

SOLUÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS EM GEOMETRIAS
COMPLEXAS UTILIZANDO A TÉCNICA DE MULTIBLOCOS

C.H. MARCHI, C.R. MALISKA e A.F.C. SILVA

Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Engenharia Mecânica
Caixa postal 476, CEP 88040-900, Florianópolis, SC

RESUMO

Uma das limitações do uso de malhas estruturadas é sua aplicação a problemas com geometrias bastante complexas onde o mapeamento do domínio físico não pode ser feito sobre um domínio único. Neste trabalho é proposto uma técnica de multiblocos para sistemas coordenados generalizados empregando blocos cuja interface pode apresentar malhas coincidentes ou não. A validação do método é feita resolvendo-se um escoamento supersônico axissimétrico sobre uma geometria arbitrária.

INTRODUÇÃO

Uma limitação da maioria dos métodos numéricos usados na solução de problemas de mecânica dos fluidos e transferência de calor é a necessidade do uso de malhas estruturadas para discretizar o domínio de cálculo.

Em aplicações na área aeroespacial, por exemplo, a discretização de domínios para resolver escoamentos sobre aviões e foguetes, utilizando malhas estruturadas de bloco único, é praticamente impossível devido a geometria complexa destes veículos, como no caso estudado por Wardlaw et al. (1987). Mesmo quando se consegue discretizar o domínio, há muita dificuldade em refinar a malha nas regiões próximas às paredes, onde ocorrem os maiores gradientes, em geral.

A solução desta limitação seria empregar malhas não estruturadas, como no trabalho de Jameson e Mavriplis (1986). Mas para isso seria necessário dispor de novos métodos de solução de sistemas lineares, já que as matrizes deixam de ser ordenadas, como as matrizes pentadiagonais e heptadiagonais.

Outra solução é empregar vários blocos de malhas estruturadas para discretizar o domínio, o que corresponde a uma não-estruturação discreta da malha. Desta forma consegue-se usar os mesmos códigos computacionais que utilizam malhas estruturadas de bloco único, necessitando-se apenas de um algoritmo de transferência de informações de um bloco para outro. Uma dificuldade que surge ao se usar esta solução é a aplicação de condições de contorno na interface de dois blocos adjacentes que se situa no interior do domínio, como na interface entre os blocos I e II da Fig. 3.

Há duas opções para resolver esta dificuldade. A primeira, menos geral, é estender o domínio de um bloco sobre outro até alcançar uma das fronteiras do domínio total do problema.

A segunda opção é quando não há sobreposição de blocos. Esta é a alternativa adotada neste trabalho, por ser mais geral, com o objetivo de propor um novo esquema de transferência de informações entre blocos, e que é aplicável a escoamentos de qualquer natureza, sejam eles parabólicos, hiperbólicos ou elípticos.

Além de permitir resolver problemas sobre geometrias complexas, a técnica de multiblocos pode reduzir significativamente a quantidade de memória necessária para o armazenamento de informações sem, no entanto, aumentar o tempo de computação. Estas características tornam a técnica de multiblocos extremamente atraente para problemas tridimensionais.

MODELO MATEMÁTICO E MÉTODO NUMÉRICO

O problema físico escolhido para validar a técnica de multiblocos a ser apresentada é o escoamento supersônico invíscido de um fluido compressível sobre um foguete. Este problema é modelado matematicamente pelas equações de Euler, dadas por

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho r U \phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho r V \phi) + \hat{p}^\phi = 0 \quad (1)$$

onde J , t , ρ , r , U e V , e \hat{p}^ϕ são o jacobiano da transformação do sistema de coordenadas cilíndrico (z, r) para o generalizado (ξ, η) , o tempo, a massa específica, o raio, as componentes contravariantes do vetor velocidade, e um termo fonte apropriado.

Quando ϕ for igual a l , u , v , ou T são recuperadas as equações de conservação da massa, da quantidade de movimento nas direções z e r , e da energia.

Admite-se que o fluido se comporte como um gás perfeito. Desta forma, utiliza-se a equação de estado

$$p = \rho R T \quad (2)$$

para o fechamento do sistema de equações.

A metodologia numérica empregada neste trabalho foi estabelecida por Maliska et al. (1990). Ela é baseada no método dos volumes finitos (Patankar, 1980); utiliza um sistema de coordenadas que se ajusta aos contornos do domínio (Thompson et al., 1976) e um arranjo co-localizado de variáveis (Peric et al., 1988; Marchi et al., 1989); permite resolver escoamentos em qualquer regime de velocidade (van Doormaal et al., 1986; Silva & Maliska, 1988); e as Eq. (1) e (2) são resolvidas segregadamente; as equações da quantidade de movimento são usadas para obter as componentes cartesianas do vetor velocidade (u e v), a equação da energia para a temperatura (T), a equação de estado para ρ , e a equação de conservação da massa para a pressão (p). O método de acoplamento pressão-velocidade adotado é o SIMPLEX (van Doormaal e Raithby, 1984). As equações diferenciais após discretizadas resultam em sistemas lineares de equações com cinco diagonais não-nulas que são resolvidas pelo método MSI (Schneider e Zedan, 1981). São usados volumes de controle fictícios (Maliska, 1988) para aplicar as condições de contorno.

TÉCNICA DE MULTIBLOCOS PROPOSTA

Duas situações são analisadas. A primeira é chamada de volumes coincidentes (Fig. 1). Esta situação fica caracterizada quando os comprimentos (ΔL) de cada

volume de controle do bloco I, na interface, são idênticos aos comprimentos ΔL do bloco II (ΔL_I pode ser diferente de ΔL_{II}). A rigor os comprimentos ΔL_I e ΔL_{II} devem ser iguais, tolerando-se uma diferença de até 20%. Desta forma, considera-se que o volume de controle P, além de ser um volume real do bloco II, coincide com o volume fictício de W, e vice-versa. A segunda situação, que é a geral, é denominada de volumes não-coincidentes, ocorrendo quando não há qualquer relação entre as dimensões dos volumes de controle na interface dos blocos, como na Fig. 2.

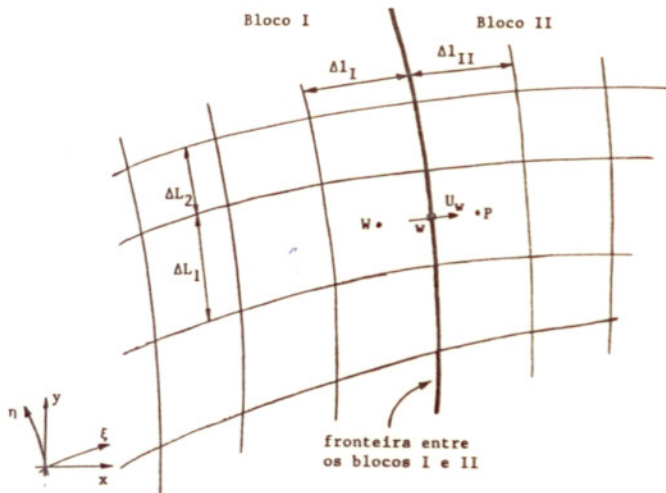


Figura 1. Interface entre blocos coincidentes.

Volumes Coincidentes. Procedimentos de transferência de informações devem ser aplicados em todas as interfaces entre blocos. Esses procedimentos de certa forma são equivalentes à aplicação de condições de contorno. Serão analisados aqui, a título de exemplo, apenas o processo envolvendo a interface entre os blocos I e II da Fig. 3. Nas outras interfaces são aplicados processos semelhantes.

As condições nessa interface têm obviamente importância quando da solução do bloco I ou do bloco II. Associe por hipótese que o bloco I está sendo resolvido. Considere a Fig. 1 que mostra volumes internos ao bloco I adjacentes à fronteira e seus volumes fictícios.

O procedimento de transferência de informações depende fundamentalmente do sentido do escoamento sobre a interface. Considere inicialmente que a velocidade contravariante U na face w (U_w) seja positiva, o que significa que o escoamento está saindo do bloco I e entrando no bloco II. Dois casos são considerados, para U positivo e negativo na interface.

Caso (i), $U_w \geq 0$. Como estão sendo resolvidas as equações de Euler, deve-se lembrar que a avaliação das propriedades nas faces dos volumes de controle é implementada através do esquema "upwind" (Patankar, 1980). Neste caso, em que $U_w \geq 0$, os valores de u , v , T e ρ na interface serão os valores de u , v , T e ρ no ponto W. Logo, a solução do bloco I independe dos valores de u , v , T e ρ no ponto P pertencente ao bloco II. No entanto, como o método numérico utilizado precisa de equações para o cálculo dos valores no volume fictício, assume-se simplesmente que u , v , T e ρ no ponto P são iguais àqueles do ponto W.

Restam ainda duas questões a serem resolvidas. A primeira é relacionada ao fato de a pressão no ponto P, p_p , participar da avaliação do gradiente de pressão para as velocidades u e v armazenadas em W. Para contornar esse problema a pressão p_p é assumida conhecida e igual ao valor obtido na última solução do bloco II. Caso o bloco II não tenha ainda sido resolvido, o valor de p_p assume o valor disponível. A solução sucessiva dos diversos blocos atualiza o valor de p_p até o seu valor correto.

Deve-se ressaltar que até agora, assumindo $U_w \geq 0$, nenhuma condição foi imposta que faça com que

a solução do bloco I difira de uma solução obtida via bloco único. A próxima questão, das duas mencionadas anteriormente, introduz de fato uma diferença que pode ser grande ou pequena em relação à solução de bloco único, e se refere à avaliação da velocidade contravariante U_w sobre a interface.

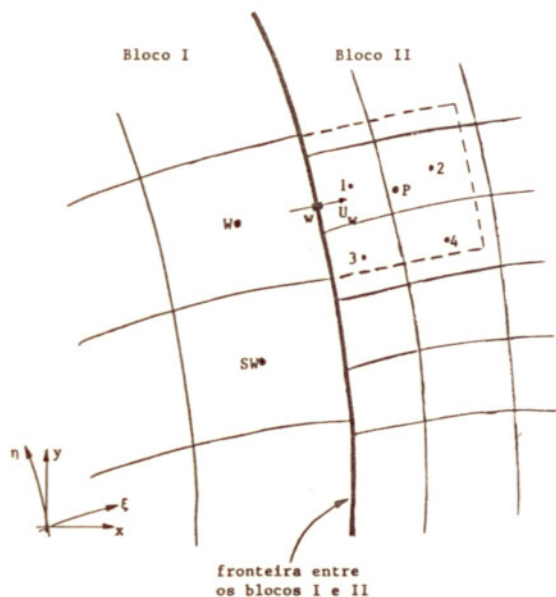


Figura 2. Interface entre blocos não-coincidentes.

Cálculo de U_w para o caso (i). Note que desde o início assumiu-se que esta velocidade fosse conhecida mas nada foi comentado sobre a sua avaliação. Deve-se lembrar que, no arranjo co-localizado de variáveis, empregado neste trabalho, as velocidades contravariantes nas interfaces dos volumes de controle são avaliadas através de processos de média que envolvem as equações de conservação da quantidade de movimento nos volumes adjacentes à interface (Marchi et al., 1990). Embora esse processo fosse ainda possível na solução multibloco, sua implementação computacional apresenta uma série de desvantagens. Assim, optou-se em assumir que na interface as velocidades u e v são iguais (para $U_w \geq 0$) a u_w e v_w e a velocidade U_w pode então ser calculada com as métricas armazenadas na interface. Essa velocidade U_w é atualizada toda vez que u_w e v_w são calculados.

Caso (ii), cálculo das propriedades para $U_w < 0$. Assuma agora que U_w é negativo. Nesse caso, tudo funciona como se a interface fosse uma fronteira de entrada em que todas as variáveis são prescritas. A única diferença é que ao invés de serem prescritas as condições invariáveis de uma corrente-livre (free-stream), prescreve-se as condições disponíveis no bloco II. Assim, as variáveis u , v , T , ρ e p , do volume fictício P do bloco I, assumem os valores obtidos na última iteração do bloco II neste mesmo volume de controle. Note que até aqui novamente nenhuma aproximação foi feita para diferir a solução multibloco da solução via bloco único.

Cálculo de U_w para o caso (ii). A avaliação da velocidade contravariante U_w , no entanto, exige também aproximações. De forma semelhante ao caso em que $U_w \geq 0$, assume-se agora que na interface w , u e v são iguais a u_p e v_p , com a velocidade U_w calculada com as métricas sobre a interface.

Embora tenha-se analisado apenas a interface entre os blocos I e II da Fig. 3 e assumido que o bloco I estava sendo resolvido, os raciocínios expostos são facilmente extrapolados para todas as outras interfaces e na solução de todos os blocos.

Volumes Não-Coincidentes. Quando os volumes de controle na interface entre os blocos não possuem as mesmas dimensões (Fig. 2), a dificuldade que surge é determinar quais os quatro volumes que circundam o

ponto P, centro do volume fictício (linhas tracejadas) de W.

Para o caso (i), $U_w \geq 0$, o procedimento de transferência de informações é o mesmo aplicado aos volumes coincidentes. A única diferença é que agora a pressão em P é obtida através de interpolação bidimensional das pressões conhecidas nos volumes 1, 2, 3 e 4, conforme a Fig. 2.

Além da pressão, no caso (ii), $U_w < 0$, os valores de u , v , T e ρ no ponto P também são obtidos via interpolação bidimensional dos respectivos valores nos volumes 1, 2, 3 e 4. A partir daí, o procedimento é idêntico ao caso dos volumes coincidentes.

Deve-se mencionar que nem sempre os quatro pontos que envolvem um volume fictício se situarão no mesmo bloco. Por exemplo, quando for necessário calcular os valores das variáveis no centro do volume fictício do volume de controle 3, da Fig. 2, devem ser usados os pontos W e SW do bloco I, e os pontos 1 e 3 do bloco II.

Simplificação do Procedimento para Volumes Não-Coincidentes. Considere um problema tridimensional onde a técnica de multiblocos tenha que ser empregada e que os volumes na interface dos blocos sejam não-coincidentes. O tempo de computação que seria gasto para determinar os oito volumes de controle que envolvem o ponto P e realizar interpolações tridimensionais seria bastante considerável, tomando-se por base resultados bidimensionais que serão apresentados.

Desta forma, propõe-se a seguinte simplificação: os valores de u , v , T , ρ e p , do volume fictício P da Fig. 2, são considerados iguais àqueles do volume de controle do bloco II cujo centro esteja mais próximo do ponto W. No caso da Fig. 2, esse volume é o denotado pelo número 1. Observe que esta aproximação é menos forte quanto mais refinada for a malha.

Algoritmo de Solução. O algoritmo da formulação numérica empregada é o mesmo descrito em Marchi et al. (1990), possuindo apenas uma alteração. O avanço do processo iterativo no tempo é feito realizando-se um determinado número de iterações por bloco, aqui chamado de NIB. Assim, se $NIB = 5$, cinco iterações são feitas no bloco I, passa-se ao bloco II onde cinco iterações são realizadas, depois cinco no bloco III e outras cinco no bloco IV. Então, retorna-se ao bloco I onde mais cinco iterações são feitas, e assim por diante até que um critério de convergência seja satisfeito por todos os blocos.

RESULTADOS

A validação da técnica de multiblocos proposta neste trabalho é feita resolvendo-se um escoamento supersônico a Mach 3.75 sobre a configuração do foguete mostrado na Fig. 3 (contorno S). Apesar desta geometria ser simples, ela foi escolhida para permitir que os resultados numéricos obtidos com a técnica de multiblocos fossem comparados com a solução de bloco único.

As condições de contorno são de velocidade e temperatura prescritas no contorno N; simetria no contorno W; condição de escorregamento e parede adiabática no contorno S; e condição de escoamento localmente parabólico no contorno E.

Volumes Coincidentes. O caso de volumes coincidentes na interface dos blocos foi resolvido utilizando-se a malha mostrada na Fig. 3. Quatro blocos foram usados para discretizar o domínio.

A solução de bloco único foi obtida com 40.4 segundos de tempo de CPU. A malha utilizada é a mesma da Fig. 3, ou seja, 60×24 volumes, igual à soma dos quatro blocos.

Como era esperado, o tempo de CPU necessário para atingir a solução, quando o domínio é discretizado com os quatro blocos, depende do número de iterações (NIB) que se faz em cada bloco. Para $NIB=1$, o

tempo de CPU foi de 45.0 segundos, $NIB=5$ foi de 40.4 segundos, e para $NIB=10$, 73.0 segundos. O menor tempo de CPU foi atingido para $NIB=4$, 39.4 segundos, usando-se um computador IBM 3090. Note que este tempo é menor que aquele da solução de bloco único.

Curvas do coeficiente de pressão (C_p) sobre o foguete, obtidas usando-se um e quatro blocos, são mostradas na Fig. 4. São incluídos também resultados experimentais obtidos por Moraes e Neto (1988).

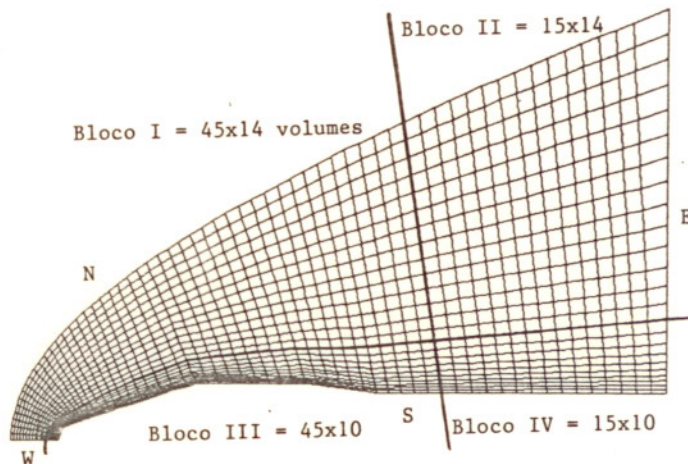


Figura 3. Discretização com volumes coincidentes.

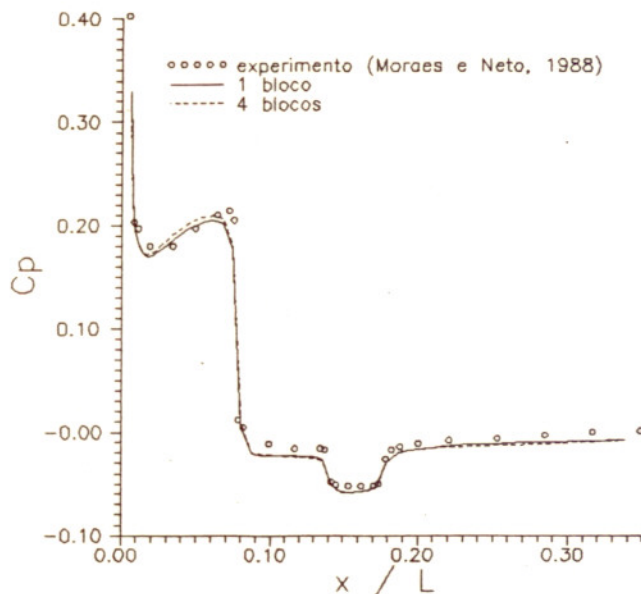


Figura 4. Solução para volumes coincidentes.

Volumes Não-Coincidentes. Para simular um caso de volumes que não coincidem na interface dos blocos, empregou-se uma malha de 50×17 volumes no bloco III da Fig. 3, resultando na malha mostrada na Fig. 5. Desta forma, os volumes na interface dos blocos I e III, e III e IV passam a ser não-coincidentes.

O menor tempo de CPU necessário para atingir a solução foi de 155.8 segundos para $NIB=5$. Utilizando-se o procedimento simplificado para volumes não-coincidentes, este tempo caiu para 72.0 segundos, com $NIB=6$.

Além da solução obtida com o procedimento simplificado ter sido atingida com apenas 45% do tempo de CPU que foi necessário para o procedimento exato, as duas soluções são coincidentes, como pode ser visto na Fig. 6, onde a solução de bloco único também é representada.

COMENTÁRIOS FINAIS

Verificou-se que o número de iterações por bloco (NIB) deve ser pequeno (2 a 6) para se obter a solução de um problema com o menor tempo de CPU. Se o valor de

NIB for muito alto, o tempo de CPU aumenta consideravelmente, podendo, inclusive, o processo iterativo divergir.

A simplificação introduzida na técnica de multiblocos para volumes não-coincidentes se mostrou bastante adequada, tanto em termos da solução do problema quanto na redução do tempo de CPU.

Estes comentários são baseados em diversas simulações realizadas por Maliska et al. (1991) e outras não publicadas.

Atualmente, a técnica de multiblocos para volumes não-coincidentes, com a simplificação proposta, está sendo implementada na metodologia tridimensional de Marchi et al. (1990).

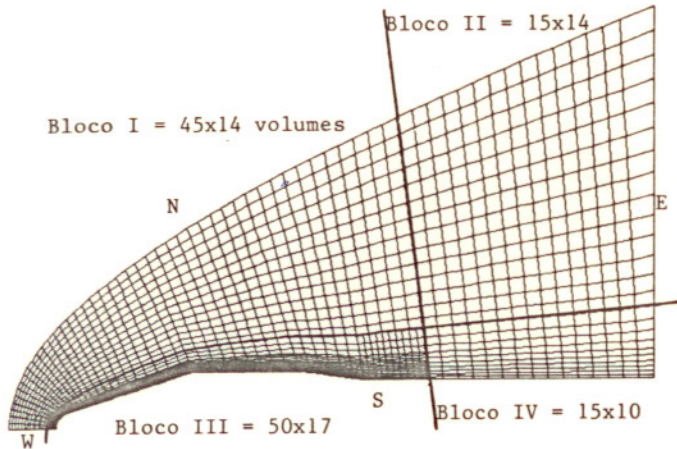


Figura 5. Discretização com volumes não-coincidentes.

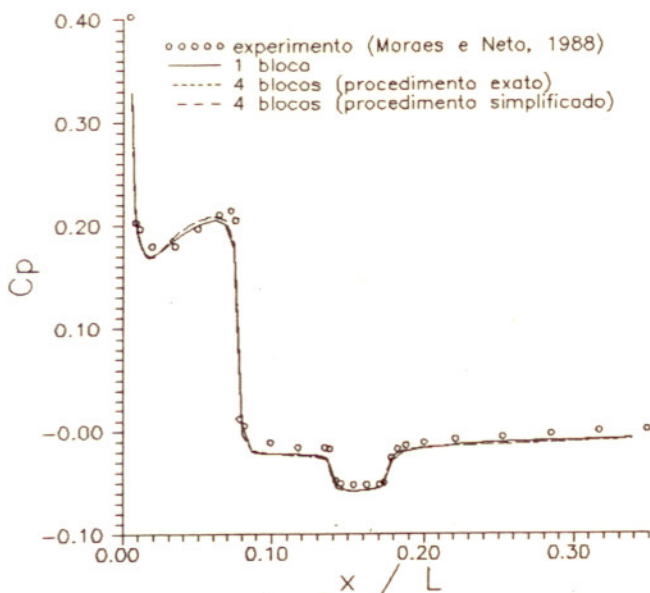


Figura 6. Solução para volumes não-coincidentes.

AGRADECIMENTOS

Ao Instituto de Aeronáutica e Espaço (IAE), do Centro Técnico Aeroespacial (CTA), pelo financiamento parcial deste trabalho.

Aos bolsistas de iniciação científica Widomar P. Carpes Jr. e Emílio R. Hulse pela cooperação prestada.

Ao Dr. Paulo Moraes Jr., do IAE/CTA, pelo fornecimento dos resultados experimentais apresentados neste trabalho.

REFERÊNCIAS

*Jameson, A. and Mavriplis, D.J., "Finite Volume Solution of the Two-Dimensional Euler Equations on a Regular Triangular Mesh", *AIAA Journal*, Vol. 24, pp. 611-618, 1986.

- *Maliska, C.R., "Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional", Florianópolis, UFSC, 1988.
- *Maliska, C.R., Silva, A.F.C. e Marchi, C.H., "Solução Numérica de Escoamentos Compressíveis Utilizando-se Variáveis Co-Localizadas em Coordenadas Generalizadas", Relatório preparado para o IAE/CTA, Florianópolis, UFSC, 1990.
- *Maliska, C.R., Silva, A.F.C., Marchi, C.R., e Carpes, W.P., Jr., "Técnica de Solução Multibloco para Problemas Axissimétricos", Relatório preparado para o IAE/CTA, Florianópolis, UFSC, 1991.
- *Marchi, C.H., Maliska, C.R. and Bortoli, A.L., "The Use of Co-Located Variables in the Solution of Supersonic Flows", *Anais do X Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, pp. 157-160, Rio de Janeiro, Brasil, 1989.
- *Marchi, C.H., Maliska, C.R. and Silva, A.F.C., "A Boundary-Fitted Numerical Methods for the Solution of Three Dimensional All Speed Flows Using Co-Located Variables", *Anais do III Encontro Nacional de Ciências Térmicas*, pp. 351-356, Itapema, SC, Brasil, 1990.
- *Moraes, P., Jr., e Neto, A.A., "Resultados de Testes em Túnel de Vento para o Foguete VLS", Instituto de Aeronáutica e Espaço, IAE/CTA, São José dos Campos, 1988. (Não publicado).
- *Patankar, S.V., "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", McGraw-Hill, New York, 1980.
- *Peric, M., Kessler, R. and Scheuerer, G., "Comparison of Finite-Volume Numerical Methods with Staggered and Colocated Grids", *Computers and Fluids*, Vol.16, n. 4, pp. 389-403, 1988.
- *Schneider, G.E. & Zedan, M.A., "Modified Strongly Implicit Procedure for the Numerical Solution of Field Problems", *Numerical Heat Transfer*, Vol. 4, pp. 1-19, 1981.
- *Silva, A.F.C. & Maliska, C.R., "Uma Formulação Segregada em Volumes Finitos para Escoamentos Compressíveis e/ou Incompressíveis em Coordenadas Generalizadas", *Anais do II Encontro Nacional de Ciências Térmicas*, pp. 11-14, Águas de Lindóia, SP, Brasil, 1988.
- *Thompson, J.F., Thames, F.C. and Mastin, C.W., "Boundary-Fitted Curvilinear Coordinate Systems for Solution of Partial Differential Equations on Fields Containing Any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies", *NASA Langley Research Center*, CR-2729, 1976.
- *Van Doormaal, J.P. & Raithby, G.D., "Enhancements of the Simple Method for Predicting Incompressible Fluid Flows", *Numerical Heat Transfer*, Vol. 7, pp. 147-163, 1984.
- *Van Doormaal, J.P., Raithby, G.D. and McDonald, B.H., "The Segregated Approach to Predicting Viscous Compressible Fluid Flows", *A.S.M.E. Paper 86-GT-196*, pp. 1-11, 1986.
- *Wardlaw, A.B., Jr., Priolo, F.J. and Solomon, J.M., "Multiple-Zone Strategy for Supersonic Missiles", *J. Spacecraft*, Vol. 24, pp. 377-384, 1987.

ABSTRACT

The most severe limiting factor of using structured grids is its application for very complex domains, where the mapping of the physical domain can not be done onto a single rectangular domain. In these cases the multiblock technique is attractive because the single block technique can be applied several times until the whole domain is swept. In this work it is proposed a multiblock technique in a generalized framework employing blocks whose interfaces can have coincident or non-coincident grids. In addition the treatment given for the calculation of the velocity at the interfaces allows the solution of elliptic, parabolic and hyperbolic problems. The method is validated solving a supersonic flow over a complex geometry.