

CONSEQÜÊNCIAS DA APLICAÇÃO DE ESQUEMAS TVD
SEM O USO DE VARIÁVEIS CARACTERÍSTICAS

L.A. Santos¹, C.H. Marchi², L.A.P. Menezes³, C.R. Maliska¹ e A.F.C. Silva¹
¹EMC - UFSC ²DEMEC - UFPR ³DEM - FEJ - UDESC
 88040-900 81531-990 89223-100
 Florianópolis - SC - Brasil Curitiba - PR - Brasil Joinville - SC - Brasil

RESUMO

Neste artigo são discutidas as conseqüências do emprego de esquemas de discretização TVD para sistemas de equações não-lineares de conservação sem o emprego das variáveis características. A discussão é ilustrada com resultados para o escoamento unidimensional invíscido e isotérmico de um gás ideal obtidos com e sem o uso de variáveis características. Os resultados numéricos mostrados são para um tubo de choque e para um bocal convergente-divergente.

INTRODUÇÃO

Embora o tema deste artigo esteja fundamentalmente ligado a sistemas de equações diferenciais parciais, para compreender o desenvolvimento dos esquemas TVD é importante iniciar esta introdução pela equação escalar de advecção para a qual eles se aplicam de forma mais simples.

Equação Escalar. Ao longo da década de 80 diversos esquemas de discretização para os termos advectivos de equações de conservação foram desenvolvidos. Alguns dos esquemas mais bem sucedidos foram desenvolvidos a partir da equação de advecção pura de uma quantidade escalar ϕ

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + a(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

Uma das idéias mais frutíferas durante esse desenvolvimento foi a de criar esquemas de alta ordem que não introduzissem novos extremos locais (máximos ou mínimos) durante a solução de um problema de valor inicial para (1). Em termos mais precisos, a solução numérica de (1) produzida com esses esquemas deve ter a sua variação total em x ,

$$TV(\phi) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |\Delta_{i+1/2} \phi|$$

constante ou decrescente ao longo do tempo, sendo $\Delta_{i+1/2} \phi = \phi(x_{i+1}) - \phi(x_i)$. Esta propriedade faz com que, mesmo com malhas grosseiras, as soluções obtidas sejam fisicamente aceitáveis (livres de oscilações numéricas). Desta propriedade vem a denominação dos esquemas de discretização TVD (*Total Variation Diminishing*).

No trabalho de Harten (1983) encontram-se orientações básicas para o desenvolvimento de esquemas de discretização TVD de segunda ordem, com cuidados para garantir que a solução numérica convirja para aquela solução fraca de (1) que é o limite da equação viscosa

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + a(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial x} = \beta \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

quando $\beta \rightarrow 0^+$. Note-se que não há garantia de unicidade da solução fraca de (1), se ela é não-linear, a menos que uma **condição de entropia** como a acima seja imposta.

É sabido que esquemas TVD de ordem maior que a primeira devem ser não-lineares, ou seja, devem variar o seu comportamento de acordo com o perfil assumido pela solução numérica ao longo das iterações. Discussões ricas em resultados numéricos deste tipo de esquemas de discretização, feitas em uma linguagem bastante usual na área de simulação numérica da transferência de calor, são encontradas nos trabalhos de Marchi (1993) e Menezes (1996).

Sistemas de Equações. Para a discretização de sistemas de equações de conservação, que podem ser escritos na forma vetorial

$$\frac{\partial \underline{\phi}}{\partial t} + \underline{A}(\underline{\phi}) \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x} = \underline{0} \quad (2)$$

onde $\underline{\phi}$ é um vetor de incógnitas de n componentes e \underline{A} é uma matriz $n \times n$, é bastante razoável, ao aplicar os esquemas desenvolvidos para a discretização de (1), considerar a forma característica de (2). A forma característica é obtida a partir da decomposição $\underline{A} = \underline{R} \underline{\Lambda} \underline{R}^{-1}$, da matriz \underline{A} , onde \underline{R} é a matriz de autovetores à direita de \underline{A} e $\underline{\Lambda}$ é a matriz diagonal dos seus autovalores.

Se (2) fosse linear (\underline{A} fosse independente de $\underline{\phi}$) poder-se-ia definir o vetor de variáveis características $\underline{w} = \underline{R}^{-1} \underline{\phi}$ e reescrever (2) na sua forma característica,

$$\frac{\partial \underline{w}}{\partial t} + \underline{\Lambda} \frac{\partial \underline{w}}{\partial x} = \underline{0} \quad (3)$$

que pode ser vista como um conjunto de equações desacopladas entre si (a menos das condições de contorno), cada uma delas exatamente com a forma de (1). Portanto a cada uma delas se aplicam diretamente os resultados obtidos para (1). Em Yang

(1990) encontra-se um exemplo muito claro de aplicação da forma (3) na discretização das equações (lineares) do modelo de Cattaneo-Vernotte para a condução de calor por ondas térmicas.

Para sistemas de equações não-lineares, embora não se possa utilizar diretamente (3), pode-se fazer uma linearização local das equações durante a discretização, e estender assim o uso das variáveis características, de acordo com o que descreve, por exemplo, Roe (1986). Mais tarde, neste artigo, mais detalhes de um procedimento deste tipo serão fornecidos.

Pode-se também evitar o uso das variáveis características e mesmo assim tentar aplicar o conhecimento adquirido no estudo da equação (1) à solução de sistemas de equações de conservação. São as conseqüências deste último procedimento que serão discutidas ao longo do restante deste artigo, à luz de resultados numéricos obtidos para o escoamento unidimensional, isotérmico e invíscido de um gás ideal. Uma discussão deste mesmo tipo, utilizando exemplos de aplicação menos simplificados, pode ser encontrada no trabalho de Menezes (1996).

PROCEDIMENTOS NUMÉRICOS

Nesta seção são descritos sucintamente dois procedimentos para a simulação numérica de escoamentos unidimensionais e isotérmicos de um gás ideal. Um com e outro sem o uso de variáveis características. Nos resultados destes procedimentos será baseada a discussão colocada na seção seguinte.

Sem o Uso de Variáveis Características. As equações governantes do escoamento unidimensional e isotérmico de um gás ideal, não-viscoso, ao longo de um duto de seção transversal variável podem ser escritas como

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A \phi) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u A \phi) = s^\phi + p^\phi \quad (4)$$

sendo A a área da seção transversal do duto. Os símbolos ϕ , s^ϕ e p^ϕ representam expressões de acordo com a tabela 1. ρ , u , e p são, respectivamente, a massa específica do fluido, sua velocidade e sua pressão. Para um gás ideal, $p = \rho R T$. No escoamento isotérmico a velocidade de propagação de perturbações na pressão é $c = \sqrt{RT}$ (diferente da velocidade do som que se propaga isentropicamente, $\sqrt{\gamma RT}$, portanto), sendo R a constante do gás ideal, T a sua temperatura absoluta e γ a razão de calores específicos.

Tabela 1 - Valores de ϕ , s^ϕ e p^ϕ

Equação de conservação	ϕ	s^ϕ	p^ϕ
da massa	1	0	0
da quantidade de movimento	u	$p \frac{dA}{dx}$	$-\frac{\partial}{\partial x}(A p)$

Integrando a equação (4) sobre um volume de controle como o mostrado na figura 1 e dividindo o resultado por Δx , obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho A \phi)_P + [(\rho u A \phi)_e - (\rho u A \phi)_w] / \Delta x \\ = S_P^\phi + P_P^\phi \end{aligned} \quad (5)$$

onde os subscritos maiúsculos denotam valores médios tomados ao longo dos volumes de controle correspondentes e os subscritos minúsculos valores avaliados nas posições correspondentes indicadas na figura 1 (faces e e w do volume de controle P). S_P^ϕ e P_P^ϕ denotam aproximações numéricas para s^ϕ e p^ϕ , respectivamente. $\Delta x = (x_e - x_w)$.

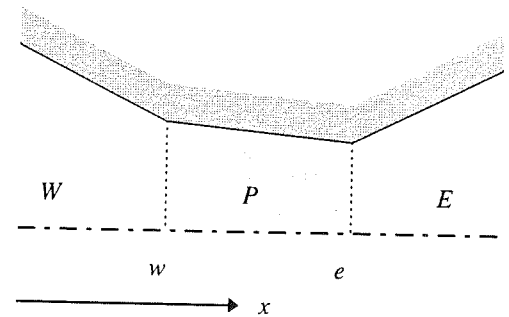


Figura 1 - Volume de controle para a integração das equações de conservação

O valor da velocidade u , que aparece em $(\rho u A \phi)_e$, é avaliado utilizando a média das equações de conservação de quantidade de movimento escritas para os volumes P e E , descrita por Marchi e Maliska (1994). Os valores de ϕ e ρ são avaliados utilizando esquemas TVD de modo semelhante ao descrito por Lien e Leschziner (1994) (embora aqueles autores mostrem a aplicação do esquema apenas a ϕ e não a ρ). ϕ corresponde a u na equação da quantidade de movimento.

Assim u é tratada de duas maneiras diferentes: ora como expressão da vazão de fluido que atravessa a fronteira do volume de controle, sendo avaliada pela média de Marchi e Maliska (1994), ora como quantidade de movimento específica transportada pelo escoamento, avaliada então pelo esquema TVD. O esquema TVD será aplicado, na metodologia descrita nesta seção, às variáveis ρ e u , que serão denominadas, ao longo deste trabalho, **variáveis primitivas**.

Foi utilizado o algoritmo SIMPLEC adaptado para escoamentos compressíveis de acordo com Van Doormaal *et al.* (1986), usado por Silva (1991) e por Marchi e Maliska (1994). Nos sistemas lineares foram empregados coeficientes correspondentes ao esquema *upwind* de primeira ordem, sempre positivos, e introduzida correção para a obtenção do esquema SuperBee (de segunda ordem) através dos termos-fonte. Este procedimento de correção adiada, recomendado por Lien e Leschziner (1994), mostrou-se muito importante para a estabilidade dos cálculos.

A discretização temporal é feita segundo o método de Euler a ré (*backward*) também conhecido como totalmente implícito. Mais detalhes dos procedimentos de discretização e solução não serão mostrados aqui, sendo eles fundamentalmente análogos aos apresentados por Marchi e Maliska (1994) também encontrados no livro de Maliska (1995).

Cabe reconhecer que a discretização apresentada acima é apenas uma entre muitas possíveis sem o uso de variáveis

características. Mas seus resultados são considerados por estes autores como representativos do comportamento de diversos procedimentos em que não se empregam nem variáveis características nem coeficientes de dissipação artificial arbitrados pelo usuário. Thakur e Shyy (1993), por exemplo, apresentaram resultados muito bons para uma metodologia sem o uso de variáveis características, mas fizeram uso de um coeficiente de dissipação artificial arbitrário. Há um grande número de metodologias descritas na literatura em que o uso de coeficientes de dissipação artificial (escolhidos pelo usuário) fornece bons resultados, como se vê no trabalho de De Bortoli (1995). No entanto preferiu-se não incluir a discussão deste tipo de procedimento no presente trabalho.

Com o Uso de Variáveis Características. O sistema de equações representado por (4), com a tabela 1 e a equação de estado, pode ser escrito como

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{\phi} + \frac{\partial}{\partial x} \underline{f} = \underline{s} \quad (6)$$

onde

$$\underline{\phi} = \begin{Bmatrix} \rho A \\ \rho u A \end{Bmatrix}, \quad \underline{f} = \begin{Bmatrix} \rho u A \\ \rho u^2 A + \rho c^2 A \end{Bmatrix}$$

$$\text{e} \quad \underline{s} = \begin{Bmatrix} 0 \\ c^2 \rho \frac{dA}{dx} \end{Bmatrix}$$

Usando a regra da cadeia, com $\underline{A}(\phi) = \partial \underline{f} / \partial \phi$, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{\phi} + \underline{A}(\phi) \frac{\partial}{\partial x} \underline{\phi} = \underline{s} \quad (7)$$

com

$$\underline{A}(\phi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c^2 & -u^2 & 2u \end{bmatrix}$$

Associadas à matriz \underline{A} , por $\underline{A} = \underline{R} \underline{\Lambda} \underline{R}^{-1}$, tem-se as matrizes

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ u-c & u+c \end{bmatrix}, \quad \underline{\Lambda} = \begin{bmatrix} u-c & 0 \\ 0 & u+c \end{bmatrix}$$

$$\text{e} \quad \underline{R}^{-1} = \frac{1}{2c} \begin{bmatrix} c+u & -1 \\ c-u & 1 \end{bmatrix}$$

A discretização de (6) empregada aqui, conservativa, tem a forma

$$\underline{\phi}_P^{n+1} - \underline{\phi}_P^n = \Delta t \left[\left(\underline{f}_w - \underline{f}_e \right) / \Delta x + \underline{s}_P \right]$$

O valor do vetor de fluxos nas faces \underline{f}_e pode ser expresso como

$$\underline{f}_e = \underline{f}_P + \underline{A}(\phi_e - \phi_P) = \underline{f}_P + \underline{R} \underline{\Lambda} \underline{R}^{-1} (\phi_e - \phi_P)$$

e assim abre-se a possibilidade de utilizar as variáveis características para avaliar o fluxo na interface (ao invés de avaliar ϕ_e pode-se avaliar $\underline{w}_e = (\underline{R}^{-1} \phi)_e$ diretamente, como se o sistema estivesse na forma (3)). O modo como isto é feito, seguindo Roe (1981), está explicado detalhadamente por LeVeque (1990).

A avaliação dos fluxos nas interfaces através da solução aproximada de Roe para o problema de Riemann local, foi incorporada em uma discretização do tipo Lax-Wendroff de segunda ordem no tempo e no espaço. Aplicada ao sistema de equações considerado, esta técnica exige que a matriz \underline{A} , e portanto seus autovalores e autovetores, sejam avaliados usando a velocidade média na face dada por

$$u_e = \frac{(\rho A)_P^{1/2} u_P + (\rho A)_E^{1/2} u_E}{(\rho A)_P^{1/2} + (\rho A)_E^{1/2}}$$

expressão obtida seguindo-se o procedimento recomendado por Roe (1981). O esquema TVD de alta ordem utilizado é o SuperBee de Roe, como descrito por LeVeque(1990).

O termo fonte foi avaliado fazendo-se simplesmente $\underline{s}_P = [0, c^2 \rho_P (A_e - A_w) / \Delta x]^T$. Maneiras mais sofisticadas de realizar esta avaliação são encontradas no artigo de Roe (1986).

O procedimento descrito acima não é o único possível com o uso de variáveis características, uma interessante fonte de informações sobre diversos procedimentos deste tipo é o trabalho de Manzini (1998).

RESULTADOS NUMÉRICOS E DISCUSSÃO

Para embasar a conclusão deste trabalho e ilustrar o comportamento dos procedimentos numéricos em consideração, foram realizados os testes abaixo.

Tubo de Choque. Neste problema foram usadas as condições iniciais, em $t=0$: $u/c=0$ e

$$\frac{\rho}{\rho_r} = \begin{cases} 5 & \text{se } x < L/2 \\ 1 & \text{se } x \geq L/2 \end{cases}$$

onde ρ_r é um valor de referência para a massa específica. Nas figuras 2 e 3 aparecem os perfis de velocidade e massa específica previstos para o instante $t c/L = 1/5$.

Os resultados mostrados naquelas figuras foram obtidos com uma malha de 50 volumes de controle. Para minimizar o efeito dos diferentes esquemas de discretização temporal foram utilizados passos de tempo bastante pequenos, de $\Delta t c/\Delta x = 1/100$. No algoritmo SIMPLEC foram feitas 10 iterações a cada passo de tempo, para tratar adequadamente as não-linearidades do sistema de equações.

Nas legendas das figuras a abreviatura **car.** designa os resultados obtidos com o uso de variáveis características, a abreviatura **pri.** indica os resultados obtidos sem o uso delas (com o esquema TVD aplicado às variáveis primitivas). A palavra **exato** identifica as soluções bastante precisas dos problemas unidimensionais considerados obtida por métodos clássicos (que não usam nenhuma discretização das equações governantes, mas sua integração analítica).

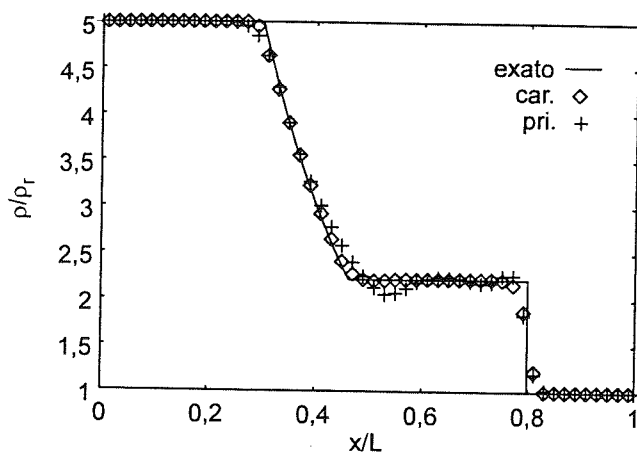


Figura 2 - Perfil de massa específica no tubo de choque.

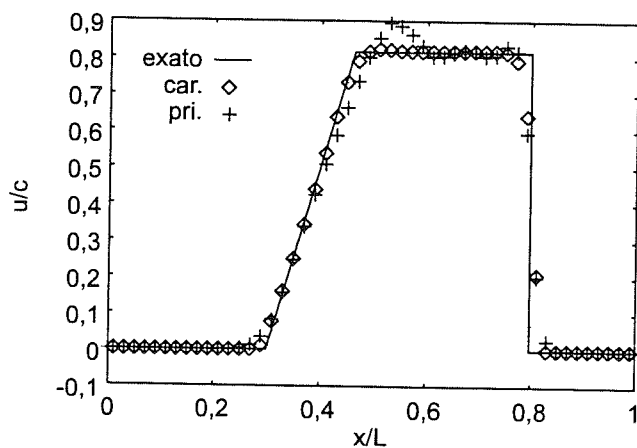


Figura 3 - Perfil de velocidade no tubo de choque.

Na figura 3 observa-se que a variação total do campo de velocidade, aumenta ao longo do tempo (inicialmente era 0 e no instante mostrado tem o valor $TV(u)=1,63 c$). Isto dá uma idéia dos problemas que podem surgir quando se procura aplicar os esquemas TVD diretamente às variáveis primitivas do problema. Não se pode falar rigorosamente no perfil das variáveis características em um problema não-linear, como este. Mas assumindo que a matriz R^{-1} e o vetor ϕ sejam avaliados no mesmo ponto x , pode-se dizer que o vetor de variáveis características teria as suas duas componentes iguais a $\rho A/2$, cujo perfil, como pode-se notar na figura 2, teria variação total constante, $TV(\rho A/2)=2\rho_r A$.

Bocal. Os próximos resultados mostrados são para o escoamento em regime permanente em um bocal convergente-divergente. A condição de estagnação prescrita na entrada ($x=0$) do bocal é $\rho_e/\rho_r=1$, e na saída ($x=L$) é prescrita $\rho_e/\rho_r=9/10$. A área da seção transversal do bocal é dada pela equação $A(x)=L^2[1+(2x/L-1)^2]$. Novamente as figuras foram feitas a partir de resultados obtidos com malhas de 50 volumes de controle.

Em um ponto qualquer do bocal as condições do escoamento estão relacionadas à condição de estagnação através de $\rho/\rho_e=\exp[(u/c)^2/2]$ (a condição de estagnação muda quando se atravessa o choque normal).

A equação (7) se distingue da equação (2) pela presença do termo fonte \underline{g} . Este termo fonte (que não é nulo no bocal, por causa da variação de área) permite que a variação total nos perfis das variáveis, mesmo das variáveis características, cresça ao longo do tempo. Mesmo assim nota-se uma aparência melhor nos perfis obtidos com a discretização baseada nas variáveis características, nas figuras 4 e 5.

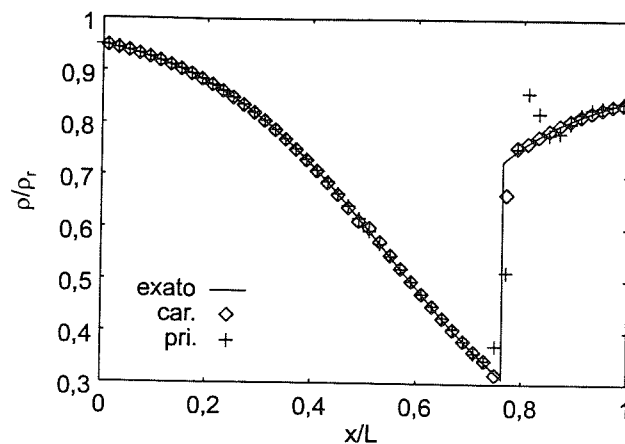


Figura 4 - Perfil de massa específica no bocal.

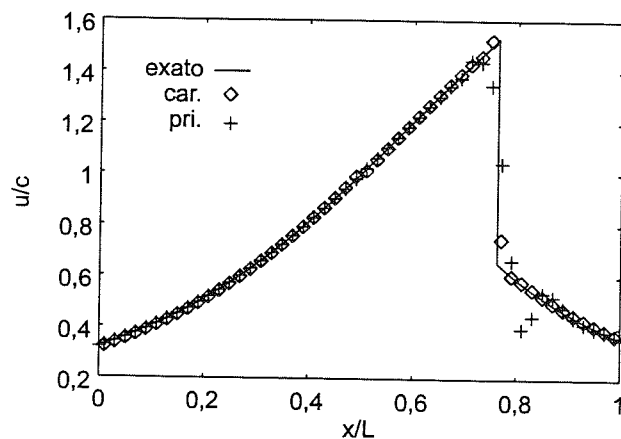


Figura 5 - Perfil de velocidade no bocal.

Isto faz pensar que o uso das variáveis características é muito importante para o aproveitamento da experiência adquirida na solução da equação (1), mesmo quando o sistema de equações resolvido, posto na forma característica, não pode ser escrito como (3).

Na figura 6 mostra-se o erro de truncamento no cálculo do fluxo de massa através do bocal. Ele foi avaliado através da diferença entre o fluxo de massa calculado numericamente m_n e o calculado analiticamente m_a dividida pelo valor calculado analiticamente. Assim

$$\varepsilon_t = \frac{|m_n - m_a|}{m_a}$$

No gráfico da figura 6, esta quantidade é dada em função do refino da discretização (N é o número de volumes de controle utilizados). Resultados de esquemas de primeira ordem foram incluídos para fins de comparação.

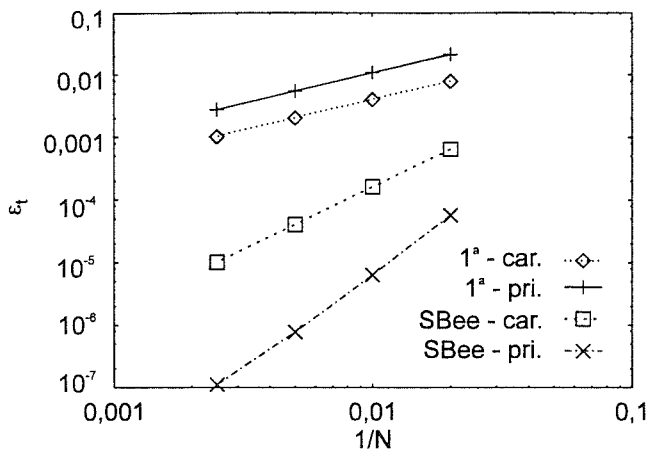


Figura 6: Erro no valor do fluxo de massa no bocal.

Nesta figura o ordinal 1ª identifica os resultados obtidos com esquemas de primeira ordem e a abreviatura SBee os resultados obtidos utilizando o esquema SuperBee de Roe. As curvas foram elaboradas com resultados obtidos com malhas de 50, 100, 200 e 400 volumes de controle.

Eliminando-se a correção de entropia da solução aproximada para o problema de Riemman, que é parte do procedimento que envolve as variáveis características, pode-se fazer o erro de truncamento associado ao SuperBee naquele procedimento ficar tão baixo quanto o erro do SuperBee aplicado às variáveis primitivas, que aparece na figura 6. Sem essa correção, no entanto, podem ocorrer na solução numérica choques de rarefação (com o SuperBee isto não ocorreu, mas com o esquema de primeira ordem sim). Por isso, e para não complicar mais a discussão, esses resultados não são mostrados aqui.

Para a obtenção dos resultados de segunda ordem de acurácia, mostrados na figura 6, os seguintes cuidados tiveram de ser tomados. Com relação às condições de contorno (para que a acurácia não fosse prejudicada nas fronteiras) fez-se a extrapolação da velocidades utilizando a própria equação da conservação da massa e então utilizou-se este valor extrapolado para atualizar o valor da massa específica (e o valor da pressão) na fronteira em função das condições de estagnação prescritas. Quanto ao fluxo de massa usado para expressar o erro de truncamento utilizou-se o mesmo valor que entra na forma discretizada da equação de conservação da massa.

Nota-se na figura 6 que, apesar das oscilações, obteve-se um erro no fluxo de massa menor usando o esquema SuperBee nas variáveis primitivas do que o obtido com o mesmo esquema aplicado às características. Destaca-se isto para que não se conclua que as oscilações inviabilizam a aplicação de esquemas de segunda ordem às variáveis primitivas na simulação de escoamentos compressíveis.

OBSERVAÇÕES

As observações colocadas nesta seção não estão diretamente relacionadas aos resultados mostrados neste artigo, mas são relativas ao uso de esquemas TVD de um modo geral.

Aplicabilidade. Deve-se notar que a aplicação de esquemas baseados nas variáveis características exigem que a matriz \underline{A}

tenha um conjunto completo de autovalores reais (o que caracteriza um sistema hiperbólico de equações diferenciais parciais). Isto não acontece, por exemplo, no sistema elíptico formado pelas equações governantes de escoamentos incompressíveis.

Mesmo para escoamentos incompressíveis, no entanto, estes esquemas podem ser aplicados, desde que seja usada alguma compressibilidade artificial, como feito, por exemplo, nos trabalhos de Santos (1996) e Weiss e Smith (1995).

Dicks (1993) desenvolveu uma forma de aplicação de esquemas TVD, baseada no uso de variáveis características, para o sistema de equações não-estritamente hiperbólico do modelo *Black-Oil* para a simulação de reservatórios de petróleo. Para a solução daquele sistema de equações esquemas TVD são freqüentemente aplicados sem o uso de variáveis características, como se vê no trabalho de Mota (1994).

Dificuldades na Solução de Problemas Transientes. Deve-se notar que os esquemas TVD foram inicialmente desenvolvidos para métodos de discretização explícitos, de segunda ordem no tempo e no espaço, do tipo Lax-Wendroff. Quando os esquemas TVD são utilizados em conjunto com outros esquemas de discretização temporal na solução de problemas transientes, para passos de tempo suficientemente grandes (número de CFL acima de 1, tipicamente, para métodos implícitos) as características da discretização temporal começam a se manifestar de forma predominante.

Assim, com o método de Crank-Nicolson, podem surgir oscilações mesmo utilizando-se o esquema *upwind* de primeira ordem, e com o método de Euler à ré (totalmente implícito) pode-se encontrar uma excessiva dissipação, mesmo usando esquemas de alta ordem na discretização espacial. Isto explica alguns resultados decepcionantes obtidos com esquemas TVD de alta resolução, até mesmo quando aplicados à advecção pura de uma quantidade escalar.

Na Ausência de Choques. Finalmente cabe observar que o desenvolvimento dos esquemas TVD, assim como a discussão apresentada aqui, foi orientado para a obtenção de soluções para problemas que envolvem descontinuidades, choques. Para problemas cuja solução é suave, ainda que envolvendo alguma espécie de camada limite, há uma outra discussão, talvez mais sutil que a abordada aqui, que comporta opiniões bastante polêmicas, como as expressas no artigo de Gresho e Lee (1981).

CONCLUSÃO

Há uma variedade de razões pelas quais, às vezes, os resultados obtidos ao utilizar-se um esquema de discretização dito TVD de alta resolução não são tão bons quanto se espera a partir dos mostrados nas referências pioneiras do uso daquele tipo de esquema. Essas razões podem ser dificuldades na discretização temporal, dificuldades na extensão dos esquemas unidimensionais para o tratamento de problemas bi e tri-dimensionais e/ou dificuldades no tratamento de termos-fonte presentes nas equações diferenciais. Uma dificuldade considerada importante pelos autores deste trabalho é relacionada ao uso (ou ao não-uso) de variáveis características quando se resolve um sistema de equações.

No presente trabalho foram mostrados resultados obtidos aplicando-se um esquema TVD diretamente às variáveis primitivas do escoamento isotérmico de um gás ideal. Eles revelaram um comportamento atípico dos esquemas TVD, com o aparecimento de oscilações numéricas. As oscilações não invalidaram os resultados numéricos, considerados melhores que

os obtidos com esquemas de primeira ordem. Mas as oscilações não foram observadas quando o esquema TVD foi aplicado com o uso de variáveis características.

Evitando-se o uso de variáveis características, são construídas discretizações bastante genéricas sem uma grande preocupação inicial com as propriedades do sistema de equações que se pretende resolver: equações são adicionadas ou eliminadas sem muitas alterações no método numérico. Isto pode facilitar muito o desenvolvimento de códigos computacionais de propósito relativamente geral.

Com isto, no entanto, abandona-se aquele que é um dos caminhos mais eficazes (dentro os conhecidos hoje) para a obtenção de discretizações de alta resolução na captura de descontinuidades, que tenham alta ordem de acurácia nas regiões suaves da solução e cujos resultados sejam livres de oscilações numéricas.

AGRADECIMENTOS

Os três primeiros autores gostariam de agradecer o apoio financeiro da CAPES e do CNPq e especialmente as instrutivas palestras com o professor P.R. Zingano do Instituto de Matemática da UFRGS e com os colegas de pós-graduação J.F.V de Vasconcellos, F.T. Boçon, A.L. De Bortoli e M.A.A. Mota.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

De Bortoli, A.L., 1995, "Desenvolvimento e Extensão de uma Metodologia Aerodinâmica para Análises Aeroelásticas", Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC.

Dicks, E.M., 1993, "Higher Order Black-Oil Simulations for Compressible Flow in Porous Media", Ph.D. Thesis, University of Reading, UK.

Gresho, P.M. e Lee, R.L., 1981, "Don't Suppress the Wiggles - They're Telling You Something", *Computers & Fluids*, Vol. 9, pp. 223-253.

Harten, A., 1983, "High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws", *Journal of Computational Physics*, Vol. 49, pp. 357-393.

LeVeque, R.J., 1990, "Numerical Methods for Conservation Laws", Birkhäuser Verlag, Basel, Schweiz.

Lien, F.S. e Leschziner, M.A., 1994, "Upstream Monotonic Interpolation for Scalar Transport with Application to Complex Turbulent Flows", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 19, pp. 527-548.

Maliska, C.R., 1995, "Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional", LTC Editora, Rio de Janeiro, RJ.

Manzini, M., 1998, "Numerical Methods for 1D Compressible Flows, An Interactive Book", Centro di Ricerca, Sviluppo e Studi Superiori in Sardegna, Cagliari, Italia. (http://www.crs4.it/HTML/int_book/NumericalMethods/int_book.html)

Marchi, C.H., 1993, "Esquemas de Alta Ordem para a Solução de Escoamentos de Fluidos sem Dispersão Numérica", *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas*, Vol. 15, pp.231-249.

Marchi, C.H. e Maliska, C.R., 1994, "A Nonorthogonal Finite Volume Method for the Solution of All Speed Flows Using Co-located Variables", *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 26, pp. 293-311.

Menezes, L.A.P., 1996, "Estudo de Esquemas de Alta Resolução em Algoritmos Simultâneos e Seqüenciais", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC.

Mota, M.A.A., 1994, "Simulação Numérica de Reservatórios de Petróleo Utilizando Coordenadas Generalizadas e Esquema de Interpolação TVD", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC.

Roe, P.L., 1981, "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes", *J. Comput. Phys.*, Vol. 43, pp. 357-372.

Roe, P.L., 1986, "Characteristic-Based Schemes for the Euler Equations", *Ann. Rev. Fluid Mech.*, pp. 337-365.

Santos, L.A., 1996, "O Desacoplamento Par-Ímpar do Campo de Pressão e Algoritmos para a Simulação de Escoamentos Incompressíveis por Volumes Finitos", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC.

Silva, A.F.C., 1991, "Um Procedimento em Volumes Finitos Para a Solução de Escoamentos de Qualquer Velocidade", Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC.

Thakur, S. e Shyy, W., 1993, "Development of High-Accuracy Convection Schemes for Sequential Solvers", *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 23, pp. 175-199.

Van Doormaal, J.P., Raithby, G.D. e McDonald, B.H., 1986, "The Segregated Approach to Predicting Viscous Compressible Flows", *ASME 86-GT-196*.

Weiss, J.M. e Smith, A.M., 1995, "Preconditioning Applied to Variable and Constant Density Flows", *AIAA Journal*, Vol. 33, pp. 2050-2057.

Yang, H.Q., 1990, "Characteristics-Based, High-Order Accurate and Nonoscillatory Numerical Method for Hyperbolic Heat Conduction", *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 18, pp. 221-241.

ABSTRACT

In this paper the consequences of applying TVD discretization schemes to nonlinear systems of conservation laws without the use of their characteristic variables are discussed. The discussion is illustrated by results obtained for one-dimensional isothermal flows of an ideal gas with and without the use of their characteristic variables.