

SOLUÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS INVISCIDOS EM  
TUBEIRAS COM VELOCIDADE SUPERSÔNICA NA SAÍDA

C.H. MARCHI, A.F.C. SILVA e C.R. MALISKA

Universidade Federal de Santa Catarina  
Departamento de Engenharia Mecânica  
Caixa postal 476, CEP 88040-900, Florianópolis, SC

RESUMO

Propõe-se um procedimento para aplicar condições de contorno na entrada de tubeias convergente-divergente que considera o caráter elíptico do escoamento nesta região. Com isso, o coeficiente de descarga da tubeira é um resultado do problema. A metodologia numérica empregada é baseada no método dos volumes finitos. Resolve-se o escoamento para três configurações de tubeias cônicas, com e sem raios de arredondamento. Resultados numéricos do coeficiente de descarga, da distribuição de pressão e do número de Mach são comparados com dados experimentais.

INTRODUÇÃO

Uma das etapas importantes no projeto de propulsores é a determinação das características do escoamento no interior das tubeias usadas nestes propulsores. Estes escoamentos são de grande complexidade devido a fatores como a forma geométrica da tubeira, tipo de combustão realizada, características físicas do escoamento, entre outros.

Do ponto de vista físico, o escoamento em uma tubeira apresenta comportamento bastante distinto, apresentando regiões subsônicas, com número de Mach praticamente zero, na entrada da tubeira, regiões transônicas, perto da garganta, e regiões supersônicas na saída da tubeira. Do ponto de vista numérico este comportamento traz dificuldades para a solução do problema, uma vez que as equações diferenciais possuem características matemáticas também distintas, com comportamento predominantemente elíptico na entrada e hiperbólico na saída. Tais escoamentos requerem métodos mais robustos de ataque.

Trabalhos recentes, desenvolvidos por Van Doormaal et al. (1986), Silva & Maliska (1988) e Karki & Patankar (1989), implementaram uma técnica numérica, denominada por Silva & Maliska de CSDV, baseada no método dos volumes finitos, que é capaz de resolver escoamentos em qualquer regime de velocidade, graças a uma linearização especial na equação da conservação da massa.

Avanços mais recentes, apresentados nos trabalhos de Peric et al. (1988) e Marchi et al. (1989), desenvolveram a técnica PVF que utiliza o arranjo co-localizado de variáveis no âmbito dos volumes finitos.

As técnicas CSDV e PVF são usadas neste trabalho para resolver escoamentos, sem separação, em tubeias convergente-divergente com velocidade supersônica na saída. É apresentado um procedimento para aplicar as condições de contorno na entrada da tubeira que considera o caráter elíptico do escoamento nesta região.

Três problemas são resolvidos com os resultados numéricos comparados com soluções de análises mais simplificadas e informações experimentais.

MODELO MATEMÁTICO E MÉTODO NUMÉRICO

O problema físico em consideração é modelado matematicamente pelas equações de Euler. Elas podem ser representadas genericamente, quando escritas num sistema de coordenadas naturais  $(\xi, \eta)$ , por

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho r u \phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho r v \phi) + \hat{p}^\phi = 0 \quad (1)$$

onde  $J$ ,  $t$ ,  $\rho$ ,  $r$ ,  $u$  e  $v$ , e  $\hat{p}^\phi$  são o jacobiano da transformação do sistema de coordenadas cilíndrico  $(z, r)$  para o generalizado  $(\xi, \eta)$ , o tempo, a massa específica, o raio, as componentes contravariantes do vetor velocidade, e um termo fonte apropriado.

Quando  $\phi$  for igual a  $l$ ,  $u$ ,  $v$ , ou  $T$  são recuperadas as equações de conservação da massa, da quantidade de movimento nas direções  $z$  e  $r$ , e da energia.

Admite-se que o fluido se comporte como um gás perfeito. Desta forma, utiliza-se a equação de estado

$$p = \rho RT \quad (2)$$

para o fechamento do sistema de equações.

A metodologia numérica empregada neste trabalho foi estabelecida por Maliska et al. (1990). Ela é baseada no método dos volumes finitos (Patankar, 1980); utiliza um sistema de coordenadas que se ajusta aos contornos do domínio (Thompson et al., 1976) e um arranjo co-localizado de variáveis (Peric et al., 1988; Marchi et al., 1989); permite resolver escoamentos em qualquer regime de velocidade (van Doormaal et al., 1986; Silva & Maliska, 1988); e as Eq. (1) e (2) são resolvidas segregadamente. As equações da quantidade de movimento são usadas para obter as componentes cartesianas do vetor velocidade ( $u$  e  $v$ ), a equação da energia para a temperatura ( $T$ ), a equação de estado para  $\rho$ , e a equação de conservação da massa para a pressão ( $p$ ). O método de acoplamento pressão-velocidade adotado é o SIMPLEC (van Doormaal e Raithby, 1984). As equações diferenciais após discretizadas resultam em sistemas lineares de equações com cinco diagonais não-nulas que são resolvidas pelo método MSI (Schneider e Zedan, 1981). São usados volumes de controle fictícios (Maliska, 1988) para aplicar as condições de contorno.

CONDIÇÕES DE CONTORNO

As condições de contorno empregadas estão representadas na Fig. 1. Na parede da tubeira (contorno N), considera-se a condição de escorregamento para a velocidade e a de isolamento térmico para a temperatura. Como o escoamento em estudo é considerado axisimétrico, admite-se as condições de isolamento térmico e fluxo de massa nulo na fronteira S (linha de simetria). Na saída da tubeira, contorno E, considera-se o escoamento localmente parabólico.

No contorno W, entrada da tubeira, a velocidade  $v$  é prescrita igual a zero. A temperatura e a massa

específica são também uniformes e prescritas em função da pressão total ( $p_t$ ), da temperatura total ( $T_t$ ), e da razão de áreas entre a entrada e a garganta da tubeira, admitindo-se escoamento isoentrópico unidimensional (1-D) até a garganta da tubeira onde prevalecem as condições sônicas. A velocidade  $u$  é também prescrita uniforme na entrada com valor inicialmente calculado pela solução unidimensional (John, 1984).

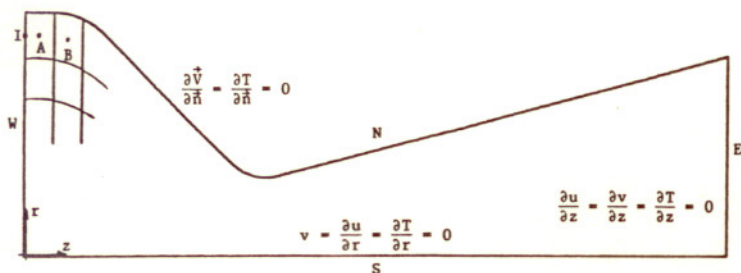


Figura 1. Condições de contorno.

Com este procedimento, o fluxo de massa que entra na tubeira é prescrito. Mas, como se sabe (Back et al., 1965), o fluxo de massa é um resultado do problema e não um dado. Consequentemente, o procedimento que se adota tem os seguintes passos: prescreve-se  $\rho$ ,  $u$  e  $T$ , da solução 1-D; obtém-se a solução do problema; com o campo de pressão obtido, verifica-se o valor da pressão no ponto I (centro da face do primeiro volume de controle no canto NW, ver Fig. 1),  $p_I$ , calculado através da extrapolação linear da pressão dos volumes A e B; compara-se o valor de  $p_I$  com aquele da solução 1-D,  $p_1$ ; se a razão entre  $(p_I - p_1)$  e  $p_t$ , chamada  $\epsilon_p$ , for inferior à tolerância admitida,  $T_{pl}$ , considera-se convergido o problema; em caso contrário, prescreve-se um novo valor para  $u$  no contorno W (mantendo-se  $\rho$  e  $T$  com os mesmos valores da solução 1-D), e repete-se o ciclo anterior.

A solução numérica é considerada convergida, para um determinado conjunto de condições de contorno em W, quando a razão entre a diferença máxima da pressão, no tempo, de um volume de controle e a diferença máxima do campo de pressão for inferior à tolerância  $T_{cp}$ , ou

$$T_{cp} < \frac{(P - P^*)_{\max}}{(P_{\max} - P_{\min})} \quad (3)$$

#### PROCEDIMENTO DE SOLUÇÃO

Os principais passos para se obter a solução numérica do problema são:

- 1-discretização do domínio;
- 2-aplicação das condições de contorno;
- 3-estimativa dos campos de  $\rho$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $p$ ,  $T$  em  $t$  e  $t+\Delta t$ ;
- 4-cálculo dos coeficientes, dos termos fontes  $\hat{p}^u$  e  $\hat{p}^v$ , e solução dos sistemas lineares de  $u$  e  $v$  com o método MSI, obtendo-se  $u^*$  e  $v^*$ ;
- 5-cálculo das velocidades  $U^*$  e  $V^*$ ;
- 6-cálculo dos coeficientes e do termo fonte da equação da conservação da massa ( $p'$ ) e obtenção da sua solução;
- 7-correção da massa específica ( $\rho^*$ ) e velocidade ( $u^*$ ,  $v^*$ ,  $U^*$  e  $V^*$ ) com  $p'$ ;
- 8-cálculo dos coeficientes para  $T$ , do termo fonte  $\hat{p}^T$ , e solução do sistema linear de  $T$ ;
- 9-voltar ao item 3 até que  $T_{cp}$  seja satisfeito;
- 10-cálculo de  $p_I$  e  $\epsilon_p$ ; e
- 11-comparação de  $\epsilon_p$  com a tolerância  $T_{pl}$ ; se  $T_{pl}$  for satisfeito, encerra-se o procedimento. Caso contrário, prescreve-se novo valor para  $u$  no contorno W e retorna-se ao item 2.

#### RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção são descritos os resultados numéricos obtidos para três configurações de tuberias, e suas comparações com resultados experimentais. Na discretização do domínio de cálculo usou-se volumes de controle com  $\Delta z$  constante, e  $\Delta r$  constante para cada coordenada  $z$  da malha.

**Problema 1.** A geometria deste problema é mostrada na Fig. 3 de Back et al. (1965). Esta tubeira possui 185,0 mm de comprimento, raio da garganta de 20,32 mm com razões de contração e expansão de áreas de 9,76 e 6,63. Os semi-ângulos do convergente e do divergente são  $45^\circ$  e  $15^\circ$ , respectivamente. Esta tubeira possui raios de arredondamento nas regiões da entrada e da garganta.

Os valores de  $p_t$ ,  $T_t$ , constante do gás ( $R$ ) e razão de calores específicos ( $\gamma$ ) usados foram  $p_t = 1,725$  MPa,  $T_t = 833,3$  K,  $R = 286,7$  J/(kg-K) e  $\gamma = 1,35$ .

Na Fig. 2 apresenta-se a distribuição da pressão na parede e no centro da tubeira, obtidas numericamente com uma malha de 1440(direção  $z$ ) x 20(direção  $r$ ) volumes, a solução unidimensional (John, 1984), e resultados experimentais (Back et al., 1965) da pressão na parede da tubeira. Enquanto que na Fig. 3 mostra-se a solução numérica para a distribuição do número de Mach. Na Fig. 4 são mostradas linhas de Mach constante e na Fig. 5, isobáricas.

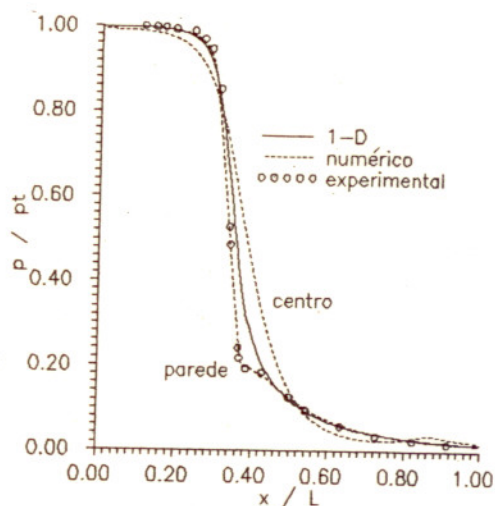


Figura 2. Distribuição da pressão. Problema 1.

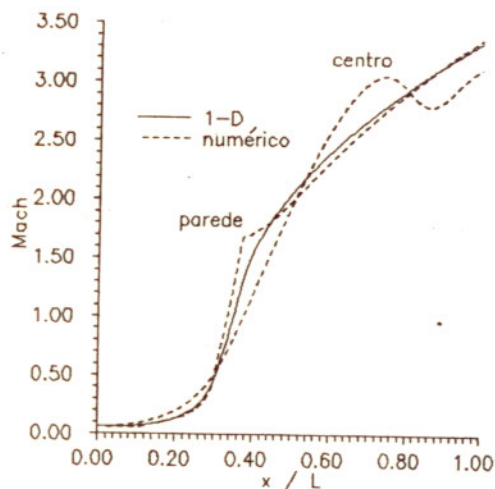


Figura 3. Número de Mach. Problema 1.

Pode-se notar nas Fig. 2 e 3, entre  $x/L = 0,74$  e  $0,86$ , um ligeiro aumento da pressão e queda do número de Mach no centro da tubeira. Isto deve-se à

ocorrência de uma onda de choque oblíqua, também visível nas Fig. 4 e 5, conforme verificação experimental de Back e Cuffel (1966). No centro da tubeira, o número de Mach ( $M$ ) atinge 3.05 em  $x/L = 0.743$  e  $M = 2.80$  em  $x/L = 0.863$ , enquanto que na saída da tubeira ( $x/L = 1.0$ ) tem-se  $M = 3.12$ .

**Problema 2.** A geometria da tubeira para este problema é a mesma do problema anterior mas com 100,3 mm de comprimento, resultando em 2,1 a razão de expansão de áreas. Ou seja, apenas eliminou-se 46% do comprimento da tubeira do problema 1. As propriedades da estagnação e do fluido usados foram:  $p_t = 482,6$  kPa,  $T_t = 300$  K,  $R = 287,0$  J/(kg-K), e  $\gamma = 1.40$ .

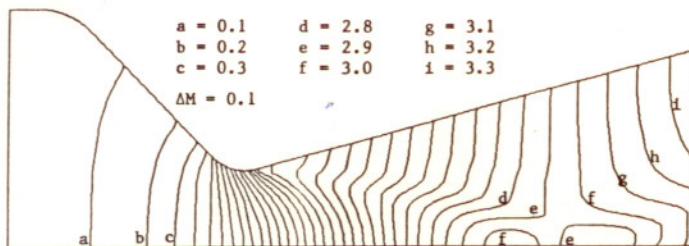


Figura 4. Linhas de Mach constante. Problema 1.

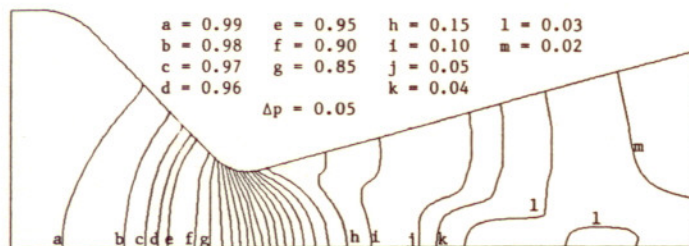


Figura 5. Isobáricas ( $p/p_t$ ). Problema 1.

As Fig. 6 e 7 mostram a distribuição da pressão e do número de Mach na parede e no centro da tubeira, a solução 1-D, e os resultados experimentais de Cuffel et al. (1969). Os resultados numéricos deste problema foram obtidos com uma malha de 800x20 volumes. A distribuição do número de Mach experimental, apresentado na Fig. 7 como sendo na parede, foi medido a 1,8 mm da parede.

Pode-se observar pelos resultados experimentais das Fig. 6 e 7, na região junto à parede, logo após a garganta da tubeira, entre  $x/L = 0.70$  e  $0.75$ , um choque bastante fraco, percebido pelo ligeiro aumento de pressão e queda do número de Mach. Este choque também é captado pelos resultados numéricos mas de uma forma insignificante na escala dos gráficos.

**Problema 3.** A tubeira deste caso possui as mesmas razões de contração e expansão de áreas da tubeira do problema 2, e os mesmos valores para  $p_t$ ,  $T_t$ ,  $R$  e  $\gamma$ . A diferença reside no fato de não serem utilizados raios de arredondamento na entrada e na garganta da tubeira, ou seja, existem dois cantos vivos. Desta forma, os semi-ângulos do convergente e do divergente resultam em  $37,1^\circ$  e  $14,4^\circ$ .

A distribuição da pressão na parede e no centro da tubeira, bem como a solução 1-D, são mostrados na Fig. 8. Os resultados deste problema também foram obtidos com uma malha de 800x20 volumes.

Neste problema, como pode-se notar na Fig. 8, a intensidade do choque que ocorre junto à parede, após a garganta da tubeira, é considerável. O número de Mach atinge 1,73, cai a 1,53 e volta a subir, atingindo

do o valor de 1,91 na saída da tubeira.

**Parâmetros globais.** Na Tabela 1 são listados o coeficiente de descarga experimental ( $c_{de}$ ) e numérico ( $c_{dn}$ ) e a razão entre o empuxo produzido pela tubeira conforme a solução numérica ( $F_n$ ) e aquele da solução 1-D ( $F_1$ ).

O coeficiente de descarga é a razão entre o fluxo de massa experimental ou numérico que escoou pela tubeira e aquele previsto pela solução 1-D. Considerou-se o empuxo  $F_n$  como o resultado da integração do produto do fluxo de massa pela velocidade  $u$  na seção transversal de saída da tubeira. No cálculo do empuxo  $F_1$  incluiu-se o fator de correção  $0.5(1+\cos\alpha)$ , onde  $\alpha$  é o semi-ângulo do divergente da tubeira.

Tabela 1. Parâmetros globais.

| Prob. | $c_{de}$      | $c_{dn}$          | $F_n/F_1$         |
|-------|---------------|-------------------|-------------------|
| 1     | 0.974 a 0.980 | $0.979 \pm 0.001$ | $0.980 \pm 0.001$ |
| 2     | 0.985 (média) | $0.980 \pm 0.002$ | $0.969 \pm 0.002$ |
| 3     | ---           | $0.940 \pm 0.003$ | $0.924 \pm 0.002$ |

Com base em diversas simulações sobre a tubeira do problema 2, visando a obtenção de resultados para o coeficiente de descarga e o empuxo, independentes da malha empregada para discretizar a tubeira, verificou-se que: a) é muito pequena a dependência dos resultados com o número de volumes empregados na direção  $r$  (testes foram feitos com 20, 40 e 50 volumes); b) quando malhas não muito refinadas (como 50 ou 100 volumes) são usadas para discretizar a direção  $z$ , direção principal do escoamento, a dependência do  $c_d$  e  $F$  é cerca de 10 vezes maior que da outra direção; c) determinou-se um fator de correção para eliminar a dependência do  $c_d$  e  $F$  com a malha usada na direção  $z$ , ou seja, para uma malha com infinitos volumes na direção  $z$

$$c_d = c_{dz} + K/(q - 1) \pm 0.1/K \quad (4)$$

onde  $K = c_{d2} - c_{d1}$ ,  $c_{d1}$  e  $c_{d2}$  são os  $c_d$  obtidos com  $x$  e  $qx$  volumes na direção  $z$ ,  $q$  é o fator de refino da malha (quando dobra-se a malha  $q = 2$  e quadruplicando-se,  $q = 4$ ), e o termo  $\pm 0.1/K$  representa um valor bastante conservador para a incerteza deste fator de correção. A Eq. (4) também deve ser empregada para corrigir o empuxo. Neste caso a incerteza deve ser considerada igual a  $0.2/K$ . Por exemplo, para o problema 2, com 50 volumes na direção  $z$  obteve-se  $c_{d1} = 1.02062$  e com 100 volumes,  $c_{d2} = 1.00044$ . Assim,  $q = 100/50 = 2$ , e  $K = 1.00044 - 1.02062 = -0.02018$ . Portanto, a solução final para o coeficiente de descarga do problema 2 é  $c_d = 1.00044 - 0.02018 = 0.980 \pm 0.002$ .

A Eq. (4), apesar de ter sido deduzida com base em resultados do problema 2, é geral para simulações que usem o método numérico adotado neste trabalho.

Verificou-se no problema 2 que o coeficiente de descarga não varia com a pressão total do reservatório, enquanto que o empuxo é uma função linear de  $p_t$ . Estes resultados já eram esperados pois não existem efeitos viscosos (camada-limite) nas equações de Euler. Deve ser mencionado que o valor médio de 0.985 para o coeficiente de descarga, apresentado na Tabela 1, foi obtido de experimentos nos quais havia separação do escoamento.

Todas as simulações foram realizadas no computador Convex C-210 da UFSC. Os códigos computacionais foram implementados em linguagem Fortran e executados usando precisão dupla. O tempo de CPU necessário para obter os resultados dos três problemas aqui apresentados oscilou entre 1 e 2 horas. As tolerâncias usadas foram:  $T_{p1} = 10^{-4}$  e  $T_{cp} = 10^{-5}$ .

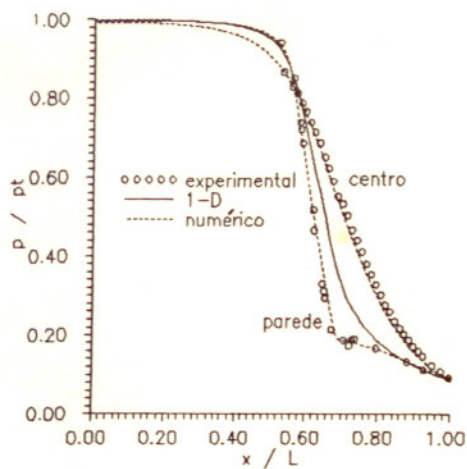


Fig. 6 Pressão. Problema 2.

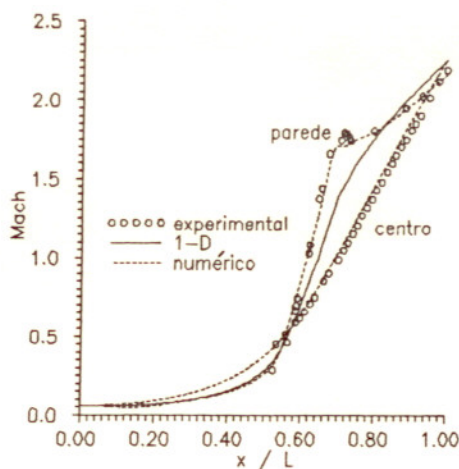


Fig. 7 Número de Mach. Problema 2.

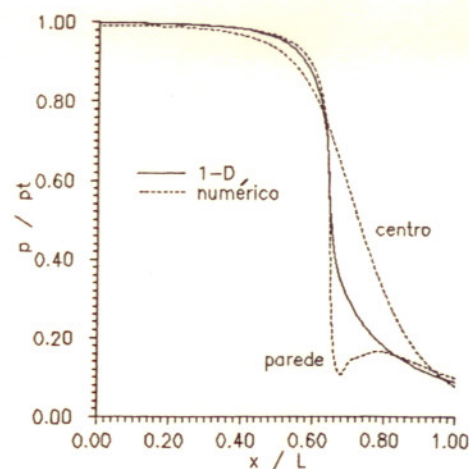


Fig. 8 Pressão. Problema 3.

## CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS FINAIS

A formulação numérica apresentada foi testada na solução de escoamentos em três geometrias de tuberias cônicas. Os resultados numéricos da distribuição de pressão e do número de Mach na parede e no centro da tubeira, e do seu coeficiente de descarga compararam bem com informações experimentais disponíveis.

A maneira de aplicar as condições de contorno, não resolvendo um problema de Riemann na saída, como feito em geral pelos analistas envolvidos com métodos simultâneos de solução, tem se mostrado simples e eficiente.

Atualmente estão sendo investigados os efeitos da viscosidade em escoamentos no interior de tuberias. Para tanto, as equações de Navier-Stokes são resolvidas, considerando-se os efeitos de aquecimento cinético. A mesma metodologia numérica descrita neste trabalho foi usada com sucesso numa tubeira com razões de áreas de 45 na entrada e 50 na saída.

## REFERÊNCIAS

- \*Back, L.H. & Cuffel, R.F., "Detection of Oblique Shocks in a Conical Nozzle with a Circular-Arc Throat", *AIAA Journal*, Vol. 4, pp. 2219-2221, 1966.
- \*Back, L.H., Massier, P.F. and Gier, H.L., "Comparison of Measured and Predicted Flows Through Conical Supersonic Nozzles, with Emphasis on the Transonic Region", *AIAA Journal*, Vol. 3, pp. 1606-1614, 1965.
- \*Cuffel, R.F., Back, L.H. and Massier, P.F., "Transonic Flowfield in a Supersonic Nozzle with Small Throat Radius of Curvature", *AIAA Journal*, Vol. 7, pp. 1364-1366, 1969.
- \*John, J.E.A., *Gas Dynamics*", Allyn and Bacon, Boston, 1984.
- \*Karki, K.C. and Patankar, S.V., "Pressure Based Calculation Procedure for Viscous Flows at All Speeds in Arbitrary Configurations", *AIAA Journal*, Vol. 27, n. 9, pp. 1167-1174, 1989.
- \*Maliska, C.R., "Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional", Florianópolis, UFSC, 1988.
- \*Maliska, C.R., Silva, A.F.C. e Marchi, C.H., "Solução Numérica de Escoamentos Compressíveis Utilizando-se Variáveis Co-Localizadas em Coordenadas Generalizadas", Relatório preparado para o IAE/CTA, Florianópolis, UFSC, 1990.
- \*Marchi, C.H., Maliska, C.R. and Bortoli, A.L., "The Use of Co-Located Variables in the Solution of Supersonic Flows", *Anais do X Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, pp. 157-160, Rio de Janeiro,

Brasil, 1989.

- \*Marchi, C.H., Maliska, C.R. and Silva, A.F.C., "A Boundary-Fitted Numerical Methods for the Solution of Three Dimensional All Speed Flows Using Co-Located Variables", *Anais do III Encontro Nacional de Ciências Térmicas*, pp. 351-356, Itapema, SC, Brasil, 1990.
- \*Patankar, S.V., "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", McGraw-Hill, New York, 1980.
- \*Peric, M., Kessler, R. and Scheuerer, G., "Comparison of Finite-Volume Numerical Methods with Staggered and Colocated Grids", *Computers and Fluids*, Vol.16, n. 4, pp. 389-403, 1988.
- \*Schneider, G.E. & Zedan, M.A., "Modified Strongly Implicit Procedure for the Numerical Solution of Field Problems", *Numerical Heat Transfer*, Vol. 4, pp. 1-19, 1981.
- \*Silva, A.F.C. e Maliska, C.R., "Uma Formulação Segregada em Volumes Finitos para Escoamentos Compressíveis e/ou Incompressíveis em Coordenadas Generalizadas", *Anais do II Encontro Nacional de Ciências Térmicas*, pp. 11-14, Águas de Lindóia, SP, Brasil, 1988.
- \*Thompson, J.F., Thames, F.C. and Mastin, C.W., "Boundary-Fitted Curvilinear Coordinate Systems for Solution of Partial Differential Equations on Fields Containing Any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies", *NASA Langley Research Center*, CR-2729, 1976.
- \*Van Doormaal, J.P. & Raithby, G.D., "Enhancements of the Simple Method for Predicting Incompressible Fluid Flows", *Numerical Heat Transfer*, Vol. 7, pp. 147-163, 1984.
- \*Van Doormaal, J.P., Raithby, G.D. and McDonald, B.H., "The Segregated Approach to Predicting Viscous Compressible Fluid Flows", *A.S.M.E. Paper 86-GT-196*, pp. 1-11, 1986.

## ABSTRACT

This paper presents a numerical procedure for applying the inlet boundary conditions in nozzles, which allows the discharge coefficient of the nozzle to be a parameter resulting from the problem solution. The method differs significantly from the ones used in conventional methods for nozzle flow solutions. The procedure is embodied in an all speed flow methodology which uses co-located variables using finite volume methods. The procedure is applied for the solution of three different nozzle problems. The numerical results obtained are compared with experimental ones.