

SOLUÇÃO NUMÉRICA DO ESCOAMENTO SUPERSÔNICO INVÍSCIDO EM  
BOCAIS DIVERGENTES OPERANDO NO VÁCUO

Carlos Henrique Marchi

Laboratório de Atividades Espaciais (LAE)  
Cx. P., 1648 - 88001 - Florianópolis - SC

INTRODUÇÃO

Utilizando uma metodologia numérica que é capaz de resolver escoamentos bidimensionais planos ou axissimétricos, em regime permanente, sobre geometrias arbitrarias para qualquer regime de velocidade, são efetuadas experimentações numéricas para o escoamento supersônico invíscido em bocais divergentes que operam no vácuo.

É resolvido o escoamento para bocais com razões de expansão ( $\epsilon$ ) de 3.51, 7.64 e 13.5, para número de Mach (M) 1.0 na entrada do bocal, e verifica-se o efeito do comprimento do bocal sobre o escoamento para M = 2.0 e  $\epsilon = 3.51$ .

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O problema em análise é o escoamento supersônico, bidimensional axissimétrico, invíscido, em regime permanente, de ar, no interior de bocais divergentes que operam no vácuo.

Na Fig. 1 é apresentada a geometria do bocal, em estudo, e suas condições de contorno.

As equações governantes do problema são as equações de conservação da massa, da quant. de movimento nas direções z e r e da energia, representadas por

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u\phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v\phi) = S\phi \quad (1)$$

onde  $\phi$  e  $S^\phi$  são mostrados na Tab. 1. A última eq. governante do problema é a eq. de estado dos gases perfeitos, dada por

$$p = \rho R T \quad (2)$$

formando um sistema de cinco equações a cinco incógnitas ( $\rho$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $p$ ,  $T$ ).

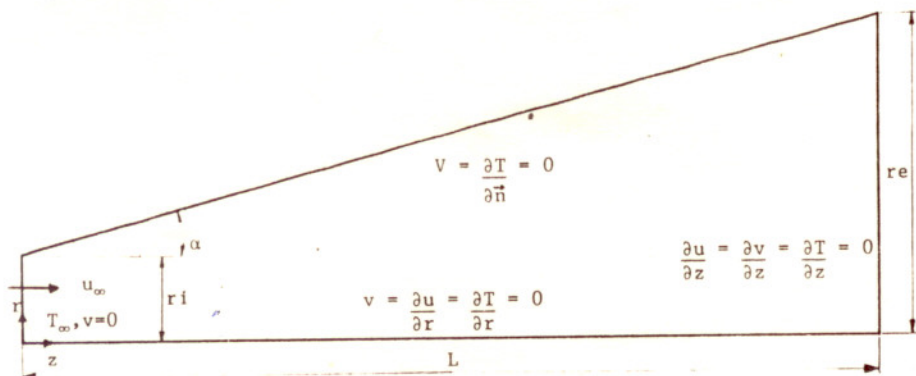


Figura 1. Geometria e condições de contorno do problema.

Tabela 1. Expressões para  $\phi$  e  $S^\phi$ .

Equação	$\phi$	$S^\phi$
massa	1	0
QM(z)	u	$-\frac{\partial p}{\partial z}$
QM(r)	v	$-\frac{\partial p}{\partial r}$
energia	T	$[\frac{\partial p}{\partial t} + v(\rho \vec{v}) - \rho \vec{v} \vec{v}] / c_p$

O valor das propriedades do ar utilizadas foram

$$T_{\infty} = 300 \text{ K}$$

$$\gamma = 1.4$$

$$\rho_{\infty} = 1.225 \text{ kg/m}^3$$

$$R_{ar} = 287 \text{ J/kg-K}$$

$$p_{\infty} = 105 \text{ kPa}$$

A velocidade do som para estas condições resulta em 347 m/s.

### METODOLOGIA PARA SOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA

A metodologia numérica utilizada na solução do problema é aquela desenvolvida por Silva e Maliska em [1].

As eq. governantes do problema (1) são transformadas para um sistema de coordenadas ( $\xi-\eta$ ) que se ajusta às fronteiras do domínio de cálculo, permitindo resolver problemas sobre geometrias irregulares.

As eq. são discretizadas utilizando a técnica dos volumes finitos [2] e o esquema WUDS [3] para avaliação de  $\phi$  nas faces dos volumes de controle.

Na metodologia numérica empregada [1], as eq. de conservação da quant. de movimento em  $z$  e  $r$  são utilizadas para resolver  $u$  e  $v$ ; a eq. da energia para resolver  $T$ ; a eq. de estado para  $\rho$ ; e a eq. de conservação da massa para  $p$ . Os quatro sistemas lineares que resultam da discretização das eq. são resolvidos segregadamente [4] através do método MSI [5].

O tempo é mantido nas eq. para servir como parâmetro de controle do processo iterativo de solução das equações.

A solução do problema foi considerada convergida para  $\epsilon_p \leq 10^{-5}$  onde  $\epsilon_p$  é a razão entre a máxima variação de pressão de um ponto, entre dois instantes de tempo, pelo gradiente máximo do campo de pressão no instante de tempo atual.

A malha utilizada foi de 50x20 volumes, gerada algebricamente, com  $\Delta z$  constante e,  $\Delta r$  constante ao longo de linhas de  $z$  constante.

### RESULTADOS

As Fig. 2 a 4 apresentam as linhas de Mach constante para  $M_{\infty} = 1.0$  e razões de expansão de 3.51, 7.64 e 13.5. A razão de expansão é definida como a razão entre a área de saída e a de entrada do bocal. O tempo de CPU para estes três casos foi de 272, 350 e 416 segundos,

respectivamente, num computador IBM 4381.

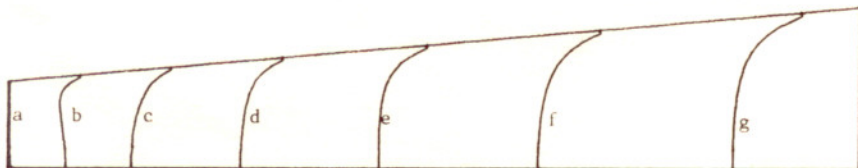


Figura 2. Linhas de Mach constante para  $M_\infty = 1.0$ ,  $\alpha = 5^\circ$ ,  
 $\epsilon = 3.51$ ,  $r_i = 0.05$  m e  $L = 0.5$  m (caso 1).

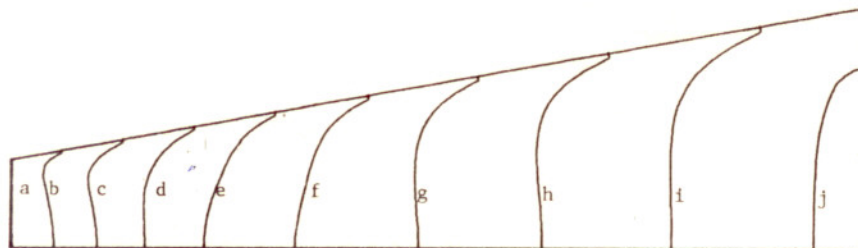


Figura 3. Linhas de Mach constante para  $M_\infty = 1.0$ ,  $\alpha = 10^\circ$ ,  
 $\epsilon = 7.64$ ,  $r_i = 0.05$  m e  $L = 0.5$  m (caso 2).

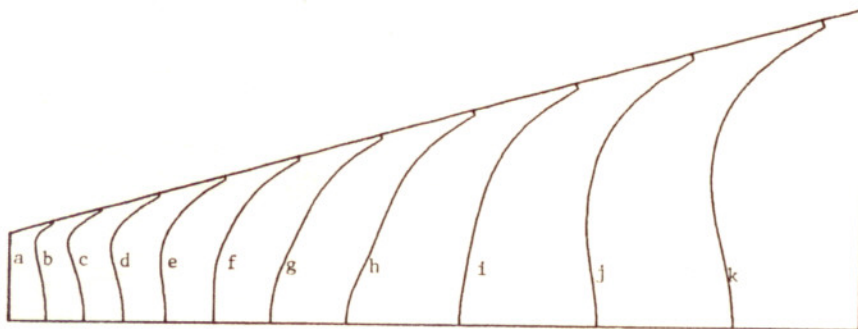


Figura 4. Linhas de Mach constante para  $M_\infty = 1.0$ ,  $\alpha = 15^\circ$ ,  
 $\epsilon = 13.5$ ,  $r_i = 0.05$  m e  $L = 0.5$  m (caso 3).

Valores das linhas de Mach constante para as Fig. 2 a 4:

a = 1.01	d = 1.75	g = 2.5	j = 3.25
b = 1.25	e = 2.0	h = 2.75	k = 3.5
c = 1.5	f = 2.25	i = 3.0	

Nas Fig. 5 a 7 são mostradas as isobáricas do escoamento para  $M_\infty = 2.0$  e comprimento do bocal de 0.25, 0.5 e 1.0 m, com razão de expansão de 3.51. Nestes três casos o tempo de CPU para obter a solução foi de 184, 249 e 267 segundos, respectivamente.

Os valores limites de  $u$ ,  $v$ ,  $p$ ,  $T$ ,  $\rho$  e  $M$  na seção de saída do bocal, para os seis casos apresentados nas figuras, são dados na Tab. 2.

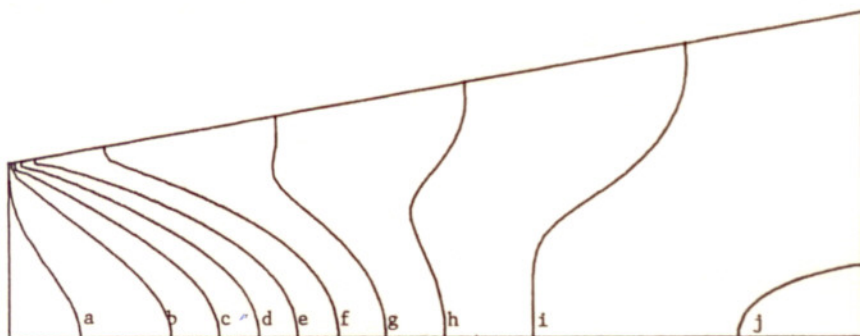


Figura 5. Isobáricas ( $p/p_\infty$ ) para  $M_\infty = 2.0$ ,  $\alpha = 9.9^\circ$ ,  $\epsilon = 3.51$ ,  $r_i = 0.05$  m e  $L = 0.25$  m (caso 4).



Figura 6. Isobáricas ( $p/p_\infty$ ) para  $M_\infty = 2.0$ ,  $\alpha = 5.0^\circ$ ,  $\epsilon = 3.51$ ,  $r_i = 0.05$  m e  $L = 0.5$  m (caso 5).



Figura 7. Isobáricas ( $p/p_\infty$ ) para  $M_\infty = 2.0$ ,  $\alpha = 2.5^\circ$ ,  $\epsilon = 3.51$ ,  $r_i = 0.05$  m e  $L = 1.0$  m (caso 6).

Valores das isobáricas para as Fig. 5 a 7:

$a = 0.99$	$d = 0.7$	$g = 0.4$	$j = 0.1$
$b = 0.9$	$e = 0.6$	$h = 0.3$	
$c = 0.8$	$f = 0.5$	$i = 0.2$	

Tabela 2. Resultados na seção de saída do bocal.

caso	1	2	3	4	5	6
$u_{\min}$	628	668	677	817	839	848
$u_{\max}$	644	699	721	881	861	860
$v_{\min}$	2.84	6.62	9.62	3.77	4.39	1.87
$v_{\max}$	55.0	118	181	143	73.4	37.1
$p_{\min}$	8.14	2.60	1.11	8.90	13.5	13.9
$p_{\max}$	8.27	2.67	1.38	15.3	14.1	13.9
$T_{\min}$	150	112	93	152	170	171
$T_{\max}$	154	118	98	188	179	175
$\rho_{\min}$	0.185	0.077	0.040	0.205	0.277	0.278
$\rho_{\max}$	0.192	0.083	0.051	0.285	0.286	0.285
$M_{\min}$	2.54	3.12	3.54	3.02	3.14	3.21
$M_{\max}$	2.62	3.29	3.74	3.57	3.30	3.28

Além dos seis casos apresentados, resolvemos o escoamento em bocais divergentes para Mach 1.50 cujos resultados são aqui omitidos.

### CONCLUSÃO

A metodologia numérica empregada não apresentou qualquer problema para obter a solução convergida em todos os casos abordados.

A análise das experimentações numéricas apresentadas neste artigo e outras omitidas permitem-nos chegar às seguintes conclusões.

Razões de expansão idênticas produzem menores gradientes de pressão quanto maior for o número de Mach na entrada do bocal, para comprimentos iguais.

Diminuindo o comprimento do bocal, mas mantendo a mesma razão de expansão e, conseqüentemente, aumentando-se o ângulo divergente, aumenta-se o Mach e diminui-se a pressão na saída do bocal, para um mesmo número de Mach na entrada dele.

## REFERÊNCIAS

- [1] SILVA, A.F.C. & MALISKA, C.R. "Uma Formulação Segregada em Volumes Finitos para escoamentos Compressíveis e/ou Incompressíveis em Coordenadas Generalizadas". II Encontro Nacional de Ciências Térmicas, ENCIT, Aguás de Lindóia, dez. 1988.
  
- [2] PATANKAR, S.V. "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow". New York, McGraw-Hill, 1980.
  
- [3] RAITHBY, G.D. & TORRANCE, K.E. "Upstream-Weighted Differencing Schemes and Their Application to Elliptic Problems Involving Fluid Flow". Computer and Fluids, v.2, 1967. p.12-26.
  
- [4] VAN DOORMAAL, J.P. "Numerical Methods for the Solution of Incompressible and Compressible Fluid Flows". Ph.D. Thesis, University of Waterloo, Ontario, Canada, 1985.
  
- [5] VAN DOORMAAL, J.P. & RAITHBY, G.D. "Enhancements of the Simple Method for Predicting Incompressible Fluid Flows". Numerical Heat Transfer, v.7, 1984. p.147-63.