Delta, t) = 0,067 C_K^{-3/2} \Delta \sqrt{F_2(\vec{x}, \Delta, t)}. \quad (6.37)$$

Com a equação (37) o problema de cálculo de  $\nu_t$  está resolvido, sob as hipóteses utilizadas. No entanto,  $F_2(\vec{x}, \Delta, t)$  é a função estrutura relativa ao espectro de energia completo, com  $k \in [0, \infty]$ . Por outro lado, em simulação de grandes escalas, este cálculo deve ser realizado utilizando-se a parte resolvida do espectro, ou seja,  $k < k_c$  ou do campo de velocidade filtrado, fazendo-se uma média sobre uma esfera de raio  $r \geq \Delta$ . Falta, em consequência, a parte das escalas sub-malha. Métails e Lesieur (1991) propuseram uma correção supondo-se uma extensão da zona inercial do espectro de energia para  $k > k_c$ . Define-se então uma função estrutura truncada como segue:

$$\bar{F}_2(\vec{x}, r, t) = \overline{\|\vec{u}(\vec{x} + \vec{r}, t) - \vec{u}(\vec{x}, t)\|^2}_{\|\vec{r}\|=\Delta}. \quad (6.38)$$

A forma mais simples de calcular a média espacial é fazê-lo sobre os seis pontos mais próximos do ponto  $\vec{x}$ . A Figura 6.3 mostra a distribuição dos pontos utilizados, no caso específico de duas dimensões.

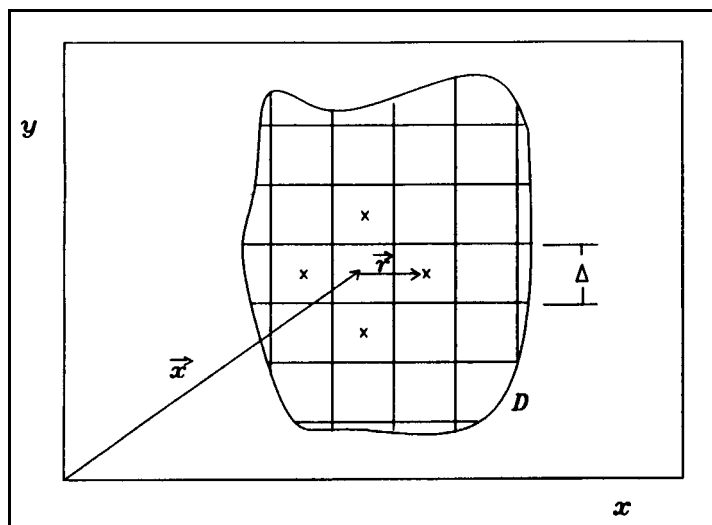


Figura 6.3. Distribuição dos pontos utilizados para o cálculo da função estrutura truncada

$$\bar{F}_2(\vec{x}, \Delta, t) \text{ sobre um domínio } D.$$

Finalmente, o cálculo de  $\nu_t$ , levando-se em conta esta correção, é feito com a equação seguinte:

$$\nu_t(\bar{x}, \Delta, t) = 0,104 C_K^{-3/2} \Delta \sqrt{\overline{F_2}(\bar{x}, \Delta, t)}. \quad (6.39)$$

A viscosidade turbulenta é calculada no espaço físico para cada posição  $\bar{x}$  e para cada instante  $t$ , utilizando-se o campo de velocidade filtrado. Observa-se que a passagem de uma viscosidade turbulenta  $\nu_t(k_c, t)$  no espaço espectral para uma viscosidade turbulenta  $\nu_t(\bar{x}, \Delta, t)$  no espaço físico é justificada pela hipótese de homogeneidade e isotropia nas pequenas escalas, as quais são levadas em conta via modelagem sub-malha. A não homogeneidade das grandes escalas deve ser levada em conta explicitamente via solução numérica das equações de conservação filtradas e modeladas.

No que se refere à modelagem da equação da conservação da energia, ela é realizada com o conceito de difusividade térmica turbulenta  $\alpha_t$ , calculada via conceito de número de Prandtl turbulento,  $Pr_t = \nu_t / \alpha_t = 0,6$ , conforme Chollet e Lesieur (1982) e Métais e Lesieur (1991).

Observa-se que neste tipo de modelo também está presente uma constante *ad-hoc*, determinada analiticamente, o que o torna, como o modelo de Smagorinsky limitado a escoamentos turbulentos completamente desenvolvidos. Estes modelos não são adequados à simulação de escoamentos em transição e escoamentos nas proximidades de paredes.

Modificações sobre esta versão básica do modelo função estrutura foram propostas no sentido de torná-lo aplicável a todos os regimes de escoamentos, incluindo a transição. David (1993) propôs o modelo função estrutura seletivo, no qual a viscosidade turbulenta “é desligada” se o escoamento não apresenta o devido nível de tridimensionalização. Fallon (1996) aplicou este modelo para simulação da transição sobre uma expansão brusca, obtendo resultados mais coerentes que com o uso do modelo de base. Ducros (1995) propôs o modelo função estrutura filtrado, no qual as baixas frequências são eliminadas via um filtro passa alta. Testes foram realizados para a transição de camada limite. Resta no entanto uma lacuna de maior generalidade destas novas versões, bem como a possibilidade de se simular corretamente o que acontece junto a paredes onde, normalmente, se faz necessário o uso, seja de modelos específicos, seja de malhas extremamente finas. Necessita-se também de modelagem para os problemas de transição à turbulência, onde as hipóteses de homogeneidade e isotropia não são mais verdadeiras e a teoria de Kolmogorov não é válida.

No que diz respeito ao modelo de Smagorinsky, novas propostas têm sido feitas, dentre as quais se destaca a chamada modelagem dinâmica, a qual é apresentada no próximo item.

#### **6.4.5. Modelagem dinâmica sub-malha**

##### **6.4.5.1. Aspectos Fundamentais**

A modelagem sub-malha convencional envolve uma constante de proporcionalidade *ad-hoc* imposta. Apesar das limitações advindas deste fato, conseguiu-se, nos últimos anos, avanços extremamente importantes na área de simulação numérica dos escoamentos turbulentos. Os resultados que podem ser obtidos em turbulência completamente desenvolvida e fora das regiões parietais colocam a SGE hoje como uma ferramenta paralela à experimentação em laboratórios (Bradshaw *et al.*, 1996, e Gharib, 1996).

Uma das principais limitações diz respeito a análise de escoamentos em transição e nas proximidades de paredes, em consequência da imposição *ad-hoc* de uma constante de proporcionalidade. A determinação dinâmica de uma função de proporcionalidade no cálculo da viscosidade turbulenta pode representar avanços importantes.

##### **6.4.5.2. Modelagem sub-malha dinâmica**

Neste tipo de modelo o coeficiente de proporcionalidade não é mais uma constante e sim uma função que se ajusta ao escoamento no tempo e no espaço. A base desta modelagem é o uso de dois filtros com comprimentos característicos diferentes:

- No primeiro, utiliza-se as dimensões da malha para calcular o seu comprimento característico. Ele é denominado *filtro a nível da malha*;
- No segundo utiliza-se um múltiplo das dimensões das malhas para calcular o comprimento característico. Ele é denominado *filtro teste*;

Com base no uso dos dois níveis de escalas (acima da malha), conclui-se que, na modelagem dinâmica, utiliza-se informações do nível de energia contido nas *menores escalas resolvidas*, situadas entre as escalas dos dois filtros, para modelar a transferência de energia entre as escalas resolvidas e as escalas não resolvidas, como ilustrado na Figura 6.4.



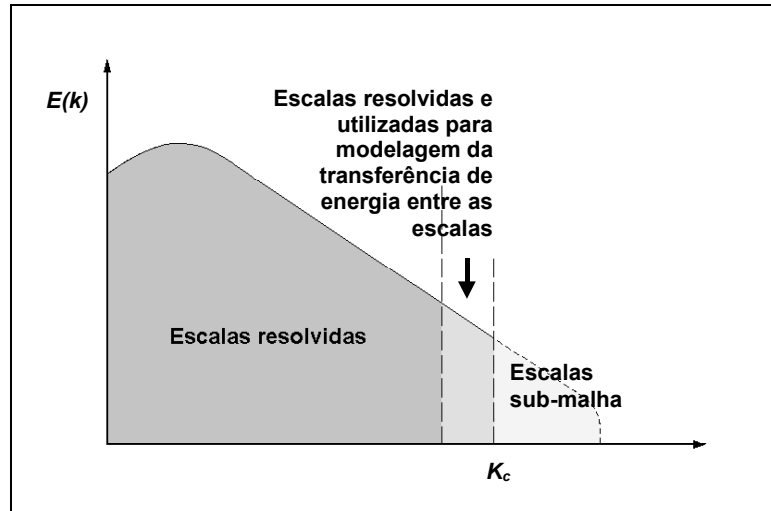


Figura 6.4. Espectro de energia, ilustrando as duas escalas que definem os dois filtros utilizados e a banda de frequência que serve à modelagem do processo de interação entre as escalas resolvidas e as escalas sub-malha.

É importante perceber que a função a ser determinada varia com o tempo e com o espaço. Ela deve se anular nas regiões de escoamentos laminares e proximidades de fronteiras sólidas, implicando num melhor comportamento assintótico.

Espera-se ainda a possibilidade de se simular o efeito de transferência inversa de energia cinética turbulenta das escalas sub-malha para as escalas resolvidas (*back-scatter*), fenômeno este que aparece nas regiões de camada limite, por exemplo.

É necessário enfatizar que o principal ingrediente para o estabelecimento do modelo dinâmico é a identidade entre as tensões turbulentas sub-malha e a faixa do espectro definida por dois filtros de larguras diferentes.

A base matemática dos modelos dinâmicos são as equação de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (6.40)$$

Aplicando-se um filtro  $\bar{G}$  com comprimento característico  $\bar{\Delta}$ , calculado com base na malha, obtém-se a seguinte equação filtrada:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (6.41)$$

Define-se um tensor de Reynolds global sub-malha (alternativamente ao que foi definido na Equação (6.17) como segue:

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j. \quad (6.42)$$

Tem-se então a seguinte equação filtrada:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \tau_{ij} \right]. \quad (6.43)$$

Aplica-se agora um novo filtro  $\hat{G}$  de largura  $\hat{\Delta} > \bar{\Delta}$  sobre a Equação (6.41),

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\widehat{u_i u_j}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_i} \right) \right], \quad (6.44)$$

onde a relação  $\hat{\Delta} = 2\bar{\Delta}$  tem sido utilizada. Define-se o tensor das tensões relativas ao segundo filtro, também chamada de tensor sub-teste, como sendo:

$$T_{ij} = \widehat{u_i u_j} - \hat{u}_i \hat{u}_j, \quad (6.45)$$

e em consequência a Equação (6.44) pode ser rescrita na forma seguinte:

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\widehat{u_i u_j}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_i} \right) - T_{ij} \right]. \quad (6.46)$$

Filtrando-se a Equação (6.43) obtém-se:

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\widehat{u_i u_j}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_i} \right) - \hat{\tau}_{ij} \right]. \quad (6.47)$$

Subtraindo-se da Equação (6.46) a Equação (6.47), tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\widehat{u_i u_j} - \hat{u}_i \hat{u}_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ij} - \hat{\tau}_{ij}). \quad (6.48)$$

Define-se o tensor de Leonard global a partir da Equação (6.48),

$$L_{ij} = \widehat{\overline{u_i u_j}} - \widehat{u_i} \widehat{u_j} = T_{ij} - \hat{\tau}_{ij}. \quad (6.49)$$

Esta igualdade é conhecida como a identidade de Germano. Ela pode ser utilizada para determinação da função coeficiente  $c(\vec{x}, t)$  que aparece nos modelos de fechamento da turbulência.

A parte anisotrópica do tensor de Reynolds global sub-malha pode ser modelada com a hipótese de Bousinesq:

$$\tau_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \tau_{ij} = -2\nu_t \overline{S_{ij}} = -2c(\vec{x}, t) \overline{\Delta^2} |\overline{S}| \overline{S_{ij}}, \quad (6.50)$$

onde  $|\overline{S_{ij}}| = \sqrt{2 \overline{S_{ij}} \overline{S_{ij}}}$ .

Modelando-se as tensões turbulentas sub-teste  $T_{ij}$  de forma análoga, tem-se:

$$T_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} T_{ij} = -2c(\vec{x}, t) \widehat{\Delta^2} |\widehat{S}| \widehat{S_{ij}}. \quad (6.51)$$

Filtrando-se a Equação (6.50) tem-se:

$$\hat{\tau}_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \hat{\tau}_{ij} = -2\nu_t \widehat{S_{ij}} = -2c(\vec{x}, t) \widehat{\Delta^2} |\widehat{S}| \widehat{S_{ij}}. \quad (6.52)$$

Utilizando-se as Equações (6.49), (6.50), (6.51) e (6.52) e após manipulações tensoriais obtém-se a expressão procurada para o coeficiente dinâmico:

$$c(\vec{x}, t) = -\frac{1}{2} \frac{L_{ij} M_{ij}}{M_{ij} M_{ij}}. \quad (6.53)$$

O tensor de Leonard  $L_{ij}$  foi definido pela Equação (6.49) e o tensor  $M_{ij}$  é definido da seguinte forma:

$$M_{ij} = \widehat{\Delta^2} |\widehat{S}| \widehat{S_{ij}} - \widehat{\Delta^2} |\widehat{S}| \widehat{S_{ij}}. \quad (6.54)$$

Observa-se que o cálculo do coeficiente dinâmico só depende de grandezas resolvidas e de um

duplo processo de filtragem.

Em seguida fornece-se uma lista de publicações mais relevantes neste domínio: Germano (1986), Germano *et al.* (1991), Moin *et al.* (1991), Lilly (1992), Germano (1992), Piomeli (1993), Carati *et al.* (1995), Ghosal *et al.* (1995) e Spyropoulos e Blaisdel (1996).

#### 6.4.6. Considerações sobre aplicação de modelagem sub-malha em malhas irregulares

Os modelos sub-malha são baseados em duas formas de cálculo da viscosidade turbulenta: A primeira delas exige o cálculo de taxas de deformação (família de modelos baseados no modelo de Smagorinsky, 1963), e a segunda passa pelo cálculo de diferenças de velocidades (família de modelos baseados no modelo da função estrutura de velocidade - Lesieur e Métais, 1991). A aplicação destes modelos para malhas regulares não oferece dificuldades uma vez que os comprimentos característicos dos filtros são calculados diretamente da dimensão regular da malha. Para os casos de malhas irregulares, deve-se levar em conta este fato via modificações nos modelos originais.

##### 6.4.6.1. Modelos derivados do modelo de Smagorinsky

O modelo original de Smagorinsky pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\tau_{ij} = -2 \left[ L(\vec{\Delta}) \right]^2 \left[ 2 \bar{S}_{mn} \bar{S}_{mn} \right]^{1/2} \bar{S}_{ij}. \quad (6.55)$$

Onde  $\vec{\Delta} = (\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$  e  $L(\vec{\Delta})$  dependem do grau de anisotropia ou de irregularidades da malha utilizada. Se a malha é completamente regular,

$$L(\vec{\Delta}) = C_S \Delta, \quad (6.56)$$

sendo  $\Delta = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3$  e  $C_S$  é a constante de Smagorinsky, já apresentada. Para fracas anisotropias, Deardorff (1970) propôs

$$L(\vec{\Delta}) = C_S \Delta_{eq}, \quad (6.57)$$

$$\Delta_{eq} = (\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3)^{1/3}. \quad (6.58)$$

Para fortes anisotropias, um desenvolvimento mais rigoroso foi proposto por Scotti e Meneveau (1993) o qual pode ser resumido nos seguintes resultados:

$$L(\vec{\Delta}) = C_s \Delta_{eq} f(a_1, a_2), \quad (6.59)$$

onde

$$f(a_1, a_2) = \cosh \sqrt{\frac{4}{27} \left[ (\ln a_1)^2 - \ln a_1 \ln a_2 + (\ln a_2)^2 \right]}, \quad (6.60)$$

e  $a_1$  e  $a_2$  são os fatores de aspecto, definidos como segue:

$$a_1 = \frac{\Delta_i}{\Delta_{max}}; \quad a_2 = \frac{\Delta_k}{\Delta_{max}}; \quad a_3 = \frac{\Delta_{max}}{\Delta_{max}} = 1, \quad (6.61)$$

$$\Delta_{max} = \max\{a_1, a_2, a_3\}. \quad (6.62)$$

Observa-se que este tipo de correção pode ser adaptada para a modelagem dinâmica também.

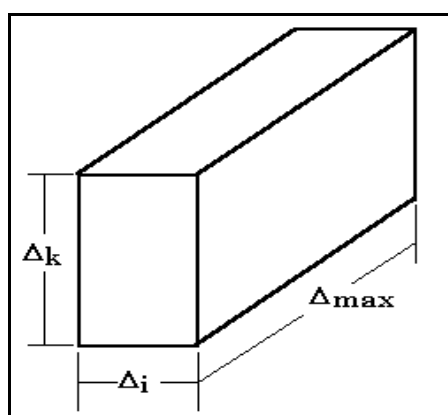


Figura 6.5. Malha irregular.

#### 6.4.6.2. Modelos baseados no conceito de Função Estrutura de Velocidade

Neste tipo de modelo a viscosidade turbulenta é calculada com uma equação do seguinte tipo:

$$\nu_t^{SF}(\bar{x}, \Delta x, t) = 0,105 C_K^{-3/2} \Delta x [F_2(\bar{x}, \Delta x, t)]^{1/2}, \quad (6.63)$$

$$F_2(\bar{x}, \Delta x) = \left\langle \left\| \bar{u}(\bar{x}, t) - \bar{u}(\bar{x} + \bar{r}, t) \right\|^2 \right\rangle_{\|\bar{r}\|=\Delta x}. \quad (6.64)$$

Quando a malha é estruturada e regular,  $\Delta x$  é obtido da própria malha. Quando a malha é estruturada e irregular faz-se necessária uma correção e Lesieur e Métais (1996) sugerem o seguinte:

$$c = (\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3)^{1/3}. \quad (6.65)$$

Toma-se em conta a lei de Kolmogorov (1941) a qual estabelece que a função estrutura de segunda ordem é proporcional a  $(\varepsilon r)^{2/3}$ , onde  $r$  é a distância entre os dois pontos em questão. A viscosidade turbulenta acima é então recalculada substituindo-se  $\Delta x$  por  $\Delta c$ , o que resulta, na formulação a 6 pontos, em:

$$F_2(\bar{x}, \Delta c, t) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 \left[ \left\| \bar{u}(\bar{x}) - \bar{u}(\bar{x} + \Delta x_i \bar{e}_i) \right\|^2 + \left\| \bar{u}(\bar{x}) - \bar{u}(\bar{x} - \Delta x_i \bar{e}_i) \right\|^2 \right] \left( \frac{\Delta c}{\Delta x_i} \right)^{2/3}. \quad (6.66)$$

Nesta equação  $\bar{e}_i$  é o vetor na direção  $x_i$ . Para compreender melhor rescreve-se esta expressão de uma forma estendida:

$$F_2(\bar{x}, \Delta c, t) = \frac{1}{6} \left\{ \begin{array}{l} \left[ \left\| \bar{u}(\bar{x}) - \bar{u}(\bar{x} + \Delta x_1 \bar{e}_1) \right\|^2 + \left\| \bar{u}(\bar{x}) - \bar{u}(\bar{x} - \Delta x_1 \bar{e}_1) \right\|^2 \right] \left( \frac{\Delta c}{\Delta x_1} \right)^{2/3} + \\ \left[ \left\| \bar{u}(\bar{x}) - \bar{u}(\bar{x} + \Delta x_2 \bar{e}_2) \right\|^2 + \left\| \bar{u}(\bar{x}) - \bar{u}(\bar{x} - \Delta x_2 \bar{e}_2) \right\|^2 \right] \left( \frac{\Delta c}{\Delta x_2} \right)^{2/3} + \\ \left[ \left\| \bar{u}(\bar{x}) - \bar{u}(\bar{x} + \Delta x_3 \bar{e}_3) \right\|^2 + \left\| \bar{u}(\bar{x}) - \bar{u}(\bar{x} - \Delta x_3 \bar{e}_3) \right\|^2 \right] \left( \frac{\Delta c}{\Delta x_3} \right)^{2/3} \end{array} \right\}. \quad (6.67)$$

Imagine-se uma forte anisotropia na malha, por exemplo  $\Delta x_1 \gg \Delta x_2 \approx \Delta x_3$ . Neste caso,

$$\frac{\Delta c}{\Delta x_1} \ll \frac{\Delta c}{\Delta x_2} \approx \frac{\Delta c}{\Delta x_3}, \quad (6.68)$$

e a anisotropia faz com que as flutuações na direção  $\Delta x_1$  influenciem menos no cálculo da viscosidade turbulenta que nas outras direções.

Quando a malha é não estruturada, sugere-se interpolar a velocidade sobre um círculo de raio  $\|r\|$ . Com as velocidades localizadas em posições equidistantes, calcula-se a viscosidade turbulenta em um ponto no centro deste círculo.

## 6.5. EXEMPLOS ILUSTRATIVOS DE APLICAÇÕES DE LES

### 6.5.1. Simulação de Grandes Escalas de escoamentos em transição sobre cavidades bidimensionais

Dois casos destes escoamentos foram estudados numericamente utilizando-se de uma formulação para escoamentos compreensíveis. O método de discretização de MacCormack (1969) foi utilizado. O modelo clássico de Smagorinsky (1963), com uma constante  $C_S = 0,2$  foi empregado para estabilização dos cálculos. Observa-se que a turbulência é, por definição, tridimensional e hipóteses de bidimensionalidade serve apenas como uma aproximação para os escoamentos em transição aqui apresentados. Observa-se que o código computacional não apresenta convergência sem o modelo sub-malha, para cálculos a altos números de Reynolds. Este fato apenas confirma a necessidade de se modelar o processo de transferência de energia pela frequência de corte, mesmo para escoamentos em transição. O ideal teria sido utilizar modelos sub-malha dinâmicos que se adaptam melhor a este tipo de escoamento. O modelo de Smagorinsky foi empregado por maior simplicidade nesta fase inicial destes desenvolvimentos. Os dois casos são apresentados a seguir.

#### 6.5.1.1. Cavidade bidimensional aberta

A geometria deste problema está ilustrada na Figura 6.6. Ilustra-se ainda o processo de transição do escoamento com a presença de instabilidades que compõem as recirculações no interior da cavidade. Na Figura 6.7 mostra-se os campos de temperatura (Figura 6.7.a), de vorticidade (Figura 6.7.b) e as linhas de corrente (Figura 6.7.c). Observa-se a presença das estruturas turbilhonares que são formadas na zona cizalhante da cavidade, as quais são transportadas e incorporadas à recirculação média, como esquematizado na Figura 6.6. É

interessante observar que estas recirculações médias são compostas de estruturas turbilhonares menores, ilustrando a multiplicidade de escalas comentada.

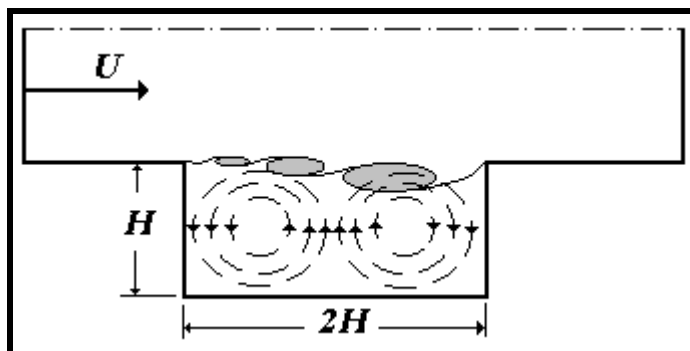


Figura 6.6. Esquema ilustrativo do escoamento em transição no interior de uma cavidade aberta.

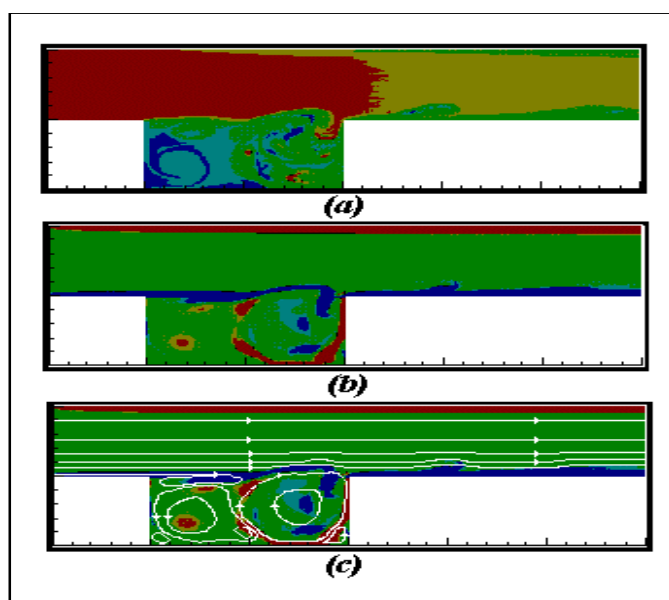


Figura 6.7. Escoamento em transição numa cavidade plana; (a) temperatura , (b) vorticidade e (c) linhas de corrente.

Os turbilhões que se formam são transportados para a direita da cavidade chocando-se contra a parede vertical. Estes choques podem ser observados e quantificados pelos pulsos de pressão criados nesta posição. Para tanto, foi registrado o histórico de pressão em uma malha localizada nesta região de choque. Esta distribuição temporal da pressão está ilustrada na Figura 6.8(a). Na Figura 6.89(b) mostra-se a transformada de Fourier deste sinal, evidenciando a frequência típica de choque dos turbilhões. O número de Strouhal é  $St=0,66$ .



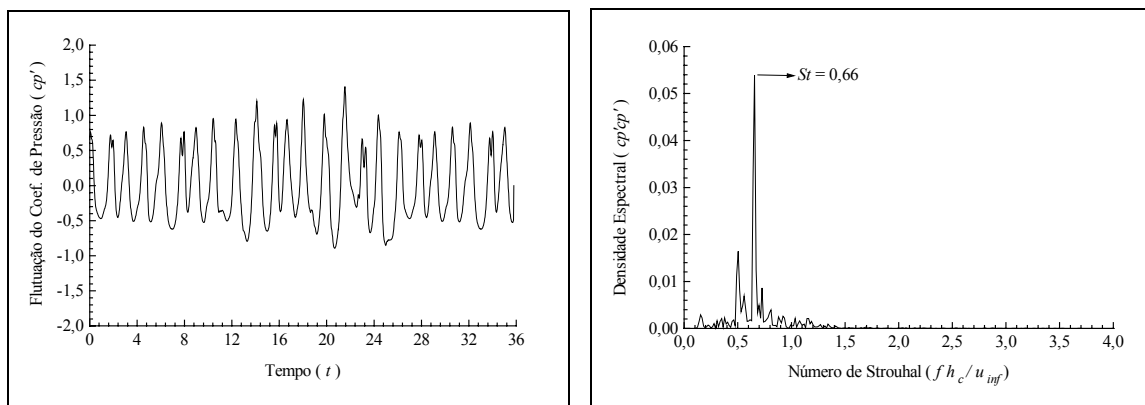


Figura 6.8. (a) Distribuição da pressão, em função do tempo, na região de choques turbilhonares contra a parede direita da cavidade e (b) transformada de Fourier do sinal da Figura 6.8(a).

Na Figura 6.9 mostra-se a comparação do coeficiente de pressão obtido numericamente com os valores experimentais. Observa-se um bom acordo entre eles, exceto nas proximidades da parede da direita, onde os dados experimentais são também questionáveis. Maiores detalhes sobre este trabalho podem ser encontrados em Pinho (1996).

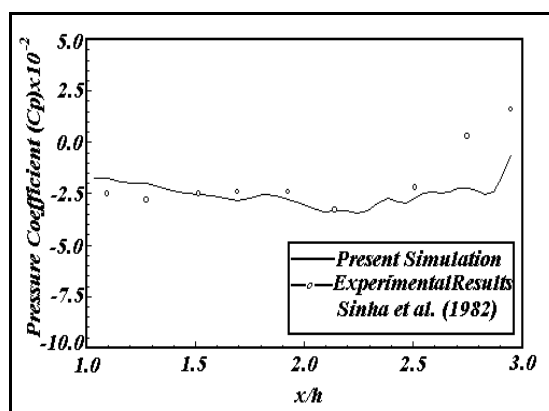


Figura 6.9. Coeficiente de pressão junto à parede inferior.

#### 6.5.1.1. Cavidade simétrica fechada com efeitos térmicos

Neste estudo objetivou-se analisar o processo de amortecimento de flutuações térmicas utilizando-se de um capacitor na forma de uma dupla cavidade como ilustrada na Figura 6.10 Na entrada deste domínio são impostos os perfis de velocidade e de temperatura. A temperatura é flutuante na entrada de forma a simular a existência de pulsos que devem ser amortecidos pelo capacitor. O objetivo é ter na sua saída uma distribuição temporal de temperatura o mais uniforme possível.

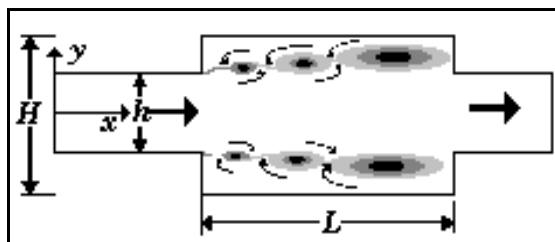


Figura 6.10. Cavidade plana simétrica, geometria e características físicas do escoamento.

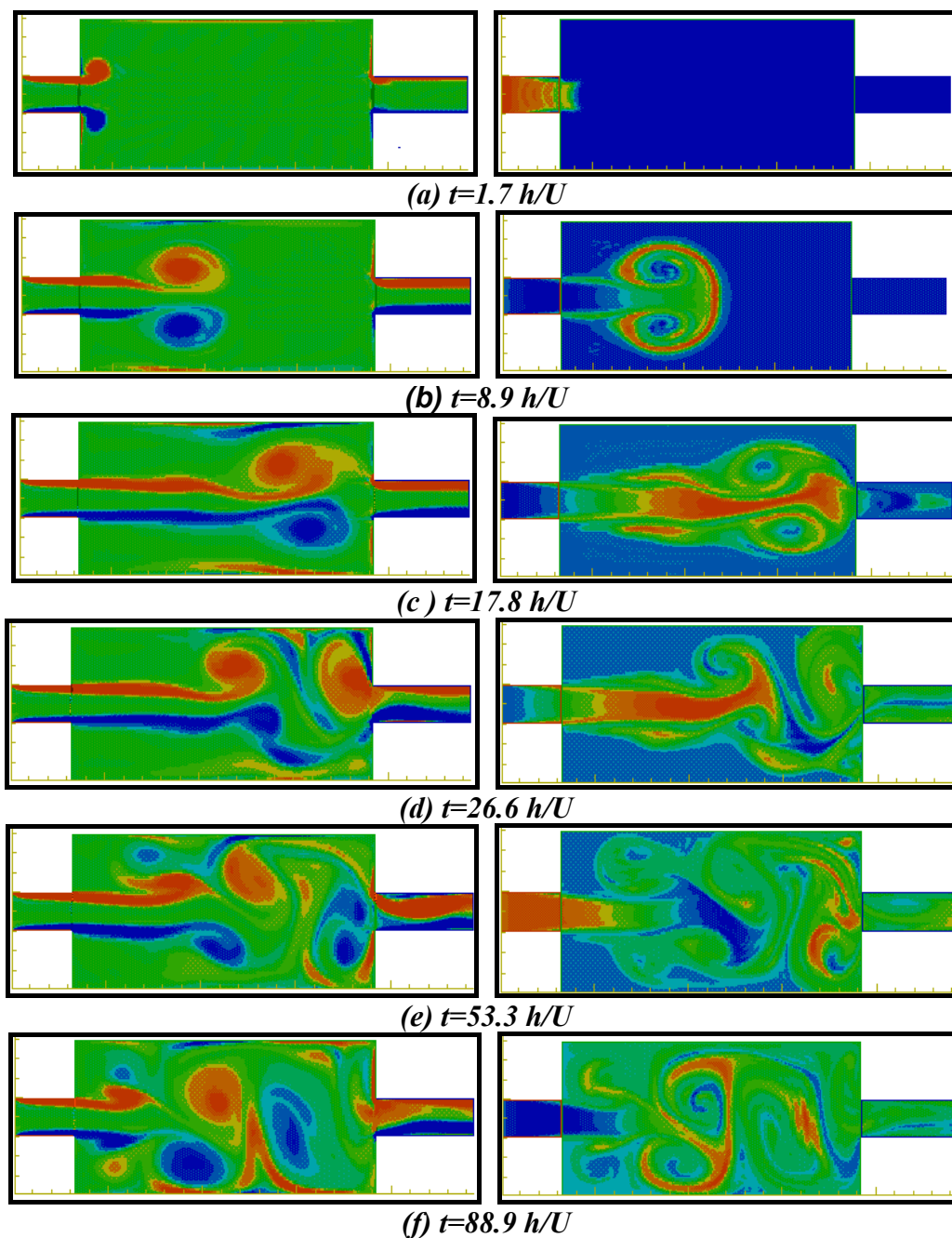


Figura 6.11. Seqüência temporal dos campos de vorticidade (esquerda) e de temperatura (direita);  $Re=30.000$  ( $Re = U_{\infty} h / \nu$ ); freqüência das oscilações de temperatura de  $0,1U_{\infty} / h$ ;  $L = 8h$ .

Na Figura 6.11 mostra-se os campos de vorticidade e de temperatura que ilustram bem a natureza física do escoamento no interior da cavidade. As estruturas turbilhonares se formam e se desenvolvem no espaço e no tempo.

À direita da figura os campos de temperatura mostram a presença dos pulsos de temperaturas através das variações de cores. As cores mais escuras representam temperaturas de valor unitário e as cores mais claras representam temperaturas da ordem de zero. Este pulsos são transportados para o interior do capacitor e difundidos pelo efeito molecular. É interessante observar que as instabilidades dinâmicas são muito importantes para acelerar este processo de amortecimento térmico. Vê-se, desta forma, que a SGE fornece a natureza física do escoamento, o que facilita a compreensão do processo.

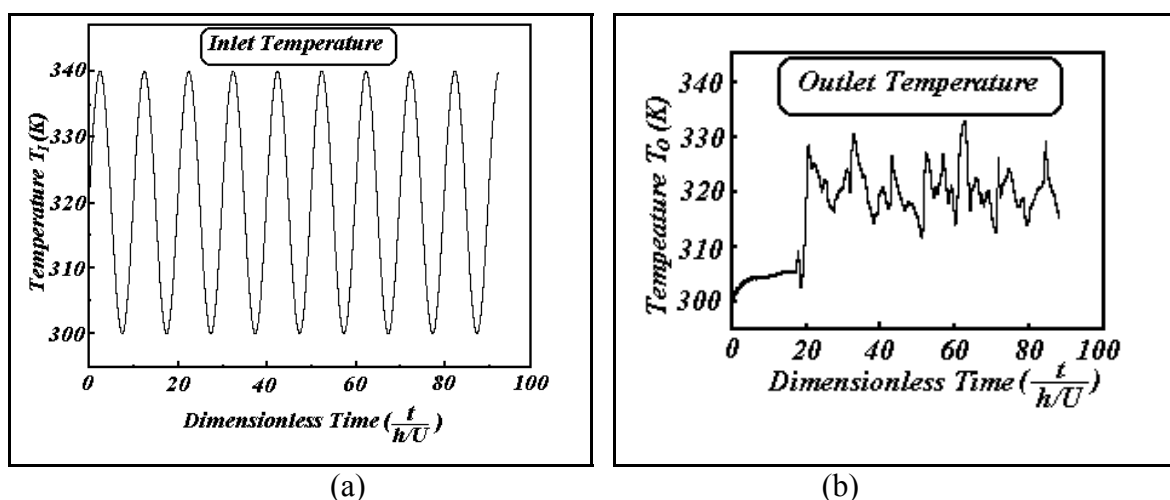


Figura 6.12. Distribuições de temperatura, relativas à Figura 6.11, na entrada (a) e na saída (b) do capacitor.

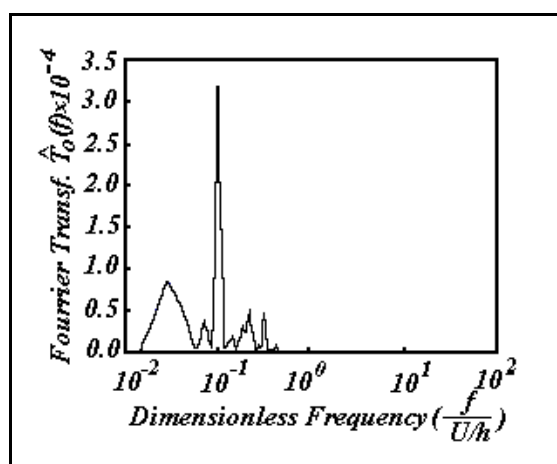


Figura 6.13. Transformada de Fourier do sinal da Figura 6.12 (b).

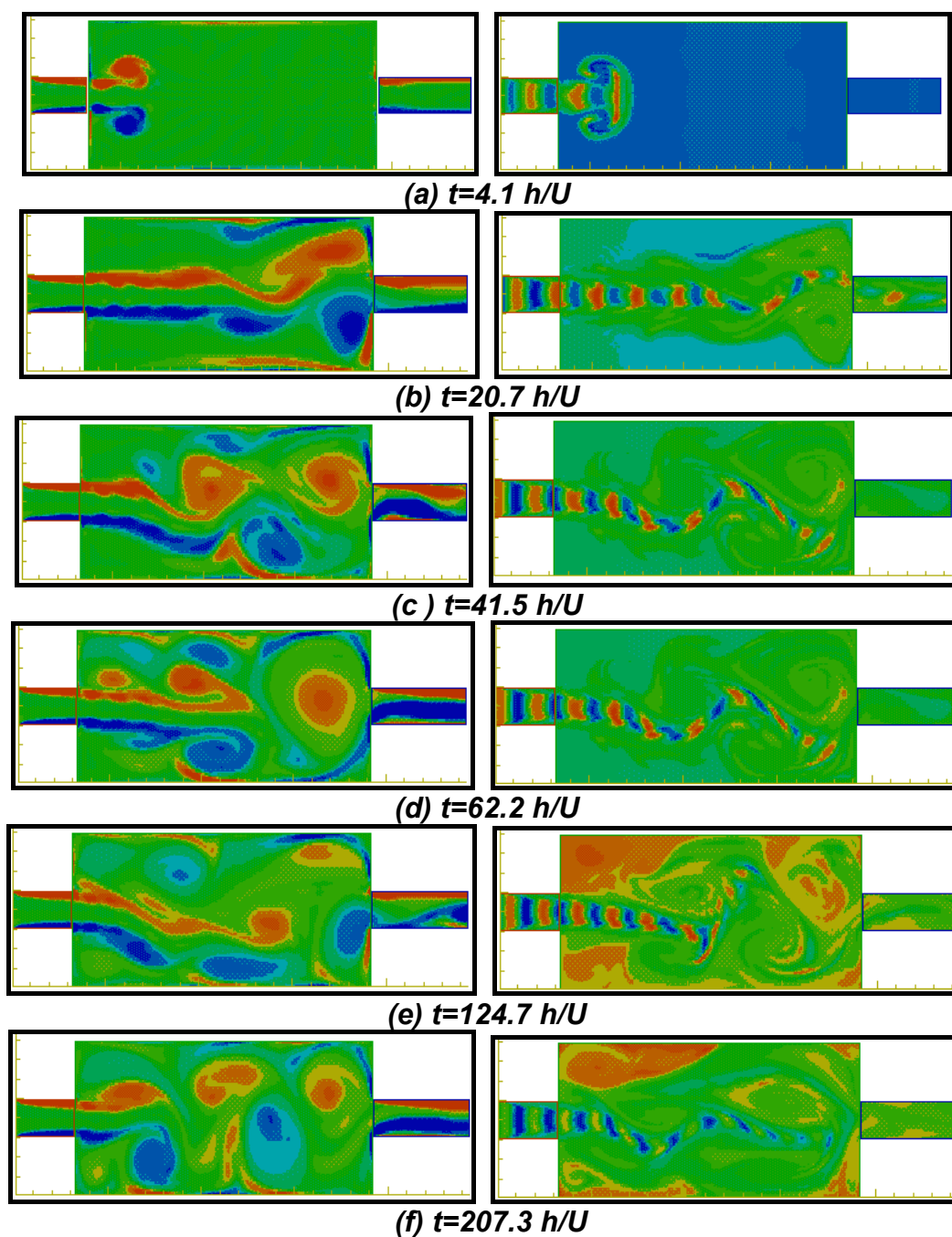


Figura 6.14. Seqüência temporal dos campos de vorticidade (esquerda) e de temperatura (direita);  $Re=30.000$  ( $Re = U_{\infty}h / \nu$ ); freqüência das oscilações de temperatura de  $1,0U_{\infty} / h$ ;  $L = 8h$ .

À fim de ilustrar a influência da freqüência das oscilações na entrada do capacitor, foi simulado um caso com uma freqüência 10 vezes superior à precedente, ou seja,  $1,0U_{\infty} / h$ . Na Figura 6.14 mostra-se os campos de vorticidade e de temperatura correspondentes. Nos campos de temperatura ficam claras as flutuações de temperatura pelas variações das cores. A

análise quantitativa, ilustrada nas Figuras 6.15 e 6.16, mostra que o processo de amortecimento é muito mais eficiente neste caso.

Considerando que a geometria é a mesma e que o número de Reynolds também não foi modificado em relação ao caso precedente, o aumento na eficiência de amortecimento deve estar ligado ao aumento da frequência das oscilações de temperatura. Realmente, comparando os lados direitos das Figuras 6.11 e 6.14, observa-se que na última encontra-se um número maior de pulsos de temperatura por unidade de volume. Isto implica na existência de maiores e mais numerosos gradientes de temperatura no interior do capacitor, o que claramente acelera o processo de difusão molecular e em consequência o processo de homogeneização do campo de temperatura.

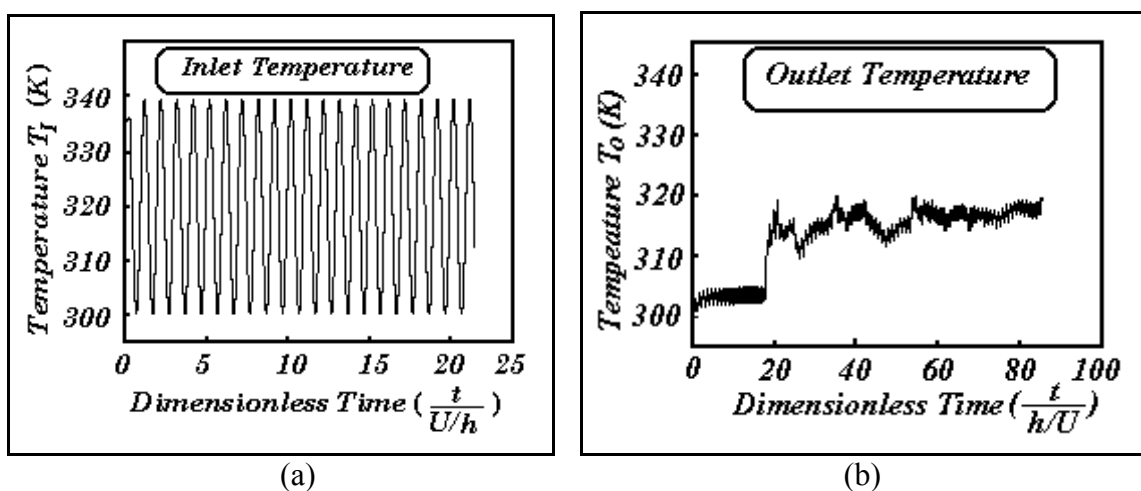


Figura 6.15. Distribuições de temperatura, relativas à Figura 6.14 na entrada (a) e na saída (b) do capacitor.

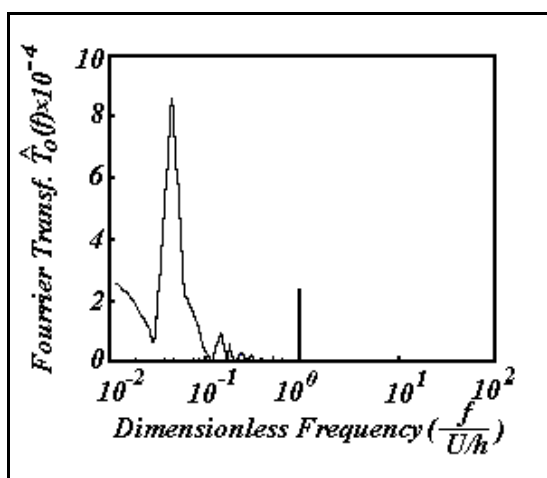


Figura 6.16. Transformada de Fourier do sinal da Figura 6.15 (b).

A transformada de Fourier da Figura 6.15(b), ilustrada na Figura 6.16, mostra que houve uma drástica redução também na frequência das flutuações de temperatura. Maiores detalhes sobre este trabalho podem ser encontrados em Matos (1996).

Observa-se que este tipo de compreensão física seria difícil de ser obtida via experimentação e impossível via simulações médias. Este é um caso interessante que ilustra as potencialidades da aplicação de SGE para análise e solução de problemas práticos.

### 6.5.2. Simulação de Grandes Escalas da convecção mista sobre um cilindro rotativo aquecido

No estudo a aproximação de Boussinesq foi utilizada para modelar as forças de empuxo. A Figura 6.17 ilustra o sistema de coordenadas cilíndricas, bem como os volumes de discretização. A técnica de discretização dos Volumes Finitos com malhas co-localizadas e um esquema semi-implícito de discretização temporal foram utilizados (Morales, 1996). Utilizou-se ainda um esquema de transporte convectivo de terceira ordem do Tipo QUICK (Hayase *et al.*, 1992). As condições de contorno utilizadas são: comportamento assintótico no infinito (derivadas nulas) e velocidade e fluxo de calor impostos na superfície do cilindro.

Na Figura 6.18 mostra-se, utilizando o campo de temperatura, o regime permanente do escoamento para quatro condições de operação, caracterizados por diferentes rotações do cilindro. Nesta figura os número de Reynolds, de Rayleigh e de Froude são definidos respectivamente como segue:  $Re = \omega R^2 / \nu$ ,  $Ra^* = Gr^* Pr$  ( $Gr^* = g\beta R^4 q'' / \nu^2 \kappa$ ),  $\sigma = Gr^* / Re^2$ , sendo  $\omega$  a frequência de rotação do cilindro,  $R$  o seu raio,  $\beta$  o coeficiente de expansão térmica,  $k$  a condutibilidade térmica e  $q''$  o fluxo de calor imposto sobre o cilindro.

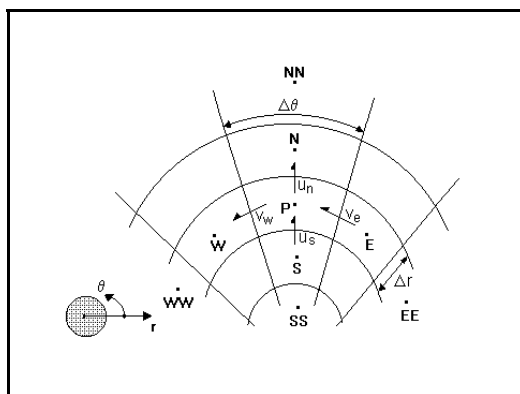


Figura 6.17. Sistema de coordenadas, volumes de controle e nós de discretização.

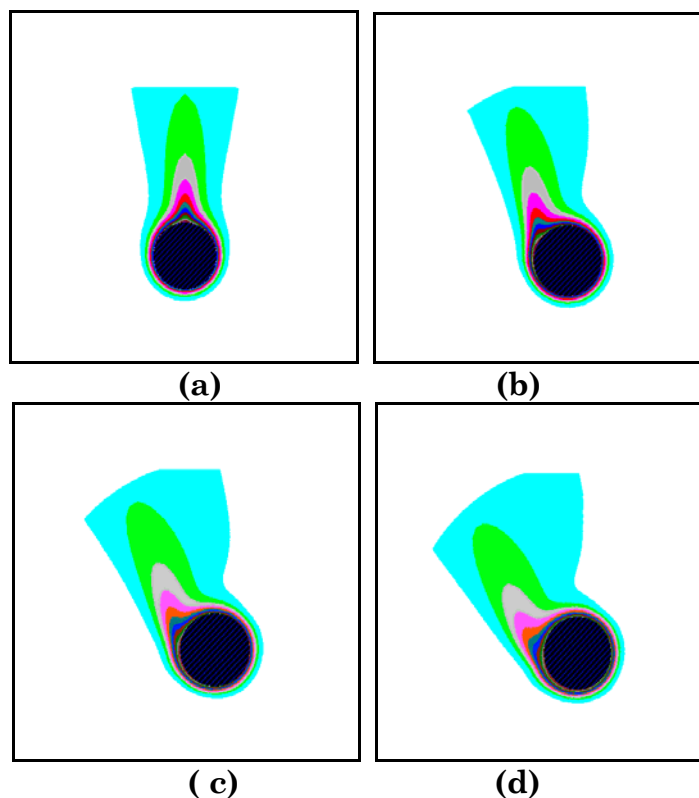


Figura 6.18. Campos de temperatura sobre um cilindro rotativo;  $Ra^* = 1 \times 10^6$ ;  $Pr = 0,7$ ;  $C_s = 0,32$ ; (a)  $Re = 0$ ,  $\sigma = \infty$  (0 rpm); (b)  $Re = 290$ ,  $\sigma = 2$  (52 rpm); (c)  $Re = 410$ ,  $\sigma = 1$  (75 rpm); (d)  $Re = 557$ ,  $\sigma = 0,5$  (110 rpm).

Observando esta figura, vê-se que quando Froude é zero (rotação nula) o escoamento adquire a configuração simétrica clássica, enquanto que, à medida que a rotação aumenta, o escoamento se distorce na direção da rotação (anti-horário, no presente caso), perdendo sua simetria, devido aos efeitos combinados da rotação e do empuxo gerado pelo aquecimento.

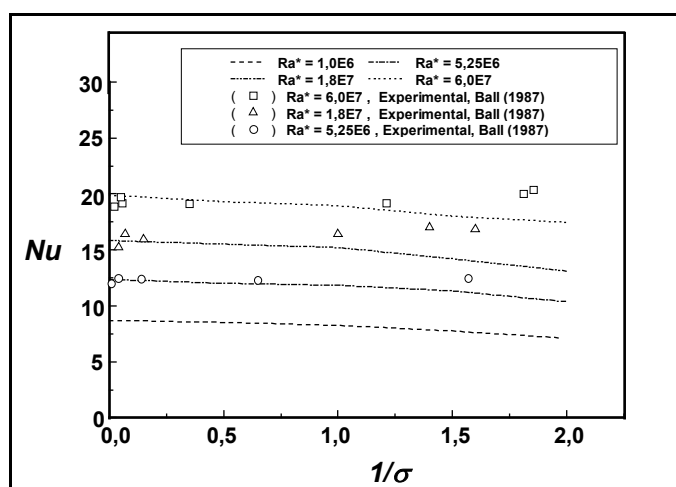


Figura 6.19. Nusselt médio em função do inverso de Froude ( $1/\sigma$ ) e de  $Ra^*$ ;  $Pr = 0,7$ .

Na Figura 6.19 apresenta-se as distribuições do número de Nusselt médio em função de Rayleigh e do inverso de Froude. Nota-se que os resultados são apresentados apenas para regimes de baixas rotações, pois os cálculos aqui apresentados são bidimensionais, enquanto que para altas rotações aparecem efeitos tridimensionais.

Faz-se também a comparação com resultados experimentais e verifica-se uma boa concordância das simulações até  $\sigma$  da ordem de 1. Com base nisto efetuou-se uma série de 25 simulações, variando-se Froude de 0,0 a 1,0 com intervalo de 0,2, para os cinco valores de Rayleigh que consta da Figura 6.19. Com os resultados ajustou-se uma equação que fornece Nusselt em função de Froude e de Rayleigh, a qual é apresentada a seguir:

$$Nu = Nu_{nc} - 3,35 \times 10^{-8} x Ra^* x \sigma^{-0,783} . \quad (6.69)$$

onde  $1 \leq \sigma < \infty$  e  $10^4 \leq Ra^* \leq 10^8$ . O termo  $Nu_{nc}$  é Nusselt para convecção natural pura cuja correlação foi proposta por Churchill *et al.* (1975):

$$Nu_{nc} = \left\{ 0,6 + 0,321 x \left( \frac{Ra^*}{Nu_{nc}} \right)^{1/6} \right\}^2 , \quad (6.70)$$

a qual é válida para  $10^3 \leq Ra^* \leq 10^{12}$ . Maiores detalhes podem ser encontrados em Morales *et al.* (1998).

## 6.5.2. Simulação de Grandes Escalas de escoamentos turbulentos complexos

Neste item são apresentados resultados de dois estudos ilustrativos da aplicação de SGE para a solução de problemas complexos: trata-se de escoamentos turbulentos sobre uma expansão brusca e a interação de múltiplos jatos tridimensionais. Ambos foram tratados com um código computacional em volumes finitos com malhas entrelaçadas. O modelo sub-malha função estrutura de segunda ordem foi utilizado.

### 6.5.2.1. Escoamento turbulento sobre uma expansão brusca

Este problema está esquematizado na Figura 6.20 onde se vê os detalhes geométricos.



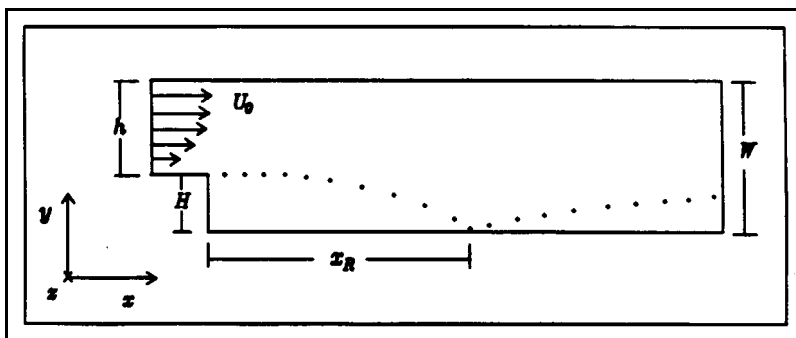


Figura 6.20. Expansão brusca; domínio de cálculo e características geométricas.

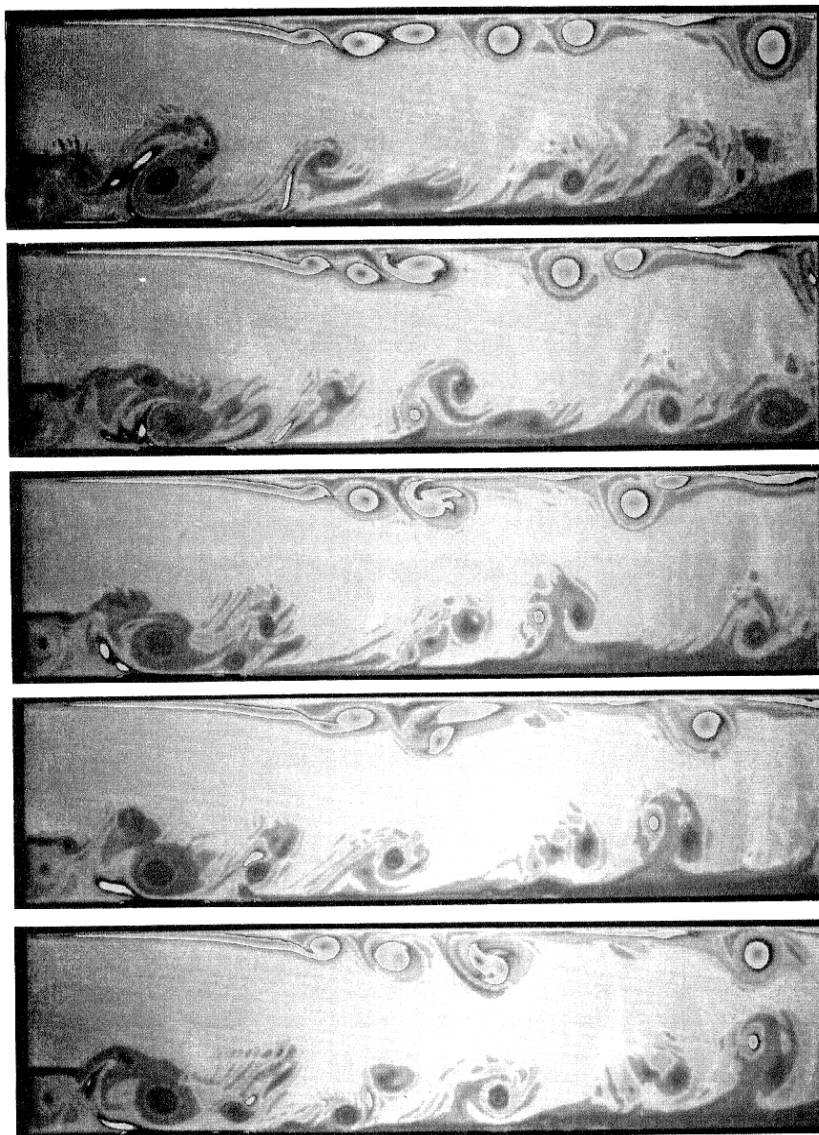
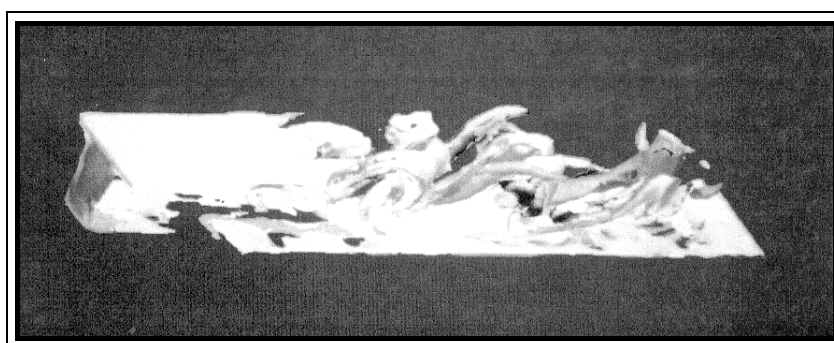


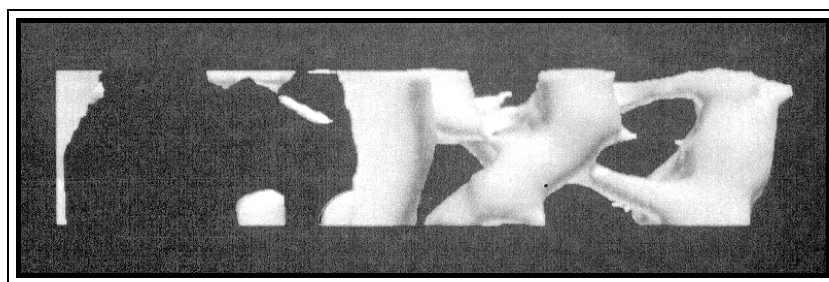
Figura 6.21. Evolução temporal do escoamento turbulento sobre um degrau; visualiza-se o campo de vorticidade; o número de Reynolds baseado na altura do degrau é  $Re_H = 38.000$ ; utilizou-se uma malha de  $320 \times 80$  pontos nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente.

Na Figura 6.21 mostra-se o escoamento sobre uma expansão de baixo degrau, onde se visualiza os campos de vorticidades para vários instantes. Observa-se os detalhes do escoamento: descolamento no lado esquerdo da figura; a formação da região de recirculação com o processo de acumulação de vórtices que são transportados periodicamente para a saída do canal, em direção à direita do mesmo; o descolamento da camada limite junto a parede superior e a formação de uma esteira turbilhonar.

O escoamento tridimensional sobre esta mesma geometria pode ser visualizado nas Figuras 6.22(a) e (b) onde se mostra respectivamente os campos de vorticidade e de pressão. É notória a complexidade do escoamento. Visualiza-se a formação das estruturas turbilhonares primárias (transversais ao escoamento), assim como as estruturas secundárias (longitudinais) com fortes interações não lineares entre si. Mais uma vez observa-se que foi possível colocar em evidência detalhes muito finos do escoamento, os quais foram também observados experimentalmente em escoamentos similares, tipo camada de mistura em desenvolvimento espacial. Mais detalhes sobre este trabalho podem ser encontrados em Silveira-Neto *et al.* (1993).



(a)



(b)

Figura 6.22. Simulação tridimensional da configuração descrita na Figura 6.21; malha de 200x30x30 em  $x$ ,  $y$  e  $z$  respectivamente.

### 6.5.2.2. Interação entre jatos tridimensionais

Este estudo foi desenvolvido por Urbin (1997) utilizando o mesmo código computacional descrito no item anterior. Mostra-se aqui parte da análise de sistemas de múltiplos jatos, a título de exemplificação da aplicação de Simulação de Grandes Escalas para

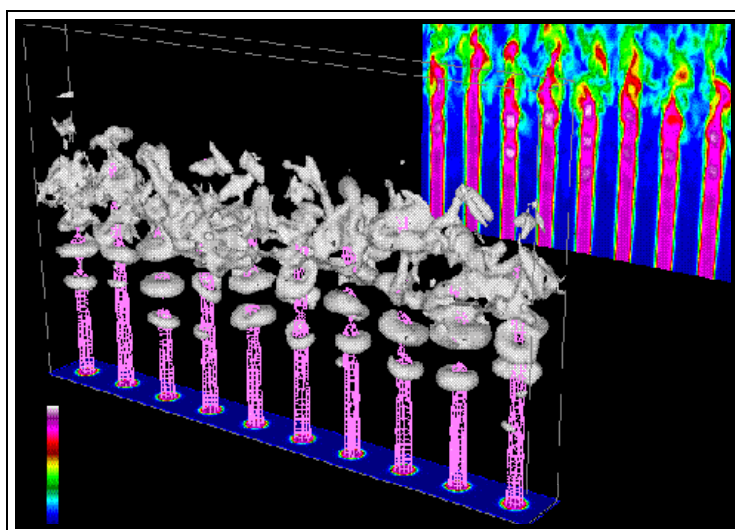


Figura 6.23. Simulação de grandes escalas do processo de interação entre múltiplos jatos; visualiza-se o campo de pressão (Urbin, 1997).

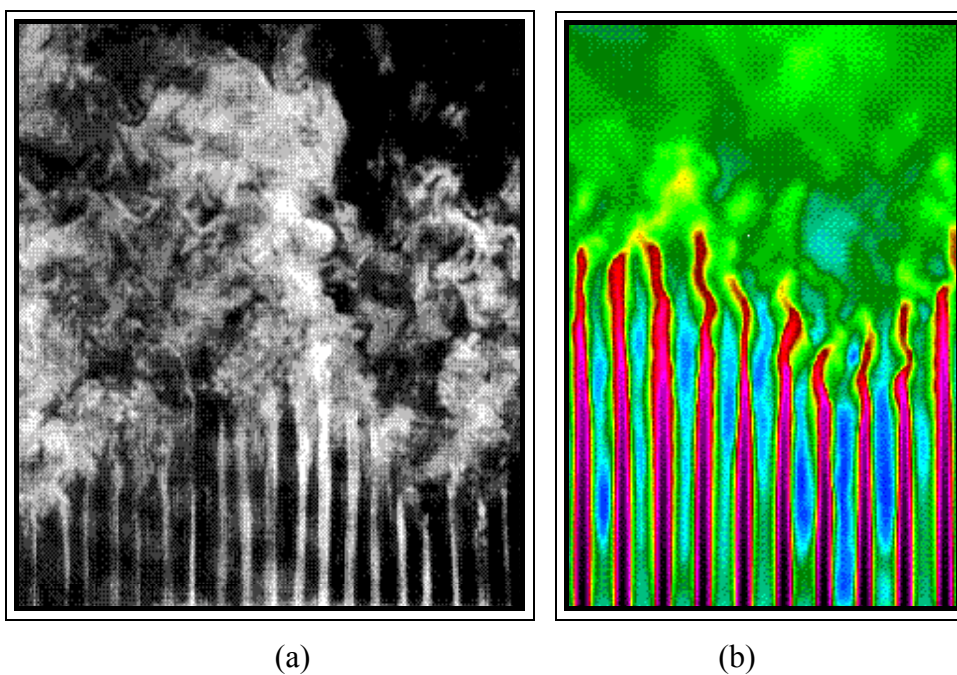


Figura 6.24. Simulação de grandes escalas de múltiplos jatos; evidencia-se a formação de baixas frequências sobre o sistema (Urbin, 1997).



a solução de problemas industriais complexos. Na Figura 6.23 visualiza-se um sistema composto de 10 jatos simultâneos, os quais são simulados em três dimensões. O processo físico de formação das instabilidades é evidenciado claramente. Na figura 6.24 evidencia-se, sobre este mesmo sistema a formação de baixas frequências sobre o conjunto. Na Figura 6.24 (a) mostra-se a visualização experimental e na Figura 6.24 (b) mostra-se a visualização via Simulação de Grandes Escalas. É notória a semelhança entre os dois resultados. Ressalta-se o alto grau de complexidade deste tipo de escoamento, composto por múltiplos jatos interagindo entre si simultaneamente.

## 6.6. DISCUSSÃO

Procurou-se dar uma visão geral sobre a metodologia de Simulação de Grandes Escalas de escoamentos turbulentos. Fez-se um apanhado dos tipos de modelos sub-malha existentes na literatura, desde os mais antigos até os mais modernos desenvolvidos nos últimos anos. Eles foram comparados e as vantagens e desvantagens foram levantadas ao longo do texto. Resultados ilustrativos foram apresentados, os quais permitiram ilustrar as potencialidades da metodologia SGE para a solução e análise de problemas envolvendo escoamentos complexos.

Ressalta-se que todos os modelos sub-malha apresentados apresentam deficiências no que se refere à simulação dos seguintes problemas: escoamentos em transição; escoamentos nas proximidades de paredes e transporte inverso de energia das escalas não resolvidas (sub-malha) para as escalas resolvidas, através da frequência de corte: este fenômeno é conhecido como *back-scatter*.

A modelagem dinâmica, recentemente desenvolvida e ainda em fase de testes e mesmo de desenvolvimento, poderá resolver em parte estes problemas. Resta, no entanto, problemas de viscosidade turbulenta negativa em determinados momentos dos cálculos, o que promove divergências nas simulações. Muito ainda se tem que desenvolver em matéria de modelagem da turbulência, objetivando-se modelos que sejam ao mesmo tempo simples e gerais, ou seja, válidos para todas as geometrias e para escoamentos de naturezas físicas diferentes.

## BIBLIOGRAFIA

Amtonopoulos-Domis, 1981, Large-Eddy simulation of a passive scalar in isotropic turbulence, *J. Fluid Mechanics*, vol. 104, pp. 55-79.

Batchelor, G. K., 1953, *The theory of homogeneous turbulence*, Cambridge University Press.

Bradshaw, P., Launder, B. E. and Lumley, J. L., 1996, Collaborative testing of turbulence models, *J. of Fluids Eng.*, vol. 118, pp. 243-247.

Carati, D., Ghosal, S. and Moin, P., 1995, On the representation of backscatter in dynamic localisation models, *Phys. Fluids*, vol. 7 (3), pp. 606-626.

Churchill, S. W. and Chu, H. H. S., 1975, Correlating Equations for Laminar and Turbulent Free Convection from a Horizontal Cylinder, *I. J. Heat and Mass Transfer*, vol. 18, pp. 1049-1053.

Cholet, J. P. e Lesieur, M., 1982, Parametrization os small scales of three-dimensional isotropic turbulence utilizing spectral closures, *J. Atms. Sci.*, vol. 38, pp. 2747-2757.

Clark, R. A., Ferziger, J. H. and Reynolds, W. C., 1979, Evaluation of subgrid-scale models using and accurately simulated turbulent flow, *J. Fluid Mech.*, vol. 91, pp. 1-6.

Couder, Y., Chomaz, J. M. and Rabaud, M., 1989, On the hydrodynamics of soap films, *Physica D* 37, pp. 384-405.

David, E., 1993, *Modélisation des écoulements compressibles et hypersoniques: une approche instationnaire*, PhD thesis, Nat. Polytech. Inst. Grenoble.

Deardorff, J. M., 1970, A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds number, *J. Fluid Mech.*, vol. 41, pp. 453-480.

Ducros, F., 1995, *Simulations numériques directes et des grandes echelles de couches limites compressibles*, PhD thesis, Nat. Polytech. Inst. Grenoble.

Fallon, B., 1996, *Large-Eddy Simulation of Stable-Stratification effects upon a backstep flow*, Thèse, INPG-IMG-LEGI, Grenoble.

Findikakis, A. e Streeter, R., 1979, An algebraic model for subgrid-scale turbulence in stratified flows, *J. Atmos. Sciences*, vol. 36, pp. 1934-1949.

Gagne, Y., 1987, *Etude expérimentale de l'intermittance et des singularités dans le pla complexe en turbulence développée*, Thèse de Doctorat d'Etat, Grenoble, France.

Germano, M., 1986, A proposal for a redefinition of the turbulent stresses in filtered Navier-Stokes equations, *Phys. Fluids*, vol. 29 (7), pp. 2323-2324.

Germano, M., Piomelli, U, Moin, P. and Cabot, W., H., 1991, A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model, *Phys. Fluids A*, vol. 3 (7), pp. 1760-3128.

Germano, M., 1992, Turbulence, the filtering approach, *J. Fluid Mech.*, vol. 238, pp. 325-336.

Gharib, G., 1996, Perspective: the experimentalist and the problem of turbulence in the age of supercomputers, *J. of Fluids Eng.*, vol. 118, pp. 233-241.

Ghosal, S., Lund, T. S., Moin, P and Voll, K. A., 1995, A dynamic localization models for large-eddy smulation of turbulent flows, *J. Fluid Mech.*, vol. 286, pp. 229-255.

Kolmogorov, A. N., 1941, The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, vol. 30, pp. 301-305.

Kraichnan, R. H., Eddy viscosity in two and three-dimensions, *J. Atmos. Sci.*, vol.33, pp. 1521-1536.

Lesieur, M., 1997, *Turbulence in Fluids* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Lesieur, M. e Métais, O., 1996, New trends in Large-Eddy simulation of turbulence, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, vol. 28, pp. 45-82.

Lesieur, M., 1994, *La turbulence*, Presses Universitaires de Grenoble, France.

Lilly, D. K., 1987, In *lecture notes on turbulence*, edited by J. R. Herring and J. C. McWilliams, pp. 171-218, World Scientific, USA.

Lilly, D. K., 1992, A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method, *Phys. Fluids A*, vol. 4(3), pp. 633-635.

MacCormack, R. W., 1996, The effect of viscosity hypervelocity impact cratering, *AIAA paper*, pp. 69-354.

Mansur, N. M., Kim, J. and Moin, P., 1988, Reynolds Stress and Dissipation Rate Budgets in Turbulent Channel Flows, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 194, pp. 15-44.

Matos, A., 1996, *Simulação numérica de grandes escalas de escoamentos turbulentos em cavidades retangulares axisimétricas*, Master of Science Dissertation, Federal University of Uberlândia, Brazil.

Métais, O. e Lesieur, M., 1991, Spectral and Large-Eddy Simulations of isotropic and stably-stratified turbulence, *J. Fluid Mech.*, vol. 239, pp. 157-194.

Moin, P., Squires, K., Cabot, W and Lee, S., 1991, A dynamic subgrid-scale model for compressible turbulence and scalar transport, *Phys. Fluids A*, vol. 3 (11), pp. 2746-2757.

Morales, R. E. M., 1996, *Simulação de Grandes Escalas da Convecção Mista sobre um Cilindro Rotativo Aquecido*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia - UFU.

Morales, R. E. M., Balparda, A. e Silveira-Neto, A., 1998, Simulação numérica de grandes escalas da convecção mista sobre um cilindro rotativo; artigo aceito para publicação no *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*.

Pinho, F. A. A., 1996, Simulação numérica de grandes escalas de escoamentos turbulentos em cavidades retangulares bidimensionais, Master of Science.

Piomelli, U., 1993, High Reynolds number calculations using the dynamic subgrid-scale stress model, *Phys. Fluids A*, vol. 5(6), pp. 1484-1490.

Reynolds, O., 1894, On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Vol. 186, Part I, pp.122-164.

Scotti, A. and Meneveau, C., 1993, Generalized Smagorinsky model for anisotropic grids, *Phys. Fluids A*, vol. 5(9), pp. 2306-2308.

Shaanan, S., Ferziger, J. H. e Reynolds, W. C., 1975, Numerical simulation of turbulence in presence of shear, Rep. TF-6, Dept. Mechanical Engineering, Stanford University.

Silveira-Neto, A., Grand, D., Métais, O. and Lesieur, M., 1993, A numerical investigation of the coherent structures of turbulence behind a backward-facing step, *Int. Journal of Fluid Mech.*, vol. 256, pp. 1-25.

Smagorinsky, J., 1963, General Circulation Experiments with Primitive Equations, *Mon. Weather Rev.*, vol. 91, pp. 99-164.

Srredhar, M. e Ragab, S., 1994, Large-eddy Simulation of longitudinal stationary vortices, *Phys. Fluid*, vol. 6(7), pp. 2501-2514.

Spyropoulos, E. T. and Blaisdel, G. A., 1996, Evaluation of the dynamic models for simulation of compressible decaying isotropic turbulence, *AIAA Journal*, vol. 34 (5), pp. 990-998.

Taylor, G. I., 1935, Statistical Theory of Turbulence, *Proc. R. Soc., Lond.*, Vol. A151, p. 421.

Urbin, G., 1997, Large-Eddy Simulation of Turbulent Jets, CEA-Grenoble, Communication Privée.

Wilcox, D. C., 1998, Turbulence Modeling for CFD, DCW Industries, California.

Yakhot, V. and Orzag, S. S. (1968), Renormalization Group Analysis of turbulence: Basic Theory, *Journal of Scientific Computing*, Vol. 1, pp. 3-51.