

## Validação da solução numérica do escoamento de ar a 8,9 bar e 289 K em tubeira com razão de expansão 2,5

**Eduardo M. Germer**

Depto. Engenharia Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Curitiba, PR  
E-mail: [eduardomg@utfpr.edu.br](mailto:eduardomg@utfpr.edu.br)

**Carlos H. Marchi, Luciano K. Araki**

Depto. Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Paraná (UFPR), Curitiba, PR  
E-mails: [marchi@ufpr.br](mailto:marchi@ufpr.br); [lucaraki@ufpr.br](mailto:lucaraki@ufpr.br)

**Diego F. Moro**

PG-Mec, Universidade Federal do Paraná (UFPR), Curitiba, PR  
E-mail: [difmoro@ufpr.br](mailto:difmoro@ufpr.br)

**Guilherme Bertoldo, Jonas J. Radtke**

Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)  
85601-970, Francisco Beltrão, PR  
E-mails: [gbertoldo@utfpr.edu.br](mailto:gbertoldo@utfpr.edu.br); [jonas@utfpr.edu.br](mailto:jonas@utfpr.edu.br)

**Resumo:** Este trabalho relata a validação da solução numérica do escoamento de ar a 8,9 bar e 289 K através de uma tubeira do tipo convergente-divergente com razão de expansão de áreas de 2,5. Considera-se o escoamento bidimensional, compressível, permanente, invíscido, com propriedades constantes. A solução numérica foi obtida com o método dos volumes finitos, malha estruturada não-ortogonal, com aproximações de primeira e segunda ordens de acurácia e método de acoplamento pressão-velocidade adequado a qualquer regime de velocidade. A solução numérica foi comparada com resultados experimentais disponíveis na literatura. Obteve-se boa concordância entre as soluções numéricas e os resultados experimentais, com diferença máxima de 5%.

**Palavras-chave:** tubeira, motor-foguete, propulsão, onda de choque oblíqua, validação.

### 1 Introdução

A modelagem do escoamento em bocais supersônicos do tipo convergente-divergente (C-D) apresenta algumas dificuldades. Uma delas é por ser um fenômeno representado pelas equações de Navier-Stokes, que por sua complexidade não têm solução analítica conhecida, havendo a necessidade de recorrer aos métodos numéricos para solução. Outro complicador é o fato do escoamento apresentar três regiões distintas, uma região subsônica incompressível/compressível, uma região compressível transônica e outra compressível supersônica; cada uma delas com características físicas distintas, e com as equações matemáticas apresentando naturezas distintas de acordo com o regime de velocidade do escoamento.

Um dos objetivos do grupo de CFD da UFPR ([www.cfd.ufpr.br](http://www.cfd.ufpr.br)) é o desenvolvimento de um código computacional, baseado em linguagem Fortran, que resolva numericamente tal escoamento. Em sua fase atual o código resolve problemas de simetria axial ou plana, a qualquer velocidade (subsônica, transônica ou supersônica), para escoamento invíscido, laminar ou turbulento (modelo de Baldwin-Lomax), com propriedades variáveis, sem ou com reações químicas (escoamento congelado, em equilíbrio ou desequilíbrio químico). Atualmente estão sendo feitas validações do código em alguns problemas de propulsão de foguetes, sendo este trabalho parte destas atividades.

### 2 Modelo matemático

A modelagem matemática representa um escoamento de ar, em regime permanente, invíscido, em um bocal C-D. O ar foi considerado um gás caloricamente perfeito, ou seja, o calor específico à

pressão constante ( $c_p$ ) foi considerado constante. Partindo-se das equações de Navier-Stokes, com simplificações para fluido invíscido e considerando simetria axial, as equações da conservação da massa, da quantidade de movimento linear, e da energia são dadas por

$$C^\phi \left[ \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial(\rho y v\phi)}{\partial y} \right] = P^\phi \quad (1)$$

sendo  $x$  a coordenada axial,  $y$  a coordenada radial,  $u$  a componente da velocidade em  $x$ , e  $v$  a componente da velocidade em  $y$ . As variáveis  $\phi$ ,  $P^\phi$  e  $C^\phi$  são apresentadas na Tabela 1.

Princípio de conservação	$\phi$	$C^\phi$	$P^\phi$
Massa	1	1	0
Quantidade de movimento linear em $x$	$u$	1	$-\frac{\partial p}{\partial x}$
Quantidade de movimento linear em $y$	$v$	1	$-\frac{\partial p}{\partial y}$
Energia	$T$	$c_p$	$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y}$

Tabela 1: Símbolos usados na Equação 1

A relação para fechamento do modelo matemático é dada pela equação de estado dos gases perfeitos:

$$p = \rho RT \quad (2)$$

onde  $\rho$  é a massa específica do fluido,  $p$  é a pressão,  $R$  é a constante do gás e  $T$  é a temperatura.

### 3 Modelo numérico

A discretização do domínio de cálculo foi feita dividindo-se o bocal em quatro segmentos em  $x$ , sendo cada um destes dividido em um certo número de volumes de controle, uniformes por segmento. A divisão do número de volumes em cada segmento foi feita de forma a tornar a malha praticamente uniforme em  $x$ , como pode ser visto na Figura 1. Na direção radial, a malha é uniforme em cada linha vertical. Esta forma de discretização não prejudica a solução numérica uma vez que o escoamento é invíscido, desconsiderando-se, portanto, a existência da camada limite. A malha base é de  $9 \times 10$  volumes de controle. Os resultados foram obtidos em várias malhas, com razão de refino de malha ( $r$ ) igual a 2, o que significa duplicar o número de volumes em  $x$  e  $y$  a cada refino, até a malha  $1152 \times 1280$  volumes de controle.

Como a malha é estruturada não-ortogonal, a Equação 1 e as relações dadas na Tabela 1 foram transformadas para o espaço generalizado [3]. Após isto, foram discretizadas utilizando o método dos volumes finitos. O escoamento avaliado é permanente, mas para facilitar a convergência foi utilizada a técnica do transiente distorcido, sendo a discretização temporal totalmente implícita.

Os termos advectivos foram aproximados com esquema *upwind* (UDS) com correção adiada para diferenças centrais (CDS). Isso possibilita a escolha entre o UDS e CDS puros ou uma mistura de ambos. O termo de pressão foi aproximado com o esquema CDS. O arranjo é co-localizado, ou seja, as variáveis são avaliadas nos centros dos volumes, cuja posição é centrada em relação às faces.

Para resolver o acoplamento pressão-velocidade foi utilizado o método SIMPLEC aplicado a qualquer regime de velocidades [3,5]. As fronteiras são tratadas com volumes fictícios e as condições de contorno são dadas na Figura 2. Para  $u$  e  $v$  na parede da tubeira, as condições de contorno são idênticas à da pressão. A parede é considerada adiabática.

Após obtidas as soluções numéricas com o código Mach2D [5] em várias malhas, os resultados foram analisados com o código computacional Richardson 4.0, que avalia as incertezas numéricas utilizando o estimador GCI (*Grid Convergence Index*) de Roache [6], através de

$$U_{GCI}(\phi_f) = F_S \frac{|\phi_f - \phi_g|}{(r^{P_L} - 1)} \quad (3)$$

sendo  $U_{GCI}$  a incerteza numérica,  $F_S$  um fator de segurança considerado igual a 3,  $\phi_f$  e  $\phi_g$  as soluções numéricas da propriedade  $\phi$  nas malhas fina e grossa respectivamente,  $r$  é a razão de refino (razão entre o número de volumes de controle da malha fina e da malha grossa em cada direção), e  $P_L$  é a ordem de acurácia das aproximações numéricas. A representação da solução numérica  $\phi_{num}$  é dada por [4]

$$\phi_{num} = \phi_f \pm U_{GCI}(\phi_f) \quad (4)$$

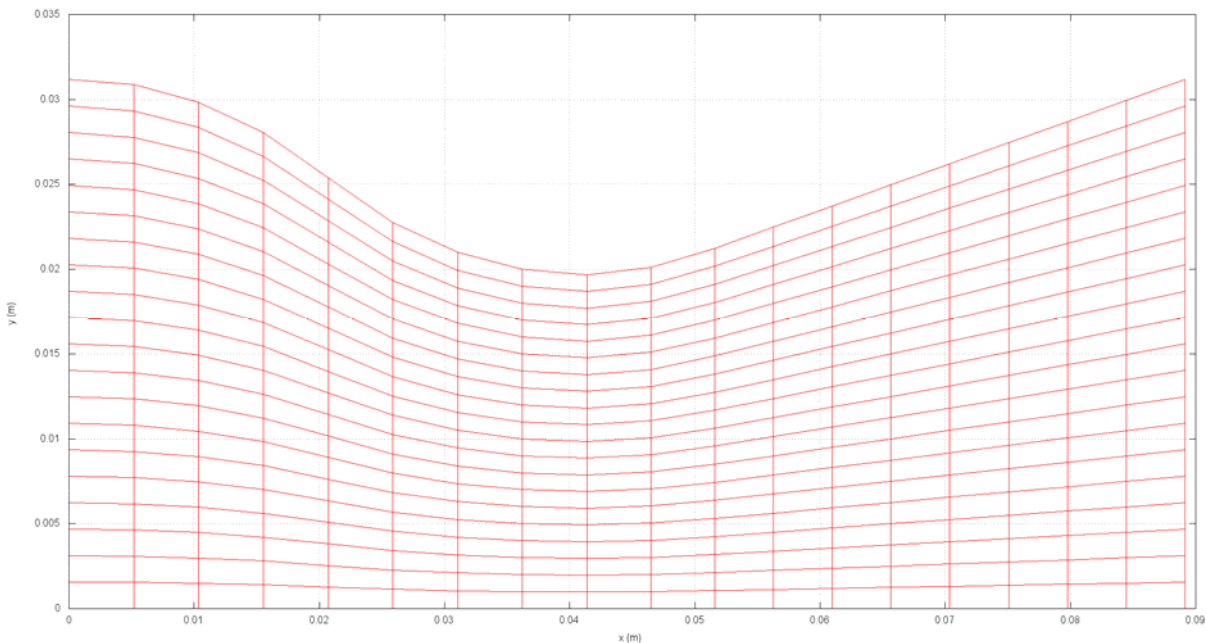


Figura 1: Malha com 18 x 20 volumes de controle

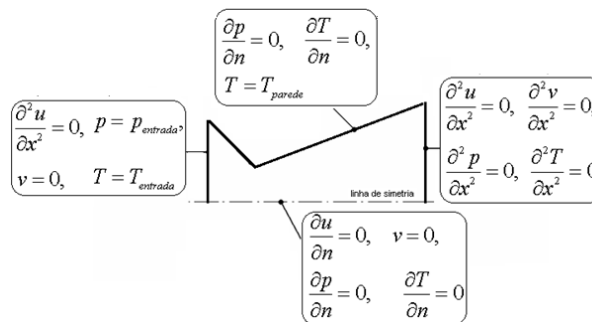


Figura 2: Condições de contorno

#### 4 Validação

A pressão de estagnação na tubeira é de 889.423,7 Pa e a temperatura de estagnação é de 288,89 K, que são as condições do experimento [2] a que se relaciona esta validação.

Segundo [1], a validação é o processo que define qual o grau de acurácia de um modelo teórico em representar um fenômeno real; trata da comparação entre os resultados numéricos e os resultados experimentais. Para realizar a validação foi usado o experimento de [2], que consiste no escoamento de ar em um bocal C-D, com razão de expansão 2,51, cuja geometria é mostrada na Figura 1. A parede não é resfriada. Foi medida a pressão estática em 40 pontos ao longo da parede da tubeira.

Foi levada em consideração a incerteza dos resultados experimentais que incluiu a incerteza de medição somada às incertezas de leituras dos dados do gráfico no trabalho [2].

#### 5 Resultados

Os resultados são apresentados na Figura 3. A pressão estática local é adimensionalizada pela pressão de estagnação. Pode-se notar uma boa concordância entre as soluções numéricas e os resultados experimentais. A faixa de incerteza numérica fica dentro da faixa de incerteza experimental em praticamente todo o domínio de cálculo, exceto nos pontos de medição 19, 20 e 21, na região da garganta. O ponto 21, que mostra a maior discrepância, tem seu valor inferior de incerteza 5,1% menor que o valor inferior de incerteza da faixa experimental. Os pontos 19 e 20 têm esta diferença em 1% e 3,6% respectivamente.

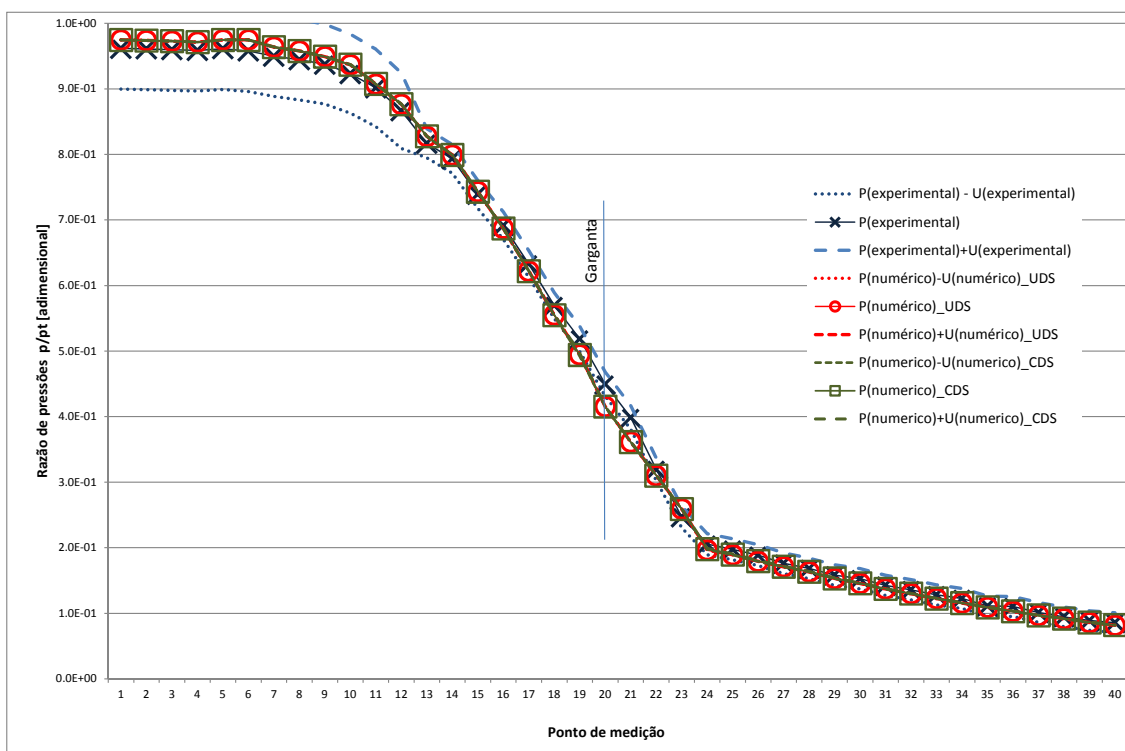


Figura 3: Resultados numéricos e experimentais da pressão

Foram usadas as aproximações UDS e depois CDS nos termos advectivos, ou seja, uma aproximação de primeira ordem e depois uma aproximação de segunda ordem de acurácia. Os resultados numéricos são praticamente os mesmos. Apesar disto, a faixa de incerteza das soluções com CDS são, na média, duas ordens de grandeza menor que a faixa de incerteza com o UDS ( $10^{-6}$  para o CDS e  $10^{-4}$  para o UDS), mostrando que a aproximação de segunda ordem tem melhor acurácia que a de primeira ordem. Isto impacta muito pouco, por exemplo, nas diferenças encontradas nos pontos 19,

20 e 21. Enquanto o CDS apresenta diferenças de 1%, 3,6% e 5,1% para os extremos inferiores da faixa de incerteza nestes pontos, o UDS apresenta 1,5%, 3,7% e 5,2% para os mesmos pontos.

Deve-se ainda lembrar que a solução numérica foi obtida considerando-se o escoamento invíscido e com propriedades constantes. Isso difere do fenômeno real, que é viscoso e com propriedades variáveis. Entretanto, os resultados mostram que a simplificação do modelo matemático não afetou significativamente a avaliação do fenômeno real.

### **Agradecimentos**

Os autores agradecem o apoio financeiro do CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), AEB (Agência Espacial Brasileira) através do Programa Uniespaço, e CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior). O segundo autor é bolsista do CNPq. O quarto autor é bolsista da CAPES.

### **Referências**

- [1] ASME V&V 2009, “Standard for verification and validation in computational fluid dynamics and heat transfer”, ASME, 2009.
- [2] L. H. Back, P. F. Massier, H. L. Gier, Comparison of measured and predicted flows through conical supersonic nozzles with emphasis on transonic region, *AIAA Journal*, vol. 3, pp. 1606–1614, (1965).
- [3] C. R. Maliska, “Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional”, 2ª ed., LTC, Rio de Janeiro, 2004.
- [4] C. H. Marchi, “Verificação de Soluções Numéricas Unidimensionais em Dinâmica dos Fluidos”, Tese de Doutorado, UFSC, Florianópolis, 2001.
- [5] C. H. Marchi, L. K. Araki, “Relatório técnico do projeto CFD-10/UFPR: códigos Mach2D 6.1 e RHG2D 1.0”, UFPR, Curitiba, 2009.
- [6] P. J. Roache, Perspective: a method for uniform reporting of grid refinement studies, *ASME Journal of Fluids Engineering*, vol. 116, pp. 405-413, (1994).